ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 18/2011

Две теоремы о среднем для L_q-уклонений точечных распределений

М. М. Скриганов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

E-mail: maksim88138813@mail.ru

Декабрь, 2011

В настоящей работе мы продолжаем исследование лакунарности и статистической независимости функциональных рядов в контексте теории равномерно распределенных точечных множеств в единичном кубе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект08-01-00182.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина,
В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин,
В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

В настоящей работе мы показываем, что большое число результатов о равномерных распределениях может быть получено как непосредственное следствие двух теорем о средних хначениях L_q-уклонений. Первая из этих двух теорем является обощением известной теоремы Чена [1, 2] о p-адических сдвигах точечных множеств. Это обобщение было получено в нашей предыдущей работе [12]. Вторая теорема о среднем доказывается в настоящей работе.

Как следствие этих двух теорем мы показываем, что предельно точные порядки L_q-уклонений точечных распределений могут быть получены на очень маленьких усредняющих множествах. При некоторых специальных условиях усредняющие множества могут даже стягиваться в единственную точку. Такие специальные точечные распределения названы в работе *самоусредняющимися*.

1. Первая теорема о среднем

Настоящая работа является непосредственным продолжением работы [12]. Мы следуем введенным таким обозначениям, ограничиваясь, при необходимости, лишь краткими комментариями.

Пусть D_N – произвольное подмножества (распределение) $N > 1$ точек в d-мерном единичном кубе $U^d = [0,1)^d$ и

$$\mathcal{L}[D_N, Y] = \left(\int\limits_{U^d} \left| \mathcal{L}[D_N, Y] \right|^q \right)^{1/q}, \quad 1 \le 1 < \infty, \tag{1.1}$$

его L_q-уклонение. Здесь

$$\mathcal{L}[D_N, Y] = \#\{D_N \cap B_Y\} - N \operatorname{vol} B_Y \tag{1.2}$$

– локальное уклонение D_N в прямоугольном ящике $B_Y = [0, y_1) \dots [0, y_d)$, $Y = (y_1, \dots, y_d) \in U^d$.

Известно, что при $1 < q < \infty$ для любого распределения D_N выполняется слдующая оценка снизу

$$\mathcal{L}_q[D_N] > c_{d,q} \ \ (\log N)^{\frac{1}{2}(d-1)} \tag{1.3}$$

с постоянной $c_{d,q}$, не зависящей от N. Для $q \ge 2$ – это теорема Рота, а для $1 < 1 < 2$ – теорема Шмидта, см. [1].

Порядок оценки (1.3) является наилучшим. Более точно, для каждого q, $1 \le q < \infty$, и любого $N > 1$ существует распределение D_N из N точек в U^d такое, что

$$\mathcal{L}_q[D_N] < C_{d,q} \ \ (\log N)^{\frac{1}{2}(d-1)} \tag{1.4}$$

с постоянной $c_{d,q}$, не зависящей от N. При $1 \le q \le 2$ этот результат был получен Дэвенпортом для $d = 2$ и Ротом для $d \ge 3$, а в общем случае для произвольных q и d Ченом, см. [1, 2].

Результат Чена основан на глубоких и нетривиальных комбинаторных соображениях. В нашей предыдущей работе [12] был предложен новый подход к доказательству таких результатов, основанный на гармоническом анализе, в частности, на теории лакунарных функциональных рядов. В рамках этого нового подхода удается существенно обобщить результат Чена. В настоящей работе мы продолжаем исследование в этом направлении и приводим некоторые новые результаты.

Напомним некоторые обозначения из [11, 12].

Мы пишем $\mathbb{N}$ для множества всех положительных целых чисел, $\mathbb{N}_0$ для множества всех неотрицательных целых, $\mathbb{N}^d$ и $\mathbb{N}_0^d$ для прямого произведения d копий соответствующих множеств.

Для $s \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{Q}(2^s) = \{x = m2^{-s} \in [0,1) : m = 0, 1, \dots, 2^s - 1\}, \\ &\mathbb{Q}^d(2^s) = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in U^d : x_j \in \mathbb{Q}(2^s), \quad j = 1, \dots, d\}, \\ &\mathbb{Q}(2^\infty) = \bigcup_{s \ge 0} \mathbb{Q}(2^s), \quad \mathbb{Q}^d(2^\infty) = \bigcup_{s \ge 0} \mathbb{Q}^d(2^s). \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Точки в $\mathbb{Q}^d(2^\infty)$ называются двоичными рациональными точками.

Любое $x \in [0,1)$ может быть представлено в виде

$$x = \sum_{i \ge 1} \eta_i(x) 2^{-i}, \tag{1.6}$$

где $\eta_i(x) \in \{0,1\} \simeq \mathbb{F}_2$, $i \in \mathbb{N}$. Здесь $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов, отождествленное с множеством вычетов $\{0,1\} \bmod 2$.

Двоичное разложение (1.6) единственно, если условится считать, что для каждой двоичной рациональной точки сумма в (1.6) содержит конечное число ненулевых слагаемых. С учтом этого соглашения, $\eta_i(x) = 0$ при $i > s$, если $x \in \mathbb{Q}(2^s)$.

Для произвольной точки $x \in [0,1)$ с двоичным разложением (1.6) обозначим через $x^{(s)}$ ее *проекцию на* $\mathbb{Q}(2^s)$:

$$x^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \eta_i(x) 2^{-i}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{1.7}$$

а при $s = 0$ положим $x^{(0)} = 0$, так что

$$x = x^{(s)} + \theta_s(x) 2^{-s}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \tag{1.8}$$

где $\theta_s(x) \in [0,1)$ для всех $x \in [0,1)$.

Аналогично, для точки $X = (x_1, \ldots, x_d) \in U^d$ обозначим через $X^{(s)} = (x_1^{(s)}, \ldots, x_d^{(s)})$ ее проекцию на $\mathbb{Q}^d(2^s)$, так что

$$X = X^{(s)} + \Theta_s(X) 2^{-s}, \quad s \in \mathbb{N}_0 \tag{1.9}$$

где $\Theta_s(X) = (\theta_s(x_1), \ldots, \theta_s(x_d)) \in U_d$ для всех $X \in U^d$. Для $X \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ "поправка" $\Theta_s(X) = 0$.

Для любого точечного множества $D \subset U^d$ обозначим через

$$D^{(s)} = \{X^{(s)} : X \in D\} \tag{1.10}$$

его проекцию на $\mathbb{Q}^d(2^s)$.

На множестве двоичных рациональных точек естественно определяется структура векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_2$. Для любых двух точек x и y в $\mathbb{Q}(2^\infty)$ определим их сумму $x \oplus y$ следующими соотношениями

$$\eta_i(x \oplus y) = \eta_i(x) + \eta_i(y) \bmod 2, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

а для любых двух векторов $X = (x_1, \ldots, x_d)$ и $Y = (y_1, \ldots, y_d)$ в $\mathbb{Q}^d(2^\infty)$ определим

$$X \oplus Y = (x_1 \oplus y_1, \ldots, s_d \oplus y_d). \tag{1.12}$$

По отношению к так определенному сложению $\oplus$ каждое множество $\mathbb{Q}^d(2^s)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$, причем $\dim \mathbb{Q}^d(2^s) = ds, \#\{\mathbb{Q}^d(2^s)\} = 2^{ds}$.

Отметим, что формулы (1.11) и (1.12) корректно определяют операцию сложкния $\oplus$ для всех пар точек X и Y, когда только одна из точек, скажем Y принадлежит $\mathbb{Q}^d(2^\infty)$, а точка $x \in U^d$ произвольна (см. [12, формулы (1.12) и (1.13)).

Принимая во внимание сказанное выше, мы можем для любого распределения конечного числа точек $D_N \subset U^d$ и любой точки $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ определить двоичный сдвиг

$$D_N \oplus T = \{X \oplus T : X \in D_N\} \subset U^d \tag{1.13}$$

и рассматривать его как новое распределение точек в U^d.

Следуя Чену, см. [1, 2], определим для распределения D следующие средние значения для L_q-уклонений:

$$\mathcal{M}_{s,q}[D] = \left(2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} \left(\mathcal{L}_q[D_N \oplus T]\right)^q\right)^{1/q}. \tag{1.14}$$

Напомним определение специального класса распределений – так называемых (δ, s, d)-сеток. Рассмотрим *элементарные интервалы* $\Delta_a^m \subset [0,1)$, a, $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\Delta_a^m = [m2^{-a}, (m+1)2^{-a}), \quad 0 \le m < 2^a \tag{1.15}$$

и элементарные ящики $\Delta_A^M \subset U^d$, $A = (a_1, \ldots a_d)$, $M = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$,

$$\Delta_A^M = \Delta_a^{m_1} \times \ldots \times \Delta_{a_d}^{m_d}, \quad 0 \le m_j < 2^{a_j}, j = 1, \ldots, d. \tag{1.16}$$

Каждый такой ящик имеет объем $\mathrm{vol}_A^M = 2^{-a_1 - \ldots - a_d}$.

