ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 1/2012

ВНУТРЕННИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ГРАДИЕНТЫ

Е. С. ДУБЦОВ

dubtsov@pdmi.ras.ru

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Январь 2012

Аннотация

Пусть φ — голоморфное отображение между комплексными единичными шарами. В работе получены количественные версии следующего эвристического принципа: если гиперболический градиент отображения φ не растет достаточно быстро, то отображение φ заведомо не является внутренним.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 11-01-00526-а.

1. Введение

Пусть B_n обозначает единичный шар из $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Пусть σ_n обозначает меру Лебега на единичной сфере ∂B_n; $\sigma_n(\partial B_n) = 1$. Для голоморфного отображения $\varphi : B_n \to B_m$, $m, n \in \mathbb{N}$, радиальный предел $\varphi^*(\zeta)$ определен в σ_n-почти каждой точке сферы ∂B_n. Если $|\varphi^*| = 1$ σ_n-п.в., то отображение φ называется *внутренним.*

1.1. **Голоморфные отображения, переводящие единичный круг в себя.** Отправной точной для данной работы является следующий результат при $n = m = 1$:

Теорема 1.1 ([12, теорема 1.1], [1, теорема 5.1])**.**

(i) *Предположим, что ω — возрастающая функция на промежутке $[0, 1]$, $\omega(0) = 0$, а также*

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Пусть голоморфная функция $\varphi : B_1 \to B_1$ удовлетворяет оценке

$$\frac{|\varphi'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq \omega(1 - |z|) \quad \text{для всех } z \in B_1. \tag{1.1}$$

Тогда функция φ не является внутренней.

(ii) *Предположим, что ω — возрастающая функция на промежутке $[0, 1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t)/t^{1-\varepsilon}$ убывает при некотором $\varepsilon > 0$, а также*

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt = \infty.$$

Тогда существует внутренняя функция $\varphi : B_1 \to B_1$ такая, что

$$\frac{|\varphi'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq \omega(1 - |z|) \quad \text{для всех } z \in B_1.$$

В определенном смысле сформулированная теорема точна. Однако в силу теоремы 1.9(a) из [7] имеет место следующее усиление теоремы 1.1(i).

Теорема 1.2 (см. [7, p. 687])**.** *Если ω и φ удовлетворяют условиям теоремы 1.1(i), то $|\varphi^*| < 1$ σ_1-п.в.*

Дробь

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2}$$

часто называют гиперболической производной отображения φ. Таким образом, теоремы 1.1(i) и 1.2 являются точными формулировками следующего эвристического принципа:

Если гиперболическая производная отображения φ не растет достаточно быстро, то отображение φ заведомо не является внутренним.

Иные мотивировки для теорем 1.1 и 1.2 также приведены в статьях [12, 1, 7].

В настоящей работе усилена теорема 1.2.

Теорема 1.3. *Если ω и φ удовлетворяют условиям теоремы 1.1(i), то*

$$\int_{\partial B_1} \left(\frac{1}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2} \right)^K d\sigma_1(\zeta) < \infty \tag{1.2}$$

для всех $K > 0$.

Интересно отметить, что в силу следствия 3.25 из [8] условие (1.2) выполнено для всех $K > 0$ тогда и только тогда, когда оператор композиции $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ компактен на пространстве Харди–Орлича $H^{\Psi_2}(B_1)$, где $\Psi_2(x) = e^{x^2} - 1$.

Теорема 1.3 подсказывает, что заключение теоремы 1.1(i) остается в силе, если гиперболический множитель $(1-|\varphi(z)|^2)^{-1}$ в оценке (1.1) заменить на меньшую функцию от $(1-|\varphi(z)|^2)$. Количественная версия этого наблюдения сформулирована в виде следствия 5.2.

1.2. **Голоморфные отображения между комплексными единичными шарами.** На самом деле, теорема 1.3 распространяется на голоморфные отображения $\varphi : B_n \to B_m$ для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$. Таким образом, основным результатом данной статьи является следующая теорема:

Теорема 1.4. *Предположим, что ω — возрастающая функция на интервале $[0,1]$, $\omega(0) = 0$, а также*

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ удовлетворяет оценке

$$\frac{|\nabla\varphi(z)|(1-|z|^2)}{1-|\varphi(z)|^2} \le \omega(1-|z|), \quad z \in B_n, \tag{1.3}$$

где $|\nabla\varphi(z)|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z) \right|^2$. Тогда

$$\int_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2} \right)^K d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

для всех $K > 0$.

Организация статьи. Основная идея, лежащая в основе доказательства теоремы 1.4, состоит в рассмотрении оператора композиции C_φ из пространства Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ в пространство X, которое расположено достаточно близко к $H^\infty(B_n)$. В качестве модели в разделе 2 рассмотрен случай $X = \mathrm{BMOA}(B_n)$. Теорема 1.4 доказана в разделе 3. Негиперболические обобщения теорем 1.4 и 1.1(i) получены в разделах 4 и 5 соответственно.

