ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 4/2012

$(2,3)$–ПОРОЖДЕНИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГРУПП БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В. Л. Васильев, М. А. Всемирнов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: vadim@pdmi.ras.ru, vsemir@pdmi.ras.ru

Аннотация

Доказано, что при $n \geq 25$ группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ являются $(2,3)$–порожденными. Также получены аналогичные результаты и для более широкого класса коммутативных колец с необратимой двойкой.

Ключевые слова: симплектическая группа, (2,3)-порождение, элементарные образующие.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00784a). Второй автор также поддержан грантом фонда «Династия».

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение и основные результаты

Группа называется $(2,3)$–порожденной, если она порождается инволюцией и элементом порядка 3. Хорошо известно (см., например, [1]), что модулярная группа $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ изоморфна свободному произведению циклических групп порядка 2 и 3. Таким образом, проблема $(2,3)$–порождения тесно связана с вопросом изучения структуры нормальных подгрупп в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Задача о $(2,3)$–порождении различных классов групп рассматривалась, например, в [2, 3, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15], см. также дальнейшие ссылки в упомянутых работах. В том числе, было показано, что при достаточно большом n группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является $(2,3)$–порожденной либо при условии обратимости 2 в коммутативном кольце R (см. [9]), либо в случае, когда R — конечное поле (см. [6, 7]). Напомним, что симплектическая группа $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$ над кольцом R определяется следующим образом:

$$\mathrm{Sp}_{2n}(R) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_{2n}(R) \mid g^T \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

где I_n обозначает единичную матрицу размера $n \times n$, а T — транспонирование матрицы. Элементарной симплектической группой $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ называется подгруппа в $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$, порожденная всевозможными матрицами следующих типов:

$$\begin{aligned}
E^{(1)}_{i,j}(a) &= \begin{cases} I_{2n} + a(e_{i,n+j} + e_{j,n+i}), \text{ если } 1 \le i \ne j \le n, \\ I_{2n} + a e_{i,n+i}, \text{ если } 1 \le i = j \le n, \end{cases} \\
E^{(2)}_{i,j}(a) &= (E^{(1)}_{i,j}(a))^T, \text{ если } 1 \le i, j \le n, \\
E^{(3)}_{i,j}(a) &= I_{2n} + a e_{i,j} - a e_{n+j,n+i}, \text{ если } 1 \le i \ne j \le n,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $a \in R$ и $e_{i,j}$ — матрицы размера $2n \times 2n$, у которых элемент в i–ой строке и j–ом столбце равен 1, а все остальные — 0. В частности, $E^{(1)}_{i,j}(a) = E^{(1)}_{j,i}(a)$ и $E^{(2)}_{i,j}(a) = E^{(2)}_{j,i}(a)$ при $1 \le i, j \le n$.

В настоящей работе мы существенно ослабляем условие на обратимость 2 в кольце R. А именно, мы доказываем следующий результат:

Теорема 1. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1 и $s \in R^*$. Дополнительно предположим, что R аддитивно порождается множеством*

$$\left\{ s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \tag{2}$$

(то есть всякий элемент из R является линейной комбинацией элементов множества (2) с целыми коэффициентами). Тогда при $n \ge 25$ группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является $(2,3)$–порожденной.

В предыдущих работах авторов [10, 11] было показано, что

- $\mathrm{Sp}_6(\mathbb{Z})$ не является $(2,3)$–порожденной группой;
- $\mathrm{Sp}_8(\mathbb{Z})$ и $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ $(2,3)$–порождены.

Кроме того, была выдвинута гипотеза о том, что все группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ являются $(2,3)$–порожденными при $n \geq 4$.

Нетрудно заметить, что из теоремы 1 (для $R = \mathbb{Z}$ и $s = 1$) и того факта, что $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$ (см., например, [4, 5.3.1]), немедленно вытекает следствие.

Следствие 1. *При $n \geq 25$ группа $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ является $(2,3)$–порожденной.*

Замечание 1. Несложно проверить, что условиям теоремы 1 удовлетворяют следующие классы коммутативных колец.

- $R = \mathbb{Z}[\xi]$, где ξ — первообразный корень из 1 нечетной степени $k \geq 3$. В качестве s можно взять ξ.
- R — конечное поле характеристики 2. В этом случае s — мультипликативная образующая.
- Рассмотрим P — конечное подмножество простых чисел в $\mathbb{Z}$ и в качестве кольца R возьмем подкольцо $\mathbb{Z}_{\mathrm{P}} \subseteq \mathbb{Q}$, состоящее из чисел, знаменатель которых раскладывается в произведение чисел из P. В качестве s можно взять
$$\prod_{p\in \mathrm{P}} \frac{1}{p}.$$

В следующих разделах будет представлено конструктивное доказательство теоремы 1, то есть мы построим такие x и y из $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ порядка 2 и 3 соответственно, что $\mathrm{ESp}_{2n}(R) = \langle x, y\rangle$.

2 Построение образующих

Пусть R — коммутативное кольцо с 1. Кроме того, считаем, что $\mathrm{GL}_n(R)$ действует слева на свободный модуль R^n с базисом $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, где $n = 3m + r$, $m \geq 8$ и $1 \leq r \leq 3$ (то есть $n \geq 25$). Как обычно, под $\mathrm{Sym}(\Gamma)$, $\mathrm{Alt}(\Gamma)$, где $\Gamma \subseteq B$, мы понимаем подгруппы в $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящие из перестановочных матриц (соответственно, перестановочных матриц, которые отвечают четным перестановкам множества базисных элементов из Γ). Для упрощения обозначений далее мы будем отождествлять перестановки и соответствующие им перестановочные матрицы, например, $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ будет обозначать матрицу, отвечающую циклической перестановке базисных элементов $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$.

Рассмотрим оператор $y_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$, действующий следующим образом на элементы из B:

- $v_{3i+3} \mapsto v_{3i+2} \mapsto v_{3i+1} \mapsto v_{3i+3}$, где $0 \le i \le m-1$;
- $v_{3m+3} \mapsto v_{3m+2} \mapsto v_{3m+1} \mapsto v_{3m+3}$, если $r = 3$;
- y_1 оставляет неподвижными v_{3m+i}, где $1 \le i \le r$, если $r \le 2$.

Из приведенных выше соотношений следует, что $y_1 \in \mathrm{Alt}(B)$ и $y_1^3 = I_n$.

Пусть $s \in R^*$. Определим $x_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$ на базисных элементах R^n:

- x_1 меняет местами v_{3i+1} и v_{3i} при $1 \le i \le m-1$;
- x_1 оставляет неподвижными v_{3i+2} при $0 \le i \le m-2$;
- $v_1 \mapsto sv_2 - v_1$;
- если $r = 1$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} и v_{3m+1}, а v_{3m} оставляет неподвижным;
- если $r = 2$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+2} и v_{3m} с v_{3m+1};
- если $r = 3$, то x_1 меняет местами v_{3m-1} с v_{3m+3} и v_{3m+1} с v_{3m+2}, а v_{3m} оставляет неподвижным.

Из соотношений выше легко видеть, что подмодули $\langle v_1, v_2\rangle$ и $\langle v_3, \dots, v_{3m+r}\rangle$ инвариантны относительно действия x_1, причем x_1 индуцирует на $\langle v_1, v_2\rangle$ оператор с матрицей
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix},$$
а на $\langle v_3, \dots, v_{3m+r}\rangle$ действует как перестановка порядка 2. Следовательно, x_1 — инволюция.

Теперь рассмотрим копию базиса B, обозначив ее элементы как
$$v_{n+1}, \dots, v_{2n},$$
и определим вложение $\pi : \mathrm{GL}_n(R) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{2n}(R)$,
$$\pi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^T)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для $p \in R^*$ и $q \in R$ определим $z \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$ следующим образом: z действует тождественно на всех v_i, $i \notin \{11, 14, n+11, n+14\}$, а на подмодуле $\langle v_{11}, v_{14}, v_{n+11}, v_{n+14}\rangle$ в R^{2n} действует как оператор, заданный матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^{-1} \\ q & 0 & -p^{-1} & 0 \\ 0 & -p & 0 & q \\ p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

то есть

- $v_{11} \mapsto qv_{14} + pv_{n+14}$;
- $v_{14} \mapsto -pv_{n+11}$;
- $v_{n+11} \mapsto -p^{-1}v_{14}$;
- $v_{n+14} \mapsto p^{-1}v_{11} + qv_{n+11}$.

Легко проверяется, что $A_1^2 = I_4$, а значит, z является инволюцией.

Наконец рассмотрим следующие матрицы из $\mathrm{GL}_{2n}(R)$:

$$x = \pi(x_1)z, \ \ y = \pi(y_1). \tag{5}$$

Лемма 1. $x^2 = y^3 = I_{2n}$.

