ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 02/2012

ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

М. А. Пахнин, Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,
Санкт-Петербург, 198504, Россия
e-mail: mpakhnin@yandex.ru
e-mail: suslina@list.ru

АННОТАЦИЯ

В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, где $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^2, рассматривается матричный эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ второго порядка при условии Дирихле на границе. Здесь $\varepsilon>0$ — малый параметр, коэффициенты оператора периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Найдена аппроксимация оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с погрешностью $O(\sqrt{\varepsilon})$. Аппроксимация дается суммой оператора $(\mathcal{A}_D^0)^{-1}$ и корректора первого порядка, где $\mathcal{A}_D^0$ — эффективный оператор с постоянными коэффициентами при условии Дирихле на границе.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и программы поддержки ведущих научных школ.

Введение

Работа относится к теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения в пределе малого периода посвящена обширная литература. Укажем, в первую очередь, книги [BeLP], [BaPa], [ZhKO].

0.1. Теоретико-операторный подход к задачам усреднения. В серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1-5] был предложен и развит новый теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднений. С помощью этого подхода были получены так называемые операторные оценки погрешности в задачах гомогенизации для эллиптических дифференциальных операторов (ДО). Рассматривались матричные эллиптические ДО, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающие факторизацию вида $\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$, $\varepsilon > 0$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — $(m \times m)$-матрица, ограниченная, положительно определенная и периодическая относительно некоторой решетки Γ. Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ. Предполагается, что $m \geqslant n$, а $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный однородный ДО первого порядка такой, что $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Простейший пример оператора такого вида представляет скалярный эллиптический оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$. Оператор теории упругости также допускает запись в нужном виде. Подробнее о примерах ДО рассматриваемого типа см. [BSu2].

В работах [BSu1-5] изучался вопрос о поведении решения уравнения $\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, при малом ε. При $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ „усреднённого“ уравнения $\mathcal{A}^0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}$. Здесь $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор* с постоянной эффективной матрицей g^0. В [BSu1,2] была установлена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

В операторных терминах это означает, что резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится при $\varepsilon \to 0$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора, причем выполнена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.1}$$

В дальнейшем в работах [BSu3,4] была получена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. (Здесь мы не останавливаемся на этом подробнее.)

В [BSu5] была найдена аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (что соответствует аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в энергетической норме):

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — корректор. Оператор $K(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, и потому зависит от ε.

Оценки вида (0.1), (0.2), получившие название *операторных оценок погрешности*, точны по порядку; постоянные в оценках контролируются явно через данные задачи. Метод работ [BSu1–5] основан на применении масштабного преобразования и теории Флоке-Блоха. Оператор $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ раскладывается в прямой интеграл по семейству операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующих в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и зависящих от параметра $\mathbf{k}$ (квазиимпульса). Операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ имеет дискретный спектр и аналитически зависит от $\mathbf{k}$. Оно изучается методами аналитической теории возмущений. Было выяснено, что для построения эффективного оператора и получения оценок погрешности существенную роль играют лишь спектральные характеристики оператора $\mathcal{A}$ вблизи края спектра. Это означает, что гомогенизация является проявлением спектрального порогового эффекта.

0.2. Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах усреднения был предложен В. В. Жиковым. В работах [Zh1, Zh2, ZhPas, Pas] рассматривались скалярный эллиптический оператор $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ (с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$) и система теории упругости. Были получены оценки вида (0.1), (0.2) для соответствующих задач в $\mathbb{R}^d$. Метод основан на анализе первого приближения к решению и введении дополнительного параметра (сдвига на вектор $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$). Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ изучались задачи в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. При этом аппроксимация решений в классе $H^1(\mathcal{O})$ выводилась из соответствующего результата в $\mathbb{R}^d$. За счет влияния „пограничного слоя“ оценки в ограниченной области ухудшаются и получается погрешность $O(\varepsilon^{1/2})$. Оценка вида $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ получается загрублением из аппроксимации решения в $H^1(\mathcal{O})$.

Близкие результаты для оператора $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана были установлены в работах Гризо [Gr1, Gr2] с помощью „unfolding“-метода.

0.3. Основные результаты. В настоящей работе изучаются матричные ДО $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с границей класса C^2. Оператор $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ задан дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Эффективный оператор $\mathcal{A}_D^0$ задан выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле. Изучается поведение решений уравнения $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, при малом ε. Устанавливаются оценки H^1-нормы разности решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ и его первого приближения с учетом корректора. Загрублением этого результата получается оценка для $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}$. Здесь $\mathbf{u}_0$ — решение уравнения $\mathcal{A}_D^0\mathbf{u}_0 = \mathbf{F}$.

Основные результаты работы — теоремы 6.1 и 7.1. В операторных терминах, установлены оценки

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}, \tag{0.3}$$

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{0.4}$$

Здесь $K_D(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. При этом корректор имеет различную форму в зависимости от свойств периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ вспомогательной задачи (1.5). Если Λ ограничено, корректор имеет стандартный вид (теорема 6.1). В общем случае корректор содержит вспомогательный сглаживающий оператор (теорема 7.1). Помимо аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ получена также аппроксимация потока $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$.

0.4. Метод основан на использовании результатов (0.1), (0.2) для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$, полученных в [BSu2,5], и на приемах, предложенных в [Zh2], [ZhPas], которые позволяют выводить оценку вида (0.3) из (0.1), (0.2). Основные трудности связаны с оцениванием „поправки“ $\mathbf{w}_\varepsilon$ — решения задачи $\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon = 0$ в $\mathcal{O}$, $\mathbf{w}_\varepsilon = \varepsilon K_D(\varepsilon)\mathbf{F}$ на $\partial\mathcal{O}$. При этом мы не можем опираться на специфические факты теории скалярных эллиптических уравнений, поскольку изучаем достаточно общий класс матричных эллиптических ДО.

0.5. Оценки погрешности в $L_2(\mathcal{O})$. Следует отметить, что оценка (0.4) является довольно грубым следствием из (0.3). Возникает естественный вопрос об улучшении оценки (0.4). В работе [ZhPas] для скалярного эллиптического оператора $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ (с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$) была получена оценка для $\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2\to L_2}$ порядка $\varepsilon^{\frac{d}{2d-2}}$ при $d \geqslant 3$ и порядка $\varepsilon|\log\varepsilon|$ при $d=2$. В доказательстве существенно использовался принцип максимума, специфический для скалярных эллиптических уравнений.

На основе результатов и техники настоящей статьи одному из авторов удалось получить *точную по порядку операторную оценку погрешности*

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon.$$

Доказательству этого результата посвящена отдельная статья [Su].

0.6. Структура статьи. В работе семь параграфов. В §1 введен класс рассматриваемых операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Дано описание эффективного оператора и корректора. Сформулированы нужные для дальнейшего результаты из [BSu2,5]. В §2 описаны свойства матрицы-функции Λ. В §3 вводится сглаживание по Стеклову и устанавливается еще одна теорема для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$. §4 содержит постановку задачи в ограниченной области и описание „усредненной“ задачи. В §5 содержатся вспомогательные утверждения, необходимые для дальнейшего исследования. Основные результаты работы сформулированы и доказаны в §6, 7. При этом в §6 изучается случай, когда $\Lambda \in L_\infty$, а в §7 рассматривается общий случай.

0.7. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(n\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора в $\mathbb{C}^n$. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций.

§1. Задача усреднения для периодического эллиптического оператора в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

В этом параграфе мы описываем класс рассматриваемых матричных эллиптических операторов и формулируем результаты об усреднении для задачи в $\mathbb{R}^d$, полученные в [BSu2,5].

1.1. Решетки в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d\in\mathbb{R}^d$:

$$\Gamma = \{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d:\ \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j\mathbf{a}_j,\quad \nu_j\in\mathbb{Z}\},$$

и пусть Ω — (элементарная) ячейка решетки Γ:

$$\Omega := \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \tau_j\mathbf{a}_j,\quad -\frac{1}{2}<\tau_j<\frac{1}{2}\}.$$

Будем пользоваться обозначением $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$.

Двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$ базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$ определяется из соотношений $\langle\mathbf{b}_i,\mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_{ij}$. Этот базис порождает *решетку*

$$\widetilde{\Gamma} = \{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d:\ \mathbf{b} = \sum_{i=1}^d \rho_i\mathbf{b}_i,\quad \rho_i\in\mathbb{Z}\},$$

двойственную к решетке Γ. Нам понадобится *центральная зона Бриллюэна*

$$\widetilde{\Omega} = \{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d:\ |\mathbf{k}|<|\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\quad 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}\},$$

которая является фундаментальной областью для $\widetilde{\Gamma}$.