2. Модель: композиции между пространствами Блоха и BMOA

2.1. **Пространство Блоха.** Пусть $H(B_m)$ обозначает пространство функций, голоморфных в шаре B_m. Пространство Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ состоит из тех функций $f \in H(B_m)$, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{B}(B_m)} = |f(0)| + \sup_{w \in B_m} |\mathcal{R}f(w)|(1-|w|^2) < \infty,$$

где

$$\mathcal{R}f(w) = \sum_{j=1}^{m} w_j \frac{\partial f}{\partial w_j}(w), \quad w \in B_m,$$

является радиальной производной функции f. Пусть

$$\nabla f(w) = \left(\frac{\partial f}{\partial w_1}(w), \dots, \frac{\partial f}{\partial w_m}(w) \right), \quad w \in B_m,$$

обозначает комплексный градиент. Отметим, что

$$|f(0)| + \sup_{w \in B_m} |\nabla f(w)|(1 - |w|^2)$$

— это эквивалентная норма на пространстве $\mathcal{B}(B_m)$; см., например, теорему 3.4 из [13].

2.2. **Меры Карлесона и** BMOA**.** Для $\zeta \in \partial B_n$ и $r > 0$ положим

$$B(\zeta, r) = \{z \in B_n : \ |1 - \langle z, \zeta \rangle|^{\frac{1}{2}} < r\};$$

$$Q(\zeta, r) = \{\xi \in \partial B_n : \ |1 - \langle \xi, \zeta \rangle|^{\frac{1}{2}} < r\}.$$

Положительная мера μ на шаре B_n называется мерой Карлесона, если существует константа $C > 0$ такая, что $\mu(B(\zeta, r)) \le C r^{2n}$ для всех $\zeta \in \partial B_n$.

Пусть ν_n обозначает меру Лебега на шаре B_n; $\nu_n(B_n) = 1$. Рассмотрим функцию $f \in H(B_n)$. В силу теоремы 5.19 из [13] $f \in \mathrm{BMOA}(B_n)$ тогда и только тогда, когда

$$|\mathcal{R}f(z)|^2 (1 - |z|^2) \, d\nu_n(z)$$

является мерой Карлесона.

2.3. **Операторы композиции между пространствами Блоха и BMOA.** Для голоморфного отображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : B_n \to B_m$ положим $\mathcal{R}\varphi = (\mathcal{R}\varphi_1, \dots, \mathcal{R}\varphi_m)$, где $\mathcal{R}\varphi_j : B_n \to \mathbb{C}$ — это радиальная производная функции φ_j, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим функцию

$$\Omega_{\varphi,\mathcal{R}}(t) = \max_{|z|=1-t} \frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |\varphi(z)|^2}, \quad 0 < t \le 1.$$

Нам потребуется один результат об операторе композиции $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$.

Предложение 2.1 ([5, предложение 4.1])**.** *Пусть отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Предположим, что оператор композиции C_φ отображает пространство $\mathcal{B}(B_m)$ в* $\mathrm{BMOA}(B_n)$*. Тогда существуют константы $\varepsilon = \varepsilon(n, m, \|C_\varphi\|_{\mathcal{B} \to \mathrm{BMOA}}) > 0$ и $C = C(n) > 0$ такие, что*

$$\int_{\partial B_n} \exp \sqrt{\varepsilon \log \frac{1}{1 - |\varphi^*(\zeta)|^2}} \, d\sigma_n(\zeta) \le C.$$

Следующее утверждение служит моделью для теоремы 1.4.

Следствие 2.2. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным. Предположим, что*

$$\int_0 \frac{\Omega^2_{\varphi,\mathcal{R}}(t)}{t} \, dt < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда существует константа $\varepsilon = \varepsilon(n, m, \Omega_{\varphi,\mathcal{R}}) > 0$ *такая, что*

$$\int_{\partial B_n} \exp\sqrt{\varepsilon \log \frac{1}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2}}\, d\sigma_n(\zeta) < \infty.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{B}(B_m)$, т.е.

$$|\nabla f(w)|(1-|w|^2) \le C, \quad w \in B_m.$$

Имеем

$$\mathcal{R}(f\circ\varphi)(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial w_k}(\varphi(z)) \cdot \mathcal{R}\varphi_k(z), \quad z \in B_n.$$

Таким образом,

$$|\mathcal{R}(f\circ\varphi)(z)| \le |\nabla f(\varphi(z))||\mathcal{R}\varphi(z)| \le C\frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}, \quad z \in B_n.$$

Для $\zeta \in \partial B_n$ положим $\Pi(\zeta, r) = \{\rho\xi : \ 1-r < \rho < 1 \text{ и } \xi \in Q(\zeta, r)\}$. Тогда $B(\zeta, r) \subset \Pi(\zeta, Cr)$ для некоторой абсолютной константы $C > 0$. Также имеем $\sigma_n(Q(\zeta, r)) \le Cr^{2n}$. Следовательно, условие (2.1) гарантирует, что

$$|\mathcal{R}(f\circ\varphi)(z)|^2(1-|z|^2)\, d\nu_n(z)$$

является мерой Карлесона. Поэтому $f\circ\varphi \in \mathrm{BMOA}(B_n)$. Остается применить предложение 2.1. □

Следствие 2.3 (ср. с теоремой 1.1)**.** *Пусть* $m \in \mathbb{N}$.