Доказательство. Отметим, что если $a \in \mathrm{GL}_n(R)$ имеет порядок k, то и $\pi(a)$ имеет порядок k в силу определения (3). Так как $x_1^2 = y_1^3 = I_n$ и $x_1 \neq I_n, y_1 \neq I_n$, то $\pi(x_1)$ — инволюция, а $y = \pi(y_1)$ имеет порядок 3. Кроме того, подмодули

$$\langle v_{11}, v_{14}, v_{n+11}, v_{n+14}\rangle \text{ и } \langle v_i \mid i \notin \{11, 14, n+11, n+14\}\rangle$$

инвариантны относительно $\pi(x_1)$ и z, причем $\pi(x_1)$ действует тождественно на первом модуле, а z — на втором из них. Следовательно, $\pi(x_1)$ и z коммутируют. Так как $\pi(x_1)$ и z имеют порядок 2, то и $x = \pi(x_1)z$ — инволюция. □

Замечание 2. Матрицы x и y при специально подобранных параметрах p и q будут использоваться при доказательстве теоремы 1; см. раздел 4. В общем случае можно показать, что $x, y \in \mathrm{Sp}_{2n}(R)$. Мы не будем здесь это доказывать, но позднее покажем, что для выбранных далее p и q имеет место более сильное включение $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$; см., например, лемму 7 в разделе 4 и параграф после формулировки теоремы 3 в разделе 5.

Замечание 3. Наша конструкция матриц x и y сходна с конструкцией из [7] с той лишь разницей, что

1. у нас x_1 действует на $\langle v_3, \dots v_{3m+r}\rangle$ как перестановка базисных элементов, а в [7] как перестановка со знаками;

2. отличается вид множителя z.

В то время, как п. 1 носит чисто технический характер и лишь упрощает часть доказательств в нашем случае, п. 2 имеет решающее значение и позволяет получить основной результат в случае колец с необратимой 2.

3 Вспомогательные леммы

Определим

$$\Delta_1 = \{v_{3m-6}, v_{3m-5}\} \cup \{v_{3m-3}, \dots, v_{3m}\} \cup \{v_{3m+i} \mid 1 \le i \le r\} \subseteq B$$

и покажем, что степень коммутатора $[y,x] = y^{-1}x^{-1}yx = y^{-1}xyx$ имеет «малый носитель».

Лемма 2. $(y^{-1}xyx)^{12} \in \pi(\mathrm{Alt}(\Delta_1))$.

Доказательство. Для доказательства леммы сначала разложим R^{2n} в прямую сумму следующих подмодулей:

$$\begin{aligned}
S_1^{(i)} &= \langle v_{3i}, v_{3i+1}, v_{3i+5}\rangle \text{, где } 6 \le i \le m-3,\\
S_2^{(i)} &= \langle v_{n+3i}, v_{n+3i+1}, v_{n+3i+5}\rangle \text{, где } 6 \le i \le m-3,\\
S_3^{(1)} &= \langle v_6, v_7, v_{11}\rangle \oplus \langle v_9, v_{10}, v_{14}\rangle \oplus \langle v_{n+6}, v_{n+7}, v_{n+11}\rangle \oplus\\
&\quad \oplus \langle v_{n+9}, v_{n+10}, v_{n+14}\rangle,\\
S_3^{(2)} &= \langle v_{12}, v_{13}, v_{17}\rangle \oplus \langle v_{15}, v_{16}, v_{20}\rangle \oplus \langle v_{n+12}, v_{n+13}, v_{n+17}\rangle \oplus\\
&\quad \oplus \langle v_{n+15}, v_{n+16}, v_{n+20}\rangle,\\
S_4 &= \langle v_1, v_2, v_5\rangle \oplus \langle v_3, v_4, v_8\rangle,\\
S_5 &= \langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle \oplus \langle v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}\rangle,\\
S_6 &= \langle v_{3m-6}, v_{3m-5}, v_{3m-3}, v_{3m-2}, \dots, v_{3m+r}\rangle,\\
S_7 &= \langle v_{n+3m-6}, v_{n+3m-5}, v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2}, \dots, v_{n+3m+r}\rangle,
\end{aligned}$$

и проверим, что каждый из них инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и, более того, матрица сужения оператора $(y^{-1}xyx)^{12}$ на каждый из этих подмодулей, кроме S_6 и S_7, — единична. Для удобства дальнейшего изложения мы будем проверять действие $y^{-1}xyx = y^{-1}\pi(x_1)zy\pi(x_1)z$, учитывая действие каждого из сомножителей.

Случай 1: $S_1^{(i)}$ при $6 \le i \le m-3$. Отметим, что данный случай возникает только, если $m \ge 9$. Рассмотрим действие $y^{-1}xyx$ на $S_1^{(i)}$:

$$v_{3i} \xmapsto{z} v_{3i} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+1} \xmapsto{y} v_{3i+3} \xmapsto{z} v_{3i+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i+5},$$
$$v_{3i+5} \xmapsto{z} v_{3i+5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+5} \xmapsto{y} v_{3i+4} \xmapsto{z} v_{3i+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i+1},$$
$$v_{3i+1} \xmapsto{z} v_{3i+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i} \xmapsto{y} v_{3i-1} \xmapsto{z} v_{3i-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3i-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3i}.$$

Отсюда следует, что модули $S_1^{(i)}$ инварианты относительно действия $y^{-1}xyx$ и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на каждом из модулей равна

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, $(y^{-1}xyx)^3$ действует тождественно на $S_1^{(i)}$ при $6 \le i \le m-3$.

Случай 2: $S_2^{(i)}$ при $6 \le i \le m-3$. Данный случай, как и предыдущий, возникает только при $m \ge 9$. Из определений x и y из (3), (5) и проведенных вычислений в случае 1 следует, что $S_2^{(i)}$ инвариантен относительно $y^{-1}xyx$ и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на каждый из этих подмодулей также равна A_2, а поэтому $(y^{-1}xyx)^3$ тождественен на $S_2^{(i)}$ при $6 \le i \le m-3$.

Случай 3: $S_3^{(1)}$. Вначале докажем, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие модуля

$$T_1 = \langle v_6, v_{11}, qv_{10} + pv_{n+10}, qv_9 + pv_{n+9}, qv_{14} + pv_{n+14}, v_7 \rangle .$$

Действительно, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}
&v_6 \xmapsto{z} v_6 \xmapsto{\pi(x_1)} v_7 \xmapsto{y} v_9 \xmapsto{z} v_9 \xmapsto{\pi(x_1)} v_{10} \xmapsto{y^{-1}} v_{11},\\
&v_{11} \xmapsto{z} qv_{14} + pv_{n+14} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{14} + pv_{n+14} \xmapsto{y} qv_{13} + pv_{n+13} \xmapsto{z}\\
&\qquad qv_{13} + pv_{n+13} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{12} + pv_{n+12} \xmapsto{y^{-1}} qv_{10} + pv_{n+10},\\
&qv_{10} + pv_{n+10} \xmapsto{z} qv_{10} + pv_{n+10} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_9 + pv_{n+9} \xmapsto{y} qv_8 + pv_{n+8} \xmapsto{z}\\
&\qquad qv_8 + pv_{n+8} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_8 + pv_{n+8} \xmapsto{y^{-1}} qv_9 + pv_{n+9},\\
&qv_9 + pv_{n+9} \xmapsto{z} qv_9 + pv_{n+9} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{10} + pv_{n+10} \xmapsto{y} qv_{12} + pv_{n+12} \xmapsto{z}\\
&\qquad qv_{12} + pv_{n+12} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{13} + pv_{n+13} \xmapsto{y^{-1}} qv_{14} + pv_{n+14},\\
&qv_{14} + pv_{n+14} \xmapsto{z} v_{11} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{11} \xmapsto{y} v_{10} \xmapsto{z} v_{10} \xmapsto{\pi(x_1)} v_9 \xmapsto{y^{-1}} v_7,\\
&v_7 \xmapsto{z} v_7 \xmapsto{\pi(x_1)} v_6 \xmapsto{y} v_5 \xmapsto{z} v_5 \xmapsto{\pi(x_1)} v_5 \xmapsto{y^{-1}} v_6.
\end{aligned}$$

Следовательно, T_1 — инвариантный модуль относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на T_1 тождественно. Теперь проверим, что $y^{-1}xyx$ действует циклично на образующие модуля

$$T_2 = \langle v_9, v_{14}, -pv_{n+7}, -pv_{n+6}, -pv_{n+11}, v_{10} \rangle :$$

$$
\begin{aligned}
&v_9 \xmapsto{z} v_9 \xmapsto{\pi(x_1)} v_{10} \xmapsto{y} v_{12} \xmapsto{z} v_{12} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{13} \xmapsto{y^{-1}} v_{14},\\
&v_{14} \xmapsto{z} -pv_{n+11} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+11} \xmapsto{y} -pv_{n+10} \xmapsto{z}\\
&\qquad\qquad -pv_{n+10} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+9} \xmapsto{y^{-1}} -pv_{n+7},\\
&-pv_{n+7} \xmapsto{z} -pv_{n+7} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+6} \xmapsto{y} -pv_{n+5} \xmapsto{z}\\
&\qquad\qquad -pv_{n+5} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+5} \xmapsto{y^{-1}} -pv_{n+6},\\
&-pv_{n+6} \xmapsto{z} -pv_{n+6} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+7} \xmapsto{y} -pv_{n+9} \xmapsto{z}\\
&\qquad\qquad -pv_{n+9} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+10} \xmapsto{y^{-1}} -pv_{n+11},\\
&-pv_{n+11} \xmapsto{z} v_{14} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{14} \xmapsto{y} v_{13} \xmapsto{z} v_{13} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12} \xmapsto{y^{-1}} v_{10},\\
&v_{10} \xmapsto{z} v_{10} \xmapsto{\pi(x_1)} v_9 \xmapsto{y} v_8 \xmapsto{z} v_8 \xmapsto{\pi(x_1)} v_8 \xmapsto{y^{-1}} v_9.
\end{aligned}
$$

Таким образом, T_2 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на T_2 тождественно. Наконец, заметим, что так как $p \in R^*$, то

$$
\begin{aligned}
T_1 \oplus T_2 = \langle v_6, v_7, v_{11}\rangle \oplus \langle v_9, v_{10}, v_{14}\rangle \oplus \langle v_{n+6}, v_{n+7}, v_{n+11}\rangle \oplus\\
\oplus \langle v_{n+9}, v_{n+10}, v_{n+14}\rangle = S_3^{(1)},
\end{aligned}
$$

и поэтому $S_3^{(1)}$ инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на $S_3^{(1)}$ тождественно.