Ниже через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $\varphi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, обозначим

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}),\quad \varepsilon>0.$$

1.2. Класс операторов. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается ДО $\mathcal{A}_\varepsilon$ второго порядка, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

Здесь измеримая матрица-функция $g(\mathbf{x})$ размера $m\times m$ (вообще говоря, с комплексными элементами) предполагается периодической относительно решётки Γ, равномерно положительно определенной и ограниченной. Далее, $b(\mathbf{D})$ — однородный $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l, \tag{1.2}$$

где b_l — постоянные матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $m \geqslant n$ и $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $\forall \boldsymbol{\xi} \neq 0$. Это условие равносильно существованию постоянных α_0 и α_1 таких, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.3}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ даётся через соответствующую квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

При сделанных предположениях эта форма замкнута в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и неотрицательна. Используя преобразование Фурье и условие (1.3), легко убедиться, что выполнены оценки

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.4}$$

где $c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$, $c_1 = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$.

Простейший пример оператора (1.1) — это скалярный эллиптический оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$. В этом случае $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. Очевидно, условие (1.3) выполнено при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Оператор теории упругости также допускает запись в виде (1.1) при $n = d$, $m = d(d+1)/2$. Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [BSu2].

1.3. Эффективный оператор. Для формулировки результатов нам нужно описать эффективный оператор $\mathcal{A}^0$.

Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — матрица-функция размера $n\times m$, являющаяся (слабым) Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.5}$$

Иными словами, для столбцов $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,m$, матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$ верно следующее: $\mathbf{v}_j \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, справедливо тождество

$$\int_\Omega \langle g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x})+\mathbf{e}_j), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}=0, \quad \forall \boldsymbol{\eta}\in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),$$

и $\int_\Omega \mathbf{v}_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0$. Здесь $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ — стандартные орты в $\mathbb{C}^m$.

Так называемая *эффективная матрица* g^0 размера $m\times m$ строится по следующему правилу:

$$g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega g(\mathbf{x})\left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m\right)\, d\mathbf{x}. \tag{1.6}$$

Оказывается, что матрица g^0 положительна. *Эффективный оператор* $\mathcal{A}^0$ для оператора (1.1) задается дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$$

на области определения $H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

1.4. Свойства эффективной матрицы. Следующие свойства эффективной матрицы установлены в [BSu2, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 1.1. *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g}\leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.7}$$

Здесь

$$\overline{g}=|\Omega|^{-1}\int_\Omega g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad \underline{g}=\left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}\right)^{-1}.$$

При $m=n$ эффективная матрица g^0 совпадает с $\underline{g}$.

Оценки (1.7) известны в теории усреднений для конкретных ДО как вилка Фойгта-Рейсса. Выделим случаи, когда в (1.7) реализуется верхняя или нижняя грань. Следующие утверждения получены в [BSu2, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.2. *Равенство $g^0=\overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^*\mathbf{g}_k(\mathbf{x})=0, \quad k=1,\dots,m, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k=1,\dots,m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 1.3. *Равенство $g^0=\underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x})=\mathbf{l}_k^0+b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k,\ \ \mathbf{l}_k^0\in\mathbb{C}^m,\ \ \mathbf{w}_k\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \ k=1,\dots,m, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k=1,\dots,m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

Очевидно, из (1.7) вытекают оценки нормы для матриц g^0 и $(g^0)^{-1}$:

$$|g^0|\leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}|\leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.10}$$

1.5. Сглаживающий оператор. Нам понадобится вспомогательный сглаживающий оператор Π_ε, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ по формуле

$$\left(\Pi_\varepsilon \mathbf{u}\right)(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}, \tag{1.11}$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Иными словами, Π_ε — псевдодифференциальный оператор, символ которого есть характеристическая функция $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\widetilde{\Omega}/\varepsilon$. Очевидно, что Π_ε — ортопроектор в каждом пространстве $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, $s \geqslant 0$. Кроме того, $D^\alpha \Pi_\varepsilon \mathbf{u} = \Pi_\varepsilon D^\alpha \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ для любого мультииндекса α, такого что $|\alpha| \leqslant s$. Ниже нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1.4. *Для любой функции $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ выполнена оценка*

$$\|\Pi_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$.

Доказательство. При $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \setminus (\widetilde{\Omega}/\varepsilon)$ выполнено $|\boldsymbol{\xi}| \geqslant r_0 \varepsilon^{-1}$. Следовательно,

$$\|\Pi_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus (\widetilde{\Omega}/\varepsilon)} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}$$

$$\leqslant \varepsilon^2 r_0^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \varepsilon^2 r_0^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \quad \bullet$$

В [BSu5, п. 10.2] установлено следующее свойство.

Предложение 1.5. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, причем $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $[f^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем*

$$\|[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.6. Результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим эллиптическое уравнение в $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}, \tag{1.12}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Известно, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к решению „усреднённого“ уравнения

$$\mathcal{A}^0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}. \tag{1.13}$$

В работе [BSu2, гл. 4, теорема 2.1] установлена следующая теорема.

Теорема 1.6. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение уравнения* (1.12) *и $\mathbf{u}_0$ — решение уравнения* (1.13). *Справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \ C_1 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Постоянная C_1 зависит только от норм $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от констант α_0, α_1 из (1.3) *и от параметров решётки* Γ.

Для того, чтобы получить аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в пространстве $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, необходимо учесть корректор первого порядка. Положим

$$K(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon]\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}. \tag{1.14}$$

Здесь $[\Lambda^\varepsilon]$ — оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, а Π_ε — сглаживающий оператор, определенный в (1.11). Оператор (1.14) ограничен как оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Это легко проверить с помощью предложения 1.5, учитывая, что $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. При этом $\varepsilon\|K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(1)$.

„Первое приближение" к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ имеет вид

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K(\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{1.15}$$

В [BSu5, теорема 10.6] установлена следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение уравнения* (1.12) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение уравнения* (1.13). *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (1.15). *Тогда*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_2\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.16}$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_2\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Постоянная C_2 *зависит только от* $m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решётки* Γ.

Выделим случай, когда корректор обращается в ноль. Следующее утверждение вытекает из теоремы 1.7, предложения 1.2 и уравнения (1.5).

Предложение 1.8. *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.8), *то* $\Lambda = 0$ *и* $K(\varepsilon) = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_2\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях относительно свойств решения задачи (1.5), сглаживающий оператор Π_ε в выражении (1.14) для корректора может быть устранен (заменен тождественным оператором). Наложим следующее условие.

Условие 1.9. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.5) *ограничено*: $\Lambda \in L_\infty$.

Положим

$$K^0(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}.$$

В [BSu5] показано, что при условии 1.9 оператор $K^0(\varepsilon)$ ограничен как оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. (Этот факт легко усмотреть также из следствия 2.4, установленного ниже.)

Рассмотрим вместо (1.15) другое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K^0(\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{1.17}$$

В [BSu5, теорема 10.8] установлена следующая теорема.

Теорема 1.10. *Пусть выполнено условие* 1.9. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение уравнения* (1.12), *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение уравнения* (1.13). *Пусть функция* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *определена в* (1.17). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_3\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Постоянная C_3 *зависит только от* $m, d, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *а также от нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

В некоторых случаях условие 1.9 выполнено автоматически. Следующее утверждение проверено в [BSu5, лемма 8.7].

Предложение 1.11. *Условие* 1.9 *заведомо выполнено, если имеет место хотя бы одно из следующих предположений*:

1°. *размерность не превосходит двух, т. е.* $d \leqslant 2$;

2°. *оператор действует в* $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, *и имеет вид* $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *вещественная матрица*;

3°. *размерность произвольна и* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнено* (1.9).

Отметим, что выполнение условия 1.9 можно обеспечить и за счет предположения о некоторой гладкости матрицы $g(\mathbf{x})$.

§2. Свойства матрицы-функции Λ

Следующая лемма устанавливается по аналогии с доказательством леммы 8.3 из [BSu5].