(i) *Предположим, что для голоморфного отображения* $\varphi : B_1 \to B_m$ *выполнено условие* (2.1)*. Тогда отображение* φ *не является внутренним.*

(ii) *Предположим, что* ω *— возрастающая функция на интервале* $[0, 1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t)/t^{1-\varepsilon}$ *убывает для некоторого* $\varepsilon > 0$, *а также*

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt = \infty.$$

Тогда существует внутреннее отображение $\varphi : B_1 \to B_m$ *такое, что* $\Omega_{\varphi,\mathcal{R}}(t) \le \omega(t)$ *для всех* $t \in (0, 1]$.

Доказательство. Часть (i) верна в силу следствия 2.2. Для доказательства части (ii) достаточно рассмотреть отображение $(\varphi, 0, \dots, 0) : B_1 \to B_m$, где внутренняя функция $\varphi : B_1 \to B_1$ построена с помощью теоремы 1.1(ii). □

2.4. **Отображения в единичный круг.** Рассмотрим голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_1$. Если выполнено условие (2.1), то отображение φ не является внутренним в силу следствия 2.2. Однако хорошо известно, что при $n \ge 2$ внутренние отображения $\varphi : B_n \to B_1$ — это весьма редкие и необычные объекты. В частности, соответствующий вывод остается верным, если заменить функцию $\Omega_{\varphi,\mathcal{R}}$ на ее негиперболический аналог. А именно, положим

$$\omega_{\varphi,\mathcal{R}}(t) = \max_{|z|=1-t} |\mathcal{R}\varphi(z)|(1-|z|^2), \quad 0 < t \le 1.$$

Предложение 2.4. *Пусть отображение $\varphi : B_n \to B_1$ является голоморфным. Предположим, что $n \geq 2$ и*

$$\int_0 \frac{\omega^2_{\varphi,\mathcal{R}}(t)}{t}\, dt < \infty. \tag{2.2}$$

Тогда отображение φ не является внутренним.

Доказательство. Напомним, что конечная положительная мера μ на шаре B_n называется исчезающей мерой Карлесона, если

$$\lim_{r\to 0+} \frac{\mu(B(\zeta, r))}{r^{2n}} = 0$$

равномерно по $\zeta \in \partial B_n$. Повторим рассуждение из доказательства следствия 2.2. Итак, условие (2.2) гарантирует, что

$$|\mathcal{R}\varphi(z)|^2(1 - |z|^2)\, d\nu_n(z)$$

— это исчезающая мера Карлесона. Поэтому $\varphi \in \mathrm{VMOA}(B_n)$ в силу теоремы 5.19 из [13]. Напомним, что $n \geq 2$, следовательно, функция φ не является внутренней в силу следствия 3.3 из [10]. □

Теорема 1.1(ii) показывает, что условие (2.1) является точным для класса внутренних отображений $\varphi : B_1 \to B_1$. Безусловно, существуют внутренние отображения $\varphi : B_1 \to B_1$ со свойством (2.2). На самом деле, если $n = 1$ и выполнено условие (2.2), то отображение φ является внутренним тогда и только тогда, когда φ — это конечное произведение Бляшке (см., например, замечание после теоремы 5.1 из [1]).

Автору не известно, являются ли условия (2.1) и (2.2) точными для класса внутренних отображений $\varphi : B_n \to B_1$ при $n \geq 2$. Отметим, что функция $\Omega_{\varphi,\mathcal{R}}$ ограничена по лемме Шварца–Пика. Безусловно, $\omega_{\varphi,\mathcal{R}} \leq \Omega_{\varphi,\mathcal{R}}$. Наконец, в силу следствия 3.1 из [3] существуют внутренние отображения $\varphi : B_n \to B_1$ такие, что $\Omega_{\varphi,\mathcal{R}}(t) \to 0$ при $t \to 0+$.

3. Доказательство теоремы 1.4

Для доказательства будут использованы две вспомогательных леммы.

3.1. Обратная оценка для функций из пространства Блоха.

Лемма 3.1 ([5, лемма 3.2])**.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $0 < p < \infty$. Тогда существуют константы $J = J(m) \in \mathbb{N}$, $\tau_{m,p} > 0$ и функции $F_{j,x} \in \mathcal{B}(B_m)$, $1 \leq j \leq J$, $0 \leq x \leq 1$, такие, что $\|F_{j,x}\|_{\mathcal{B}(B_m)} \leq 1$ и*

$$\sum_{j=1}^{J} \int_0^1 |F_{j,x}(w)|^p\, dx \geq \tau_{m,p} \left(\log \frac{1}{1 - |w|^2}\right)^{\frac{p}{2}}$$

для всех $w \in B_m$.