Пусть $0 \le \delta \le s$ целые. Подмножество $D \subset U^d$, состоящее из $N = 2^s$ точек, называется двоичной (δ, s, d)-*сеткой с дефектом* δ, если каждый элементарный ящик Δ_A^M объема $2^{\delta - s}$ содержит в точности 2^δ точек D.

Нетрудно проверить, что для любой (δ, s, d)-сетки D её сдвиг $D \oplus T$, $T \in \mathbb{Q}^d(2^\infty)$ так же является сеткой.

Заменяя в определении и во всех приведенных выще формулах (1.7)–(1.16) основание 2 на произвольное простое число p, можно получить (δ, s, d)-сетки с основанием p см. [1, 9]. Важно отметить, что при любом основании p дефект сеток δ растет с ростом размерности d. В частности, $(0, s, d)$-сетки с основанием p и произвольно большим s существуют, если и только если $d \le p + 1$; так бесконечные последовательности двоичных сеток с $\delta = 0$ существуют только в размерностях $d = 1, 2$ и 3, см. [1, 9].

Известно, см. [1], что (δ, s, d)-сетки заполняют единичный куб очень равномерно и при всех q их L_q-уклонения допускают оценку

$$\mathcal{L}_q[D] \, < \, C_d \, 2^\delta \, s^{d-1}, \quad s \to \infty, \tag{1.17}$$

с постоянной C_d, не зависящей от q, δ и s. Для произвольных (δ, s, d)-сеток эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. В то же время, при фиксированных q и δ оценка (1.17) еще очень далека от оценки снизу (1.3) при $s \to \infty$.

В нашей предыдущей работе [12] был получен следующий результат.

Теорема 1.1 (Первая теорема о среднем). *Пусть $D \subset U^d$ – произвольная двоичная (δ, s, d)-сетка, тогда для любого $q \geq 2$ среднее значение L_q-уклонений* (1.14) *удовлетворяет оценке*

$$M_{s,q}[D] < \gamma(q, \delta, d)(s+1)^{\frac{1}{2}(d-1)}, \tag{1.18}$$

где можно положить

$$\gamma(q, \delta, d) = 4^{\delta+d+1} q^{\frac{1}{2}(d+1)}. \tag{1.19}$$

Из Теоремы 1.1 сразу же следует, что для любой (δ, s, d)-сетки с небольшим δ существует сдвиг $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$, $T = T(D, q)$ такой, что L_q-уклонение $\mathcal{L}_q[D \oplus T]$ достигает нижней оценки (1.3).

Впервые оценки типа (1.18) для средних (1.14) были получены Ченом, см. [1, 2], для сеток с дефектом $\delta = 0$ на основе трудного комбинаторного анализа, включавшего совместную индукцию по параметрам d, s и целым четным q. При таком подходе предположение $\delta = 0$ оказывается существенным, и, как следствие, для каждого фиксированного простого основания p теорема Чена в своей первоначальной форме могла быть использована только в размерностях $d \leq p+1$, для двоичных сеток только в размерностях 1, 2 и 3.

В работе [12] был предложен новый подход к исследованию среднего значения L_q-уклонений (1.14), для которого величина дефекта δ оказывается совершенно не существенной. Этот подход опирается на теорию лакунарных функциональных рядов. В случае двоичных (δ, s, d)-сеток это ряды функций Радемахера, образующих лакунарную подсистему функций Уолша и Теорема 1.1 получается как следствие классического неравенства Хинчина для функций Радемахера. В настоящей работе мы продолжаем исследование средних значений L_q-уклонений в рамках указанного подхода.

2. Вторая теорема о среднем

Пусть $D \subset U^d$ – произвольное распределение конечного числа точек, а $V \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ – некоторое фиксированное непустое подмножество. Введем следующие *условные среднии L_q-уклонений*

$$M_{s,q}[D;V] = \left[(\#\{V\})^{-1} \sum_{z \in v} \left(\mathcal{L}_q[D \oplus z] \right)^q \right]^{1/q}. \tag{2.1}$$

В частности, $M_{s,q}[D;\mathbb{Q}^d(2^s)] = M_{s,q}[D]$ и определение (2.1) является обобщением определения (1.14).

Нас интересует вопрос: Для каких *усредняющих подмножеств* $V \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ можно получить результаты, аналогичные Теореме 1.1. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением случая, когда и распределение D и усредняющее подмножество V являются линейными подпространствами в $\mathbb{Q}^d(2^s)$. Это позволяет сформулировать наши результаты в терминах двойственных подпространств. В общем случае для формулировки результатов пришлось бы использовать такие понятия как групповая алгебра. Однако в этой публикации мы не стремились к максимальной общности формулировок, сосредоточив внимание на основных идеях нашего подхода. В связи с этим, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Для каждой размерности $d \geq 1$ при любом $s \in \mathbb{N}_0$ существуют линейные подпространства $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ размерности s являющиеся (δ, s, d)-сетками с $\delta = O(d \log d)$. Такие подпространства могут быть заданы явными конструкциями.*

(δ, s, d) – сетки, являющиеся подпространствами в $\mathbb{Q}^d(2^s)$, будем называть линейными (δ, s, d)-сетками.

Фактически все известные конструкции (δ, s, d)-сеток приводят к линейным подпространствам, указанным в Лемме 2.1. В произвольных размерностях d первые явные конструкции (δ, s, d)-сеток с $\delta = 0(d \log d)$ принадлежат Соболю [14], хотя в двумерном случае пример $(0, s, 2)$-сетки был построен ещё ван дер Корпутом [1]. Простое описание явных конструкций линейных (δ, s, d)-сеток на основе эрмитовых интерполяций над конечным полем можно найти в [9]. Отметим еще, что, используя методы алгебраической геометрии над конечными полями, можно

доказать существование линейных (δ, s, d)-сеток с $\delta = 0(d)$, причем эта оценка уже не улучшаема при больших d, см. [7].

Напомним некоторые обозначения из [10, 12]. Любое целое $l \in \mathbb{N}_0$ можно единственным способом представить в виде

$$l = \sum_{i \geq 1} \lambda_i(l) 2^{i-1}, \tag{2.2}$$

где $\lambda_i(l) \in \{0, 1\} \simeq \mathbb{F}_2$, $i \in \mathbb{N}$. На множестве $\mathbb{N}_0$ естественно определяется структура векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_2$. Для любых двух целых l и k в $\mathbb{N}_0$ определим их сумму $l \oplus k$ следующими соотношениями

$$\lambda_i(l \oplus k) = \lambda_i(l) + \lambda_i(k) \bmod 2, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Аналогично, для любых двух векторов $L = (l_1, \ldots, l_d)$ и $K = (k_1, \ldots, k_d)$ в $\mathbb{N}_0^d$ определим

$$L \oplus K = (l_1 \oplus k_1, \ldots, l_d \oplus k_d). \tag{2.4}$$

Для $s \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\mathbb{N}_0(2^s) = \{l \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq l < 2^s\} \tag{2.5}$$

и

$$\mathbb{N}_0^d(2^s) = \{L = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d : l_j \in \mathbb{N}_0(2^s),\ j = 1, \ldots, d\}. \tag{2.6}$$

По отношению к введенному сложению каждое множество $\mathbb{N}^d(2^s)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$, причем $\dim \mathbb{N}_0(2^s) = ds$ и $\#\{\mathbb{N}_0(2^s)\} = 2^{ds}$.

Для любых $l \in \mathbb{N}_0$ и $x \in [0, 1)$ определим спаривание

$$\langle l, x \rangle = \sum_{i \geq 1} \lambda_i(l) \eta_i(x) \bmod 2, \tag{2.7}$$

где $\lambda_i(l)$ и $\eta_i(x)$ – коэффициенты в разложениях (2.2) и (1.6), соответственно. Для $L = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и $X = (x_1, \ldots, x_d) \in U^d$ положим

$$\langle L, X \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle l_j, x_j \rangle \bmod 2. \tag{2.8}$$

Для $L \in \mathbb{N}_0^d(2^s)$ и $X \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ спаривание $\langle L, X \rangle$ является невырожденной билинейной формой и поэтому для любого подпространства

$W \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ корректно определяется двойственное подпространство $W^\perp \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$ по формуле

$$W^\perp = \big\{L \in \mathbb{N}_0^d(2^s) : \langle L, X\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad X \in W\big\}, \tag{2.9}$$

при этом $\dim W + \dim W^\perp = ds$, или в терминах коразмерности $\dim W = \operatorname{codim} W^\perp$ и аналогично $\operatorname{codim} W = \dim W^\perp$.

