

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Верхняя оценка количества рёбер в двудольном почти планарном графе

Д. В. КАРПОВ¹

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: dvk0@yandex.ru

Аннотация.

Пусть G — двудольный граф без петель и кратных рёбер на $v \geq 4$ вершинах, который можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более, чем одно другое. В работе доказывается, что при чётном $v \neq 6$ в таком графе не более чем $3v - 8$ рёбер, а при нечетном v и $v = 6$ — не более чем $3v - 9$ рёбер. Для всех $v \geq 4$ построены примеры графов, для которых эти оценки достигаются.

В конце работы мы обсудим вопрос об изображении на плоскости полных двудольных графов не более чем с одним пересечением на каждом ребре.

¹Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ № 11-01-00760-а.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS
of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, В. Н. Кублановская
Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич
Н. Ю. нецеваев, С. И. Репин, Г. А. Серёгин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко.

1 Введение

Мы будем рассматривать графы без петель и кратных рёбер. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер — через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G . Минимальную степень вершины графа G , как обычно, обозначим через $\delta(G)$, а максимальную — через $\Delta(G)$.

Определение 1. 1) Пусть k — неотрицательное целое число. Назовём граф k -*почти планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, что каждое ребро пересекает не более, чем k других.

При $k = 1$ мы будем называть такой граф просто *почти планарным*.

2) Через $\text{cr}(G)$ обозначим минимальное количество пар пересекающихся рёбер в изображении графа G на плоскости.

Нетрудно понять, что 0-почти планарный граф — это просто планарный граф. Как всегда, когда говорится об изображении графа на плоскости, мы считаем, что вершины изображаются как точки, а рёбра — как “хорошие” несамопересекающиеся кривые, не проходящие через вершины, отличные от концов ребра. Для каждого цикла мы полагаем, что он делит плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю.

Широко известный классический факт говорит нам, что в планарном графе на v вершинах не более, чем $3v - 6$ ребер, а в двудольном планарном графе на v вершинах — не более, чем $2v - 4$ ребер. Обе оценки — точные для любого $v \geq 3$.

В работе [1] доказано, что $e(G) \leq (k+3)(v(G)-2)$ при $1 \leq k \leq 4$. При подстановке в этот результат $k = 0$ получается классический результат для планарных графов. В той же работе для $k = 1$ и $k = 2$ построены бесконечные серии примеров графов, на которых достигается равенство. Показано, что для $k = 1$ оценка достигается для всех $v \geq 12$. При $k = 2$ оценка точна для достаточно больших $v \equiv 2 \pmod{3}$. Там же показано, что при $k > 0$ для k -почти планарного графа G выполняется неравенство $e(G) \leq 4.108\sqrt{k} \cdot v(G)$.

Итак, для почти планарных графов мы имеем неравенство $e(G) \leq 4v(G) - 8$. В нашей работе мы найдём точную верхнюю оценку на количество рёбер в двудольном почти планарном графе для любого количества вершин $v \geq 4$.

Теорема 1. Для каждого $v \geq 4$ обозначим через $\beta(v)$ наибольшее возможное количество рёбер в двудольном почти планарном графе на v вершинах. Тогда $\beta(v) = 3v - 8$, если v четно и не равно 6 и $\beta(v) = 3v - 9$, если v нечетно или равно 6.

Отметим, что есть немало статей, в которых рассматриваются экстремальные задачи на графах, связанные с различными условиями на пересечения рёбер в их плоском изображении (см., например, [2]-[6]).

2 Доказательство оценки

Определение 2. Назовём двудольный почти планарный граф G максимальным, если при добавлении любого ребра графа утрачивает хотя бы одно из свойств планарности или двудольности.

Почти планарный граф можно по-разному изобразить на плоскости. Чтобы избежать путаницы, мы будем обозначать изображение графа G другим шрифтом: \mathcal{G} . Мы определим требования к изображению почти планарного графа. Начнем с трёх условий.

- 1°. Каждое ребро пересекает не более, чем одно другое.
- 2°. Никакие два пересекающиеся ребра не имеют общего конца.
- 3°. Любые два пересекающиеся ребра пересекаются ровно в одной точке.

Замечание 1. Очевидно, существует изображение почти планарного графа, удовлетворяющее условию 1°. Если изображение почти планарного графа не удовлетворяет условию 2° или 3°, то нетрудно перерисовать граф так, чтобы они выполнились.

Рассмотрим изображение \mathcal{G} двудольного почти планарного графа G и покрасим все вершины правильным образом в цвета 1 и 2. Пересекающиеся рёбра, очевидно, разбиваются на пары. Никакое другое ребро не может пересекать ни одно ребро из пары пересекающихся.

Рассмотрим любую пару пересекающихся ребер u_1u_2 и v_1v_2 , пусть вершины u_1 и v_1 имеют цвет 1, а u_2 и v_2 — цвет 2, пусть A — точка пересечения ребер. Не умаляя общности можно считать, что ребра расположены таким образом, что части ребер Au_1, Av_1, Au_2, Av_2 следуют друг за другом по часовой стрелке (см. рис. 1а). Покрасим эти части ребер в тот же цвет, что и их концы (Au_1 и Av_1 — в цвет 1, Au_2 и Av_2 — в цвет 2).