Отдельно отметим, что в сформулированной лемме $J(1) = 1$.

3.2. **Экспоненциальные интегралы.** В этом разделе будут использованы диадические мартингалы на дугах $[\zeta, \xi) \subset \partial B_1$. Для заданной дуги $I_0 \subset \partial B_1$ пусть $\mathcal{F}_k$ — это σ-алгебра, порожденная диадическими дугами $I_k \subset I_0$, $\sigma_1(I_k) = 2^{-k}\sigma_1(I_0)$. Для вещественного диадического мартингала $M = (M_k, \mathcal{F}_k)$ квадратичная функция SM определяется равенством

$$SM = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta M_k)^2,$$

где $\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$. Ниже будет использован следующий результат:

Теорема 3.2 (см. [2])**.** *Пусть $(M_k, \mathcal{F}_k)$ — вещественный диадический мартингал на дуге $I_0 \subset \partial B_1$. Предположим, что $D > 0$ и*

$$\|SM\|_\infty < \frac{1}{4D}.$$

Тогда предел $M_\infty(\zeta) = \lim_{k\to\infty} M_k(\zeta)$ существует для σ_1-почти всех точек $\zeta \in I_0$, а также

$$\frac{1}{\sigma_1(I_0)} \int_{I_0} \exp\left(D(M_\infty - M_0)^2(\zeta)\right) d\sigma_1(\zeta) \le C < \infty,$$

для некоторой абсолютной константы $C > 0$.

Доказательство следующей леммы основано на некоторых идеях из статьи [6].

Лемма 3.3. *Пусть $g \in H(B_1)$. Предположим, что*

$$|g'(z)|(1 - |z|^2) \le \omega(1 - |z|) \quad \text{для всех } z \in B_1,$$

где ω — это возрастающая функция на промежутке $[0, 1]$, $\omega(0) = 0$, а также

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Пусть $A > 0$. Тогда существует константа $C = C(A, \omega, |g(0)|) < \infty$ такая, что

$$\int_{\partial B_1} \exp\left(A|g(r\zeta)|^2\right) d\sigma_1(\zeta) \le C$$

для всех $0 \le r < 1$.

Доказательство. Имеем

$$\int_0^1 |g'(r\zeta)|^2(1 - r^2)\, dr \le \int_0^1 \frac{\omega^2(1 - r)}{1 - r^2}\, dr < \infty$$

для всех $\zeta \in \partial B_1$. Поэтому

$$\int_{\partial B_1} \left(\int_0^1 |g'(r\zeta)|^2(1 - r^2)\, dr \right)^{\frac{p}{2}} d\sigma_1(\zeta) \le C(\omega) < \infty$$

для всех $p < \infty$. Следовательно, $\|g\|_{H^p(B_1)} \le C(p, \omega, |g(0)|)$, где $H^p(B_1)$ обозначает пространство Харди (см., например, [14]). В частности, $\|g\|_{H^1(B_1)} \le C(\omega, |g(0)|)$. Таким образом, граничные значения $g^*(\zeta)$ определены σ_1-п.в., $g^* \in L^1(\partial B_1)$, а также $g = P[g^*]$, где $P[g^*]$ — это интеграл Пуассона функции g^*.

Теперь рассмотрим функцию $u = \operatorname{Re} g : B_1 \to \mathbb{R}$. Заметим, что

$$|\nabla u(z)|(1-|z|^2) \le \omega(1-|z|).$$

Напомним, что функция ω возрастает на промежутке $[0,1]$. Поэтому в силу формулы Грина существует абсолютная константа $C > 0$ такая, что

$$\left| \int_{I_+} u^*(\zeta)\, d\sigma_1(\zeta) - \int_{I_-} u^*(\zeta)\, d\sigma_1(\zeta) \right| \le C\sigma_1(I_\pm)\omega(\sigma_1(I_\pm)) \tag{3.1}$$

для любых дуг $I_+, I_- \subset \partial B_1$, имеющих одну общую граничную току и удовлетворяющих условию $\sigma_1(I_+) = \sigma_1(I_-)$ (см., например, доказательство импликации (b)⇒(a) из теоремы 1.1 в [6]).

Зафиксируем дугу $I_0 \subset \partial B_1$. Рассмотрим диадический мартингал M, порожденный на I_0 функцией $u^*(\zeta)$. А именно, положим

$$M_k|_{I_k} = \frac{1}{\sigma_1(I_k)} \int_{I_k} u^*(\zeta)\, d\sigma_1(\zeta),$$

где I_k — это диадическая дуга ранга k, $k \ge 0$. По теореме Лебега о дифференцировании предел $M_\infty(\zeta) = \lim_{k\to\infty} M_k(\zeta)$ существует в σ_1-почти каждой точке $\zeta \in I_0$; более того, $M_\infty = u^*$ σ_1-п.в.