Лемма 2.1. *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическое решение задачи* (1.5). *Тогда для любой функции* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\Lambda(\mathbf{x})|^2 |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u|^2\, d\mathbf{x}. \tag{2.1}$$

Постоянные β_1 *и* β_2 *определены ниже в* (2.12) *и зависят только от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$. В силу (1.5) для любой функции $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ такой, что $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = 0$ при $|\mathbf{x}| > r$ (для какого-либо $r > 0$), выполнено тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left\langle g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j \right), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \right\rangle \, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.2}$$

Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Положим $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_j(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2$. В силу (1.2) имеем:

$$b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \left(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) \right) |u(\mathbf{x})|^2 + \sum_{l=1}^d b_l \mathbf{v}_j(\mathbf{x}) D_l |u(\mathbf{x})|^2. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j \right), b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) \rangle |u|^2 \, d\mathbf{x}$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^{d} \langle g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j \right), b_l \mathbf{v}_j(\mathbf{x}) \rangle \left(D_l u \, \overline{u} + u \, D_l \overline{u} \right) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J := \int_{\mathbb{R}^d} \left| g^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j \right|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\mathbb{R}^d} \left\langle g^{1/2} \mathbf{e}_j, g^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j \right\rangle |u|^2 \, d\mathbf{x} \\ &- \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^{d} \langle g^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j, g^{1/2} b_l \mathbf{v}_j \rangle \left(D_l u \, \overline{u} + u \, D_l \overline{u} \right) \, d\mathbf{x} \\ &- \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^{d} \langle g \mathbf{e}_j, b_l \mathbf{v}_j \rangle \left(D_l u \, \overline{u} + u \, D_l \overline{u} \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Обозначим слагаемые в правой части через J_1, J_2, J_3. Первый член J_1 можно оценить следующим образом:

$$|J_1| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\left| g^{1/2} \mathbf{e}_j \right|^2 + \frac{1}{4} \left| g^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j \right|^2 \right) |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \|g\|_{L_\infty} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{4} J. \tag{2.5}$$

Далее, отметим оценки

$$|b_l| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1, \dots, d, \tag{2.6}$$

вытекающие из (1.3). С учетом (2.6) оценим второй член J_2:

$$\begin{aligned} |J_2| &\leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| g^{1/2} \ b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j \right| \ |u| \left(\sum_{l=1}^{d} \left| g^{1/2} b_l \mathbf{v}_j \right| |D_l u| \right) \, d\mathbf{x} \\ &\leqslant \frac{1}{4} J + 4 d \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D} u|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Наконец, для члена J_3 справедлива оценка:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^d} |g \mathbf{e}_j| \ |u| \left(\sum_{l=1}^{d} |b_l \mathbf{v}_j| \, |D_l u| \right) d\mathbf{x} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + d \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D} u|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) получаем

$$\frac{1}{2} J \leqslant 2 \|g\|_{L_\infty} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 5 d \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D} u|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{2.9}$$

Покажем теперь, как из (2.9) выводится требуемая оценка. С помощью преобразования Фурье из нижнего неравенства (1.3) получаем

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_j u)|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \alpha_0^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u)|^2 \, d\mathbf{x}.$$

В силу (1.2),

$$b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u) = (b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j)u + \sum_{l=1}^{d} b_l \mathbf{v}_j D_l u.$$

Тогда с учетом (2.6) и выражения для J (см. (2.4)) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_j u)|^2 \, d\mathbf{x} &\leqslant 2\alpha_0^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j|^2 \, |u|^2 \, d\mathbf{x} + 2\alpha_0^{-1}\alpha_1 d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leqslant 2\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} J + 2\alpha_0^{-1}\alpha_1 d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Очевидно,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{v}_j|^2 \, |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{v}_j u)|^2 \, d\mathbf{x} + 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{2.11}$$

Теперь из (2.9)–(2.11) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{v}_j|^2 \, |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant 16\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} \|g\|_{L_\infty} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ 2\left(1 + 2d\alpha_0^{-1}\alpha_1 + 20d\alpha_0^{-1}\alpha_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty} \|g\|_{L_\infty}\right) \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Суммируя по j, приходим к оценке (2.1) при

$$\begin{aligned} &\beta_1 = 16m\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} \|g\|_{L_\infty}, \\ &\beta_2 = 2\left(1 + 2d\alpha_0^{-1}\alpha_1 + 20d\alpha_0^{-1}\alpha_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty} \|g\|_{L_\infty}\right). \quad \bullet \end{aligned} \tag{2.12}$$

Следствие 2.2. *При условии* 1.9 *для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\Lambda(\mathbf{x})|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Действительно, второй интеграл в правой части (2.1) оценивается через $\|\Lambda\|^2_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x}$. Тогда (2.13) выполнено для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. По непрерывности неравенство (2.13) распространяется с плотного множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ на всё $H^1(\mathbb{R}^d)$. $\bullet$

Следующее утверждение получается из леммы 2.1 масштабным преобразованием.

Лемма 2.3. *В условиях леммы* 2.1 *выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 \, |u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 \, |\mathbf{D}u|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной $\mathbf{y} = \varepsilon^{-1}\mathbf{x}$ и обозначим $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y})$. Тогда из (2.1) получаем:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|(\mathbf{D}\Lambda)\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}\right)\right|^2 |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)(\mathbf{y})|^2 |v(\mathbf{y})|^2 \varepsilon^d\, d\mathbf{y}$$
$$\leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |v(\mathbf{y})|^2 \varepsilon^d d\mathbf{y} + \beta_2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\mathbf{y})|^2 |\mathbf{D}_y v(\mathbf{y})|^2 \varepsilon^d\, d\mathbf{y}$$
$$= \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} + \beta_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left|\Lambda\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}\right)\right|^2 |\mathbf{D}_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}. \quad \bullet$$

Следствие 2.4. *При условии* 1.9 *для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2\, d\mathbf{x}.$$

В заключение этого параграфа приведем оценки для матрицы Λ, полученные в [BSu4, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} m^{1/2} (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}, \tag{2.14}$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} m^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{2.15}$$

§3. Сглаживание по Стеклову. Еще один результат для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$

В работах [Zh2, ZhPas] вместо сглаживающего оператора (1.11) использовалось сглаживание по Стеклову. Для задач усреднения в ограниченной области это оказывается более удобным. В этом параграфе мы покажем, что для задачи в $\mathbb{R}^d$ возможны оба варианта, т. е. теорема 1.7 сохраняет силу, если в корректоре заменить оператор Π_ε сглаживанием по Стеклову.

3.1. Сглаживание по Стеклову. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ рассмотрим оператор S_ε, действующий по правилу

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \tag{3.1}$$

и называемый *сглаживающим оператором по Стеклову*. Отметим, что $\|S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$. Очевидно, $D^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u} = S_\varepsilon D^\alpha \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ для любого мультииндекса α, такого что $|\alpha| \leqslant s$.

Нам понадобятся некоторые свойства оператора (3.1), ср. [ZhPas, леммы 1.1 и 1.2].

Предложение 3.1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ *выполнена оценка*

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.2}$$

где $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Доказательство. В силу неравенства Коши имеем:

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} &= \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \left| |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{z} \right|^2 \\ &\leqslant |\Omega|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x} \int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{z}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Используя преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\exp(-i\varepsilon\langle\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}\rangle) - 1|^2\, |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \\ &\leqslant \varepsilon^2 |\mathbf{z}|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} = \varepsilon^2|\mathbf{z}|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по $\mathbf{z} \in \Omega$, заключаем, что

$$\int_\Omega d\mathbf{z} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \varepsilon^2 r_1^2 |\Omega| \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}.$$

Отсюда и из (3.3) вытекает (3.2). $\bullet$

Предложение 3.2. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, такая что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Доказательство. Используя (3.1), с помощью неравенства Коши и замены переменных получаем:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} |f^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant |\Omega|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{x}\, |f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})|^2 \int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})|^2\, d\mathbf{z} \\ &= |\Omega|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{y} \int_\Omega |f(\varepsilon^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{z})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{z} = |\Omega|^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \ \bullet \end{aligned}$$

3.2. Положим

$$\widetilde{K}(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}. \tag{3.4}$$

Оператор (3.4) непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Действительно, оператор $b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. С помощью предложения 3.2 и включения $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ легко убедиться, что оператор $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение уравнения (1.12). Вместо (1.15) рассмотрим другое первое приближение к $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon \widetilde{K}(\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{3.5}$$

Наряду с теоремой 1.7 справедлив следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение уравнения* (1.12) *и $\mathbf{u}_0$ — решение уравнения* (1.13)*. Пусть функция $\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ определена в* (3.5)*. Тогда*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{C}_2 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{3.6}$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon \widetilde{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{C}_2\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Постоянная $\widetilde{C}_2$ *зависит только от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решетки* Γ.