Тогда для части Au_1 справа (по часовой стрелке) расположена часть того же цвета Av_1 , а слева — часть другого цвета Av_2 . То же самое верно и для Au_2 (часть того же цвета расположена справа, а часть другого цвета расположена слева). Для частей Av_1 и Av_2 выполняется обратная закономерность: часть того же цвета располагается слева (против часовой стрелки). Это обстоятельство позволяет различать ребра u_1u_2 и v_1v_2 .

Определение 3. Назовём ребро u_1u_2 *правым*, а ребро v_1v_2 — *левым*. Аналогично поступим для любой пары пересекающихся рёбер.

Будем называть ребро изображения \mathcal{G} *простым*, если оно не пересекается с другими ребрами. Обозначим количество простых рёбер изображения \mathcal{G} через $p(\mathcal{G})$. Количество пар пересекающихся рёбер изображения G обозначим через $t(\mathcal{G})$.

Таким образом, все рёбра изображения нашего графа разбиты на три множества — простые, правые и левые, причем количество левых рёбер равно количеству правых рёбер. Очевидно, $t(\mathcal{G}) = \frac{e(G) - p(\mathcal{G})}{2}$.

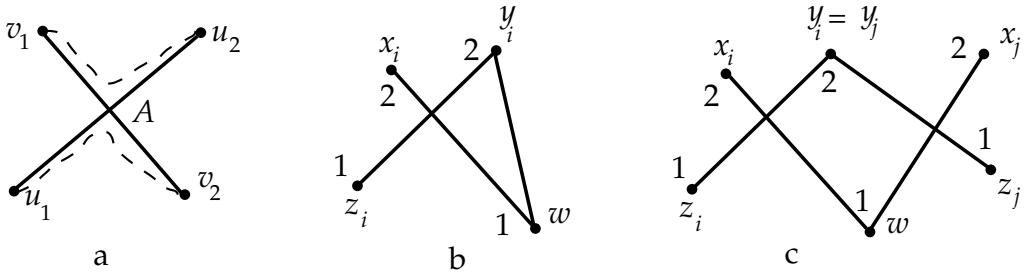


Рис. 1: Левые и правые рёбра.

Вернёмся к описанной выше паре пересекающихся рёбер u_1u_2 и v_1v_2 и сформулируем еще одно условие, выполнение которого мы потребуем от изображения максимального графа.

4° Для каждой пары пересекающихся рёбер u_1u_2 и v_1v_2 рёбра u_1v_2 и u_2v_1 принадлежат $E(G)$ и являются простыми в изображении \mathcal{G} .

Объясним, почему можно добиться выполнения последнего условия. Ребро u_1v_2 можно провести “почти” по пути u_1Av_2 , а ребро u_2v_1 — “почти” по пути u_2Av_1 . (см. рис. 1a). Из максимальности графа G следует, что $u_1v_2, u_2v_1 \in E(G)$. Если какое-то из этих рёбер — не простое в \mathcal{G} , перерисуем его как сказано выше. В результате уменьшится число пересечений, значит, после нескольких таких операций условие 4° выполнится.

Определение 4. Назовём изображение максимального почти планарного двудольного графа G *правильным*, если выполняются условия $1^\circ - 4^\circ$.

В следующих леммах и определениях пусть G — максимальный почти планарный двудольный граф, а \mathcal{G} — его правильное изображение.

Лемма 1. Для любой вершины w изображения \mathcal{G} и количество инцидентных w правых ребер, и количество инцидентных w левых ребер не превосходит количества инцидентных w простых ребер.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму для правых рёбер. Пусть wx_1, \dots, wx_k — все правые ребра \mathcal{G} с концом в w . Пусть ребро wx_i пересекается в графе G с левым ребром y_iz_i , причем вершина y_i — того же цвета, что и x_i . По условию 4° тогда wy_i — простое ребро \mathcal{G} (см. рис. 1б). Если для каких-то i и j вершины y_i и y_j совпадают, то тогда оба ребра wx_i и wx_j не могут быть правыми в своих парах пересекающихся ребер (см. рис. 1с). Следовательно, wy_1, \dots, wy_k — различные простые ребра. \square

Рассмотрим граф G' , полученный из G удалением всех левых ребер. Очевидно, G' — двудольный плоский граф,

$$v(G') = v(G) \quad \text{и} \quad e(G') = e(G) - t(\mathcal{G}).$$

Из классической оценки для двудольного плоского графа мы имеем

$$e(G') \leq 2v(G') - 4 = 2v(G) - 4. \quad (1)$$

Аналогичный плоский граф можно было бы построить и удалив все правые рёбра вместо левых.

Лемма 2. Пусть $\delta(G) \geq 4$. Тогда выполняются следующие утверждения.

- 1) Каждой вершине графа G' инцидентно хотя бы два простых ребра и $\delta(G') \geq 2$.
- 2) Граф G' связен, граница каждой грани плоского графа G' содержит простой цикл, в котором хотя бы 4 ребра.