Оценка (3.1) гарантирует, что

$$SM(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k(\zeta) - M_{k-1}(\zeta))^2 \le C \sum_{k=1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}\sigma_1(I_0)) \quad \text{для всех } \zeta \in I_0.$$

Так как функция ω возрастает, то имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega^2(2^{-k}\sigma_1(I_0)) \le C \int_0^{\sigma_1(I_0)} \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt.$$

Следовательно, существует столь большое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\|SM\|_\infty < \frac{1}{16A}$$

для всех I_0, удовлетворяющих условию $\sigma_1(I_0) \le \frac{1}{n_0}$. Зафиксируем такое число $n_0 = n_0(A, \omega)$.

Теперь рассмотрим произвольную дугу $I_0 \subset \partial B_1$ такую, что $\sigma_1(I_0) = \frac{1}{n_0}$. По теореме 3.2 имеем

$$\frac{1}{\sigma_1(I_0)} \int_{I_0} \exp\left(4A(\operatorname{Re} g^*(\zeta) - M_0)^2\right)\, d\sigma_1(\zeta) \le C. \tag{3.2}$$

Также отметим, что

$$\begin{aligned} M_0 = \frac{1}{\sigma_1(I_0)} \int_{I_0} \operatorname{Re} g^*(\zeta)\, d\sigma_1(\zeta) &\le \frac{\|g\|_{H^1(B_1)}}{\sigma_1(I_0)} \\ &\le n_0 C(\omega, |g(0)|) \le C(A, \omega, |g(0)|). \end{aligned} \tag{3.3}$$

С помощью (3.2) и (3.3) получаем

$$\frac{1}{\sigma_1(I_0)} \int_{I_0} \exp\left(2A(\operatorname{Re} g^*(\zeta))^2\right)\, d\sigma_1(\zeta) \le C(A, \omega, |g(0)|).$$

Аналогично имеем

$$\frac{1}{\sigma_1(I_0)}\int_{I_0}\exp\left(2A(\operatorname{Im} g^*(\zeta))^2\right)\,d\sigma_1(\zeta)\le C(A,\omega,|g(0)|).$$

Заметим, что $\exp(A(a^2+b^2))\le\exp(2Aa^2)+\exp(2Ab^2)$ для всех $a,b\in\mathbb{R}$. Таким образом,

$$n_0\int_{I_0}\exp\left(A|g^*(\zeta)|^2\right)\,d\sigma_1(\zeta)\le C(A,\omega,|g(0)|).$$

Поэтому

$$\int_{\partial B_1}\exp\left(A|g^*(\zeta)|^2\right)\,d\sigma_1(\zeta)\le C(A,\omega,|g(0)|).$$

Наконец, напомним, что

$$g(r\zeta)=\int_{\partial B_1}g^*(\xi)\,d\mu_{r\zeta}(\xi),\quad 0\le r<1,\ \zeta\in\partial B_1,$$

где

$$\mu_{r\zeta}(\xi)=\frac{1-r^2}{|r\zeta-\xi|^2}\,d\sigma_1(\xi),\quad \xi\in\partial B_1,$$

является ядром Пуассона для точки $r\zeta\in B_1$. Итак, применяя неравенство Йенсена, получаем

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1}\exp(A|g(r\zeta)|^2)\,d\sigma_1(\zeta)&\le\int_{\partial B_1}\exp\left(A\left(\int_{\partial B_1}|g^*(\xi)|\,d\mu_{r\zeta}(\xi)\right)^2\right)\,d\sigma_1(\zeta)\\&\le\int_{\partial B_1}\int_{\partial B_1}\exp\left(A|g^*(\xi)|^2\right)\,d\mu_{r\zeta}(\xi)\,d\sigma_1(\zeta)\\&=\int_{\partial B_1}\exp\left(A|g^*(\zeta)|^2\right)\,d\sigma_1(\zeta)\\&\le C(A,\omega,|g(0)|)\end{aligned}$$

для всех $0\le r<1$. □

3.3. **Доказательство теоремы 1.4.** Если отображение $\varphi:B_n\to B_m$ голоморфно, то

$$|\mathcal{R}\varphi(z)|\le|\nabla\varphi(z)|,\quad z\in B_n.$$

Поэтому следующее утверждение влечет теорему 1.4.

Теорема 3.4. *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$ и для голоморфного отображения $\varphi:B_n\to B_m$ выполнена оценка*

$$\frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|(1-|z|^2)}{1-|\varphi(z)|^2}\le\omega(1-|z|),\quad z\in B_n,\tag{3.4}$$

где функция ω удовлетворяет условиям леммы 3.3. Тогда

$$\int_{\partial B_n}\left(\frac{1}{1-|\varphi^*(\zeta)|^2}\right)^K\,d\sigma_n(\zeta)<\infty$$

для всех $K>0$.