Для любых двух подпространств D и V в $\mathbb{Q}^d(2^s)$ мы обозначаем через $D + V$ их сумму (относительно сложения $\oplus$):

$$D + V = \{X \oplus Y : X \in D,\ Y \in V\}. \tag{2.10}$$

Имеет место формула

$$\dim(D + V) = \dim D + \dim V - \dim D \cap V. \tag{2.11}$$

Кроме того, $D^\perp \cap V^\perp = (D + V)^\perp$ и

$$\operatorname{codim}(D + V) = \dim(D^\perp \cap V^\perp). \tag{2.12}$$

Если в определении (2.1) V – линейное подпространство в $\mathbb{Q}^d(2^s)$, то $M_{s,q}[D \oplus X; V] = M_{s,q}[D; V]$ для всех $X \in V$ и, следовательно, $M_{s,q}[D \oplus Z; V]$ как функция z фактически определена на фактор-пространстве $\mathbb{Q}^d(2^s)/V$.

Известно, см. [9, 10, 12], что многие важные свойства равномерно распределенных точечных множеств могут быть изучены и сформулированы в терминах специальных метрик на пространствах $\mathbb{N}_0^d(2^s)$. Для описания общих свойств равномерных распределений наиболее удобна метрика Розенблюма–Цфасмана [8]; подробнее мы коснемся этой темы в следующем параграфе. А сейчас нам понадобиться классический объект теории кодирования – метрика Хэмминга, см. [6].

Для $l \in \mathbb{N}_0$ хэмминговский вес $\varkappa(l)$ определяется как число ненулевых коэффициентов в представлении (2.2). Для $L = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$ можно ввести два хэмминговских веса

$$\varkappa(L) = \sum_{j=1}^{d} \varkappa(l_j) \tag{2.13}$$

и

$$\varkappa_1(L) = \max_{1 \le j \le d} \varkappa(l_j) \tag{2.14}$$

Очевидно, что $\varkappa(L \oplus K)$ и $\varkappa_1(L \oplus K)$ определяют метрики на каждом из векторных пространств $\mathbb{N}_0^d(2^s)$. Веса (2.13) и (2.14) связаны неравенствами

$$\varkappa_1(L) \le \varkappa(L) \le d\varkappa_1(L), \quad L \in \mathbb{N}_0^d, \tag{2.15}$$

так что при каждом d метрики $\varkappa$ и $\varkappa_1$ эквивалентны.

Для каждого подпространства $W \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$, $W \ne \{0\}$, определяются его минимальные веса $\varkappa(W)$ и $\varkappa_1(W)$ по формуле

$$wt(W) = \min\{wt(L) \ : \ L \in W \setminus \{0\}\}, \tag{2.16}$$

где $wt(\cdot)$ обозначает любой из весов $\varkappa$ или $\varkappa_1$. Из (2.15) следует, что

$$\varkappa_1(W) \le \varkappa(W) \le d\varkappa_1(W). \tag{2.17}$$

Удобно так же считать, что $\varkappa(\{0\}) = \varkappa_1(\{0\}) = ds + 1$.

Для любого веса и любых двух подпространств W_1 и W_2, очевидно, имеет место неравенство

$$wt(W_1 \cap W_2) \ge \max\{wt(W_1), wt(W_2)\}. \tag{2.18}$$

Введем следующую функцию, характеризующую распределение точек подпространства $W \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$ в шарах соответствующих метрике (2.14):

$$\nu(W,t) = \big(\#\big\{L \in W \ : \ \varkappa_1(L) \le t\big)^{1/t}, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Отметим, что $\nu(W,t) = 1$ при $t < \varkappa_1(W)$.

В настоящей работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 2.1 (Вторая теорема о среднем)**.** *Пусть $D \subset U^d$ – двоичная (δ, s, d)-сетка. Предположим, что распределение D и усрдняющее подмножество V в* (2.1) *являются подпространствами в $\mathbb{Q}^d(2^s)$. Тогда для условных средних L_q-уклонений* (2.1) *справедливы следующие утверждения:*

(i) *Для любого $q \ge 2$ и всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ имеет метсо оценка*

$$M_{s,q}[D \oplus T; V] \le \big(M_{s,2m_q}[D] + d2^{\delta+1}\big)\nu\big(D^\perp \cap V^\perp, 2m_q\big), \tag{2.20}$$

где $2m_q \ge 2$ – наименьшее четное целое, такое, что $2m_q \ge q$, т.е. $m_q = \lceil \frac{q}{2} \rceil$, а функция $\nu(\,.\,,\,.)$ определена в (2.19).

(ii) *Для целых четных* $q = 2m \geq 2$ *имеет место соотношение*

$$M_{s,2m}[D \oplus T; V] = M_{s,2m}[D] + d2^{\delta+1}\theta(T), \tag{2.21}$$

при условии, что

$$\varkappa_1(D^\perp \cap V^\perp) > 2m. \tag{2.22}$$

Здесь $|\theta(T)| \leq 1$ *при всех* $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$, *а* $\varkappa_1(\cdot)$ *– вес* (2.16) *соответствующий метрике* (2.14).

В частности, соотношение (2.21) *имеет место при выполнении любого из следующих двух условий:*

$$\varkappa(V^\perp) > 2md, \tag{2.23}$$

$$\varkappa(D^\perp) > 2md, \tag{2.24}$$

Здесь $\varkappa(\cdot)$ *– вес соответствующий метрике* (2.13).

Теорема 2.1 позволяет оценивать условные средние L_q-уклонений (2.1) через их безусловные уклонения (1.14), которые можно уже очень точно оценить с помощью Теоремы 1.1. Весьма примечательным в Теореме 2.1 является соотношение (2.21) – оно показывает, что при выполнении условия (2.22) (либо условий (2.23), (2.24)) среднее $M_{s,2m}[D \oplus R, V]$ почти не зависит от сдвигов $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$. В §§3 и 4 мы обсудим более подробно следствия Теорем 1.1 и 2.1.

Теорема 2.1 будет доказана в §5 как частный случай еще более общего утверждения о средних, см. Теорему 5.1.

3. Следствия теорем о среднем: усредняющие подпространства малой размерности

В этом и следующем параграфе приводятся некоторые следствия Теорем 1.1 и 1.2.

Нас интересует вопрос: насколько малым может быть выбрано усредняющее подмножество $V \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ в определении (2.1) чтобы гарантировать для (δ, s, d)-сеток D оценку, аналогичную (1.17):

$$M_{s,q}[D \oplus T; V] < \beta(q, \delta, d)(s+1)^{\frac{1}{2}(d-1)} \tag{3.1}$$

с некоторой постоянной $\beta(q, \delta, d)$, не зависящей от $s \in \mathbb{N}$ и $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$?

Основной результат этого параграфа состоит в том, что для произвольных (линейных) (δ, s, d)-сеток усредняющее подмножество V может быть выбрано как линейное подпространство в $\mathbb{Q}^d(2^s)$ очень малой размерности (см. Следствие 3.3).

В следующем параграфе мы покажем, что если специальные дополнительные условия наложить на само распределение D, то усредняющее множество V может быть стянуто в точку, $V = \{0\}$, и для получения оценки (3.1) вообще не требуется усреднения (см. Следствия 4.1 и 4.2).

Мы будем предполагать, что выполнены условия Теоремы 2.1. В частности, что (δ, s, d)-сетки D являются линейными подпространствами в $\mathbb{Q}^d(2^s)$. Следует отметить, что это предположение не существенно для приводимых в этом параграфе следствий 3.1, 3.2 и 3.3 – все эти утверждения остаются в силе без каких-либо изменений для произвольных (δ, s, d)-сеток; соответствующая модификация их доказательств будет дана в последующей публикации [13]. В то же время, для результатов следующего параграфа предположение о линейности распределений D оказывается принципиально важным и не может быть опущено (см. Следствия 4.1 и 4.2).

Следствие 3.1. *Пусть $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ – произвольная (линейная) (δ, s, d)-сетка, а $V \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ – произвольное подпространство размерности $\dim V = (d-1)s$. Тогда для любого $q \geq 2$ и всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ имеет место оценка*

$$M_{s,q}[D \oplus T; V] \leq \big(M_{s.2m_q}[D] + d2^{\delta}\big)\#\big\{D \cap V\big\}^{1/2m_q}. \tag{3.2}$$

Proof. Из определения (2.18) следует такая оценка

$$\nu(w,t)^t \leq 2^{\dim W}.$$

С учетом соотношений (2.11) и (2.12) для $W = D^{\perp} \cap V^{\perp}$ получаем

$$\nu\big(D^{\perp} \cap V^{\perp}, 2m_q\big)^{2m_q} \leq 2^{\dim D^{\perp} \cap V^{\perp}} = 2^{\operatorname{codim}(D+V)} = 2^{ds - \dim D - \dim V}\#\{D \cap V\}.$$

Поскольку $\dim D = s$ и $\dim V = (d-1)s$, то

$$\nu\big(D^{\perp} \cap V^{\perp}, 2m_q\big) \leq \#\big\{D \cap V\big\}^{1/2m_q}.$$

Это неравенство вместе с (2.20) приводит к оценке (3.2).

Следствие 3.1 доказано. □

Приведём примеры использования Следствия 3.1.