Случай 4: $S_3^{(2)}$. Этот случай будем рассматривать по схеме, аналогичной случаю 3. Для этого рассмотрим модуль

$$T_3 = \langle v_{12}, v_{17}, v_{13}, qv_{15} + pv_{n+15}, qv_{20} + pv_{n+20}, qv_{16} + pv_{n+16}\rangle$$

и проверим, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет его образующие:

$$
\begin{aligned}
&v_{12} \xmapsto{z} v_{12} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{13} \xmapsto{y} v_{15} \xmapsto{z} v_{15} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{16} \xmapsto{y^{-1}} v_{17},\\
&v_{17} \xmapsto{z} v_{17} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{17} \xmapsto{y} v_{16} \xmapsto{z} v_{16} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{15} \xmapsto{y^{-1}} v_{13},\\
&v_{13} \xmapsto{z} v_{13} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{12} \xmapsto{y} v_{11} \xmapsto{z}\\
&\qquad qv_{14} + pv_{n+14} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{14} + pv_{n+14} \xmapsto{y^{-1}} qv_{15} + pv_{n+15},\\
&qv_{15} + pv_{n+15} \xmapsto{z} qv_{15} + pv_{n+15} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{16} + pv_{n+16} \xmapsto{y} qv_{18} + pv_{n+18} \xmapsto{z}\\
&\qquad qv_{18} + pv_{n+18} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{19} + pv_{n+19} \xmapsto{y^{-1}} qv_{20} + pv_{n+20},\\
&qv_{20} + p_{n+20} \xmapsto{z} qv_{20} + pv_{n+20} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{20} + pv_{n+20} \xmapsto{y} qv_{19} + pv_{n+19} \xmapsto{z}\\
&\qquad qv_{19} + pv_{n+19} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{18} + pv_{n+18} \xmapsto{y^{-1}} qv_{16} + pv_{n+16},\\
&qv_{16} + pv_{n+16} \xmapsto{z} qv_{16} + pv_{n+16} \xmapsto{\pi(x_1)} qv_{15} + pv_{n+15} \xmapsto{y} qv_{14} + pv_{n+14} \xmapsto{z}\\
&\qquad v_{11} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{11} \xmapsto{y^{-1}} v_{12}.
\end{aligned}
$$

В частности, мы пользуемся тем, что так как по предположению $m \geq 8$, то $\pi(x_1)$ действует тождественно на v_i и v_{n+i}, если $i \equiv 2 \pmod 3$, $i \leq 20$. Следовательно, T_3 — инвариантный модуль относительно оператора $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на T_3 тождественно. Кроме того, $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие модуля

$$T_4 = \langle v_{15}, v_{20}, v_{16}, -pv_{n+12}, -pv_{n+17}, -pv_{n+13} \rangle .$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&v_{15} \xmapsto{z} v_{15} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{16} \xmapsto{y} v_{18} \xmapsto{z} v_{18} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{19} \xmapsto{y^{-1}} v_{20},\\
&v_{20} \xmapsto{z} v_{20} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{20} \xmapsto{y} v_{19} \xmapsto{z} v_{19} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{18} \xmapsto{y^{-1}} v_{16},\\
&v_{16} \xmapsto{z} v_{16} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{15} \xmapsto{y} v_{14} \xmapsto{z} -pv_{n+11} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+11} \xmapsto{y^{-1}} -pv_{n+12},\\
&-pv_{n+12} \xmapsto{z} -pv_{n+12} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+13} \xmapsto{y} -pv_{n+15} \xmapsto{z}\\
&\qquad\qquad -pv_{n+15} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+16} \xmapsto{y^{-1}} -pv_{n+17},\\
&-pv_{n+17} \xmapsto{z} -pv_{n+17} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+17} \xmapsto{y} -pv_{n+16} \xmapsto{z}\\
&\qquad\qquad -pv_{n+16} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+15} \xmapsto{y^{-1}} -pv_{n+13},\\
&-pv_{n+13} \xmapsto{z} -pv_{n+13} \xmapsto{\pi(x_1)} -pv_{n+12} \xmapsto{y} -pv_{n+11} \xmapsto{z} v_{14} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{14} \xmapsto{y^{-1}} v_{15}.
\end{aligned}$$

Таким образом, T_4 тоже инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и $(y^{-1}xyx)^6$ действует на T_4 тождественно. Наконец, заметим, что так как $p \in R^*$, то

$$\begin{aligned}
T_3 \oplus T_4 = \langle v_{12}, v_{13}, v_{17} \rangle \oplus \langle v_{15}, v_{16}, v_{20} \rangle \oplus \langle v_{n+12}, v_{n+13}, v_{n+17} \rangle \oplus\\
\oplus \langle v_{n+15}, v_{n+16}, v_{n+20} \rangle = S_3^{(2)},
\end{aligned}$$

и поэтому $(y^{-1}xyx)^6$ тождественен на $S_3^{(2)}$.

Случай 5: $S_4 = \langle v_1, v_2, v_5 \rangle \oplus \langle v_3, v_4, v_8 \rangle$. Сначала рассмотрим действие $y^{-1}xyx$ на образующие v_1, v_2, v_5:

$$\begin{aligned}
&v_1 \xmapsto{z} v_1 \xmapsto{\pi(x_1)} sv_2 - v_1 \xmapsto{y} sv_1 - v_3 \xmapsto{z}\\
&\qquad sv_1 - v_3 \xmapsto{\pi(x_1)} s^2v_2 - sv_1 - v_4 \xmapsto{y^{-1}} s^2v_3 - sv_2 - v_5,\\
&v_2 \xmapsto{z} v_2 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 \xmapsto{y} v_1 \xmapsto{z} v_1 \xmapsto{\pi(x_1)} sv_2 - v_1 \xmapsto{y^{-1}} sv_3 - v_2,\\
&v_5 \xmapsto{z} v_5 \xmapsto{\pi(x_1)} v_5 \xmapsto{y} v_4 \xmapsto{z} v_4 \xmapsto{\pi(x_1)} v_3 \xmapsto{y^{-1}} v_1.
\end{aligned}$$

Кроме того, аналогично случаю 1, легко видеть, что $y^{-1}xyx$ циклично переставляет образующие v_3, v_8, v_4, а именно:

$$\begin{aligned}
&v_3 \xmapsto{z} v_3 \xmapsto{\pi(x_1)} v_4 \xmapsto{y} v_6 \xmapsto{z} v_6 \xmapsto{\pi(x_1)} v_7 \xmapsto{y^{-1}} v_8,\\
&v_8 \xmapsto{z} v_8 \xmapsto{\pi(x_1)} v_8 \xmapsto{y} v_7 \xmapsto{z} v_7 \xmapsto{\pi(x_1)} v_6 \xmapsto{y^{-1}} v_4,\\
&v_4 \xmapsto{z} v_4 \xmapsto{\pi(x_1)} v_3 \xmapsto{y} v_2 \xmapsto{z} v_2 \xmapsto{\pi(x_1)} v_2 \xmapsto{y^{-1}} v_3.
\end{aligned}$$

Значит, модуль S_4 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и матрица сужения $y^{-1}xyx$ на S_4 в базисе $v_1, v_2, v_5, v_3, v_4, v_8$ равна

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -s & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & s & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что $A_3^{12} = I_6$, а значит $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на S_4.