Доказательство. 1) По лемме 1 вершине $w \in V(G)$ инцидентно не менее, чем $\lceil \frac{d_G(w)}{3} \rceil \geq 2$ простых ребра.

2) На рисунке 1а видно, что любое левое ребро можно обойти по пути из двух простых рёбер и одного правого, а значит, граф G' связан. Из $\delta(G') \geq 2$ следует, что в графе G' есть цикл, а значит, в границу каждой грани входит простой цикл. Из двудольности графа следует, что в каждом цикле не менее четырёх рёбер. \square

Лемма 3. Пусть G — двудольный почти планарный граф с $v(G) \geq 4$. Тогда $e(G) \leq 3v(G) - 8$.

Доказательство. Мы будем вести доказательство индукцией по количеству вершин. Базу для графа на четырёх вершинах легко проверить.

Если в нашем графе G есть вершина степени не более 3, то удалим ее и все выходящие из нее ребра, в результате получится двудольный граф G_1 с $v(G_1) = v(G) - 1$, который очевидно также является почти планарным. По индукционному предположению мы имеем

$$e(G_1) \leq 3v(G_1) - 8 = 3v(G) - 8 - 3,$$

откуда очевидно следует доказываемое утверждение для графа G .

Далее мы рассмотрим случай, когда степени всех вершин графа G не менее четырех. Теперь индукция нам не понадобится. Достаточно доказать утверждение только для максимального двудольного почти планарного графа G . Рассмотрим правильное изображение \mathcal{G} такого графа и граф G' . Из леммы 2 следует, что любой вершине $v \in V(G)$ инцидентно хотя бы два простых ребра. Отсюда немедленно следует, что $p(\mathcal{G}) \geq v(G)$, так как у каждого ребра два конца.

По неравенству (1) мы имеем $2v(G) - 4 \geq e(G') = t(\mathcal{G}) + p(\mathcal{G})$, откуда следует

$$t(\mathcal{G}) \leq v(G) - 4 \quad \text{и} \quad e(G') = t(\mathcal{G}) + e(G') \leq 3v(G) - 8,$$

что и требовалось доказать. □

Перейдём к доказательству теоремы.

1. Пусть G — двудольный почти планарный граф, для которого $e(G) = 3v(G) - 8$, $v(G) \geq 8$ и $\delta(G) \geq 4$. Из леммы 3 понятно, что этот граф максимальен. Рассмотрим его правильное изображение \mathcal{G} и плоский граф G' , состоящий из простых и правых рёбер графа G .

Мы выясним, что граф G' имеет весьма жестко определённую структуру. Из $e(G) = 3v(G) - 8$ следует, что в неравенстве (1) должно достигаться равенство, а это означает, что в графе G' граница любой грани D должна содержать ровно 4 ребра. По лемме 2 эта граница содержит цикл с хотя бы 4 рёбрами, а значит, граница D — простой цикл длины 4. Отметим, что отсюда следует двусвязность графа G' .

Рассмотрим удалённые левые рёбра графа G . Каждое левое ребро f пересекает ровно одно правое ребро, которое делит f на два полуребра.

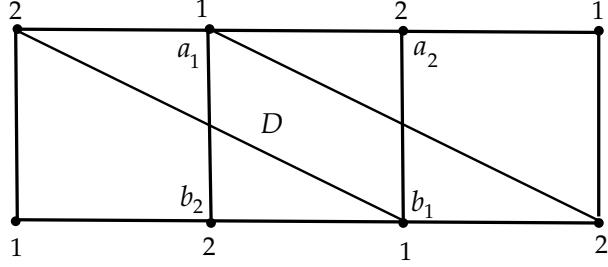


Рис. 2: Левые рёбра на гранях-четырёхугольниках графа G' .

Эти полурёбра лежат в двух соседних гранях G' , а граница между этими гранями содержит как раз упомянутое выше правое ребро, которое пересекает f .

Пусть $D = a_1 a_2 b_1 b_2$ — грань графа G' , причем вершины a_1 и b_1 имеют цвет 1, а вершины a_2 и b_2 имеют цвет 2. Предположим, что эта грань содержит полуребро f_1 (часть левого ребра f) с концом a_1 .

Полуребро f_1 имеет конец на одном из рёбер e грани D . Так как e и f не имеют общего конца и f — левое ребро, то несложно понять, что $e = a_2 b_1$ (см. рис. 2).

Таким образом, мы установили, что *из каждой вершины грани D выходит не более одного полуребра, лежащего в грани D , причем конец этого полуребра лежит на строго определенном ребре грани D . Полуребро с началом в a_1 кончается на ребре $a_2 b_1$, полуребро с началом a_2 кончается на ребре $b_1 a_2$, полуребро с началом b_1 кончается на ребре $b_2 a_1$, а полуребро с началом b_2 кончается на ребре $a_1 a_2$.*

Итак, полуребро f_1 , лежащее в грани D , начинается в a_1 и кончается на ребре $a_2 b_1$. Так как два разных полуребра, лежащих в грани D , не могут пересекать друг друга, то в грани D может лежать еще лишь одно полуребро — с началом в b_1 и концом на $a_1 a_2$ (см. рисунок 2).