Рассмотрим элементарные ящики (1.16) вида

$$\Delta_A^0 = [0, 2^{-a_1}) \times \cdots \times [0, 2^{-a_d}),$$

$A = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{N}_0^d$, и положим

$$V_A = \mathbb{Q}^d(2^s) \cap \Delta_A^0. \tag{3.3}$$

Легко проверить, что если $\operatorname{vol} \Delta_A^0 = 2^{-a_1 - \cdots - a_d} = 2^{-s}$, то V_A является линейным подпространством в $\mathbb{Q}^d(2^d)$ размерности $(d-1)s$. Действительно, если $a_1 + \cdots + a_d = s$, то либо $0 \le a_j < s$ для всех $j = 1, \ldots, d$, либо только одно из целых a_j, скажем $a_1 = s$, а остальные $a_j = 0$, $j = 2, \ldots, d$. В первом случае, координаты точки $X = (x_1, \ldots, x_d) \in V_A$ имеют вид

$$x_j = \sum_{i=a_j+1}^{s} \eta_i(x_j) 2^{-i}, \quad j = 1, \ldots, d$$

и, следовательно, $\dim V_A = (s - a_1) + \cdots + (s - a_j) = (d-1)s$. Во втором случае, подпространство V_A состоит из точек $X \in \mathbb{Q}^d(2^s)$, лежащих на $(d-1)$-мерной грани единичного куба $U^d : X = (0, x_2, \ldots, x_d)$, где $(x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ и, следовательно, $\dim V_A = (d-1)s$.

Используя приведенное утверждение и определение (δ, s, d)-сетки, из Следствия 3.1 и Теоремы 1.1 получаем

Следствие 3.2. *Пусть $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ – (линейная) (δ, s, d)-сетка, $V = V_A$ и в определении* (3.3) $\operatorname{vol} \Delta_A^0 = 2^{-s}$. *Тогда для любого $q \ge 2$ имеет место оценка* (3.1) *с постоянной*

$$\beta(q, \delta.d) = \big(\gamma(q, \delta, d) + d2^{\delta}\big) 2^{\delta/2m_q}, \tag{3.4}$$

где $\gamma(q, \delta, d)$ – постоянна в оценке (1.18).

Следствие 3.2, в частности, показывает, что в качестве усредняющего множества можно взять множество точек $\mathbb{Q}^d(2^s)$, лежащих на одной из $(d-1)$-мерных граней единичного куба. Это обстоятельство было отмечено еще Ченом, см. [1, 2].

В Следствии 3.2 не учитывался хэмминговский вес подпространства $V^{\perp}$, двойственного к усредняющему подпространству V. Если хэмминговский вес $V^{\perp}$ принять во внимание, то размерность V может быть

существенно уменьшена. Чтобы сформулировть соответствующий результат нам понадобятся некоторые факты из теории кодирования (подробности можно найти, например, в [6]).

Пусть

$$v(r) = \#\big\{L \in \mathbb{N}^d(2^s) \;\; \varkappa(r) \le r\big\} \tag{3.5}$$

– количество точек в хэмминговском шаре радиуса r. $r = 0, 1, \ldots, ds$.

Если пространства $\mathbb{Q}^d(2^s)$ и $\mathbb{N}_0^d(2^s)$ отождествить с наборами элементов $\{\eta_i(x_j)\}$ и, соответственно, $\{\lambda_i(l_j)\}$, $1 \le i \le s$, $j = 1, \ldots, d$, см. (1.5), (1.6) и (2.6), (2.7), то при таких изоморфизмах векторных пространств

$$\mathbb{Q}^d(2^s) \simeq \mathbb{F}_2^l \simeq \mathbb{N}_0^d(2^s), \quad l = ds \tag{3.6}$$

вес (2.13) (но не (2.14)!) совпадает со стандартным хэмминговским весом на $\mathbb{F}_2^l$, а спаривание (2.7), (2.8) со стандартным спариванием на $\mathbb{F}_2^l$, см. [6].

Величина (3.5) может быть записана как сумма биномиальных коэффициентов:

$$v(r) = v(l, r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{l}{i} \tag{3.7}$$

и имеет место следующая оценка (см. [6, Теорема 1.4.5])

$$v(l, r) \le 2^{l\mathcal{H}(\frac{r}{l})}, \quad 0 \le r \le \frac{1}{2}l, \tag{3.8}$$

где $\mathcal{H}(\lambda)$ – двоичная энтропия: $\mathcal{H}(0) = 0$ и

$$\mathcal{H}(\lambda) = -\lambda \log_2 \lambda - (1-\lambda)\log_2(1-\lambda), \quad 0 < \lambda \le \frac{1}{2}; \tag{3.9}$$

здесь и далее $\log_2$ обозначает логарифм с основанием 2.

Отметим, что $\mathcal{H}(\lambda)$ является непрерывной монотонной функцией, возрастающей на промежутке $[0, \frac{1}{2}]$ от 0 до 1. Следовательно, обратная функция $\mathcal{H}^{\leftarrow}(x)$ также является непрерывной и монотонной, возрастающей на промежутке $[0, 1]$ от 0 до $\frac{1}{2}$. Пользуясь элементарным неравенством

$$-(a-\lambda)\log)_2(1-\lambda) < 2\lambda, \quad 0 < \lambda \le 1,$$

получаем такую оценку для энтропии (3.9)

$$l\mathcal{H}\Big(\frac{r}{l}\Big) < 2r\log_2 l, \quad 0 < r \le \frac{1}{2}l. \tag{3.10}$$

Эта оценка полезна при произвольно фиксированном r и $l \to \infty$.

Следующий факт известен в теории кодирования как *граница Варшамова–Гильберта* (см. [6, Теорема 5.1.8]):

Если для целых $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}_0$ выполняется неравенство

$$v(l,r) < 2^{l-k+1}, \tag{3.11}$$

то в пространстве $\mathbb{F}_2^l$ существует линейное подпространство $C(l,k,r)$ размерности k и хэмминговским весом $\varkappa(C(l,k,r)) > r$.

Используя приведенные выше факты из теории кодирования, мы легко приходим к такому следствию Теорем 1.1 и 1.2.

Следствие 3.3. *Для любого целого m, $1 \le m < s/4$, существует линейное подпространство $V(m,d) \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ размерности*

$$\dim V(m,d) \le ds\mathcal{H}\Big(\frac{2m}{s}\Big) < 4dm\log_2 ds \tag{3.12}$$

такое, что для всех (линейных) (δ,s,d)-сеток $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ и усредняющего подпространства $V = V(m,d)$ имеет место соотношение

$$M_{s,2m}[D \oplus T; V(m,d)] = M_{s,2m}[D] + d2^\delta\theta(T), \tag{3.13}$$

где $|\theta(T)| \le 1$ для вех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$.

В частности, для усредняющего подпространства $V = V(m,d)$ и всех показателей q с $2m_q \le 2m$ имеет место оценка (3.1) *с постоянной*

$$\beta(q,\delta,d) = \gamma(2m,\delta,d) + d2^\delta, \tag{3.14}$$

где $\gamma(2m,\delta,d)$ – постоянная в оценке (1.18).

Proof. Для любых фиксированных $l \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{N}_0$, $0 \le r < \frac{1}{2}l$, рассмотрим неравенство

$$l\mathcal{H}\Big(\frac{r}{l}\Big) < l - k + 1. \tag{3.15}$$

Поскольку $0 \le \mathcal{H}\Big(\frac{r}{l}\Big) < 1$, неравенство (3.15) имеет решения $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le l$. Пусть k^* – максимальное решение, тогда

$$l\mathcal{H}\Big(\frac{r}{l}\Big) < l - k^* + 1 \le l\mathcal{H}\Big(\frac{r}{l}\Big) + 1. \tag{3.16}$$

Из левого неравенства (3.16) мы получаем, что

$$2^{l\mathcal{H}\left(\frac{r}{l}\right)} < 2^{l-k^*+1}$$

и, в силу оценки (3.8), отсюда следует, что выполняется неравенство (3.11) с $k = k^*$. Граница Варшамова–Гильберта гарантирует теперь существование линейного подпространства $C(l,r) = C(l,k^*,r) \subset \mathbb{F}_2^l$ размрности k^* с хэмминговским весом

$$\varkappa(C(l,r)) > r. \tag{3.17}$$

Если $C^\perp(l,r) \subset \mathbb{F}_2^l$ – двойственное подпространство, то $\dim C^\perp(l,r) + \dim C(l,r) = l$ и, пользуясь правым неравенством (3.16), находим

$$\dim C^\perp(l,r) = l - k^* \le l\mathcal{H}\Big(\frac{r}{l}\Big). \tag{3.18}$$

Пусть $J : \mathbb{F}_2^l \to \mathbb{Q}^d(2^s)$ и $J^\perp : \mathbb{F}_2^l \to \mathbb{N}_0^d(2^s)$ – изоморфизмы векторных пространств в (3.6). Определим векторные подпространства $V_r \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ и $V_r^\perp \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$ следующими формулами

$$V_r = J(C^\perp(l,r)), \quad V_r^\perp = J^\perp(C^\perp(l,r)). \tag{3.19}$$

Из свойств изоморфизмов (3.6) следует, что подпространства (3.19) двойственны в смысле определения (2.9). Кроме того, из (3.18) и (3.17) получаем

$$\dim V_r = \dim C^\perp(l,r) \le l\mathcal{H}\Big(\frac{r}{l}\Big) < 2r\log_2 l \tag{3.20}$$

и

$$\varkappa(V_r^\perp) = \varkappa(C(l,r)) > r. \tag{3.21}$$

Теперь, для каждого целого m, $1 \le m < s/4$ положим $r = 2dm$, $2d \le r < l/2$, $l = ds$, и рассмотрим двойственные подпространства

$$V(m,d) = V_{2dm} \subset \mathbb{Q}^d(2^s) \tag{3.22}$$

и

$$V(m,d)^\perp = V_{2dm}^\perp \subset \mathbb{N}_0^d(2^s) \tag{3.23}$$

Мы рассматриваем подпространства (3.22) как усредняющие подмножества в определении (2.1).