Случай 6: $S_5 = \langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle \oplus \langle v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}\rangle$. Из построения x_1 и определения π из (3) видно, что матрица $\pi(x_1)$ действует на $\langle v_{n+1}, v_{n+2}\rangle$ как

$$\begin{pmatrix} -1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть $v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+1}$, $v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+1} + v_{n+2}$. Тогда $y^{-1}xyx$ действует на $\langle v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}\rangle$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&v_{n+1} \xmapsto{z} v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+1} \xmapsto{y} -v_{n+3} \xmapsto{z} -v_{n+3} \xmapsto{\pi(x_1)} -v_{n+4} \xmapsto{y^{-1}} -v_{n+5},\\
&v_{n+2} \xmapsto{z} v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+1} + v_{n+2} \xmapsto{y} sv_{n+3} + v_{n+1} \xmapsto{z}\\
&\qquad\qquad sv_{n+3} + v_{n+1} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+4} - v_{n+1} \xmapsto{y^{-1}} sv_{n+5} - v_{n+2},\\
&v_{n+5} \xmapsto{z} v_{n+5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+5} \xmapsto{y} v_{n+4} \xmapsto{z} v_{n+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+1}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим далее действие $y^{-1}xyx$ на образующие $v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}$:

$$\begin{aligned}
&v_{n+3} \xmapsto{z} v_{n+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+4} \xmapsto{y} v_{n+6} \xmapsto{z} v_{n+6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+7} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+8},\\
&v_{n+4} \xmapsto{z} v_{n+4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+3} \xmapsto{y} v_{n+2} \xmapsto{z} v_{n+2} \xmapsto{\pi(x_1)} sv_{n+1} + v_{n+2} \xmapsto{y^{-1}} sv_{n+2} + v_{n+3},\\
&v_{n+8} \xmapsto{z} v_{n+8} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+8} \xmapsto{y} v_{n+7} \xmapsto{z} v_{n+7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{n+6} \xmapsto{y^{-1}} v_{n+4}.
\end{aligned}$$

Таким образом, подмодуль S_5 инвариантен относительно оператора $y^{-1}xyx$, и матрица сужения $y^{-1}xyx$ в базисе $v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+5}, v_{n+3}, v_{n+4}, v_{n+8}$ на этот подмодуль равна

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & s & 0 \\ -1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Непосредственно проверяется, что $A_4^{12} = I_6$, а значит $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на S_5.

Таким образом, в результате изучения случаев 1–6 мы знаем, что $(y^{-1}xyx)^{12}$ действует тождественно на всех модулях, кроме S_6 и S_7. Для завершения доказательства нам осталось рассмотреть действие оператора на этих подмодулях.

Случай 7: S_6 и S_7. Так как $m \geq 8$, то $3m - 7 > 14$. В частности, z действует тождественно на

$$v_{3m-7}, \dots, v_{3m+r} \text{ и } v_{n+3m-7}, \dots, v_{n+3m+r}. \tag{6}$$

По отдельности рассмотрим каждое из возможных значений параметра r. Пусть $r = 1$. Опишем действие $y^{-1}xyx$ на S_6:

$$\begin{gathered}
v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1}, \\
v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6}, \\
v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2}, \\
v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3}, \\
v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m}, \\
v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1}, \\
v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.
\end{gathered}$$

Следовательно, модуль S_6 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_6 как перестановка

$$(v_{3m-3}, v_{3m-2})(v_{3m-5}, v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m}, v_{3m+1}).$$

Отметим, что из приведенных выше вычислений, из (3) и того, что на S_6 операторы x_1 и y_1 действуют перестановочно, а z — тождественно не только на S_6, но и на образующие из (6), следует, что S_7 также инвариантен относительно $y^{-1}xyx$ и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как перестановка

$$(v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2})(v_{n+3m-5}, v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m}, v_{n+3m+1}).$$

Таким образом, так как $(y^{-1}xyx)^{12}$ тождественен на всех подмодулях, кроме S_6 и S_7, то

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi\big((v_{3m-6}, v_{3m}, v_{3m-5}, v_{3m-1}, v_{3m+1})\big).$$

Теперь рассмотрим случай $r = 2$ и опишем действие $y^{-1}xyx$ на S_6:

$$
\begin{aligned}
&v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},\\
&v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},\\
&v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},\\
&v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},\\
&v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y} v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},\\
&v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},\\
&v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+2},\\
&v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, S_6 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_6 как

$$\bigl(v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m}, v_{3m-2}, v_{3m-3}, v_{3m+1}, v_{3m+2}, v_{3m-5}\bigr).$$

Аналогичным образом, $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как

$$\bigl(v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m}, v_{n+3m-2}, v_{n+3m-3}, v_{n+3m+1}, v_{n+3m+2}, v_{n+3m-5}\bigr).$$

Следовательно,

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi\bigl((v_{3m-6}, v_{3m-3})(v_{3m-5}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m+1})(v_{3m}, v_{3m+2})\bigr).$$

Наконец, рассмотрим случай $r = 3$. Опишем действие оператора $y^{-1}xyx$ на S_6:

$$
\begin{aligned}
&v_{3m-6} \xmapsto{z} v_{3m-6} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-5} \xmapsto{y} v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-1},\\
&v_{3m-5} \xmapsto{z} v_{3m-5} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-6} \xmapsto{y} v_{3m-7} \xmapsto{z} v_{3m-7} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-7} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-6},\\
&v_{3m-3} \xmapsto{z} v_{3m-3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-2} \xmapsto{y} v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-2},\\
&v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y} v_{3m-4} \xmapsto{z} v_{3m-4} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-4} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-3},\\
&v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+3} \xmapsto{y} v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+2},\\
&v_{3m} \xmapsto{z} v_{3m} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m} \xmapsto{y} v_{3m-1} \xmapsto{z} v_{3m-1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+1},\\
&v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y} v_{3m+1} \xmapsto{z} v_{3m+1} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+2} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m+3},\\
&v_{3m+2} \xmapsto{z} v_{3m+2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m+1} \xmapsto{y} v_{3m+3} \xmapsto{z} v_{3m+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m},\\
&v_{3m+3} \xmapsto{z} v_{3m+3} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-1} \xmapsto{y} v_{3m-2} \xmapsto{z} v_{3m-2} \xmapsto{\pi(x_1)} v_{3m-3} \xmapsto{y^{-1}} v_{3m-5}.
\end{aligned}
$$

Тогда модуль S_6 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_6 как перестановка

$$(v_{3m-3}, v_{3m-2})(v_{3m-6}, v_{3m-1}, v_{3m+2}, v_{3m}, v_{3m+1}, v_{3m+3}, v_{3m-5}).$$

Аналогичным образом, S_7 инвариантен относительно $y^{-1}xyx$, и $y^{-1}xyx$ действует на S_7 как

$$(v_{n+3m-3}, v_{n+3m-2})(v_{n+3m-6}, v_{n+3m-1}, v_{n+3m+2}, v_{n+3m}, v_{n+3m+1}, v_{n+3m+3}, v_{n+3m-5}).$$

Следовательно,

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi\big((v_{3m-6}, v_{3m+3}, v_{3m}, v_{3m-1}, v_{3m-5}, v_{3m+1}, v_{3m+2})\big).$$

Таким образом, при каждом значении параметра r верно, что

$$(y^{-1}xyx)^{12} \in \pi(\mathrm{Alt}(\Delta_1)).$$

$\square$

Теперь определим $\Delta = \{v_{3m-8}, v_{3m-7}, \ldots, v_{3m+r}\} \subseteq B$ и заметим, что $\Delta_1 \subseteq \Delta$.

Лемма 3. $\pi(\mathrm{Alt}(\Delta)) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Из леммы 2 мы знаем, что

$$(y^{-1}xyx)^{12} = \pi(\alpha), \text{ где } \alpha \in \mathrm{Alt}(\Delta_1) \subseteq \mathrm{Alt}(\Delta).$$

Следовательно, так как π — гомоморфизм и $y = \pi(y_1)$, то

$$y^{-i}(y^{-1}xyx)^{12}y^i = \pi(y_1^{-i}\alpha y_1^i), \; i = 1, 2.$$

Определим

$$\beta_i = y_1^{-i}\alpha y_1^i, \text{ где } i = 1, 2.$$

Тогда, так как Δ и $B \setminus \Delta$ — y_1-инвариантные множества и $\alpha \in \mathrm{Alt}(\Delta)$, то $\beta_i \in \mathrm{Alt}(\Delta)$ при $i = 1, 2$. В частности, группа

$$\big\langle (y^{-1}xyx)^{12}, y^{-1}(y^{-1}xyx)^{12}y, y^{-2}(y^{-1}xyx)^{12}y^2 \big\rangle$$

совпадает с $\pi(\langle \alpha, \beta_1, \beta_2\rangle)$ и содержится в $\pi(\mathrm{Alt}(\Delta))$. Следовательно, для доказательства леммы нам достаточно показать, что

$$\mathrm{Alt}(\Delta) \subseteq \langle \alpha, \beta_1, \beta_2\rangle\,.$$

Для этого мы исследуем структуру группы $\langle\alpha,\beta_1,\beta_2\rangle$ при каждом возможном значении параметра r.

Случай 1: $r=1$. Из доказательства леммы 2 мы знаем, что

$$\alpha=(v_{3m-6},v_{3m},v_{3m-5},v_{3m-1},v_{3m+1}),$$

а значит,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (v_{3m-8},v_{3m-2},v_{3m-4},v_{3m},v_{3m+1}),\\ \beta_2 &= (v_{3m-7},v_{3m-1},v_{3m-3},v_{3m-2},v_{3m+1}).\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $\langle\alpha,\beta_1,\beta_2\rangle$ — примитивная группа степени $10=|\Delta|$, содержащая цикл α длины 5.