2. Поскольку $3v(G) - 8 = e(G) = t(\mathcal{G}) + e(G') = t(\mathcal{G}) + 2v(G) - 4$, то $t(\mathcal{G}) = v(G) - 4$.

Пусть в графе G' ровно k_2 вершин степени 2 и k_3 вершин степени 3. Так как

$$e(G') = 2v(G') - 4 \leq \frac{4v(G') - 2k_2 - k_3}{2}, \quad (2)$$

то $2k_2 + k_3 \geq 8$, причем равенство может достигаться только в случае, когда $\Delta(G') \leq 4$ (так как каждая вершина степени более 4 в графе G' при $e(G') = 2v(G') - 4$ и $\delta(G') \geq 2$ увеличивает $k_3 + 2k_2$).

Рассмотрим произвольную вершину $w \in V(G)$. Если $d_{G'}(w) = 2$, то из леммы 2 следует, что вершине w инцидентно два простых ребра

и $0 = \frac{d_{G'}(w)-2}{2}$ правых ребер. Если $d_{G'}(w) = 3$, то вершине w инцидентно не более $1 = \frac{d_{G'}(w)-1}{2}$ правых рёбер. В остальных случаях в силу леммы 1 вершине w инцидентно не более $\frac{d_{G'}(w)}{2}$ правых рёбер. Учитывая, что каждое правое ребро имеет два конца, напишем оценку на $t(\mathcal{G})$:

$$v(G) - 4 = t(\mathcal{G}) \leq \frac{\sum_{x \in V(G)} d_{G'}(x) - k_3 - 2k_2}{4} = \frac{(4v(G) - 8) - k_3 - 2k_2}{4}. \quad (3)$$

Вместе с неравенством (2) это дает нам $2k_2 + k_3 = 8$. Как показано выше, отсюда в частности следует $\Delta(G') \leq 4$.

Таким образом, мы имеем дело с двусвязным плоским графом G' , в котором все грани — четырёхугольники и $\Delta(G') \leq 4$.

Более того, в неравенстве (3) должно достигаться равенство, а следовательно, в графе G' каждой вершине степени 3 инцидентно ровно одно правое ребро и два простых ребра, а каждой вершине степени 4 инцидентно по два простых и правых ребра.

3. Построим вспомогательный граф F , вершинами которого являются грани графа G' и две вершины смежны, когда границы соответствующих им граней имеют общее правое ребро. По доказанному выше, степень каждой вершины в графе F не более двух, то есть, этот граф есть объединение нескольких цепей и циклов. Количество рёбер в графе F равно количеству правых рёбер, то есть, $t(\mathcal{G}) = v(G) - 4$. Количество вершин графа F равно количеству граней графа G' , которое по формуле Эйлера есть $v(G) - 2$. Таким образом, граф F состоит из двух путей и, возможно, нескольких циклов.

Проведём разрезы по всем простым рёбрам графа G' . В результате каждое простое ребро графа G' распалось на два ребра, образованных после разреза — назовём их половинками.

Мы считаем две половинки простого ребра за два разных ребра, даже если они попали в одну полоску или кольцо!

После разрезов общую границу будут иметь только пары граней, имеющие общее правое ребро. Таким образом, плоскость распадается на части, причем в одну часть попадут как раз грани графа G' , входящие в одну компоненту связности графа F .

Определение 5. Части, соответствующие компонентам-путям графа F , мы назовём *полосками*, а части, соответствующие компонентам-циклам графа F — *кольцами*.

Границым ребром полоски или кольца мы назовем любую половинку простого рёбра, входящую в эту полоску или кольцо.

Границей полоски или кольца мы назовём компоненту связности подграфа из его граничных рёбер.

Каждая полоска представляет из себя плоский граф, изоморфный клетчатому прямоугольнику со стороной 1. Четыре вершины полоски, соответствующие углам прямоугольника, мы назовём *углами*, а содержащие углы грани полоски — *крайними гранями*.

Все полоски и кольца, полученные из графа G' , мы назовём *частями графа G'* .

Замечание 2. 1) Из доказанного выше следует, что среди частей графа G' ровно две полоски.

2) Действуя в обратном порядке, можно склеить граф G' из его частей — полосок и колец.

3) У полоски из n граней — одна граница, представляющая собой цикл длины $2n + 2$. У кольца из n граней две границы, каждая из них — цикл длины n .

Лемма 4. *Вершина $x \in V(G')$ является углом полоски ровно $4 - d_{G'}(x)$ раз.*

Доказательство. Рассмотрим любую грань D , в которую входит вершина x . Нетрудно понять, что оба инцидентных вершине x ребра грани D являются простыми тогда и только тогда, когда D — крайняя грань полоски, а x — угол этой полоски. В любом другом случае одно из инцидентных вершине x рёбер грани D является простым, а другое — правым.