Из (3.20) следует оценка (3.12) для размерности подпространства (3.22).

Из (3.21) следует, что хэмминговский вес двойственного подпространства (3.23) удовлетворяет оценке $\varkappa(V(m,d)^{\perp}) > 2dm$. Поэтому, см. (2.23), из Теоремы 2.1 (ii) следует, что выполняется соотношение (3.13).

Поскольку для всех показателей q с $2m_q \leq 2m$ очевидно справедливы неравенства

$$M_{s,q}[\,.\,,\,.] \leq M_{s,2m_q}[\,.\,,\,.] \leq M_{s,2m}[\,.\,,\,.],$$

то из соотношения (3.13) и Теоремы 1.1 следует оценка (3.1) с постоянной, указанной в (3.14). □

Следствие 3.3 доказано.

Сравним Следствия 3.1 и 3.2 со Следствием 3.3. В Следствиях 3.2 и 3.2 оценка (3.1) для всех q достигается на усредняющем подпространстве размерности $(d-1)s$, а в Следствии 3.3 при каждом фиксированном q размерность усредняющего подпространства снижается до логарифмической малой оценки (3.12). Соответственно, количество элементов в усредняющем подмножестве в Следствиях 3.1 и 3.2 экспоненциально велико при $s \to \infty$ и равняется $2^{(d-1)s}$, то в Следствии 3.3 оно допускает полиномиальную оценку:

$$\#\big\{V(m,d)\big\} = 2^{\dim V(m,d)} \leq 2^{ds\mathcal{H}\left(\frac{2m}{s}\right)} < (ds)^{4dm}.$$

Такое резкое улучшение оценки получено за счет учета хэмминговского веса двойственного подпространства $V(m,d)^{\perp}$.

Следует отметить, что подпространства $V(m,d)$ в Следствии 3.3 могут быть явно построены, используя известную в теории кодирования конструкцию BCH-кодов, см. [6, §6.6]. В этой работе мы не будем подробно обсуждать явные конструкции, иначе нам бы пришлось значительно углубиться в теорию кодирования.

4. Следствия теорем о среднем: самоусредняющиеся точечные распределения

В этом параграфе мы опишем (δ, s, d) – сетки, для которых условные средние (2.1) не зависят от усредняющих подмножеств и фактически

совпадают с их L_q-уклонениями (1.1). Эти замечательные точечные распределения естественно назвать *самоусредняющимися.*

Отметим, что для таких самоусредняющихся (δ, s, d)-сеток предположение о их линейности является принципиально важным и не может быть опущено.

Следствие 4.1. *Пусть $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ – линейная (δ, s, d)-сетка. Предположим, что хэмминговский вес* (2.13) *двойственного подпространства $D^\perp \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$ удовлетворяет оценка*

$$\varkappa(D^\perp) > 2md \tag{4.1}$$

с некоторым $m \in \mathbb{N}$.

Тогда имеет место соотношение

$$\mathcal{L}_{2m}[D \oplus T] = M_{s,2m}[D] + d2^\delta \theta(T), \tag{4.2}$$

где $|\theta(T)| \le 1$ для всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$.

В частности, для всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ и всех показателей q с $2m_q \le 2m$ имеет место оценка

$$\mathcal{L}_q[D \oplus T] < \beta(q, \delta, d)(s+1)^{\frac{1}{2}(d-1)} \tag{4.3}$$

с постоянной $\beta(q, \delta, d)$ указанной в (3.14).

Доказательство. Поскольку

$$M_{s,2m}[D \oplus T; \{0\}] = \mathcal{L}_{2m}[D \oplus T],$$

соотношение (4.2) сразу следует из соотношения (2.21) Теоремы 2.1 (ii) с учетом тождественности оценок (2.24) и (4.1).

Оценка (4.3) сразу следует из соотношения (4.2) и оценки (1.18) Теоремы 1.1.

Следствие 4.1 доказано. □

Соотношение (4.2) выражает следующий замечательный факт: При выполнении условия (4.1) уклонение $\mathcal{L}_{2m}[D \oplus T]$ почти не зависит от сдвигов $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ и фактически совпадает со своим средним $M_{s,2m}[D]$.

Естественно возникает вопрос: Существуют ли линейные (δ, s, d)-сетки D с большими хэмминговскими весами $\varkappa(D^\perp)$ двойственных подпространств $D^\perp$?

Чтобы рассмотреть этот вопрос, нам понадобится ввести еще одну метрику на множестве $\mathbb{N}_0^d$. Для $l \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\rho(l) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad l = 0, \\ \max\big\{i : \lambda_i(l)\} \neq 0\big\}, & \text{если} \quad l \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{4.4}$$

и для $L = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$, положим

$$\rho(L) = \sum_{j=1}^{d} \rho(l_j). \tag{4.5}$$

Легко проверить, что $\rho(L \oplus K)$ является метрикой на множестве $\mathbb{N}_0^d$. В теории кодирования она известна как метрика Розенблюма–Цфасмана [8]. Ее роь в контексте теории равномерно распределенных точечных множеств определяется следующим результатом, сформулированным ниже в Лемме 4.1.

Для линейного подпространства $V \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$ определим вес Розенблюма–Цфасмана

$$\rho(V) = \min\{\rho(L) : L \in V \setminus \{0\}\ \}. \tag{4.6}$$

Вес (4.5) удовлетворяет неравенству

$$\rho(V) \leq ds - \dim V + 1, \tag{4.7}$$

см. [8, Теорема 1] или [9, Предложение 2.1]. Отметим, что для хэмминговского веса неравенство аналогичное (4.7) известно как граница Синглтона, см. [6, Следствие 5.2.2].

Лемма 4.1. *Пусть $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ и $D^\perp \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$ взаимно-двойственные подпространства размерностей $\dim D = s$ и $\dim D^\perp = (d-1)s$, соответственно. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *D является (δ, s, d)-сеткой,*

(ii) $\rho(D^\perp) \geq s - \delta + 1$.

Этот результат указан в [9, Предложение 4.1].

Отметим в частности, что Лемма 4.1 позволяет охарактеризовать линейные сетки D с $\delta = 0$ как подпространства, для которых в (4.7) выполняется равенство при $V = D^\perp$, $\dim V = (d-1)s$. Это очень интересные комбинаторные объекты – нак называемые разделимые коды

с максимальным расстоянием в метрике Розенблюма–Цфасмана, их детальная теория изложена в [9].

Используя Лемму 4.1 приведенное выше Следствие 4.1 может быть переформулированно следующим образом.

Следствие 4.2. *Пусть $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ – линейное подпространство размерности $\dim D = s$ и $D^\perp \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$-двойственное подпространство, $\dim D^\perp = (d-1)s$. Предположим, что веса $\rho(D^\perp)$ и $\varkappa(D^\perp)$ одновременно удовлетворяют оценкам*

$$\rho(D^\perp) \geq s - \delta + 1. \tag{4.8}$$

и

$$\varkappa(D^\perp) \geq 2dm, \tag{4.9}$$

с некоторыми целыми $\delta \geq 0$ и $m \geq 1$.

Тогда для распределения 2^s точек $D \subset U^d$ имеет место соотношение (4.2) *и выполняется оценка* (4.3).

Таким образом, наш вопрос о равномерных распределениях сводится к следующей проблеме теории кодирования: Найти подпространство в $\mathbb{N}_0^d(2^s)$ с большими весами одновременно в метриках Розенблюма–Цфасмана и Хэмминга. Эта специфическая проблема теории кодирования исследовалась в работах автора [9, 11]. В частности, в этих работах были получены следующие результаты, сформулированные ниже в Леммах 4.2 и 4.3.

Лемма 4.2. *Пусть $g \in \mathbb{N}$ произвольно фиксированно, а $e \in \mathbb{N}$ определяется условием*

$$\log_2 gd + 1 \geq e > \log_2 3gd, \tag{4.10}$$

т.е. $e = \llcorner \log_2 gd \lrcorner + 1$ и пусть $s = eg\sigma$, где $\sigma \in \mathbb{N}$ – произвольно.