Случай 2: $r=2$. Из доказательства леммы 2

$$\alpha=(v_{3m-6},v_{3m-3})(v_{3m-5},v_{3m-2})(v_{3m-1},v_{3m+1})(v_{3m},v_{3m+2}),$$

а значит,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (v_{3m-8},v_{3m-5})(v_{3m-4},v_{3m-1})(v_{3m},v_{3m+1})(v_{3m-2},v_{3m+2}),\\ \beta_2 &= (v_{3m-7},v_{3m-4})(v_{3m-3},v_{3m})(v_{3m-2},v_{3m+1})(v_{3m-1},v_{3m+2}).\end{aligned}$$

Кроме того,

$$(\alpha(\alpha\beta_1)^4(\alpha\beta_2)^4(\beta_1\beta_2)^4)^3=(v_{3m-8},v_{3m-3},v_{3m},v_{3m-5},v_{3m-1},v_{3m-4},v_{3m-7}).$$

Таким образом, $\langle\alpha,\beta_1,\beta_2\rangle$ — примитивная группа степени $11=|\Delta|$, содержащая цикл длины 7.

Случай 3: $r=3$. Тогда из доказательства леммы 2

$$\alpha=(v_{3m-6},v_{3m+3},v_{3m},v_{3m-1},v_{3m-5},v_{3m+1},v_{3m+2}),$$

а значит,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (v_{3m-8},v_{3m+1},v_{3m-2},v_{3m},v_{3m-4},v_{3m+2},v_{3m+3}),\\ \beta_2 &= (v_{3m-7},v_{3m+2},v_{3m-1},v_{3m-2},v_{3m-3},v_{3m+3},v_{3m+1}).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $\langle\alpha,\beta_1,\beta_2\rangle$ — примитивная группа степени $12=|\Delta|$, содержащая цикл α длины 7.

Согласно теореме Жордана (см. [16, теорема 13.9]), всякая примитивная группа перестановок степени d, содержащая цикл простой длины $\le d-3$, содержит знакопеременную группу степени d. Следовательно,

$$\mathrm{Alt}(\Delta)\subseteq\langle\alpha,\beta_1,\beta_2\rangle$$

при любом возможном значении r, чем и завершаем доказательство. $\square$

Следующая часть раздела будет посвящена доказательству того, что $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$. Для удобства изложения разобъем его на несколько лемм.

Лемма 4. *Пусть* $\Gamma \subsetneq B$ *и* $|\Gamma| \geq 3$. *Рассмотрим перестановку*

$$\xi = (c, a_1)(a_2, a_3) \in \mathrm{Alt}(B),$$

где $c \in B \setminus \Gamma$, *а* $a_1, a_2, a_3 \in \Gamma$ *и попарно различны. Тогда*

$$\langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{c\}).$$

Доказательство. Очевидно, что $\langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle \subseteq \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{c\})$. Проверим обратное включение. Так как $\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{c\})$ порождается всевозможными 3–циклами, достаточно показать, что все 3–циклы вида (c, d_1, d_2), где $d_1, d_2 \in \Gamma$ и различны, содержатся в $\langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle$.

Заметим, что $(c, a_1, a_2) = \xi \cdot (a_1, a_3, a_2) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle$. Тогда и

$$(c, a_2, a_1) = (c, a_1, a_2)^2 \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle.$$

Если $\{d_1, d_2\} \cap \{a_1, a_2\} = \emptyset$, то

$$(c, d_1, d_2) = (d_1, a_1)(d_2, a_2) \cdot (c, a_1, a_2) \cdot (d_1, a_1)(d_2, a_2) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle.$$

Если $d \notin \{a_1, a_2\}$, то

$$\begin{array}{rcl} (c, a_1, d) & = & (c, a_1, a_2)(a_1, d, a_2) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle, \\ (c, d, a_1) & = & (c, a_1, d)^2 \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle, \\ (c, a_2, d) & = & (c, a_2, a_1)(a_2, d, a_1) \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle, \\ (c, d, a_2) & = & (c, a_2, d)^2 \in \langle \xi, \mathrm{Alt}(\Gamma)\rangle. \end{array}$$

□

Лемма 5. *Пусть* $1 \leq i \leq m-3$ *и* $\Gamma = \{v_{3i+1}, \ldots, v_{3m+r}\} \subseteq B$. *Тогда, если* $\pi\left(\mathrm{Alt}(\Gamma)\right) \subseteq \langle x, y\rangle$, *то и* $\pi\left(\mathrm{Alt}(\{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\} \cup \Gamma)\right) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Рассмотрим перестановку

$$\gamma = (v_{3i+1}, v_{3m-5})(v_{3m-3}, v_{3m-2}) \in \mathrm{Alt}(\Gamma).$$

Тогда $x\pi(\gamma)x^{-1} \in \langle x, y\rangle$, так как $\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma)) \subseteq \langle x, y\rangle$ по условию леммы. Так как $z = z^{-1}$ действует тождественно на

$$\langle v_i \mid i \notin \{11, 14, n+11, n+14\}\rangle,$$

то $z\pi(\gamma)z^{-1} = \pi(\gamma)$. В частности, $x\pi(\gamma)x^{-1} = \pi(x_1\gamma x_1^{-1})$. Так как по построению x_1 действует перестановочно на $\{v_3, \ldots, v_n\}$, то

$$\xi = x_1\gamma x_1^{-1} = (v_{3i}, v_{3m-6})(v_{3m-3}, v_{3m-2}).$$

Применяя лемму 4, получаем, что

$$\left\langle x_1\gamma x_1^{-1}, \mathrm{Alt}(\Gamma)\right\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}),$$

и поэтому

$$\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})) = \pi(\left\langle x_1\gamma x_1^{-1}, \mathrm{Alt}(\Gamma)\right\rangle) = \left\langle x\pi(\gamma)x^{-1}, \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma))\right\rangle \subseteq \langle x, y\rangle\,. \tag{7}$$

Теперь рассмотрим перестановку

$$\delta = (v_{3i}, v_{3m-2})(v_{3m-1}, v_{3m}) \in \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}).$$

Тогда $y\pi(\delta)y^{-1}$ и $y^2\pi(\delta)y^{-2}$ лежат в $\langle x, y\rangle$, так как по доказанному

$$\pi(\delta) \in \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})) \subseteq \langle x, y\rangle\,. \tag{8}$$

Более того, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
&y\pi(\delta)y^{-1} = \pi(y_1\delta y_1^{-1}) = \pi(\epsilon),\ \text{где } \epsilon = (v_{3i-1}, v_{3m})(v_{3m-2}, v_{3m-1}),\\
&y^2\pi(\delta)y^{-2} = \pi(y_1^2\delta y_1^{-2}) = \pi(\eta),\ \text{где } \eta = (v_{3i-2}, v_{3m-1})(v_{3m}, v_{3m-2}).
\end{aligned}$$

Дважды применяя лемму 4, получаем, что

$$\begin{gathered}
\langle \epsilon, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-1}, v_{3i}\}),\\
\langle \eta, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-1}, v_{3i}\}\rangle = \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\}),
\end{gathered}$$

а значит, используя (7) и (8),

$$\begin{aligned}
\pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}\})) &= \pi(\langle \epsilon, \eta, \mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\})\rangle) =\\
= \langle y\pi(\delta)y^{-1}, y^2\pi(\delta)y^{-2}, \pi(\mathrm{Alt}(\Gamma \cup \{v_{3i}\}))\rangle &\subseteq \langle x, y\rangle\,.
\end{aligned}$$

□

Лемма 6. $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Следует из утверждений леммы 3 и леммы 5. □

4 Доказательство основной теоремы

Пусть $s \in R^*$. Предположим теперь, что R аддитивно порождается множеством (2). В определении z (см. также (4)) положим:

$$p = s, q = s^{-1}.$$

При этом матрица сужения z на подмодуль $\langle v_{11}, v_{14}, v_{n+11}, v_{n+14}\rangle$ в R^{2n} равна

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s^{-1} \\ s^{-1} & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & -s & 0 & s^{-1} \\ s & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

По аналогии с $e_{i,j}$ (см. §1) через $\bar{e}_{i,j}$ будем обозначать матрицу размера $n \times n$, у которой 1 находится в i-й строке и j-м столбце, а все остальные элементы равны 0. Далее будем обозначать элементарные трансвекции в $\mathrm{GL}_n(R)$ через $t_{i,j}(a)$, то есть

$$t_{i,j}(a) = I_n + a\bar{e}_{i,j}, \text{ где } 1 \le i \ne j \le n, a \in R,$$

а через $w_{i,j}$, $1 \le i \ne j \le n$, — образ транспозиции (i, j) в $\mathrm{Sym}(B)$, то есть матрицу соответствующую перестановке базисных элементов v_i и v_j. Кроме того, определим диагональные матрицы

$$d_i(a) = I_n + (a-1)\bar{e}_{i,i}, \text{ где } 1 \le i \le n \text{ и } a \in R^*.$$

Дополнительно определим $h_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(R)$, $1 \le i \ne j \le n$, следующим образом: $h_{i,j}$ действует тождественно на всех v_k, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$, а на подмодуле $\langle v_i, v_j\rangle$ действует как оператор, заданный матрицей

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_6^2 = I_2$, то $h_{i,j}$ — инволюция. Более того, из определения x_1 следует, что x_1 и $h_{1,2}$ действуют одинаково на $\langle v_1, v_2\rangle$.