Посчитаем, сколько раз является вершина x углом полоски и обозначим это количество через $u(x)$. По доказанному в части 2, вершина x степени $d_{G'}(x) = 3$ инцидентна двум простым рёбрам и одному правому, а значит, $u(x) = 1$. Оба ребра, инцидентные вершине x степени $d_{G'}(x) = 2$ — простые, а значит, $u(x) = 2$. Наконец, вершине степени 4 инцидентны два простых и два правых ребра, которые, очевидно, чередуются в плоском изображении при обходе по часовой стрелке. Следовательно, при $d_{G'}(x) = 4$ мы имеем $u(x) = 0$. \square

4. Вернёмся к исследованию графа G' .

Посчитаем для каждой вершины $x \in V(G')$, сколько раз она входит в каждую границу (с учетом кратности вхождений) и обозначим сумму полученных чисел через $m(x)$.

Каждое вхождение вершины x в границу части графа G' в качестве угла полоски, очевидно, даёт одну содержащую x грань. Каждое вхождение вершины x в границу части графа G' не в качестве угла полоски даёт две соседние грани этой части, содержащие вершину x . Очевидно,

разные вхождения x в границы частей дают разные грани, поэтому из леммы 4 немедленно следует, что $m(x) = 2$.

Пусть Z_1, \dots, Z_k — все границы частей графа G' . На каждом простом ребре e напишем пару номеров границ, содержащих половинки e (возможно, эти номера одинаковы). Заметим, что на двух смежных простых рёбрах пары должны совпадать — иначе для общей вершины x этих двух рёбер мы получим $m(x) \geq 3$. Значит, для каждой границы пары чисел на всех рёбрах этой границы одинаковы.

Пусть на рёбрах границы Z_i написаны пары чисел (i, j) . При $i \neq j$ на рёбрах Z_j написаны такие же пары чисел и эти две границы совпадают.

Построим вспомогательный граф L , вершины которого — части (то есть, полоски и кольца) графа G' , а две вершины смежны, если соответствующие им части имеют общую границу. Из доказанного выше следует, что две части, имеющие общее граничное ребро, имеют общую границу. Тогда из связности графа G' следует, что граф L связан. Степень каждого кольца в этом графе не более 2, а степень каждой полоски — не более 1, следовательно, граф L представляет из себя цепь, висячие вершины которой — две полоски графа G' , а остальные вершины (если они есть) — кольца.

Отсюда в частности следует, что на каждом простом ребре написана пара различных номеров границ — иначе граф L будет несвязен. Таким образом, две половинки каждого простого ребра принадлежат границам разных частей, то есть, рёбра каждой границы образуют в графе G' простой цикл.

Две границы одного кольца в таком случае, очевидно, имеют одинаковое количество вершин, и две совпадающие границы — тоже. Поэтому все границы имеют одинаковое число вершин.

Пусть в одной из полосок k граней. Тогда длина ее границы равна $2k + 2$, столько же вершин будет во всех границах. Так как каждая вершина графа G' входит ровно в две границы, мы получаем, что общее число вершин графа G' равно $(2k + 2) \cdot e(L)$, то есть, четно.

Замечание 3. Более того, в случае, когда среди частей графа G' есть хотя бы одно кольцо, нетрудно понять, что плоский граф G' изоморфен клетчатому параллелепипеду $1 \times n \times m$. В случае, когда граф G' склеен только из двух полосок, его структура может быть более сложной.

5. Пусть H — двудольный почти планарный граф с нечетным числом вершин $v(H) \geq 5$ и $e(H) = 3v(H) - 8$.

Из леммы 3 понятно, что граф H максимален, рассмотрим его правильное изображение \mathcal{H} . Из доказанного выше понятно, что H имеет вершину степени не более 3. Несколько раз удаляя из графа вершину степени не

более 3, мы получим из графа H двудольный почти планарный граф G либо с $v(G) = 4$, либо с $\delta(G) \geq 4$. В обоих случаях $e(G) \leq 3v(G) - 8$, поэтому нетрудно понять, что каждый раз мы должны были удалять вершину степени ровно 3 и $e(G) = 3v(G) - 8$. Остается доказать, что мы не можем добавить к такому графу G вершину a степени 3 так, чтобы получился двудольный почти планарный граф.

В случае $v(G) = 4$ понятно, что граф G — цикл из 4 вершин, для которого это утверждение очевидно. Пусть $v(G) > 4$. Понятно, что граф G максимален. Удалив соответствующие вершины из правильного изображения \mathcal{H} , мы получим правильное изображение \mathcal{G} графа G .

Мы доказали, что $v(G)$ четно и исследовали структуру таких графов. Вернемся к рассмотренному выше подграфу G' из правых и простых рёбер, все его грани — четырёхугольники, пусть на некоторой грани D лежит добавляемая вершина a . Вершину a нужно соединить рёбрами с тремя одноцветными вершинами графа G . Мы разберём три случая.

a. D не является крайней гранью полоски.

Тогда не умаляя общности можно считать, что из двух вершин цвета 2 этой грани в графе G выходят левые рёбра, пересекающие два противоположных ребра границы D . Эти рёбра делят D на три части. Если a расположена в одной из двух треугольных частей (см. рисунок 3а, пусть это будет правая часть), то вершина a может быть соединена только с вершинами соседней с D грани D' , так как выходящие из a рёбра могут пересекать только общее ребро D и D' без нарушения почти планарности. Но в грани D' есть только две одноцветные вершины.