Тогда существует подпространство $D_g \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ размерности $\dim D_g = s$, такое что двойственное подпространство $D_g^\perp \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$ имеет веса $\rho(D_g^\perp)$ и $\varkappa(D_g^\perp)$ удовлетворяющие неравенствам:

$$\rho(D_g^\perp) \geq s - (e-1)(d-1) + 1, \tag{4.11}$$

$$\varkappa(D_g^\perp) \geq g + 1 \tag{4.12}$$

Более того, подпространство D_g может быть задано явной конструкцией.

Этот результат указан в [9, Теорема 6.2], в [9, §§5 и 6] приведены явные конструкции подпространств D_g.

Используя Лемму 4.1 и Лемму 4.2 с $g = 2m$, получаем из Следствия 4.2 такой результат

Следствие 4.3. *При каждом фиксированном четном $2m \in \mathbb{N}$ и произвольном $\sigma \in \mathbb{N}$ явно строится линейная (δ, s, d)-сетка $D_{2m} \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ с параметрами*

$$s = (\llcorner \log_2 2md \lrcorner + 1)2m\sigma, \tag{4.13}$$

$$\delta = \llcorner \log_2 2md \lrcorner (d-1) \tag{4.14}$$

такая, что для уклонения $\mathcal{L}_{2m}[D_{2m} \oplus T]$ имеет место соотношение (4.2) *и выполняется оценка* (4.3).

Впервые явные конструкции точечных множеств с минимальным порядком L_q-уклонений были получены в [3] для $q = 2$ и в [10] для произвольных фиксированных q. Следствие 4.3 является обобщением полученных в [10] результатов. Следует отметить, что доказательства в работе [10] использовали теорию Литллвуда–Пэли, представляющую собой довольно трудный раздел гармонического анализа. Приведенное выше доказательство Следствия 4.3 много проще, оно опирается на единственный нетривиальный факт гармонического анализа – неравенство Хинчина, которое нужно для доказательства Теоремы 1.1, см. [12]. Неравенство Хинчина является фундаментальным, но в то же время, очень просто доказываемым утверждением.

В Лемме 4.1 параметр g произволен, но фиксирован. Существуют ли подпространства $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$, для которых оба веса $\rho(D^\perp)$ и $\varkappa(D^\perp)$ возрастают при $s \to \infty$? Этот вопрос исследовался в [11]. Нам понадобится один из результатов работы [11].

Рассмотрим следующую группу линейных преобразований простнанства $\mathbb{N}_0^d(2^s)$ сохраняющих метрику Розенблюма–Цфасмана.

Пусть сначала $d = 1$ и T_s обозначает группу всех невырожденных нижнетреугольных матриц порядка s над полем $\mathbb{F}_2$. Для $l \in \mathbb{N}_0(2^s)$ и $\tau \in T_s$ определим $l\tau \in \mathbb{N}_0(2^s)$ формулой

$$\lambda_j(l\tau) = \sum_{i=1}^{s} \tau(i,j)\lambda_i(l) \qquad \mathrm{mod}\ 2, j = 1, \quad \ldots, s, \tag{4.15}$$

где $\tau(i,j)$ – матричные элементы τ, $\tau(i,j)=0$ при $i<j$, а $\lambda_i(l)$ и $\lambda_i(l\tau)$ – коэффициенты в разложении (2.2) целых чисел l и $l\tau$, соответственно.

Легко проверить, что группа T_s сохраняет метрику (4.4): $\rho(l\tau)=\rho(l)$ для всех $l\in\mathbb{N}_0(2^s)$ и $\tau\in T_s$.

Пусть

$$T_s^d=\underbrace{T_s\times\ldots\times T_s}_{d} \tag{4.16}$$

обозначает прямое произведение d копий группы T_s и для $L=(l_1,\ldots,l_d)\in\mathbb{N}_0^d(2^s)$ и $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_d)\in T_s^j$ определим $L\tau=(l_1\tau_1,\ldots,l_d\tau_d)$.

Очевидно, что группа T_s^d сохраняет метрику (4.5): $\rho(L\tau)=\rho(L)$ для всех $L\in\mathbb{N}_0^d(2^s)$ и $\tau\in T_s^d$, а также и вес (4.6):

$$\rho(V\tau)=\rho(V) \tag{4.17}$$

для любого подпространства $V\subset\mathbb{N}_0^d(2^s)$ и $\tau\in T_s^d$.

Используя спаривание (2.7), определим действие группы T_s на пространстве $\mathbb{Q}(2^s)$ по формуле $\langle l\tau,x\rangle=\langle l,x\tau^*\rangle$, где $l\in\mathbb{N}_0(2^s)$, $x\in\mathbb{Q}(2^s)$, а τ^* – верхне треугольная матрица транспонированная к матрице $\tau\in T_s$; при этом

$$\eta_j(x\tau^*)=\sum_{i=1}^{s}\tau(j,i)\eta_i(x)\mod 2 \tag{4.18}$$

где $\eta_i(x)$ и $\eta_i(x\tau^*)$ – коэффициенты в разложении (1.6) чисел $x\in\mathbb{Q}(2^s)$ и $x\tau^*\in\mathbb{Q}(2^s)$, соответственно.

Используя (2.8), определим действие группы T_s^d на пространстве $\mathbb{Q}^d(2^s)$ следующей формулой: если $X=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{Q}^d(2^s)$ и $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_d)\in T_s^d$, то

$$\tau: X=(x_1,\ldots,x_d)\to X\tau^*=(x_1,\tau_1,\ldots,x_d\tau_d)$$

Очевидно, имеет место формула

$$(D\tau^*)^\perp=D^\perp\tau \tag{4.19}$$

для любого подпространства $D\subset\mathbb{Q}^d(2^s)$ и $\tau\in T_s^d$.

Используя формулы (4.17), (4.19) и Лемму 4.1, немедленно заключаем, что если D – линейная (δ,s,d)-сетка, то при любом $\tau\in T_s^d$, $D\tau^*$ также линейная (δ,s,d)-сетка с теми же параметрами.

Напомним еще, что при любых d и s явно строятся линейные (δ,s,d)-сетки с $\delta=0(d\log d)$, см. Лемму 2.1.

Имея ввиду сказанное выше, сформулируем следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть $D(s) \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ – произвольная бесконечная последовательность линейных (δ, s, d)-сеток с фиксированным d и $\delta = \delta(s) = o(s)$ при $s \to \infty$. При каждом s рассмотрим семейство линейных (δ, s, d)-сеток $D(s)\tau^*$, $\tau \in T_s^d$, и их двойственных подпространств $(D(s)\tau^*)^\perp = D(s)^\perp\tau \subset \mathbb{N}_0^d(2^s)$.*

Тогда для всех достаточно больших s существуют непустые подмножества $G(s) \subset T_s^d$, такие что для всех $\tau \in G(s)$ хэмминговские веса $\varkappa(D(s)^\perp\tau)$ удовлетворяют неравенству

$$\varkappa(D(s)^\perp\tau) \geq ds\mathcal{H}^{\leftarrow}\left(\frac{1}{d}\right) + o(1), \tag{4.20}$$

где $\mathcal{H}^{\leftarrow}(\cdot)$ – обратная функция для двоичной энтропии (3.7).

Лемма 4.3 является частным случаем (для $\dim D(s)^\perp = (d-1)s$) результата, указанного в [11, Теорема 3.2].

Неравенство для хэмминговских весов (4.21) известно в теории кодирования как асимптотическая граница Варшамова–Гильберта, см. [6], ей удовлетворяют большинство кодов. Примечательно, как показывает Лемма 4.3, что линейные коды с большими весами в метрике Розенблюма–Цфасмана также достигают этой границы. Более подробное обсуждение этих вопросов можно найти в [11].

Используя Лемму 4.3, получаем из Следствия 4.2 такой результат.

Следствие 4.4. *В обозначениях и предположениях Леммы* 4.3 *при всех достаточно больших s для уклонений $\mathcal{L}_{2m}[D(s)\tau^* \oplus T]$ линейных (δ, s, d)-сеток $D(s)\tau^*$, $\tau \in G(s) \subset T_s^d$, имеют место соотношения* (4.2) *и выполняются оценки* (4.3)*, при условии что целые четные показатели $2m$ удовлетворяют неравенству*

$$2 \leq 2m \leq s\mathcal{H}^{\leftarrow}\left(\frac{1}{d}\right) + o(1), \quad s \to \infty. \tag{4.21}$$

Таким образом, существуют линейные (δ, s, d)-сетки, для которых предельно точные порядки L_q-уклонений достигаются для всех показателей $q \leq 0(s)$. Разумеется, для больших показателей q всегда можно воспользоваться универсальной оценкой (1.17).

На этом мы закончим обсуждение следствий теорем о среднем.

5. Доказательство Второй теоремы о среднем

Доказательство существенно опирается на специфику разложения характеристической функции $\chi([0,y),x)$ интервала $[0,y) \subset [0,1)$ в ряд по функциям Уолша. Это разложение неоднократно использовалось в предыдущих работах [3, 10, 12] и здесь мы можем ограничиться кратким перечнем необходимых фактов. Необходимые подробности о функциях Уолша и Радемахера можно найти в [5].