Доказательство. С помощью леммы 3.1 для $q = 2$ выберем константу $\tau = \tau_{m,2} > 0$ и построим функции $F_{j,x} \in \mathcal{B}(B_m)$, $1 \le j \le J$, $0 \le x \le 1$. Отметим, что

$$|\nabla F_{j,x}(w)|(1-|w|^2) \le C, \quad w \in B_m,\ 1 \le j \le J,\ 0 \le x \le 1. \tag{3.5}$$

Зафиксируем точку $\zeta \in \partial B_n$. Рассмотрим срез-отображение $\varphi_\zeta(\lambda) = \varphi(\lambda\zeta)$, $\lambda \in B_1$. Заметим, что

$$(F_{j,x} \circ \varphi_\zeta)'(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_{j,x}}{\partial w_k}(\varphi_\zeta(\lambda)) \cdot (\varphi_\zeta)'_k(\lambda).$$

Имеем $\lambda(\varphi_\zeta)'_k(\lambda) = (\mathcal{R}\varphi_k)(\lambda\zeta)$, следовательно,

$$\begin{aligned}
|\lambda||(F_{j,x} \circ \varphi_\zeta)'(\lambda)|(1-|\lambda|^2) &\le |\nabla F_{j,x}(\varphi_\zeta(\lambda))||\mathcal{R}\varphi(\lambda\zeta)|(1-|\lambda|^2) \\
&\le C\frac{|\mathcal{R}\varphi(\lambda\zeta)|(1-|\lambda\zeta|^2)}{1-|\varphi(\lambda\zeta)|^2} \\
&\le C\omega(1-|\lambda|), \quad \lambda \in B_1,
\end{aligned}$$

в силу (3.5) и (3.4). Таким образом, лемма 3.3 применима к функции $F_{j,x} \circ \varphi_\zeta \in H(B_1)$. Напомним, что $\|F_{j,x}\|_{\mathcal{B}(B_m)} \le 1$, следовательно, величина $|(F_{j,x} \circ \varphi_\zeta)(0)|$ оценивается константой $C = C(\varphi(0))$. Поэтому лемма 3.3 гарантирует, что

$$C = C(A, \omega, \varphi(0)) \ge \int_{\partial B_1} \exp\left(A|F_{j,x} \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\right)\, d\sigma_1(\xi)$$

для всех $1 \le j \le J$, $0 \le x \le 1$, $0 \le r < 1$. Итак, имеем

$$C \ge \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\int_0^1\int_{\partial B_1} \exp\left(A|F_{j,x} \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\right)\, d\sigma_1(\xi)\, dx$$

для всех $0 \le x \le 1$, $0 \le r < 1$. Теперь теорема Фубини, неравенство Йенсена и лемма 3.1 при $q = 2$ гарантируют, что

$$\begin{aligned}
C &\ge \int_{\partial B_1} \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\int_0^1 \exp\left(A|F_{j,x} \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\right)\, dx\, d\sigma_1(\xi) \\
&\ge \int_{\partial B_1} \exp\left(\frac{A}{J}\sum_{j=1}^{J}\int_0^1 A|F_{j,x} \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\, dx\right)\, d\sigma_1(\xi) \\
&\ge \int_{\partial B_1} \exp\left(\frac{A\tau}{J}\log\frac{1}{1-|\varphi_\zeta(r\xi)|^2}\right)\, d\sigma_1(\xi) \\
&= \int_{\partial B_1} \left(\frac{1}{1-|\varphi_\zeta(r\xi)|^2}\right)^{A\tau/J}\, d\sigma_1(\xi)
\end{aligned}$$

для всех $0 \le r < 1$. Отметим, что указанная выше константа $C = C(A, \omega, \varphi(0))$ не зависит от точки $\zeta \in \partial B_n$. Поэтому, полагая $A = KJ/\tau$ и интегрируя по срезам, получаем

$$C \ge \sup_{0 \le r < 1} \int_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^K\, d\sigma_n(\zeta).$$

По лемме Фату доказательство теоремы 3.4 завершено. □

4. Теорема 1.4 и пространства роста

Следующий результат показывает, что заключение теоремы 1.1(ii) остается верным, если заменить $(1-|\varphi(z)|^2)^{-1}$ на произвольно большую функцию от $(1-|\varphi(z)|^2)$.

Теорема 4.1 ([1, теорема 5.3]). *Предположим, что ω — возрастающая функция на промежутке $[0,1]$, $\omega(0)=0$, $\omega(t)/t^{1-\varepsilon}$ убывает для некоторого $\varepsilon>0$, а также*

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\,dt=\infty.$$

Пусть функция $v:(0,1]\to(0,+\infty)$ непрерывна и $v(0+)=0$. Тогда существует внутренняя функция $\varphi: B_1\to B_1$ такая, что

$$\frac{|\varphi'(z)|(1-|z|^2)}{v(1-|\varphi(z)|^2)}\le \omega(1-|z|) \quad \text{для всех } z\in B_1.$$

Таким образом, естественно искать более сильный окончательный вывод, если гиперболический градиент

$$\frac{|\nabla\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}$$

в оценке (1.3) заменен, например, на дробь

$$\frac{|\nabla\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\gamma}}$$

для некоторого числа $\gamma>1$.