Мы выводим теорему 3.3 из теоремы 1.7.

Лемма 3.4. *При любом* $\mathbf{u} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *справедлива оценка*

$$\begin{split} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \\ + \beta_2 \varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\partial_j \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}. \end{split} \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу предложений 1.5 и 3.2 и включения $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ все члены неравенства (3.7) — непрерывные функционалы относительно $\mathbf{u}$ в норме пространства $H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Поскольку множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ плотно в $H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, оценку (3.7) достаточно доказать при $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Фиксируем функцию $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ такую, что $0 \leqslant \zeta(t) \leqslant 1$, $\zeta(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\zeta(t) = 0$ при $t \geqslant 2$. Определим функцию $\zeta_R(\mathbf{x}) = \zeta(R^{-1}|\mathbf{x}|)$ в $\mathbb{R}^d$. Здесь $R > 0$ — параметр. Пусть $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Тогда $\zeta_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ и в силу леммы 2.3 выполнена оценка

$$\begin{split} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |\zeta_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\zeta_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \\ + \beta_2 \varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon|^2 |(\partial_j \zeta_R)(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u} + \zeta_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\partial_j \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}. \end{split}$$

С учетом оценки $\max |\partial_j \zeta_R| \leqslant cR^{-1}$ неравенство (3.7) получается отсюда предельным переходом при $R \to \infty$ на основании теоремы Лебега. •

Используя предложение 1.5 и оценку (2.14), получаем

$$\begin{split} \|[\Lambda^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \\ \leqslant m^{1/2} (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} =: M. \end{split} \tag{3.8}$$

Аналогично, из предложения 3.2 вытекает оценка

$$\|[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant M. \tag{3.9}$$

Лемма 3.5. *Справедлива оценка*

$$\|\varepsilon \Lambda^\varepsilon (\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{C}\varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{3.10}$$

Постоянная $\check{C}$ *определена ниже в* (3.16) *и зависит лишь от* m, d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 *и параметров решетки* Γ.

Доказательство. Из (1.3), (3.8) и (3.9) следует, что

$$\|\varepsilon \Lambda^\varepsilon (\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant 2M\alpha_1^{1/2} \varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0) = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}\right)^\varepsilon (\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 \\ + \varepsilon\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\partial_j\mathbf{u}_0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^d \|\partial_j(\varepsilon\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0|^2\, d\mathbf{x} \\ &+ 2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\partial_j\mathbf{u}_0|^2\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Второе слагаемое в правой части (3.12) оценивается с помощью (1.3), (3.8) и (3.9):

$$2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\partial_j\mathbf{u}_0|^2\, d\mathbf{x} \leqslant 8\varepsilon^2 M^2 \alpha_1 \|\mathbf{u}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{3.13}$$

Первое слагаемое в правой части (3.12) оценим с помощью леммы 3.4:

$$2\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0|^2\, d\mathbf{x} \leqslant 2\beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0|^2\, d\mathbf{x} \\ + 2\beta_2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\partial_j\mathbf{u}_0|^2\, d\mathbf{x}. \tag{3.14}$$

Далее, в силу предложений 1.4 и 3.1 и (1.3) справедлива оценка

$$\|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon(r_0^{-1} + r_1)\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \tag{3.15}$$

Второе слагаемое в правой части (3.14) оценивается на основании (3.13). В итоге из (3.12)–(3.15) получаем:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^d \|\partial_j(\varepsilon\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon^2 \left(8M^2(1+\beta_2) + 2\beta_1(r_0^{-1} + r_1)^2\right)\alpha_1 \|\mathbf{u}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.11) вытекает (3.10) с постоянной

$$\check{C} = \alpha_1^{1/2}\left(M^2(8\beta_2 + 12) + 2\beta_1(r_0^{-1} + r_1)^2\right)^{1/2}. \ \bullet \tag{3.16}$$

Теперь легко завершить **доказательство теоремы 3.3**. Из (1.3) и (1.10) вытекает следующая оценка снизу для символа эффективного оператора:

$$b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) \geqslant c_0|\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad c_0 = \alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{3.17}$$

С помощью преобразования Фурье и (3.17) оценим норму функции $\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\mathbf{F}$ в $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$:

$$\|\mathbf{u}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^2 \left| (b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{1}_n)^{-1} \widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) \right|^2 d\boldsymbol{\xi}$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^2 (c_0|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)^{-2} |\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant (1 + c_0^{-1})^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}.$$

Отсюда и из (1.15), (3.5), (3.10) вытекает оценка

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{C}\varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant (1 + c_0^{-1}) \check{C}\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}. \quad (3.18)$$

Из (1.16) и (3.18) получаем неравенство (3.6) при $\widetilde{C}_2 = C_2 + (1 + c_0^{-1})\check{C}$.
$\bullet$

§4. Усреднение задачи Дирихле в ограниченной области: предварительные рассмотрения

4.1. Постановка задачи. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^2. В пространстве $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Строгое определение: $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

Эта форма замкнута и положительно определена. Действительно, продолжим $\mathbf{u}$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$. Тогда $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Применяя (1.4), получаем

$$c_0 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (4.1)$$

Остается принять во внимание, что $\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ задает норму в $H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, эквивалентную стандартной.

Наша цель — найти аппроксимацию при малом ε обратного оператора $\mathcal{A}^{-1}_{D,\varepsilon}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. В терминах решений — нас интересует поведение обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ задачи Дирихле

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathcal{A}^{-1}_{D,\varepsilon}\mathbf{F}$.

4.2. Энергетическое неравенство. Рассмотрим задачу вида (4.2) с правой частью из класса $H^{-1}(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и установим энергетическое неравенство. Напомним, что $H^{-1}(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ определяется как пространство, сопряженное к $H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ относительно спаривания в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Если

$\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, то символ $\int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x}$ понимается как значение функционала $\mathbf{f}$ на элементе $\boldsymbol{\eta}$. При этом выполнена оценка

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x} \right| \leqslant \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{z}_\varepsilon \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *— обобщенное решение задачи Дирихле*

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \mathbf{z}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Иными словами, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *удовлетворяет тождеству*

$$\int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{z}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{4.4}$$

Тогда справедлива оценка (называемая энергетическим неравенством)

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{4.5}$$

Здесь $\widehat{C} = (1 + (\operatorname{diam}\mathcal{O})^2)\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство. В силу нижней оценки (4.1) имеем

$$\|\mathbf{D}\mathbf{z}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_0^{-1} \left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{z}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\mathbf{z}_\varepsilon \right)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.6}$$

Далее, из (4.4) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{z}_\varepsilon$ с учетом (4.3) следует, что

$$\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{z}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\mathbf{z}_\varepsilon \right)_{L_2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_\varepsilon \rangle \, d\mathbf{x} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{4.7}$$

В силу неравенства Фридрихса

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (\operatorname{diam}\mathcal{O}) \|\mathbf{D}\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.8}$$

В итоге, из (4.6)–(4.8) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant (1 + (\operatorname{diam}\mathcal{O})^2) \|\mathbf{D}\mathbf{z}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant (1 + (\operatorname{diam}\mathcal{O})^2) c_0^{-1} \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Это влечет (4.5). $\bullet$

Загрубляя результат леммы 4.1, приходим к следующему следствию.

Следствие 4.2. *Оператор* $\mathcal{A}^{-1}_{D,\varepsilon}$ *непрерывен из* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *в* $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, *причем выполнена оценка*

$$\|\mathcal{A}^{-1}_{D,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}.$$

Ниже нам понадобится следующее утверждение, которое выводится из леммы 4.1.