При $d = 1$ функции Уолша $w_l(x)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $x \in [0,1)$ определяются так

$$w_l(x) = (-1)^{\sum\limits_{i\geq 1} \lambda_i(l)\eta_i(x)} = (-1)^{\langle l,x\rangle}, \tag{5.1}$$

где $\lambda_i(\cdot)$ и $\eta_i(\cdot)$ – коэффициенты в двоичных разложениях (2.2) и (1.6), соответственно, а спаривание $\langle l,x\rangle$ определено в (2.7).

Функции Радемахера $r_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1)$, можно определить любой из следующих формул

$$r_i(x) = w_{2^{i-1}}(x) = (-1)^{\eta_i(x)} = 1 - 2\eta_i(x). \tag{5.3}$$

удобно так же считать, что $r_0(x) \equiv 1$.

Система функций Уолша (5.1) является ортонормированным базисом в $L_2(0,1)$, а функции Радемахера (5.3) образуют лакунарную по Адамару подсистему.

Функции Уолша (5.1) являются аддитивными характерами на пространстве двоичных рациональных точек:

$$w_l(x \oplus y) = w_l(x)w_l(y) \tag{5.4}$$

для любых двух точек x и y в $\mathbb{Q}(2^\infty)$ и любого $l \in \mathbb{N}_0$. Кроме того, для любой точки $x \in [0,1)$ и любых целых l и k в $\mathbb{N}_0$ имеет место соотношение

$$w_{l\oplus k}(x) = w_l(x)w_k(x) \tag{5.5}$$

Характеристическая функция $\chi([0,y),x)$ разлагается в следующий ряд Фурье–Уолша

$$\chi([0,y),x) \simeq \sum_{l\geq 0} \widehat{\chi}_l(y)w_l(x), \tag{5.6}$$

с коэффициентами Фурье–Уолша

$$\widehat{\chi}_l(y) = \int\limits_0^y w_l(x)\,dx, \tag{5.7}$$

а символ $\simeq$ означает либо L_2-сходимость, либо просто запись перечня соответствующих коэффициентов Фурье–Уолша.

Интегралы (5.4) были вычислены в работе Файна [4, §3]. Их можно записать в виде

$$\widehat{\chi}_l(y) = 2^{-\rho(l)}\psi_{\rho(l)}(y)w_l(y), \tag{5.8}$$

где $\rho(l)$ метрика Розенблюма–Цфасмана (4.4), а функции $\psi_k(y)$, $k \geq 0$, имеют вид

$$\psi_0(y) = \{y\} = \frac{1}{2} - \sum_{i\geq 1} 2^{-i-1} r_i(y), \tag{5.9}$$

а при $k \geq 1$ могут быть заданы следующими формулами

$$\psi_k(y) = \left\{2^{k-1}y + \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}r_k(y) + \{2^{k-1}y\} - \frac{1}{2} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}r_k(y) - \sum_{i\geq 1} 2^{-i-1} r_{k+i}(y), \tag{5.10}$$

где $\{x\}$ – дробная часть $x \in \mathbb{R}$.

Используя (5.8), (5.9) и (5.10), запишем интеграл (5.4) в виде следующего абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье–Уолша

$$\widehat{\chi}_l(y) = w_l(y) \sum_{\varkappa(a)\leq 1} c_a(l) w_a(y), \tag{5.11}$$

где $c_a(l)$ – некоторые вещественные коэффициенты, их точное значение для нас не важно в данном рассуждении. Принципиальный момент здесь состоит в том, что суммирование в (5.11) ведется по целым $a \in \mathbb{N}_0$ с хэмминговским весом $\varkappa(a) \leq 1$. Отсюда сразу же выводится такое наблюдение (ср. [10, Лемма 5.1]).

Лемма 5.1. *Произвольный набор функций $\widehat{\chi}_{l_1}(y), \ldots, \widehat{\chi}_{l_k}(y)$ удовлетворяет соотношению*

$$\int\limits_0^1 dy \prod_{i=1}^k \widehat{\chi}_{l_i}(y) = 0, \tag{5.12}$$

при условии, что

$$\varkappa(l_1 \oplus \cdots \oplus l_k) > k \tag{5.13}$$

Доказательство. Используя (5.11) и (5.5), получаем

$$\prod_{i=1}^{k} \widehat{\chi}_{l_i}(y) = w_l(y) \sum_{\varkappa(a)\le k} c_a(l_1,\ldots,l_k) w_a(y)$$

$$= \sum_{\varkappa(a)\le k} c_a(l_1,\ldots,l_k) w_{l\oplus a}(y)$$

где $l = l, \oplus \ldots \oplus l_k$, $c_a(l_1,\ldots,l_k)$ – некоторые коэффициенты и суммирование ведется по целым $a \in \mathbb{N}_0$ с хэмминговским весом $\varkappa(a) \le k$.

Если теперь соотношение (5.13) выполнено, то в силу неравенства треугольника для хэмминговской метрики получаем

$$\varkappa(l \oplus a) \ge \varkappa(l) - \varkappa(a) \ge \varkappa(l) - k > 0.$$

Следовательно, $l \oplus a \ne 0$ и соотношение (5.12) получается из ортогональности функций Уолша. □

Из сказанного выше следует, что метрика Розенблюма–Цфасмана контролирует убывание интегралов (5.7) при $l \to \infty$ из-за осцилляций функций Уолша, а метрика Хэмминга ответственна за статистическую независимость интегралов (5.7). Этим объясняется совместное появление обеих метрик в рассматриваемом нами контексте.

Перемножая формулы (5.3) с $y = y_j$, $j = 1,\ldots,d$, получаем следующее разложение для характеристической функции $\chi(B_Y, X)$, $Y = (y_1,\ldots,y_d)$, $X = (x_1,\ldots,x_d) \in U^d$:

$$\chi(B_Y, X) \simeq \sum_{L\in\mathbb{N}_0^d} \widehat{\chi}_L(Y) W_L(X). \tag{5.14}$$

Здесь $W_L(\cdot)$, $L = (l_1,\ldots,l_d) \in \mathbb{N}_0^d$, – d-мерные функции Уолша,

$$W_L(X) = \prod_{j=1}^{d} w_{l_j}(x_j) = (-1)^{\langle L,X\rangle}, \tag{5.15}$$

спаривание $\langle L, X\rangle$ определено в (2.8) и коэффициенты Фурье–Уолша $\widehat{\chi}_L(Y)$ определены формулой

$$\widehat{\chi}_L(X) = 2^{-\rho(L)} \prod_{j=1}^{d} \psi_{\rho(l_j)}(y_j) W_L(Y), \tag{5.16}$$

где $\rho(L)$ – метрика Розенблюма–Цфасмана, определенная в (4.5).

Какова точность аппроксимации характеристической функции $\chi(B_Y, X)$ конечными суммами ряда Фурье–Уолша (5.14) Положим

$$\chi(B_Y, X) = \chi^{(s)}(B_Y, X) + \varepsilon^{(s)}(Y, X), \tag{5.17}$$

где

$$\chi^{(s)}(B_Y, X) = \sum_{L \in \mathbb{N}_0^d(2^s)} \widehat{\chi}_L(Y) W_L(X) \tag{5.18}$$

Пусть $\Delta_s(y)$ обозначает единственный элементарный интервал $[m2^{-s}, (m+1)2^{-s})$, $0 \le m < 2^s$, содержащий точку $y \in [0,1)$ и

$$\Delta_{s,j}(Y) = \begin{cases} \Delta_s(y_1) \times [0,1)^{d-1}, & \text{если } \ j = 1 \\ [0,1)^{j-1} \times \Delta_s(y_j) \times [0,1)^{d-j} & \text{если } \ j = 2, \dots, d. \end{cases} \tag{5.19}$$

Тогда имеет место следующая оценка

$$|\varepsilon^{(s)}(Y, X)| \le \sum_{j=1}^{d} \chi(\Delta_{s,j}(Y), X), \tag{5.20}$$

где $\chi(\Delta_{s,j}(Y), X)$ – характеристические функции элементарных ящиков (5.19). Доказательство этой оценки можно найти в [12, оценка (3.17)].