Если же a лежит в центральной части грани D (см. рисунок 3а), то ее можно соединить ребрами только с двумя вершинами цвета 2 грани D .

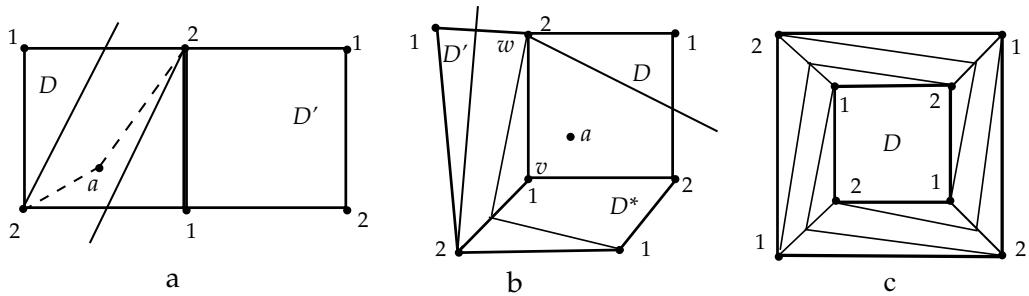


Рис. 3: Расположения вершины a .

b. D — крайняя грань полоски, с углами w и v , состоящей более чем из одной клетки.

В таком случае грань D пересекает ровно одно левое ребро графа G (см. рисунок 3b). Это ребро выходит из одного из углов полоски (пусть из w , цвета 2). Покажем, что второй угол v в этом случае имеет степень $d_{G'}(v) = 3$.

Мы знаем, что $2 \leq d_{G'}(v) \leq 3$. Пусть $d_{G'}(v) = 2$. Тогда из v в графе G выходит два простых ребра и два левых, как доказано в лемме 1. Значит, в каждой из двух содержащих v граней графа G' должно быть полуребро, выходящее из v , но в грани D такого полуребра нет, противоречие.

Итак, $d_{G'}(v) = 3$. Рассмотрим две отличные от D грани, содержащие v — пусть это D' (содержащая w) и D^* , см. рисунок 3b. Как следует из леммы 4, эти две грани принадлежат одной части, следовательно, их общее ребро является правым и его пересекает левое ребро. Такое ребро можно провести единственным образом — оно должно соединять вершину w грани D' с вершиной цвета 1 грани D^* (это вершина грани D^* , противоположная v , см. рисунок 3b).

Случай, когда вершина a лежит в треугольной части грани D , аналогичен разобранному выше. Пусть a лежит в части грани, содержащей углы v и w . Так как инцидентные a рёбра не могут пересекать левое ребро, проходящее в гранях D' и D^* , нетрудно заметить, что вершину a нельзя соединить с тремя вершинами одного цвета.

c. D — единственная грань полоски, состоящей из одной клетки.

В таком случае граф G' склеен из двух одноклеточных полосок и, возможно, нескольких колец. Если кольцо нет, то $v(G) = 4$, а этот случай очевиден. Значит, среди частей графа G' есть хотя бы одно кольцо, причём из четырёх граней. В этом случае именно такое кольцо приклеено к одноклеточной полоске (см. рисунок 3c). Тогда легко видеть, что расположенная на грани D вершина a не может быть смежна более чем с двумя одноцветными вершинами.

6. Напомним, что для каждого $v \geq 4$ через $\beta(v)$ мы обозначаем максимально возможное количество рёбер в двудольном почти планарном графе на v вершинах. Мы доказали, что $\beta(v) \leq 3v - 8$ для всех $v \geq 4$ и $\beta(v) \leq 3v - 9$ для нечетных v .

Остается лишь отметить, что $\beta(6) \leq 9 = 3 \cdot 6 - 9$, так как максимальное количество рёбер в двудольном графе на 6 вершинах достигается для полного двудольного графа $K_{3,3}$ и равно 6.

Теперь доказательство оценки полностью завершено.

3 Экстремальные примеры

Вершинами графа G'_k мы будем считать узлы сетки клетчатого параллелепипеда $1 \times 1 \times k$, а рёбрами — единичные отрезки клетчатой сетки. Нетрудно понять, что любой клетчатый параллелепипед $1 \times 1 \times k$ можно склеить из двух полосок (нижней и верхней граней $1 \times k$) и одного кольца, опоясывающего остальные $2k + 2$ грани. В полосках и кольцах легко провести левые рёбра, при этом, кратных рёбер, очевидно, не появится и в результате получится двудольный почти планарный граф G_k с $v(G_k) = 4k + 4$ и $e(G_k) = 3 \cdot v(G_k) - 8$. Тем самым, мы показали, что $\beta(v) = 3v - 8$ для $v = 4\ell \geq 8$.