Наконец, определим $z_{i,j} \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$, $1 \le i \ne j \le n$, следующим образом: $z_{i,j}$ действует тождественно на всех $v_k, k \notin \{i, j, n+i, n+j\}$, а на подмодуле $\langle v_i, v_j, v_{n+i}, v_{n+j}\rangle$ действует как оператор, заданный матрицей A_5, определенной в (9). Легко видеть, что $z_{i,j}$ — инволюция и определенный посредством (4) оператор z при $p = s$, $q = s^{-1}$ совпадает с $z_{11,14}$.

Лемма 7. *Определим x и y согласно* (3)–(5) *при $p = s$, $q = s^{-1}$. Тогда $x, y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.*

Доказательство. В силу определения π (см. (3)) мы знаем, что $\pi(x_1)$ и $y = \pi(y_1)$ содержатся в $\mathrm{Sp}_{2n}(R)$. В случае $R = \mathbb{Z}$ имеем $y \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Так как $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) = \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$ согласно [4, 5.3.1], то $y \in \mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$, то есть эта матрица раскладывается в произведение элементарных образующих (1) группы $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Для произвольного кольца R, так как y состоит из 0 и 1, применим к этому разложению гомоморфизм $\mathrm{ESp}_{2n}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, индуцированный естественным кольцевым гомоморфизмом $\mathbb{Z} \to R$, для которого $1_{\mathbb{Z}} \to 1_R$, и получим, что $y \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.

Так как $E^{(3)}_{2,1}(-s) \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$ и $\pi(x_1) \in \mathrm{Sp}_{2n}(R)$, то $\pi(x_1)E^{(3)}_{2,1}(-s) \in \mathrm{Sp}_{2n}(R)$. Кроме того, $\pi(x_1)E^{(3)}_{2,1}(-s)$ состоит из 0, 1 и -1. Тогда, рассуждая аналогичным образом, получаем, что $\pi(x_1)E^{(3)}_{2,1}(-s) \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, а значит $\pi(x_1) \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$.

Таким образом, для доказательства утверждения леммы для x нам осталось показать, что $z = z_{11,14} \in \mathrm{ESp}_{2n}(R)$, что следует из следующего равенства:

$$z_{i,j} = (E^{(1)}_{i,i}(-1)E^{(2)}_{i,i}(2))^2 \cdot E^{(2)}_{i,i}(1)E^{(2)}_{i,j}(s)E^{(1)}_{i,j}(-s^{-1})E^{(2)}_{i,i}(-1)E^{(2)}_{i,j}(s). \tag{10}$$

□

Для доказательства теоремы 1 нам осталось проверить справедливость обратного включения.

Теорема 2. *Определим x и y согласно* (3)–(5) *при $p = s$, $q = s^{-1}$. Тогда* $\mathrm{ESp}_{2n}(R) \subseteq \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\langle x, y\rangle$ содержит все образующие (1) группы $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$. Мы будем последовательно строить элементы из $\langle x, y\rangle$. В частности, ниже все матрицы g_i будут по построению из $\langle x, y\rangle$. Вначале мы докажем, что всевозможные матрицы вида $E^{(3)}_{i,j}(a)$, где $a \in R$, принадлежат $\langle x, y\rangle$.

Напомним, что $\pi(\mathrm{Alt}(B)) \subseteq \langle x, y\rangle$ по лемме 6. Далее мы будем постоянно пользоваться этим фактом, не оговаривая его специально. Из определения x_1 и $h_{1,2}$ следует, что $x_1h_{1,2} = x_1h^{-1}_{1,2} \in \mathrm{Sym}(B)$. Значит, можно выбрать такую перестановку $\alpha \in \mathrm{Alt}(B)$, что $\alpha x_1 = w^{\eta}_{3,4}h_{1,2} = h_{1,2}w^{\eta}_{3,4}$, где $\eta = 0$ или 1 в зависимости от четности перестановки $x_1h_{1,2}$. Значит,

$$\pi(h_{1,2})\pi(w^{\eta}_{3,4})z_{11,14} = \pi(\alpha x_1)z = \pi(\alpha)x \in \langle x, y\rangle\,.$$

Тогда, сопрягая $\pi(\alpha)x$ при помощи $\pi(\beta)$, где β — подходящая перестановка из $\mathrm{Alt}(B)$, получаем, что

$$\begin{gathered}\pi(h_{i_1,j_1})\pi(w^{\eta}_{i_2,j_2})z_{i_3,j_3} \in \langle x, y\rangle \quad \text{для всех} \\ \text{попарно различных } 1 \le i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3 \le n.\end{gathered} \tag{11}$$

Отметим, что сомножители $\pi(h_{i_1,j_1})$, $\pi(w^{\eta}_{i_2,j_2})$ и z_{i_3,j_3} из (11) коммутируют друг с другом, если все индексы попарно различны. Мы будем неоднократно использовать этот факт далее, не оговаривая его специально.

Далее будем использовать следующее соглашения для записи коммутаторов: $[U,V]=U^{-1}V^{-1}UV$. Рассмотрим матрицу, лежащую в $\langle x,y\rangle$ в силу (11):

$$g_1=[\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{2,3},\pi(h_{2,3})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}]=[z_{2,3},\pi(h_{2,3})]=(z_{2,3}\pi(h_{2,3}))^2.$$

Последнее равенство верно в силу того, что $\pi(h_{i,j})$ и $z_{i,j}$ — инволюции. Из определений $z_{2,3}$ и $h_{2,3}$ следует, что g_1 действует тождественно на $\langle v_i \mid i\neq 2,3,n+2,n+3\rangle$, а матрица сужения g_1 на подмодуль $M_1=\langle v_2,v_3,v_{n+2},v_{n+3}\rangle$ есть

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s^{-1}\\ s^{-1} & 0 & -s^{-1} & 0\\ 0 & -s & 0 & s^{-1}\\ s & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ s & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & s\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

То есть $\pi(d_2(-1)d_3(-1))=g_1\in\langle x,y\rangle$. Более того, сопрягая g_1 при помощи $\pi(\beta)$, где β — подходящая перестановка из $\mathrm{Alt}(B)$, нетрудно видеть, что

$$\pi(d_i(-1)d_j(-1))\in\langle x,y\rangle \text{ для всех } 1\leq i\neq j\leq n. \tag{12}$$

Так как $d_i(-1)h_{i,j}(s)=t_{i,j}(s)$, то перемножая подходящие матрицы вида (11) и (12), получаем, что

$$\begin{array}{l}\pi(d_{j_4}(-1))\pi(t_{i_1,j_1}(s))\pi(w^{\eta}_{i_2,j_2})z_{i_3,j_3}\in\langle x,y\rangle\,, \text{ где}\\ 1\leq i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3,j_4\leq n, \text{ и все индексы попарно различны.}\end{array} \tag{13}$$

Теперь построим следующие матрицы, содержащиеся в $\langle x,y\rangle$ в силу (11):

$$\begin{aligned} g_2 &= [\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{3,2},\pi(h_{1,2})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}]=[z_{3,2},\pi(h_{1,2})]=(z_{3,2}\pi(h_{1,2}))^2,\\ g_3 &= [\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{2,3},\pi(h_{1,2})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{4,5}]=[z_{2,3},\pi(h_{1,2})]=(z_{2,3}\pi(h_{1,2}))^2.\end{aligned}$$

В заключительных равенствах мы вновь пользуемся тем, что $z_{i,j}$ и $\pi(h_{i,j})$ — инволюции. Отметим, что g_2 и g_3 действуют тождественно на

$$\langle v_i \mid i\notin\{1,2,3,n+1,n+2,n+3\}\rangle,$$

а их сужения на $M_2 = \langle v_1, v_2, v_3, v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3} \rangle$ задаются матрицами $(A_7A_9)^2$ и $(A_8A_9)^2$, где A_7, A_8, A_9 — матрицы сужения на M_2, соответственно, $z_{3,2}$, $z_{2,3}$ и $\pi(h_{1,2})$, то есть

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1} & 0 & 0 & -s^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 & s^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^{-1} \\ 0 & s^{-1} & 0 & 0 & -s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & s^{-1} \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи несложных матричных вычислений проверяется, что

$$\begin{aligned} g_2 &= I_{2n} + se_{2,1} - se_{n+1,n+2} + s^2e_{n+3,1} + s^2e_{n+1,3}, \\ g_3 &= I_{2n} + se_{2,1} - se_{n+1,n+2} - e_{3,1} + e_{n+1,n+3} - s^2e_{n+3,1} - s^2e_{n+1,3}, \end{aligned}$$

а значит, в $\langle x, y \rangle$ содержится и

$$g_4 = g_3g_2 = I_{2n} + 2se_{2,1} - 2se_{n+1,n+2} - e_{3,1} + e_{n+1,n+3} + s^2e_{n+1,1}.$$

Используя тот факт, что в $\langle x, y \rangle$ содержатся матрицы вида (11), получаем, что $\langle x, y \rangle$ принадлежит и

$$\begin{aligned} g_5 &= \left(\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{3,2}\right) g_4 \left(\pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{3,2}\right)^{-1} = z_{3,2}g_4z_{3,2}^{-1} \\ &= I_{2n} + s^{-1}(e_{n+1,n+2} - e_{2,1}) + s^2e_{n+1,1} - s(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}) \\ &\qquad -2s^2(e_{n+3,1} + e_{n+1,3}). \end{aligned}$$

Второе равенство следует из того, что g_4 коммутирует с $\pi(h_{i,j})$ и $\pi(w_{i,j})$ при $i, j > 3$.