Лемма 4.3. *Пусть* $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{r}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *— обобщенное решение задачи*

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{r}_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \mathbf{r}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \boldsymbol{\psi}|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{4.9}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \gamma_0 \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad \gamma_0 = 1 + \widehat{C} d^{1/2} \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \tag{4.10}$$

Доказательство. В силу (4.9) функция $\mathbf{r}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}$ является решением задачи Дирихле

$$\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{r}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}) = -\mathcal{A}_\varepsilon \boldsymbol{\psi} \ \text{ в } \mathcal{O}; \quad (\mathbf{r}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi})|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{4.11}$$

Здесь правая часть в уравнении принадлежит $H^{-1}(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, причем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\varepsilon \boldsymbol{\psi}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} &= \sup_{0 \neq \boldsymbol{\varphi} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \frac{\left| (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\mathcal{O})} \right|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})}} \\ &\leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Мы учли неравенство $\|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}$, которое получается следующим образом. Продолжим $\boldsymbol{\varphi} \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$, сохраняя то же обозначение $\boldsymbol{\varphi}$. Тогда $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Применяя преобразование Фурье и верхнее неравенство (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &= \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \\ &\leqslant \alpha_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 |\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \alpha_1 \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \alpha_1 \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Далее, в силу (1.2) и (2.6) справедлива оценка

$$\|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2} \sum_{l=1}^d \|D_l \boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2} d^{1/2} \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{4.14}$$

Из (4.12) и (4.14) следует, что

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon \boldsymbol{\psi}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1 d^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{4.15}$$

Применяя лемму 4.1 к задаче (4.11), получаем

$$\|\mathbf{r}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C} \|\mathcal{A}_\varepsilon \boldsymbol{\psi}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}. \tag{4.16}$$

Теперь из (4.15) и (4.16) вытекает неравенство (4.10). $\bullet$

Замечание 4.4. Утверждения леммы 4.1 и следствия 4.2 справедливы в любой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ (без предположения $\partial\mathcal{O} \in C^2$). То же верно и для леммы 4.3, если задачу (4.9) понимать в смысле тождества

$$\int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{r}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta} \rangle \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n),$$

и включения $\mathbf{r}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi} \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

4.3. „Усредненная“ задача. В пространстве $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим самосопряженный оператор $\mathcal{A}^0_D$, порожденный квадратичной формой

$$\int_{\mathcal{O}} \left\langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \right\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

Здесь g^0 — эффективная матрица, определенная в (1.6). Применяя следствие 4.2 с заменой g^ε на g^0 и учитывая (1.10), убеждаемся, что оператор $(\mathcal{A}_D^0)^{-1}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, причем

$$\|(\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}, \tag{4.17}$$

где постоянная $\widehat{C}$ определена в лемме 4.1. Отметим, что этот факт справедлив в любой ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ (без предположения $\partial\mathcal{O} \in C^2$).

Пусть $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение задачи Дирихле

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \tag{4.18}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\mathbf{F}$.

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^2$ для решения $\mathbf{u}_0$ задачи (4.18) выполнено $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, причем справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{c}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{4.19}$$

Здесь постоянная $\widehat{c}$ зависит лишь от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Для оправдания этого факта можно заметить, что оператор $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ относится к классу *сильно эллиптических* матричных операторов и сослаться на теоремы о повышении гладкости решений сильно эллиптических систем (см., например, [McL, глава 4]).

Из сказанного вытекает, что оператор $\mathcal{A}_D^0$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а для обратного оператора справедлива оценка

$$\|(\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{c}. \tag{4.20}$$

Ниже мы выясним, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (4.2) сходится в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ „усредненной“ задачи (4.18). Наша *основная цель* — получить аппроксимацию для $\mathbf{u}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$; для этого необходимо учитывать корректор первого порядка.

§5. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе мы устанавливаем несколько вспомогательных утверждений, которые потребуются при дальнейших рассмотрениях.

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^1. Пусть $B_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}, \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\}$. Тогда существует число $\varepsilon_0 \in (0,1]$, зависящее от области $\mathcal{O}$, такое что для любой функции $u \in H^1(\mathcal{O})$ справедлива оценка*

$$\int_{B_\varepsilon} |u|^2 d\mathbf{x} \leqslant \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \|u\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{5.1}$$

Постоянная $\beta = \beta(\mathcal{O})$ зависит лишь от области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Рассмотрим модельную задачу в полушаре $\mathcal{D}_0 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{x}| < 1, \ x_d > 0\right\}$. Обозначим $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{d-1})$, и для точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ используем запись $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_d)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{D}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{x}| < 1, \ x_d > t\}, \quad \Sigma_t = \{\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}_t : \ x_d = t\}, \ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon;$$

$$\Upsilon_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ |\mathbf{x}| < 1, \ 0 < x_d < \varepsilon\}, \quad \Sigma = \{\mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}_0 : \ |\mathbf{x}| = 1\}.$$

Пусть $u \in H^1(\mathcal{D}_0)$, причем $u = 0$ на Σ. Считая $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, воспользуемся формулой Грина в области $\mathcal{D}_t$:

$$\int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial u}{\partial x_d} \, \overline{u} \, d\mathbf{x}' dx_d = -\int_{\Sigma_t} |u|^2 \, d\mathbf{x}' - \int_{\mathcal{D}_t} u \, \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_d} \, d\mathbf{x}' dx_d.$$

Следовательно,

$$\int_{\Sigma_t} |u(\mathbf{x}', t)|^2 \, d\mathbf{x}' \leqslant \int_{\mathcal{D}_t} 2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right| \, |u| \, d\mathbf{x}$$
$$\leqslant 2 \left(\int_{\mathcal{D}_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{D}_0} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Интегрируя по $t \in (0, \varepsilon)$, получаем

$$\int_{\Upsilon_\varepsilon} |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant 2\varepsilon \left(\int_{\mathcal{D}_0} \left| \frac{\partial u}{\partial x_d} \right|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{D}_0} |u|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Оценка (5.1) в случае ограниченной области $\mathcal{O}$ класса C^1 получается отсюда стандартным образом с помощью локальных карт, диффеоморфизмов, распрямляющих границу, и разбиения единицы. При этом мы учитываем, что пространство H^1 инвариантно относительно диффеоморфизмов класса C^1. Число ε_0 определяется тем, чтобы „полоску“ B_{ε_0} можно было покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы, распрямляющие границу. Тем самым, число ε_0 зависит лишь от области $\mathcal{O}$. $\bullet$

Следующее утверждение прямо вытекает из леммы 5.1.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^1. Положим $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}, \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\right\}$. Пусть число $\varepsilon_1 \in (0, 1]$ таково, что полоску $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_1}$ можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса C^1, распрямляющие границу $\partial\mathcal{O}$. Тогда для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta^0 \varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{5.2}$$

Постоянная $\beta^0 = \beta^0(\mathcal{O})$ зависит лишь от области $\mathcal{O}$.

Доказательство получается применением леммы 5.1 в области $\mathcal{O}$ и в области $\mathcal{B} \setminus \overline{\mathcal{O}}$, где $\mathcal{B}$ — какой-либо открытый шар, содержащий $\overline{\mathcal{O}} \cup \overline{(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_1}}$. Тогда (5.2) верно при $\beta^0 = \max\{\beta(\mathcal{O}), \beta(\mathcal{B} \setminus \overline{\mathcal{O}})\}$. $\bullet$

Следующая лемма аналогична лемме 2.6 из [ZhPas].

Лемма 5.3. *Пусть* S_ε — *оператор* (3.1). *Пусть область* $\mathcal{O}$ *и число* ε_1 *удовлетворяют условиям леммы* 5.2. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$, *такая что* $f \in L_2(\Omega)$. *Тогда для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)},$$
$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2, \tag{5.3}$$

где $\varepsilon_2 = \varepsilon_1(1+r_1)^{-1}$, $\beta_* = \beta^0(1+r_1)$, $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Доказательство. Из (3.1) с помощью неравенства Коши и замены переменной получаем:

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant |\Omega|^{-1} \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} d\mathbf{x}\, |f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})|^2 \int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})|^2\, d\mathbf{z}$$
$$\leqslant |\Omega|^{-1} \int_{(\partial\mathcal{O})_{\widetilde{\varepsilon}}} d\mathbf{y} \int_\Omega d\mathbf{z}\, |f(\varepsilon^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{z})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{y})|^2$$
$$\leqslant |\Omega|^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \int_{(\partial\mathcal{O})_{\widetilde{\varepsilon}}} |\mathbf{u}(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y}.$$

Здесь $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon(1+r_1)$. Применяя лемму 5.2, приходим к оценке (5.3). $\bullet$

§6. Результаты в случае ограниченной матрицы Λ

6.1. Начнем со случая, когда выполнено условие 1.9. Введем оператор

$$K_D^0(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}_D^0)^{-1}. \tag{6.1}$$

В силу (4.20) оператор $b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_D^0)^{-1}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$. При условии 1.9 оператор $[\Lambda^\varepsilon]$ умножения на матрицу-функцию $\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})$ непрерывен из $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, что легко усмотреть из следствия 2.4. Следовательно, оператор (6.1) непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (4.2) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (4.18). „Первое приближение“ к $\mathbf{u}_\varepsilon$ имеет вид

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_D^0(\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{6.2}$$

Наш основной результат в случае $\Lambda \in L_\infty$ представляет следующая теорема.