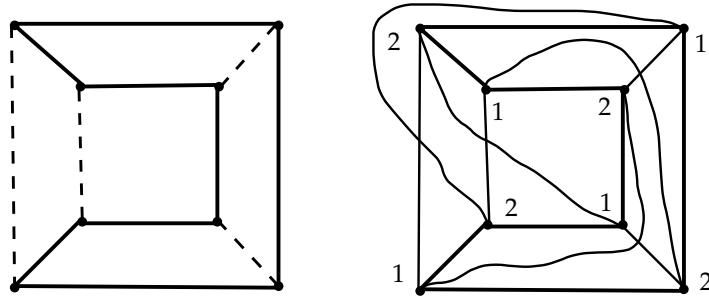


Рис. 4: Куб $1 \times 1 \times k$ и почти планарный граф $K_{4,4}$.

Отметим, что клетчатый параллелепипед $1 \times 1 \times k$ можно склеить из двух полосок. Пример для куба $1 \times 1 \times k$ изображен на рисунке 4: слева изображена склейка куба из двух полосок, а справа — получающийся почти планарный двудольный граф. Отметим, что это полный двудольный граф $K_{4,4}$.

Кроме того, из двух полосок $1 \times k$ и n колец из $2k + 2$ клеток несложно склеить параллелепипед $1 \times k \times n$. На основе этого параллелепипеда можно построить двудольный почти планарный граф $G_{k,n}$ с $v(G_{k,n}) = 2(k+1)(n+1)$ и $e(G_{k,n}) = 3v(G_{k,n}) - 8$. Однако, в таком виде не представляются четные числа вида $2p$ (где p — простое), поэтому нам придется научиться склеивать более сложные по структуре примеры из двух полосок.

Мы построим планарный граф H'_k на $4k + 2$ вершинах ($k \geq 1$), который склеен из двух полосок $1 \times (2k + 2)$. Пример для $k = 1$ изображен на рисунке 5а. В изображенном графе H'_1 две вершины степени 2 разных цветов (пусть это вершина x цвета 2 и вершина y цвета 1), 4 вершины степени 3 (по две каждого из цветов), остальные вершины имеют степень 4. Сплошными линиями показаны простые рёбра графа H'_1 , а

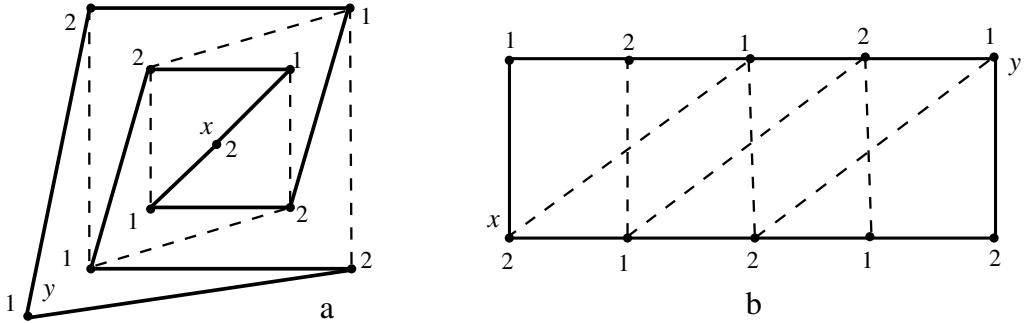


Рис. 5: Склейка почти планарного графа из двух полосок.

пунктирными — правые. Легко видеть, как этот пример склеен из двух полосок 1×4 . Несложно аналогично достроить этот пример до графа H'_k на $4k + 2$ вершинах, добавив еще $k - 1$ квадрат.

На рисунке 5b показано, как в каждой из полосок проводятся левые рёбра. Важно, что в обеих полосках, из которых склеен граф G' , два угла каждой полоски, из которых выходят левые рёбра — это вершины x и y . При $k \geq 1$ легко проверить, что кратных рёбер не образуется.

Замечание 4. 1) Отметим, что при $k = 0$ в обеих полосках было бы проведено ребро xy , которое имело бы кратность 2. Провести в полоске вместо левых рёбер правые рёбра (то есть, другие рёбра, пересекающие перегородки полоски) не получится. В этом случае попытка соединить угол полоски, имеющий степень 3 в графе H'_k с соответствующей при таком способе вершиной приведет к образованию кратного ребра — стороны верхнего или нижнего квадрата.

2) Также отметим, что существуют достаточно много других планарных графов, которые можно склеить из двух полосок одинаковой длины.

Проведем левые рёбра в графе H'_k и получим граф H_k с $v(H_k) = 4k + 2$ и $e(H_k) = 3v(H_k) - 8$. Таким образом, мы доказали, что $\beta(v) = 3v - 8$ для $v = 4k + 2$, где k — натуральное число.

Теперь разберёмся с малыми значениями v . Для $v = 4$, и $v = 5$ экстремальные примеры — это полные двудольные графы $K_{2,2}$ и $K_{2,3}$. Эти графы являются планарными (а значит, и почти планарными). Отметим, что $e(K_{2,2}) = 4 = 3 \cdot 4 - 8$ и $e(K_{2,3}) = 6 = 3 \cdot 5 - 9$. Тем самым, мы доказали, что $\beta(4) = 4$ и $\beta(5) = 6$.