Далее, из того, что в $\langle x,y\rangle$ содержатся матрицы вида (13) и g_5, следует, что $\langle x,y\rangle$ принадлежат и следующие матрицы:

$$\begin{aligned} g_6 &= [g_5, \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w_{6,7}^{\eta})z_{4,5}] = [g_5, \pi(t_{2,1}(s))], \\ g_7 &= [g_5, \pi(d_8(-1))\pi(t_{3,2}(s))\pi(w_{6,7}^{\eta})z_{4,5}] = [g_5, \pi(t_{3,2}(s))]. \end{aligned}$$

Последние равенства в каждой строке верны в силу того, что g_5 действует тождественно на $\langle v_i \mid i \notin \{1,2,3,n+1,n+2,n+3\}\rangle$. Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned} g_6 &= I_{2n} - 2s^2 e_{n+1,1} = E_{1,1}^{(2)}(-2s^2), \\ g_7 &= I_{2n} + e_{3,1} - e_{n+1,n+3} + 4s^2 e_{n+1,1} - 2s^3(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}). \end{aligned}$$

Сопрягая g_6 при помощи $\pi(\beta)$, где β — подходящая перестановка из $\mathrm{Alt}(B)$, получаем, что

$$E_{i,i}^{(2)}(-2s^2) \in \langle x,y\rangle\,, \text{ для всех } 1 \le i \le n. \tag{14}$$

Таким образом, из того, что $\langle x,y\rangle$ содержит матрицы вида (13) и (14), следует, что

$$\begin{aligned} g_8 &= [E_{2,2}^{(2)}(-2s^2), \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w_{6,7}^{\epsilon})z_{4,5}] = \\ &= [E_{2,2}^{(2)}(-2s^2), \pi(t_{2,1}(s))], \\ g_9 &= [\pi(d_8(-1))\pi(t_{3,2}(s))\pi(w_{6,7}^{\epsilon})z_{4,5}, \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w_{6,7}^{\epsilon})z_{4,5}] = \\ &= [\pi(t_{3,2}(s)), \pi(t_{2,1}(s))] \end{aligned}$$

принадлежат $\langle x,y\rangle$. Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} g_8 &= I_{2n} - 2s^4 \cdot e_{n+1,1} - 2s^3 \cdot (e_{n+2,1} + e_{n+1,2}), \\ g_9 &= \pi(t_{3,1}(s^2)) = E_{3,1}^{(3)}(s^2). \end{aligned}$$

Кроме того, в $\langle x,y\rangle$ содержится матрица

$$\begin{aligned} g_{10} &= g_9 \cdot [g_3, \pi(d_8(-1))\pi(t_{3,2}(s))\pi(w_{6,7}^{\epsilon})z_{4,5}] = g_9 \cdot [g_3, \pi(t_{3,2}(s))] \\ &= I_{2n} - 2s^4 e_{n+1,1} - s^3(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}). \end{aligned}$$

Второе равенство следует из того, что g_3 коммутирует с $\pi(d_8(-1))$, $\pi(w_{6,7}^{\epsilon})$ и $z_{4,5}$.

Наконец, используя полученные выше матрицы из $\langle x,y\rangle$, мы можем построить матрицу

$$g_{11} = g_7 g_6^2 (g_{10} g_8^{-1})^2 = E_{3,1}^{(3)}(1).$$

Сопрягая g_{11} при помощи $\pi(\beta)$, где β — подходящие перестановки из $\mathrm{Alt}(B)$, получаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(1) = \pi(t_{i,j}(1)) \in \langle x, y\rangle\,, \text{ для всех } 1 \le i \ne j \le n. \tag{15}$$

Так как в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся всевозможные матрицы вида (13) и (15), то в $\langle x, y\rangle$ содержится

$$\begin{aligned}&[\pi(t_{3,2}(1)), \pi(d_8(-1))\pi(t_{2,1}(s))\pi(w^{\epsilon}_{6,7})z_{4,5}] = [\pi(t_{3,2}(1)), \pi(t_{2,1}(s))] =\\ &\qquad = \pi([t_{3,2}(1), t_{2,1}(s)]) = \pi(t_{3,1}(s)) = E^{(3)}_{3,1}(s).\end{aligned}$$

Сопрягая $E^{(3)}_{3,1}(s)$ при помощи $\pi(\beta)$ для подходящих $\beta \in \mathrm{Alt}(B)$, получаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(s) = \pi(t_{i,j}(s)) \in \langle x, y\rangle\,, \text{ для всех } 1 \le i \ne j \le n. \tag{16}$$

Положим

$$\begin{aligned} g_{12} &= [g_5, E^{(3)}_{3,2}(1)]\\ &= I_{2n} + s^{-1}e_{3,1} - s^{-1}e_{n+1,n+3} + 4se_{n+1,1} - 2s^2(e_{n+2,1} + e_{n+1,2}),\\ g_{13} &= [g_5, E^{(3)}_{2,1}(1)] = I_{2n} - 2se_{n+1,1} = E^{(2)}_{1,1}(-2s).\end{aligned}$$

Так как $E^{(3)}_{3,2}(1), E^{(3)}_{2,1}(1) \in \langle x, y\rangle$ (см. (15)) и $g_5 \in \langle x, y\rangle$, то и $g_{12}, g_{13} \in \langle x, y\rangle$. Сопрягая $g_{13}^{-1} = E^{(2)}_{1,1}(2s)$ при помощи $\pi(\beta)$ для подходящих $\beta \in \mathrm{Alt}(B)$, получаем, что

$$E^{(2)}_{i,i}(2s) \in \langle x, y\rangle \text{ для всех } 1 \le i \le n. \tag{17}$$

Кроме того, используя (16), получаем, что $\langle x, y\rangle$ содержит

$$g_2 \cdot (E^{(3)}_{2,1}(s))^{-1} = g_2 \cdot E^{(3)}_{2,1}(-s) = I_{2n} + s^2(e_{n+1,3} + e_{n+3,1}) = E^{(2)}_{1,3}(s^2).$$

Сопрягая $E^{(2)}_{1,3}(s^2)$ при помощи $\pi(\beta)$ для подходящих $\beta \in \mathrm{Alt}(B)$, получаем, что

$$E^{(2)}_{i,j}(s^2) \in \langle x, y\rangle \text{ для всех } 1 \le i \ne j \le n. \tag{18}$$

Отметим, что

$$g_{12}g_{13}^2(E^{(2)}_{2,1}(s^2))^2 = I_{2n} + s^{-1}e_{3,1} - s^{-1}e_{n+1,3} = E^{(3)}_{3,1}(s^{-1}),$$

а значит, $E^{(3)}_{3,1}(s^{-1}) \in \langle x, y\rangle$. Как и выше, сопрягая при помощи подходящих $\pi(\beta)$, заключаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(s^{-1}) = \pi(t_{i,j}(s^{-1})) \in \langle x, y\rangle \text{ для всех } 1 \le i \ne j \le n. \tag{19}$$

Напомним хорошо известное коммутаторное тождество для элементарных трансвекций: $[t_{i,j}(u), t_{j,k}(v)] = t_{i,k}(uv)$ для всех попарно различных индексов i, j и k. Используя его вместе с (16) и (19), заключаем, что

$$E^{(3)}_{i,j}(s^k) = \pi(t_{i,j}(s^k)) \in \langle x, y\rangle \text{ для всех } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ и } k \in \mathbb{Z}.$$

Кроме того, $(E^{(3)}_{i,j}(s^k))^{-1} = E^{(3)}_{i,j}(-s^k)$, $E^{(3)}_{i,j}(u)E^{(3)}_{i,j}(v) = E^{(3)}_{i,j}(u+v)$. Так как по предположению теоремы R аддитивно порождается множеством (2), то

$$E^{(3)}_{i,j}(a) \in \langle x, y\rangle \text{ для всех } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ и всех } a \in R. \tag{20}$$

Далее покажем, что всевозможные матрицы $E^{(2)}_{i,j}(a)$, где $1 \leq i, j \leq n$, $a \in R$, также содержатся в $\langle x, y\rangle$. Заметим, что

$$g_4 E^{(3)}_{3,1}(1)E^{(3)}_{2,1}(-2s) = I_{2n} + s^2 e_{n+1,1} = E^{(2)}_{1,1}(s^2).$$

Отсюда и из (20) следует, что $E^{(2)}_{1,1}(s^2) \in \langle x, y\rangle$. Сопрягая $E^{(2)}_{1,1}(s^2)$ при помощи $\pi(\beta)$ для подходящих $\beta \in \mathrm{Alt}(B)$, получаем, что

$$E^{(2)}_{i,i}(s^2) \in \langle x, y\rangle \text{ для всех } 1 \leq i \leq n. \tag{21}$$