Теорема 6.1. *Предположим, что* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — *ограниченная область с границей класса* C^2, *а матрица* $g(\mathbf{x})$ *и ДО* $b(\mathbf{D})$ *удовлетворяют условиям пункта* 1.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (4.2) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (4.18) *при* $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая матрица-функция, являющаяся решением задачи* (1.5), *причем выполнено условие* 1.9. *Пусть функция* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *определена в* (6.2). *Тогда существует число*

$\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_0 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.3}$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_0 \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant C_0' \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.4}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)$. *Постоянные* C_0, C_0' *зависят лишь от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *а также от нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Напомним, что достаточные условия выполнения условия 1.9 приведены выше в предложении 1.11. В частности, утверждения теоремы 6.1 справедливы для всех операторов рассматриваемого класса в размерности $d \leqslant 2$, а также для скалярного эллиптического оператора $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$ в любой размерности.

Загрубляя результат теоремы 6.1, приходим к следующему следствию.

Следствие 6.2. *В условиях теоремы* 6.1 *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{C}_0 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.5}$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{C}_0 \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Здесь $\widetilde{C}_0 = C_0 + \widehat{C}\alpha_1^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}$, *а* $\widehat{C}$ *определена в лемме* 4.1.

Доказательство. Из (6.2) и (6.3) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_0 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{6.6}$$

При условии 1.9 имеем:

$$\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\Lambda\|_{L_\infty} \|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.7}$$

Аналогично (4.13),

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.8}$$

Из (6.7) и (6.8) с учетом (4.17) следует оценка

$$\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}\alpha_1^{1/2} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (6.6) вытекает (6.5). $\bullet$

Выделим специальные случаи. Следующее утверждение вытекает из теоремы 6.1 и предложений 1.2, 1.3.

Предложение 6.3. 1°. *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.8), *то* $\Lambda = 0$ *и* $K_D^0(\varepsilon) = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_0 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

2°. *Если* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.9), *то* $\widetilde{g} = g^0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant C_0' \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

6.2. Доказательство теоремы 6.1 опирается на результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$ (теоремы 1.6 и 1.10) и на приемы перенесения таких результатов на случай ограниченной области, заимствованные из работ [Zh2, ZhPas].

Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \tag{6.9}$$

и положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0$. Тогда

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_\mathcal{O} \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \tag{6.10}$$

где $C_\mathcal{O}$ — норма оператора (6.9). Обозначим

$$\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}). \tag{6.11}$$

Тогда $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}|_\mathcal{O}$.

Используя теоремы 1.6 и 1.10, докажем следующее утверждение.

Лемма 6.4. *Пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (4.18), *а функция* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *определена в* (6.2). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon \check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \mathcal{A}^0 \mathbf{u}_0\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_4 \varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{6.12}$$

Постоянная C_4 *зависит лишь от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Сформулированное утверждение для ограниченной области выводится из подобного неравенства в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}$ определено в (6.11). Докажем, что

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathcal{A}^0 \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{C}_4 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{6.13}$$

Ясно, что

$$\widetilde{\mathbf{F}} := \mathcal{A}^0 \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\mathbf{u}}_0 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{6.14}$$

Применяя преобразование Фурье и (1.3), (1.10), получаем

$$\begin{gathered}\|\widetilde{\mathbf{F}}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left|(b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{1})\widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})\right|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha_1 |g^0| |\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)^2 |\widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \left(\max\left\{\alpha_1 \|g\|_{L_\infty}, 1\right\}\right)^2 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.\end{gathered} \tag{6.15}$$

Здесь $\widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$.

Пусть $\mathbf{s}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение уравнения

$$\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{s}_\varepsilon + \mathbf{s}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{6.16}$$

Применимы теоремы 1.6 и 1.10, в силу которых справедливы неравенства

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_1 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{6.17}$$

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_3\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \qquad (6.18)$$

С учётом (6.14) и (6.16) имеем:

$$\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathcal{A}^0\widetilde{\mathbf{u}}_0 = \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{s}_\varepsilon) + \mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{s}_\varepsilon - \mathcal{A}^0\widetilde{\mathbf{u}}_0 = \mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{s}_\varepsilon) - (\mathbf{s}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0).$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathcal{A}^0\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{s}_\varepsilon)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{s}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}. \quad (6.19)$$

Далее, с учетом (1.3) получаем

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{s}_\varepsilon)\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{0\neq\boldsymbol{\eta}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \frac{\left|\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{s}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\right)_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right|}{\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}}$$

$$\leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (6.17)–(6.19) вытекает, что

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathcal{A}^0\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_1 + C_3\alpha_1\|g\|_{L_\infty})\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \quad (6.20)$$

Теперь из (6.15) и (6.20) следует (6.13) с постоянной

$$\widetilde{C}_4 = (C_1 + C_3\alpha_1\|g\|_{L_\infty})\max\left\{\alpha_1\|g\|_{L_\infty}, 1\right\}.$$

Возвращаясь к случаю ограниченной области, отметим, что если $\mathbf{f}\in H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\widetilde{\mathbf{f}}\in H^{-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причём $\widetilde{\mathbf{f}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{f}$, то

$$\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} = \sup_{0\neq\boldsymbol{\varphi}\in C_0^\infty(\mathcal{O})} \frac{\left|\int_{\mathcal{O}}\langle\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}\rangle\,d\mathbf{x}\right|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})}} = \sup_{0\neq\boldsymbol{\varphi}\in C_0^\infty(\mathcal{O})} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^d}\langle\widetilde{\mathbf{f}},\boldsymbol{\varphi}\rangle\,d\mathbf{x}\right|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}}$$

$$\leqslant \sup_{0\neq\boldsymbol{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^d}\langle\widetilde{\mathbf{f}},\boldsymbol{\varphi}\rangle\,d\mathbf{x}\right|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}} = \|\widetilde{\mathbf{f}}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \mathcal{A}^0\mathbf{u}_0\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} - \mathcal{A}^0\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда с учетом (6.13) и (6.10) получаем

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \mathcal{A}^0\mathbf{u}_0\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_4\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}_4 C_{\mathcal{O}}\varepsilon\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}.$$

Этим доказано неравенство (6.12) при $C_4 = \widetilde{C}_4 C_{\mathcal{O}}$. •

6.3. Первое приближение $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$, определенное в (6.2), не удовлетворяет условию Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Рассмотрим „поправку“ $\check{\mathbf{w}}_\varepsilon$ — обобщенное решение задачи

$$\mathcal{A}_\varepsilon\check{\mathbf{w}}_\varepsilon = 0 \ \text{ в } \mathcal{O}, \quad \check{\mathbf{w}}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \check{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}}. \qquad (6.21)$$

Уравнение здесь понимается в слабом смысле: функция $\check{\mathbf{w}}_\varepsilon\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{\mathcal{O}}\langle g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\check{\mathbf{w}}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle\,d\mathbf{x} = 0, \quad \forall\boldsymbol{\eta}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Краевое условие в (6.21) понимается в смысле теоремы о следах: как уже отмечалось, в условиях теоремы 6.1 выполнено $\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а тогда $\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

В силу (4.2) и (4.18) имеем: $\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon) = \mathcal{A}^0\mathbf{u}_0 - \mathcal{A}_\varepsilon\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$. Следовательно, с учетом (6.21), функция $\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon + \check{\mathbf{w}}_\varepsilon$ является решением следующей задачи Дирихле

$$\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon + \check{\mathbf{w}}_\varepsilon) = \mathcal{A}^0\mathbf{u}_0 - \mathcal{A}_\varepsilon\check{\mathbf{v}}_\varepsilon \ \text{ в } \mathcal{O}, \quad (\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon + \check{\mathbf{w}}_\varepsilon)|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Правая часть в уравнении принадлежит $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда, применяя леммы 4.1 и 6.4, при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ получаем оценку

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon + \check{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}\|\mathcal{A}^0\mathbf{u}_0 - \mathcal{A}_\varepsilon\check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}C_4\varepsilon\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}.$$

С учетом (4.19) отсюда следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon + \check{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}C_4\widehat{c}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{6.22}$$

Поэтому доказательство оценки (6.3) из теоремы 6.1 сводится к оцениванию поправки $\check{\mathbf{w}}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Будем считать, что $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 \in (0,1]$ — число из леммы 5.2. Фиксируем гладкую срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$, сосредоточенную в ε–окрестности границы $\partial\mathcal{O}$, такую что выполнены условия

$$\begin{gathered}\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon, \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \\ \theta_\varepsilon(\mathbf{x})|_{\partial\mathcal{O}} = 1, \quad \varepsilon\,|\nabla\theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \kappa = \mathrm{const}.\end{gathered} \tag{6.23}$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\theta_\varepsilon(\mathbf{x})\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}). \tag{6.24}$$

Тогда $\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем $\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}}$. Задачу (6.21) можно записать иначе: $\mathcal{A}_\varepsilon\check{\mathbf{w}}_\varepsilon = 0$ в $\mathcal{O}$, $\check{\mathbf{w}}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}}$, и применить лемму 4.3. Тогда

$$\|\check{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \gamma_0\|\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{6.25}$$

Тем самым вопрос о получении оценки для нормы $\check{\mathbf{w}}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ сведен к следующему утверждению.