По аналогии с теоремой 1.4 сформулированная задача тесно связана со свойствами оператора композиции $C_\varphi: f\mapsto f\circ\varphi$, $f\in\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$, $\beta>0$. По определению пространство роста $f\in\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$ состоит из тех функций $f\in H(B_m)$, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)}=\sup_{z\in B_m}|f(z)|(1-|z|^2)^{\beta}<\infty.$$

В определенном смысле, пространство Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ является продолжением шкалы $\{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)\}_{\beta>0}$ в граничную точку $\beta=0$.

Хорошо известно, что норма $\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)}$ эквивалентна следующей норме типа Блоха:

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{\beta+1}(B_m)}=|f(0)|+\sup_{z\in B_m}|\nabla f(z)|(1-|z|)^{\beta+1}.$$

Следующая лемма является частным случаем леммы 1.2 из статьи [4].

Лемма 4.2. *Для заданных $\beta>0$ и $m\in\mathbb{N}$ существуют функции $F_j\in\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$, $1\le j\le J=J(m)$, такие, что*

$$\sum_{j=1}^{J}|F_j(z)|\ge\frac{1}{(1-|z|)^{\beta}},\quad z\in B_m. \tag{4.1}$$

Роль сформулированной леммы схожа с ролью леммы 3.1.

Теорема 4.3. *Предположим, что ω — возрастающая функция на промежутке $[0,1]$, $\omega(0)=0$, а также*

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\,dt < \infty.$$

Пусть $\alpha > 1$ и голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ удовлетворяет условию

$$\frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|(1-|z|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha} \le \omega(1-|z|), \quad z \in B_n.$$

Тогда

$$\int_{\partial B_n} \exp\left[\frac{K}{(1-|\varphi^*(\zeta)|^2)^{\alpha-1}}\right] d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

для всех $K > 0$.

Доказательство. С помощью леммы 4.2 для $\beta = \alpha - 1 > 0$ построим функции $F_j \in \mathcal{A}^{1-\alpha}(B_m)$, $1 \le j \le J$. Отметим, что

$$|\nabla F_j(w)|(1-|w|^2)^\alpha \le C, \quad w \in B_m,\ 1 \le j \le J. \tag{4.2}$$

Зафиксируем точку $\zeta \in \partial B_n$. Проведем рассуждение из доказательства теоремы 3.4. Таким образом, для заданного числа $A > 0$ имеем

$$C = C(A, \omega, \varphi(0)) \ge \int_{\partial B_1} \exp\left(A|F_j \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\right) d\sigma_1(\xi)$$

для всех $1 \le j \le J$, $0 \le r < 1$ в силу (4.1), (4.2) и леммы 3.3. Следовательно,

$$C \ge \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \int_{\partial B_1} \exp\left(A|F_j \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\right) d\sigma_1(\xi)$$

для всех $0 \le r < 1$. Применяя неравенство Йенсена и лемму 4.2, имеем

$$\begin{aligned} C &\ge \int_{\partial B_1} \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \exp\left(A|F_j \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\right) d\sigma_1(\xi) \\ &\ge \int_{\partial B_1} \exp\left(\frac{A}{J}\sum_{j=1}^{J} A|F_j \circ \varphi_\zeta(r\xi))|^2\right) d\sigma_1(\xi) \\ &= \int_{\partial B_1} \exp\left[\frac{A}{J(1-|\varphi_\zeta(r\xi)|^2)^{\alpha-1}}\right] d\sigma_1(\xi) \end{aligned}$$

для всех $0 \le r < 1$. Для завершения доказательства положим $A = KJ$, проинтегрируем по срезам и применим лемму Фату. □

5. Теорема 1.1(i) и внутренние функции

Как отмечалось во введении, естественно ожидать, что заключение теоремы 1.1(i) остается верным после замены гиперболического множителя $(1-|\varphi(z)|^2)^{-1}$ на меньшую функцию от $(1-|\varphi(z)|^2)$. Чтобы сформулировать это наблюдение в количественном

виде, предположим, что функции $\Omega, \omega : (0,1] \to (0,+\infty)$ ограничены и измеримы. По определению функция Ω называется *допустимой*, если импликация

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\,dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ не является внутренней функцией}$$

имеет место для всех голоморфных функций $\varphi : B_1 \to B_1$ таких, что

$$\frac{|\varphi'(z)|(1-|z|^2)}{1-|\varphi(z)|^2}\Omega(1-|\varphi(z)|^2) \le \omega(1-|z|^2) \quad \text{для всех } z \in B_1. \tag{5.1}$$

Например, с точностью до дополнительных ограничений на функцию ω, теорема 1.1(i) утверждает, что функция $\Omega \equiv 1$ допустима.