Для $v = 6$ и $v = 7$ экстремальные примеры — это полные двудольные графы $K_{3,3}$ и $K_{3,4}$. Они являются почти планарными, так как таковым является граф $K_{4,4}$, изображённый на рисунке 4 справа. Отметим, что $e(K_{3,3}) = 9 = 3 \cdot 6 - 9$ и $e(K_{3,4}) = 12 = 3 \cdot 7 - 9$. Тем самым, мы

доказали, что $\beta(6) = 9$ и $\beta(7) = 12$.

Осталось доказать, что $\beta(v) = 3v - 9$ для нечетных $v \geq 9$. Для этого достаточно на одной из граней построенных выше графов на $v - 1$ вершине с $3(v - 1) - 8$ рёбрами (отметим, что $v - 1$ — четное число, не меньшее 8) добавить вершину a и соединить ее с двумя вершинами одинакового цвета, как на рисунке 3а.

Теперь теорема полностью доказана.

4 О полных двудольных графах

В заключении вспомним о полных двудольных графах, и выясним, какие из них являются почти планарными. Графы $K_{1,n}$ и $K_{2,n}$ являются планарными и, следовательно, почти планарными. Мы установили выше, что графы $K_{3,3}$, $K_{3,4}$ и $K_{4,4}$ являются почти планарными.

Из рисунка 6 ясно, что граф $K_{3,6}$ (а значит, и его подграф $K_{3,5}$) является почти планарным. Так как $e(K_{4,5}) = 20 > 3 \cdot 9 - 9$, то граф $K_{4,5}$ не является почти планарным.

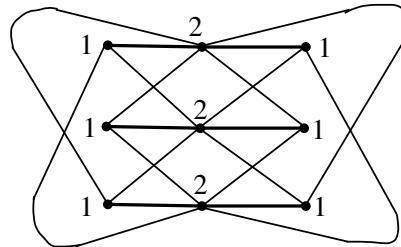


Рис. 6: Граф $K_{3,6}$.

Покажем, что граф $K_{3,7}$ не является почти планарным, то есть, его нельзя изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более, чем одно другое.

Сначала отметим, что $\text{cr}(K_{3,3}) \geq 1$. Теперь рассмотрим граф $K_{3,5}$. В любом изоморфном $K_{3,3}$ подграфе (которых, очевидно, 10) есть хотя бы одно пересечение рёбер. Каждая пара пересекающихся рёбер, как нетрудно понять, входит ровно в $C_3^1 = 3$ подграфов $K_{3,3}$. Следовательно, $\text{cr}(K_{3,5}) \geq \frac{10}{3}$, но это означает, что $\text{cr}(K_{3,5}) \geq 4$.

Теперь рассмотрим граф $K_{3,7}$. Предположим, что он является почти планарным. Понятно, что этот граф максимален (как полный двудольный граф). Рассмотрим его правильное изображение. В силу леммы 1 любой вершине степени 7 инцидентно хотя бы $\lceil \frac{7}{3} \rceil = 3$ простых рёбер,

откуда немедленно следует, что в нашем изображении хотя бы 9 простых рёбер, а значит, $\text{cr}(K_{3,7}) \leq \frac{21-9}{2} = 6$.

Однако, в каждом изоморфном $K_{3,5}$ подграфе не менее 4 пересечений. Всего таких подграфов $C_7^5 = 21$, а каждое пересечение входит в $C_5^3 = 10$ подграфов $K_{3,5}$, откуда $\text{cr}(K_{3,7}) \geq \text{cr}(K_{3,5}) \cdot \frac{21}{10} = \frac{84}{10} > 6$. Полученное противоречие показывает, что граф $K_{3,7}$ не является почти планарным.

Таким образом, среди полных двудольных графов почти планарными являются $K_{1,n}$, $K_{2,n}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$, $K_{3,5}$, $K_{3,6}$ и $K_{4,4}$, а остальные — не являются.

Список литературы

- [1] J. Pach, G. Tóth. *Graphs drawn with few crossing per edge*. Combinatorica 17 (1997), no. 3, p. 427-439.
- [2] P. K. Agarwal, B. Aronov, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir. *Quasi-planar graphs have a linear number of edges*. Combinatorica 17 (1997), no. 1, p. 1-9.
- [3] E. Ackerman, G. Tardos. *On the maximum number of edges in quasi-planar graphs*. J. Comb. Theory, Ser. 114 (2007), no. 3, p. 563-571.
- [4] E. Ackerman. *On the Maximum Number of Edges in Topological Graphs with no Four Pairwise Crossing Edges*. Discrete Comput. Geom. 41 (2009), no. 3, p. 365-375.
- [5] G. Tardos, G. Tóth. *Crossing stars in topological graphs*. SIAM J. Discrete Math. 21 (2007), no. 3, 737-749.
- [6] J. Pach, R. Pinchasi, G. Tardos, G. Tóth. *Geometric graphs with no self-intersecting path of length three*. (English summary) European J. Combin. 25 (2004), no. 6, p. 793-811.