Лемма 6.5. *Пусть выполнены предположения теоремы* 6.1. *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, *где число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$ *определено в лемме* 5.2. *Пусть функция* $\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon$ *определена в соответствии с* (6.23), (6.24). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_5\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{6.26}$$

Постоянная C_5 *зависит лишь от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Норма $\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оценивается с помощью условия 1.9 и соотношений (4.17), (6.8) и (6.23):

$$\begin{aligned}\|\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon\alpha_1^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon\widehat{C}\alpha_1^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{6.27}$$

Рассмотрим производные

$$\frac{\partial \check{\phi}_\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_j} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \theta_\varepsilon \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} \right)^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 \\ + \varepsilon \theta_\varepsilon \Lambda^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0), \quad j = 1, \dots, d.$$

Тогда

$$\|\mathbf{D}\check{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 3\varepsilon^2 \int_{\mathcal{O}} |\nabla \theta_\varepsilon|^2 |\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0|^2 \, d\mathbf{x} + 3 \int_{\mathcal{O}} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |\theta_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \\ + 3\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathcal{O}} |\theta_\varepsilon|^2 |\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_j \mathbf{u}_0|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{6.28}$$

Обозначим слагаемые в правой части (6.28) через $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$ соответственно.

Проще всего оценить $\mathcal{I}_3$. С учетом (6.23), условия 1.9 и (1.2), (2.6), получаем

$$\|\theta_\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_j \mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \alpha_1 d \sum_{l=1}^d \|D_l D_j \mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (4.19) следует оценка

$$\mathcal{I}_3 \leqslant 3\varepsilon^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \alpha_1 d \|\mathbf{u}_0\|^2_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_3 \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.29}$$

где $\gamma_3 = 3\widehat{c}^2 \alpha_1 d \|\Lambda\|^2_{L_\infty}$.

Для оценки первого слагаемого в правой части (6.28) используем (6.23), условие 1.9 и лемму 5.1. Имеем:

$$\mathcal{I}_1 \leqslant 3\kappa^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \int_{B_\varepsilon} |b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0|^2 \, d\mathbf{x} \\ \leqslant 3\kappa^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \beta \varepsilon \|b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

С учетом (4.17), (4.19), (6.8) и оценки

$$\|b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} = \Big\| \sum_{l=1}^d b_l D_l \mathbf{u}_0 \Big\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2} d^{1/2} \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})},$$

приходим к неравенству

$$\mathcal{I}_1 \leqslant 3\varepsilon \kappa^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \beta \alpha_1 d^{1/2} \|\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.30}$$

где $\gamma_1 = 3\widehat{c}\widehat{C} \kappa^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \beta \alpha_1 d^{1/2}$.

Остается рассмотреть второе слагаемое в правой части (6.28). Воспользуемся следствием 2.4:

$$\mathcal{I}_2 \leqslant 3 \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |\theta_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2 \, d\mathbf{x}$$

$$\leqslant 3\beta_1 \, \|\theta_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 3\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^d \left| \frac{\partial}{\partial x_l}(\theta_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0) \right|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{6.31}$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(\theta_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0) = \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_l} b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \theta_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_l}(b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0),$$

то в силу (6.23) и (6.31) имеем:

$$\mathcal{I}_2 \leqslant 3\left(\beta_1 + 2\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty}\kappa^2\right) \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2 \, d\mathbf{x}$$

$$+ 6\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^d |b(\mathbf{D}) D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Применяя лемму 5.2 и условие (1.3), отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\leqslant 3\left(\beta_1 + 2\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty}\kappa^2\right) \beta^0 \varepsilon \|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 6\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \varepsilon^2 \alpha_1 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 3\varepsilon \left(\beta_1 + 2\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty}\kappa^2\right) \beta^0 \alpha_1 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 6\varepsilon^2 \beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \alpha_1 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{6.32}$$

С учетом (4.19) и (6.10) из (6.32) вытекает оценка

$$\mathcal{I}_2 \leqslant \gamma_2 \varepsilon \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.33}$$

где $\gamma_2 = 3(\widehat{c}C_{\mathcal{O}})^2 \left(\left(\beta_1 + 2\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty}\kappa^2\right) \beta^0 \alpha_1 + 2\beta_2 \alpha_1 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \right)$.

Теперь из (6.28)–(6.30) и (6.33) следует, что

$$\left\| \mathbf{D}\check{\boldsymbol{\phi}}_\varepsilon \right\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3 \leqslant \varepsilon(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{6.34}$$

В итоге, (6.27) и (6.34) приводят к оценке (6.26) при $C_5 = \left(\widehat{C}^2 \alpha_1 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \right)^{1/2}$. $\bullet$

Теперь легко завершить **доказательство теоремы 6.1**. Из (6.22), (6.25) и (6.26) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C} C_4 \widehat{c} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} + \gamma_0 C_5 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

откуда вытекает (6.3) при $C_0 = \widehat{C} C_4 \widehat{c} + \gamma_0 C_5$.

Остается доказать оценку (6.4). Из (6.3) с учетом (1.2) и (2.6) следует, что

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_0 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Из (1.2) и определения матрицы $\widetilde{g}$ видно, что

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0. \quad (6.36)$$

Применяя условие 1.9 и соотношения (1.2), (2.6) и (4.19), получаем

$$\Big\| \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0 \Big\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1 d \widehat{c} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (6.37)$$

Теперь из (6.35)–(6.37) вытекает (6.4) с постоянной $C_0' = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_0 + \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1 d \widehat{c}$. •

§7. Результаты в общем случае

7.1. Теперь мы отказываемся от предположения об ограниченности матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$. Тогда в корректор приходится включать сглаживающий оператор.

Пусть $P_\mathcal{O}$ — оператор продолжения (6.9), а S_ε — сглаживающий оператор по Стеклову, определенный в (3.1). Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Положим

$$K_D(\varepsilon) = R_\mathcal{O} [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (\mathcal{A}_D^0)^{-1}. \quad (7.1)$$

Оператор $b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (\mathcal{A}_D^0)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$. Как отмечалось в п. 3.2, оператор $[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор (7.1) непрерывен из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (4.2) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (4.18). Как и выше, используем обозначение $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O} \mathbf{u}_0$. Определим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\mathbf{v}_\varepsilon^{(2)}(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}),$$

и положим $\mathbf{v}_\varepsilon := \mathbf{v}_\varepsilon^{(2)}|_\mathcal{O}$. Тогда

$$\mathbf{v}_\varepsilon = (\mathcal{A}_D^0)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K_D(\varepsilon) \mathbf{F}. \quad (7.2)$$

Наш основной результат в общем случае — следующая теорема.

Теорема 7.1. *Предположим, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^2, а матрица $g(\mathbf{x})$ и ДО $b(\mathbf{D})$ удовлетворяют условиям пункта* 1.2. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (4.2) *и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи* (4.18) *при $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Пусть функция $\mathbf{v}_\varepsilon$ определена в* (7.1), (7.2). *Тогда существует число $\varepsilon_2 \in (0, 1]$, зависящее от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ, такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leqslant C \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2, \quad (7.3)$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \to H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)} \leqslant C \varepsilon^{1/2}.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant C'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2, \tag{7.4}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m)$. *Постоянные* C, C' *зависят лишь от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Загрубляя результат теоремы 7.1, приходим к следующему утверждению.