Для описания допустимых функций будет использован следующий результат, который по существу получен в статье [12].

Теорема 5.1 (ср. с теоремой 1.1 из [12])**.** *Пусть измеримая функция* $\Omega : (0,1] \to (0,+\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0 \frac{\Omega^2(t)}{t}\,dt = \infty. \tag{5.2}$$

Если функция $\varphi : B_1 \to B_1$ *является внутренней, то*

$$\int_{B_1} |\varphi'(z)|^2 \frac{\Omega^2(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2}(1-|z|^2)\,d\nu_1(z) = \infty. \tag{5.3}$$

Доказательство. Напомним, что считающая функция Неванлинны определяется равенством

$$N_\varphi(w) = \sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} \log\frac{1}{|z|}, \quad w \in B_1 \setminus \{\varphi(0)\}.$$

Имеем

$$\int_{B_1} |\varphi'(z)|^2 \frac{\Omega^2(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} \log\frac{1}{|z|}\,d\nu_1(z) = \int_{B_1} \frac{\Omega^2(1-|w|^2)}{(1-|w|^2)^2} N_\varphi(w)\,d\nu_1(w) \tag{5.4}$$

в силу формулы замены переменной; см. [11, с. 398].

Так как φ — внутренняя функция, то

$$N_\varphi(w) = \log\left|\frac{1-\overline{w}\varphi(0)}{w-\varphi(0)}\right|$$

для всех $w \in B_1 \setminus \{\varphi(0)\}$ вне некоторого множества логарифмической емкости нуль, следовательно, для всех $w \in B_1 \setminus E$, где $\nu_1(E) = 0$ (см. [9]). Следовательно,

$$CN_\varphi(w) \ge 1 - |w|^2$$

для всех $w \in B_1 \setminus E$. Итак, правая часть равенства (5.4) бесконечна в силу (5.2). Таким образом, имеет место (5.3). □

Следствие 5.2. *Пусть функция* $\Omega : (0,1] \to (0,+\infty)$ *ограничена и измерима. Тогда функция* Ω *допустима в том и только в том случае, когда*

$$\int_0 \frac{\Omega^2(t)}{t}\,dt = \infty. \tag{5.5}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (5.5). Предположим, что функция $\varphi : B_1 \to B_1$ голоморфна, имеет место оценка (5.1), а также

$$\int_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Тогда

$$\int_{B_1} |\varphi'(z)|^2 \frac{\Omega^2(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2}(1-|z|^2)\, d\nu_1(z) \le \int_{B_1} \frac{\omega^2(1-|z|^2)}{1-|z|^2}\, d\nu_1(z) < \infty.$$

Итак, в силу условия (5.5) теорема 5.1 гарантирует, что функция φ не является внутренней. Иными словами, Ω — допустимая функция.

Для доказательства обратной импликации предположим, что

$$\int_0 \frac{\Omega^2(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Тогда оценка (5.1) верна при $\omega = \Omega$ для внутренней функции $\varphi(z) = z$. Итак, функция Ω не является допустимой. □

Список литературы

1. A. B. Aleksandrov, J. M. Anderson, and A. Nicolau, *Inner functions, Bloch spaces and symmetric measures*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), no. 2, 318–352.
2. S.-Y. A. Chang, J. M. Wilson, and T. H. Wolff, *Some weighted norm inequalities concerning the Schrödinger operators*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), no. 2, 217–246.
3. E. Doubtsov, *Little Bloch functions, symmetric pluriharmonic measures, and Zygmund's dichotomy*, J. Funct. Anal. **170** (2000), no. 2, 286–306.
4. E. Doubtsov, *Growth spaces on circular domains: composition operators and Carleson measures*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **347** (2009), no. 11-12, 609–612.
5. E. Doubtsov, *Bloch-to-BMOA compositions on complex balls*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.
6. E. Doubtsov and A. Nicolau, *Symmetric and Zygmund measures in several variables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52** (2002), no. 1, 153–177.
7. M. J. González and A. Nicolau, *Multiplicative square functions*, Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 3, 673–736.
8. P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, and L. Rodríguez-Piazza, *Composition operators on Hardy-Orlicz spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **207** (2010), no. 974, vi+74.
9. J. E. Littlewood, *On inequalities in the theory of functions*, Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), 481–519.
10. J. H. Shapiro, *Cluster set, essential range, and distance estimates in BMO*, Michigan Math. J. **34** (1987), no. 3, 323–336.
11. J. H. Shapiro, *The essential norm of a composition operator*, Ann. of Math. (2) **127** (1987), 375–404.
12. W. Smith, *Inner functions in the hyperbolic little Bloch class*, Michigan Math. J. **45** (1998), no. 1, 103–114.
13. K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.
14. A. Zygmund, *Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II*, Cambridge University Press, New York, 1959.