Кроме того, несложно проверить, что

$$E^{(3)}_{1,2}(1)E^{(3)}_{2,1}(s-1)E^{(3)}_{1,2}(-s^{-1})E^{(3)}_{2,1}(s-s^2) = \pi(d_1(s)d_2(s^{-1})) \in \langle x, y\rangle .$$

Отсюда и из (20) следует, что $\pi(d_1(s^k)d_2(s^{-k})) \in \langle x, y\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Вновь сопрягая при помощи подходящих $\pi(\beta)$, получаем, что

$$\pi(d_i(s^k)d_j(s^{-k})) \in \langle x, y\rangle \text{ для всех } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ и } k \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

При помощи несложных матричных вычислений проверяется, что

$$\begin{aligned} E^{(2)}_{i,i}(as^{-2k}) &= \pi(d_i(s^k)d_j(s^{-k}))E^{(2)}_{i,i}(a)\pi(d_i(s^{-k})d_j(s^k)), \\ E^{(2)}_{i,j}(as^{-k}) &= \pi(d_i(s^k)d_\ell(s^{-k}))E^{(2)}_{i,j}(a)\pi(d_i(s^{-k})d_\ell(s^k)), \end{aligned}$$

где $1 \leq i, j, \ell \leq n$ и попарно различны, $a \in R$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда, используя эти соотношения, вместе с (17), (18), (21) и (22), получаем, что в группе $\langle x, y\rangle$ содержатся всевозможные матрицы вида $E^{(2)}_{i,j}(s^k)$, где $1 \leq i \neq j \leq n$ и $k \in \mathbb{Z}$, $E^{(2)}_{i,i}(s^{2k})$ и $E^{(2)}_{i,i}(2s^{2k-1})$, где $1 \leq i \leq n$ и $k \in \mathbb{Z}$, а также обратные к ним $E^{(2)}_{i,j}(-s^k)$, $E^{(2)}_{i,i}(-s^{2k})$ и $E^{(2)}_{i,i}(-2s^{2k-1})$. Учитывая, что R аддитивно порождается множеством (2), мы получаем, что

$$E^{(2)}_{i,j}(a) \in \langle x, y\rangle , \text{ для всех } a \in R \text{ и } 1 \leq i, j \leq n. \tag{23}$$

Осталось проверить, что всевозможные матрицы $E^{(1)}_{i,j}(a)$, где $a \in R$, принадлежат $\langle x, y\rangle$. Положим

$$g_{16} = \pi(h_{8,9})\pi(w^{\eta}_{6,7})z_{2,3}.$$

Заметим, что справедливы следующие матричные равенства, где $a \in R$:

$$\begin{aligned} g_{16}E^{(3)}_{1,2}(as)g_{16}^{-1} &= z_{2,3}E^{(3)}_{1,2}(as)z_{2,3}^{-1} = E^{(1)}_{1,3}(a), \\ g_{16}E^{(2)}_{2,2}(-as^2)g_{16}^{-1} &= z_{2,3}E^{(2)}_{2,2}(-as^2)z_{2,3}^{-1} = E^{(1)}_{3,3}(a). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что g_{16}, $E^{(3)}_{1,2}(as)$, $E^{(2)}_{2,2}(-as^2)$ лежат в $\langle x, y\rangle$ согласно (11), (20), (23). Значит и $E^{(1)}_{1,3}(a)$, $E^{(1)}_{3,3}(a) \in \langle x, y\rangle$. Сопрягая эти матрицы при помощи $\pi(\beta)$ для подходящих $\beta \in \mathrm{Alt}(B)$, получаем, что $E^{(1)}_{i,j}(a) \in \langle x, y\rangle$, где $1 \leq i, j \leq n$ и $a \in R$. Это завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 1 следует из леммы 7 и теоремы 2.

5 Заключение

В заключение, не приводя подробных доказательств, отметим, что также справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1 и $s \in R^*$. Дополнительно предположим, что R аддитивно порождается множеством*

$$\left\{2s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Тогда при $n \geq 25$ группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является $(2,3)$–порожденной.

Доказательство теоремы 3 в целом повторяет доказательство теоремы 1, за исключением того, что в определении z и $z_{i,j}$ следует взять $p = s$ и $q = s^{-2}$. При этом равенство (10) в доказательстве аналога леммы 7 заменяется на следующее:

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= (E^{(1)}_{i,i}(s^{-1})E^{(2)}_{i,i}(s)E^{(1)}_{i,i}(-s^{-1})E^{(2)}_{i,i}(2s))^2E^{(1)}_{j,j}(s^{-3}) \\ &\quad \times E^{(2)}_{i,i}(s^{-1})E^{(2)}_{i,j}(s)E^{(1)}_{i,j}(-s^{-1})E^{(2)}_{i,j}(s). \end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть R — коммутативное кольцо с 1 и $s \in R^*$. Дополнительно предположим, что R аддитивное порождается множеством $\left\{s^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Тогда при $n \geq 37$ группа $\mathrm{ESp}_{2n}(R)$ $(2,3)$–порождена.*

В качестве образующей x для доказательства этого утверждения можно взять

$$\pi(x_1) z_{11,14}(s, s^{-1}) z_{23,26}(s, s^{-2}),$$

где $x_1 \in \mathrm{GL}_n(R)$ — матрица из доказательства теоремы 1, а оператор $z_{i,j}(p,q) \in \mathrm{GL}_{2n}(R)$ определен следующим образом: $z_{i,j}(p,q)$ действует тождественно на всех v_k, $k \notin \{i, j, n+i, n+j\}$, а на подмодуле $\langle v_i, v_j, v_{n+i}, v_{n+j} \rangle$ в R^{2n} действует как оператор, заданный матрицей A_1, где A_1 определена в (4).

Кроме того, доказательства теорем 1, 3 и 4 практически дословно переносятся на случай элементарных гиперболических унитарных групп над кольцом $\mathbb{Z}[s, s^{-1}]$. В формулировке следующей теоремы мы используем обозначения из [4, глава 5].

Теорема 5. *Пусть $R = \mathbb{Z}[s, s^{-1}]$. Рассмотрим в $(R, +)$ две подгруппы*

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \left\langle \left\{ s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right\rangle, \\
\Lambda_2 &= \left\langle \left\{ 2s^{2k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ s^{2k-1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Тогда при $n \geq 25$ группы $\mathrm{EU}_{2n}(R, \Lambda_1, \mathrm{id}_R, -1)$ и $\mathrm{EU}_{2n}(R, \Lambda_2, \mathrm{id}_R, -1)$ являются $(2,3)$–порожденными, а при $n \geq 37$ группа $\mathrm{EU}_{2n}(R, R, \mathrm{id}_R, -1) = \mathrm{ESp}_{2n}(R)$ является $(2,3)$–порожденной.

Список литературы

[1] Ленг С., Введение в теорию модулярных форм, М.: Мир, 1979.

[2] Di Martino L., Vavilov N., (2,3)-generation of SL(n, q). I. Cases n = 5, 6, 7, Comm. Algebra, 1994, 22(4), 1321–1347.

[3] Di Martino L., Vavilov N., (2,3)-generation of SL(n, q). II. Cases n $\geq$ 8, Comm. Algebra, 1996, 24, 487–515.

[4] Hahn A.J., O'Meara O.T., The classical groups and K-theory, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 291, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] Liebeck M.W., Shalev A., Classical groups, probabilistic methods, and the (2, 3)-generation problem, Ann. of Math. (2), 1996, 144, 77–125.

[6] Lucchini A., Tamburini M.C., Classical groups of large rank as Hurwitz groups, J. Algebra, 1999, 219(2), 531–546.

[7] Sanchini P., Tamburini M.C., Constructive (2,3)-generation: a permutational approach, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 1994, 64, 141–158.

[8] Tamburini M. C. Generation of certain simple groups by elements of small order, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 1987, 121, 21–27.

[9] Tamburini M. C., Wilson J. S., Gavioli N., On the (2, 3)-generation on some classical groups. I, J. Algebra, 1994, 168(1), 353–370.

[10] Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A., On (2,3)-generation of low-dimensional symplectic groups over the integers. Communications in Algebra, 2010, 38(9), 3469—3483.

[11] Vasilyev V. L., Vsemirnov M. A., The group $\mathrm{Sp}_{10}(\mathbb{Z})$ is (2,3)-generated. Central European Journal of Mathematics, 2011, 9(1), 36–49.

[12] Vsemirnov M. A., Is the group SL(6,Z) (2, 3)-generated? Zap. Nauchn. Semin. POMI, 2006, 330, 101-130; English translation: J. Math. Sci., 2007, 140(5), 660–675.

[13] Vsemirnov M. A., The group GL(6, Z) is (2, 3)-generated, J. Group Theory, 2007, 10(4), 425–430.

[14] Vsemirnov M. A., On (2,3)-generation of matrix groups over the ring of integers, St. Petersburg Math. J., 2008, 19(6), 883–910.

[15] Vsemirnov M. A., On (2,3)-generation of matrix groups over the ring of integers. II, to appear in St. Petersburg Math. J.

[16] Wielandt H., Finite permutation groups. Academic Press, 1964