Следствие 7.2. *В условиях теоремы* 7.1 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \tag{7.5}$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon^{1/2}.$$

Постоянная $\widetilde{C}$ *задана соотношением*

$$\widetilde{C} = C + C_{\mathcal{O}}\widehat{c}m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2},$$

где $\widehat{c}$ — *постоянная из* (4.19), $C_{\mathcal{O}}$ — *норма оператора продолжения* $P_{\mathcal{O}}$, *а* r_0 — *радиус шара, вписанного в* $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$.

Доказательство. Из (7.2) и (7.3) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.6}$$

В силу (3.9) и (1.3) имеем:

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant M\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

С учетом (4.19) и (6.10)

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant C_{\mathcal{O}}\widehat{c}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.8}$$

Теперь из (7.6)–(7.8) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon M\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{c}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

откуда с учетом выражения для M (см. (3.8)) вытекает (7.5). •

7.2. Приступим к доказательству теоремы 7.1. Справедлив следующий аналог леммы 6.4.

Лемма 7.3. *Пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (4.18), *а функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (7.1), (7.2). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon - \mathcal{A}^0\mathbf{u}_0\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_6\varepsilon\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}.$$

Здесь постоянная $C_6 = C_{\mathcal{O}}(C_1 + \widetilde{C}_2\alpha_1\|g\|_{L_\infty})\max\{\alpha_1\|g\|_{L_\infty}, 1\}$ *зависит лишь от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство леммы 7.3 вполне аналогично доказательству леммы 6.4. Единственное отличие — вместо теоремы 1.10 теперь нужно использовать теорему 3.3. •

Далее, по аналогии с доказательством теоремы 6.1 рассмотрим „поправку“ $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение задачи

$$\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon = 0 \ \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \mathbf{v}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{7.9}$$

Уравнение в (7.9) понимается в слабом смысле, а краевое условие — в смысле теоремы о следах. Следует учесть, что $\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0) \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

В силу (4.2), (4.18) и (7.9) функция $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$ является решением следующей задачи

$$\mathcal{A}_\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon) = \mathcal{A}^0\mathbf{u}_0 - \mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon \ \text{ в } \mathcal{O}, \quad (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon)|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Применяя леммы 4.1 и 7.3, при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ получаем

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}\|\mathcal{A}^0\mathbf{u}_0 - \mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}C_6\varepsilon\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}.$$

С учетом (4.19) отсюда следует оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}C_6\widehat{c}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{7.10}$$

7.3. В силу (7.10) вопрос о доказательстве оценки (7.3) сводится к получению оценки для H^1-нормы функции $\mathbf{w}_\varepsilon$. Как и в п. 6.3, фиксируем срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$, удовлетворяющую условиям (6.23). При этом считаем, что $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 \in (0,1]$ — число из леммы 5.3. Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\boldsymbol{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\theta_\varepsilon(\mathbf{x})\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}). \tag{7.11}$$

Аналогично (6.25) в силу леммы 4.3 имеем:

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \gamma_0\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \tag{7.12}$$

Тем самым вопрос сводится к доказательству следующего утверждения.

Лемма 7.4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 7.1. *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$, *где число* $\varepsilon_2 \in (0,1]$ *определено в лемме* 5.3. *Пусть функция* $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ *определена в соответствии с* (6.23), (7.11). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant C_7\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2. \tag{7.13}$$

Постоянная C_7 *зависит лишь от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Начнем с оценки нормы функции (7.11) в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу (1.3), (3.9), (6.23) и (7.8) выполнена оценка

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon M\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon M\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{c}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{7.14}$$

Рассмотрим производные

$$\frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial x_j} = \varepsilon \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_j} \Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0) + \theta_\varepsilon \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} \right)^\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)$$
$$+ \varepsilon \theta_\varepsilon \Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0), \quad j = 1, \dots, d.$$

Тогда

$$\|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 3\varepsilon^2 \int_{\mathcal{O}} |\nabla \theta_\varepsilon|^2 |\Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)|^2 \, d\mathbf{x}$$
$$+ 3 \int_{\mathcal{O}} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |\theta_\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)|^2 \, d\mathbf{x} + 3\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathcal{O}} |\theta_\varepsilon|^2 |\Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_j \widetilde{\mathbf{u}}_0)|^2 \, d\mathbf{x}. \tag{7.15}$$

Обозначим слагаемые в правой части (7.15) через $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ соответственно.

Проще всего оценить $\mathcal{J}_3$. С учетом (1.3), (3.9) и (6.23) получаем

$$\mathcal{J}_3 \leqslant 3\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \|\Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_j \widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 3\varepsilon^2 M^2 \alpha_1 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (4.19) и (6.10) следует оценка

$$\mathcal{J}_3 \leqslant \widehat{\gamma}_3 \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.16}$$

где $\widehat{\gamma}_3 = 3M^2 \alpha_1 (C_{\mathcal{O}} \widehat{c})^2$.

Первое слагаемое в правой части (7.15) оценим с помощью (6.23) и леммы 5.3. При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ имеем:

$$\mathcal{J}_1 \leqslant 3\kappa^2 \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |\Lambda^\varepsilon \left(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \right)|^2 \, d\mathbf{x}$$
$$\leqslant 3\kappa^2 \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда с помощью (1.3), (4.19), (6.10) и оценки (2.14) вытекает неравенство

$$\mathcal{J}_1 \leqslant \widehat{\gamma}_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.17}$$

где $\widehat{\gamma}_1 = 3\kappa^2 \beta_* (C_{\mathcal{O}} \widehat{c})^2 m (2r_0)^{-2} \alpha_0^{-1} \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Остается рассмотреть второе слагаемое в правой части (7.15). С учетом (6.23)

$$\mathcal{J}_2 \leqslant 3 \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Применим лемму 5.3. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2$ выполнена оценка

$$\mathcal{J}_2 \leqslant 3\beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|\mathbf{D}\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда с помощью (1.3), (2.15), (4.19) и (6.10) вытекает неравенство

$$\mathcal{J}_2 \leqslant \widehat{\gamma}_2 \varepsilon \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2, \tag{7.18}$$

где $\widehat{\gamma}_2 = 3\beta_* (C_{\mathcal{O}} \widehat{c})^2 m \alpha_0^{-1} \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

В итоге из (7.15)–(7.18) следует, что

$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 \leqslant (\widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2 + \widehat{\gamma}_3)\varepsilon\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2.$$

Вместе с (7.14) это влечет (7.13) при $C_7 = (M^2\alpha_1(C_{\mathcal{O}}\widehat{c})^2 + \widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2 + \widehat{\gamma}_3)^{1/2}$. $\bullet$

Теперь легко завершить **доказательство теоремы 7.1**. Из (7.10), (7.12) и (7.13) получаем, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}C_6\widehat{c}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} + \gamma_0 C_7\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2.$$

Отсюда вытекает (7.3) при $C = \widehat{C}C_6\widehat{c} + \gamma_0 C_7$.

Остается проверить (7.4). Из (7.3) с учетом (1.2) и (2.6) следует,что

$$\begin{gathered}\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ \leqslant \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}d^{1/2}C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2.\end{gathered} \tag{7.19}$$

В силу предложения 3.1 и соотношений (1.3), (4.19) и (6.10) получаем:

$$\begin{aligned}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|g\|_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon r_1\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{c}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Из (1.2) и определения матрицы $\widetilde{g}$ видно, что

$$\begin{aligned}&g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0) \\ &= \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0.\end{aligned} \tag{7.21}$$

Учитывая (1.3), (2.6), (3.9), (4.19) и (6.10), получаем

$$\begin{aligned}\Big\|\varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0\Big\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}M\alpha_1 d^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}M\alpha_1 d^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{c}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{7.22}$$

Теперь из (7.19)–(7.22) вытекает (7.4) с постоянной $C' = \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}d^{1/2}C + \|g\|_{L_\infty}C_{\mathcal{O}}\widehat{c}(r_1\alpha_1^{1/2} + M\alpha_1 d^{1/2})$. $\bullet$

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71-107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005), 251–254.

[Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), № 5, 597-601.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[ZhPas] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

[Pas] Пастухова С. Е., *О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости*, Докл. РАН **406** (2006), № 5, 604-608.

[Su] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптической задачи Дирихле*: *операторные оценки погрешности в* L_2, Препринт ПОМИ 03/2012.