Формулу (1.2) для локального уклонения точечного распределения $D \subset U^d$ можно записать в виде

$$\mathcal{L}[D, Y] = \sum_{X \in D} \mathcal{L}(X, Y), \tag{5.21}$$

где

$$\mathcal{L}(X, Y) = \chi(B_Y, X) - \operatorname{vol} B_Y. \tag{5.22}$$

Подставляя (5.17) в (5.22) и учитывая, что $\widehat{\chi}_0(Y) = y_1, \dots, y_d = \operatorname{vol} B_Y$, получим

$$\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}^{(s)}(X, Y) + \varepsilon^{(s)}(X, Y), \tag{5.23}$$

где

$$\mathcal{L}^{(s)}(X,Y) = \sum_{L\in\mathbb{N}_0^d(2^s)\setminus\{0\}} \widehat{\chi}_L(Y) W_L(X). \tag{5.24}$$

Подставляя (5.23) в (5.21), получим

$$\mathcal{L}[D,Y] = \mathcal{L}^{(s)}[D,Y] + \varepsilon^{(s)}[D,Y], \tag{5.25}$$

где

$$\mathcal{L}^{(s)}[D,Y] = \sum_{L\in\mathbb{N}_0^d(2^s)\setminus\{0\}} \widehat{\chi}_L(Y) \sum_{X\in D} W_L(X), \tag{5.26}$$

$$\varepsilon^{(s)}[D,Y] = \sum_{X\in D} \varepsilon^{(s)}(X,Y). \tag{5.27}$$

Рассмотрим формулу (1.1) для L_q-уклонения $\mathcal{L}_q[D]$ произвольного точечного распределения $D \subset U^d$. Положим

$$\mathcal{L}_q[D] = \mathcal{L}_q^{(s)}[D] + \varepsilon_q^{(s)}[D], \tag{5.28}$$

где

$$\mathcal{L}_q^{(s)}[D] = \left(\int\limits_{U^d} |\mathcal{L}^{(s)}[D,Y]|^q dY \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty, \tag{5.29}$$

и $\varepsilon_q^{(s)}[D]$ – некоторая поправка.

Аналогично рассмотрим формулу (2.1) для условного среднего L_q-уклонения $M_{s,q}[D;V]$. Положим

$$M_{s,q}[D,V] = M_{s,q}^{(s)}[D;V] + \varepsilon_q^{(s)}[D;V], \tag{5.30}$$

где

$$M_{s,q}^{(s)}[D,V] = \left[(\#\{V\})^{-1} \sum_{Z\in V} \left(\mathcal{L}_q^{(s)}[D\oplus Z]\right)^q \right]^{1/q} \tag{5.31}$$

и $\varepsilon_q^{(s)}[D;V]$ – некоторая поправка.

При $V = \mathbb{Q}^d(2^s)$ положим

$$M_{s,q}^{(s)}[D] = M_{s,q}^{(s)}[D,\mathbb{Q}^d(2^s)] = \left[2^{-ds} \sum_{Z\in\mathbb{Q}^d(2^s)} (\mathcal{L}_q^{(s)}[D\oplus Z])^q \right]^{1/q}. \tag{5.32}$$

Из (5.31) и (5.32) непосредственно вытекает такая формула

$$M_{s,q}^{(s)}[D] = 2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} M_{s,q}^{(s)}[D \oplus T, V] \tag{5.33}$$

при любом усредняющем подмножестве V.

Отметим так же, что при $V = \{0\}$

$$M_{s,q}^{(s)}[D, \{0\}] = \mathcal{L}_q^{(s)}[D].$$

Для (δ, s, d)-сеток поправки в формулах (5.25), (5.28) и (5.30) легко оцениваются.

Лемма 5.2. *Пусть D – произвольная (линейная или нелинейная) (δ, s, d)-сетка, тогда имеют место соотношения:*

$$\varepsilon^{(s)}[D, Y] = d2^{\delta}\theta(Y), \tag{5.34}$$

где $|\theta(Y) \leq 1$ для всех $Y \in U^d$,

$$\varepsilon_q^{(s)}[D] = d2^{\delta}\theta_q[D], \tag{5.35}$$

где $|\theta[D]| \leq 1$,

$$\varepsilon_q^{(s)}[D, V] = d2^{s}\theta_q[D, V], \tag{5.36}$$

где $|\theta[D; V]| \leq 1$ для любого усредняющего подмножества $V \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ в (2.1) и (5.31).

Доказательство. Пользуясь оценкой (5.20), из формулы (5.27) получаем

$$|\varepsilon^{(s)}[D, Y]| \leq \sum_{j=1}^{d} \#\{D \cap \Delta_{s,j}(Y)\}.$$

Каждый элементарный ящик (5.19) имеет объем $\operatorname{vol} \Delta_{s,j}(Y) = 2^{-s}$ и содержится в некотором большем элементарном ящике (1.16) объема $2^{\delta - s}$ а, по определению (δ, s, d)-сетки, см. §1, каждый элементарный ящик объема $2^{\delta - s}$ содержит в точности 2^{δ} точек распределения D. Следовательно, $|\varepsilon^{(s)}[D, Y]| \leq d2^{\delta}$ для всех $Y \in U^d$, что эквивалентно соотношению (5.34).

Соотношение (5.35) следует из соотношения (5.34) если в равенстве (5.25) применить неравенство Минковского.

Аналогично, соотношение (5.36) следует из соотношения (5.35) если в равенстве (5.28) заменить D на $D \oplus Z$ и применить неравенство Минковского для суммы по $Z \in V$.

Лемма 5.2 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь среднее (5.31). Следующий очень общий результат представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 5.1. *Пусть D и V – произвольные линейные подпространства в $\mathbb{Q}^d(s^s)$, а $D^\perp$ и $V^\perp$ их двойственные подпространства в $\mathbb{N}_0^d(2^s)$, пусть $2m \geq 2$ – произвольное четное целое число. Тогда для средних* (5.31) *справедливы следующие утверждения*:

(i) *Для всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ имеет место оценка*

$$M_{s,2m}^{(s)}[D \oplus T, V] \leq M_{s,2m}^{(s)}[D]\nu(D^\perp \cap V^\perp, 2m), \tag{5.37}$$

где величина $\nu(\cdot,\cdot)$ определена в (2.19).

(ii) *Среднее $M_{s,2m}^{(s)}[D \oplus T, V]$ не зависит от $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ и имеет место равенство*

$$M_{s,2m}^{(s)}[D \oplus T, V] = M_{s,2m}^{(s)}[D], \tag{5.38}$$

при условии, что

$$\varkappa_1(D^\perp \cap V^\perp) > 2m, \tag{5.39}$$

где $\varkappa_1(\cdot)$ – вес (2.16) *соответствующий метрике* (2.14).

Теорема 5.1 доказана ниже. Сейчас мы выведем из Теоремы 5.1 и Леммы 5.2 вторую теорему о среднем.

Доказательство Теоремы 2.1. (i) Среднее $M_{s,q}[\cdot,\cdot]$ является неубывающей функцией $q \geq 1$, а величина $\nu(\cdot,\cdot) \geq 1$. Используя (5.30), (5.36) и (5.37), получаем

$$\begin{aligned}
&M_{s,q}[D \oplus T, V] \leq M_{s,2m_q}[D \oplus T, V] \\
&= M_{s,2m_q}^{(s)}[D \oplus T, V] + \varepsilon_q^{(s)}[D \oplus T, V] \\
&\leq M_{s,2m_q}^{(s)}[D]\nu D^\perp \cap V^\perp, 2m_q) + d2^\delta \\
&= \big(M_{s,2m_q}[D] - \varepsilon_{2m_q}^{(s)}[D, \mathbb{Q}^d(2^s)]\big)\nu(D^\perp \cap V^\perp, 2m_q) + d2^\delta \\
&\leq (M_{s,2m_q}[D] + d2^{\delta+1})\nu(D^\perp \cap V^\perp, 2m_q).
\end{aligned}$$

Оценка (2.20) доказана.

(ii) При выполнении условия (2.22) имеет место соотношение (5.38). Используя (5.30), (5.36) и (5.38), получаем

$$\begin{aligned}
&M_{s,2m}[D \oplus T, V] = M_{s,2m}[D \oplus T, V] + \varepsilon_{2m}^{(s)}[D \oplus T, V] \\
&= M_{s,2m}^{(s)}[D] + \varepsilon_{2m}^{(s)}[D \oplus T, V] \\
&= M_{s,2m}[D] - \varepsilon_{2m}^{(s)}[D] + \varepsilon_{2m}^{(s)}[D \oplus T, V] \\
&= M_{s,2m}[D] + d2^{\delta+1}\theta(T)
\end{aligned}$$

с некоторым $\theta(T)$, таким что $|\theta(T)| \leq |$ для всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$.

Соотношение (2.21) доказано.

Тот факт, что любое из двх условий (2.33) и (2.44) влечет (2.22) очевидно следует из неравенств (2.17) и (2.18).

Теорема 2.1 доказана. □

Нам осталось доказать Теорему 5.1. Напомним несколько простых фактов из анализа Фурье–Уолша на пространстве $\mathbb{Q}^d(2^s)$. Из формул (5.4) и (5.5) следуют их аналоги для многомерных функций Уолша (5.15):

$$W_L(X \oplus Y) = W_L(X)W_L(Y) \tag{5.40}$$

для любых двух точек X и Y в $\mathbb{Q}^d(2^\infty)$ и любого $L \in \mathbb{N}_0^d$,

$$W_{L\oplus K}(X) = W_L(X)W_K(X) \tag{5.41}$$

для любой точки $X \in U^d$ и любых L и K в $\mathbb{N}_0^d$.

Функции $W_L(X)$, $X \in \mathbb{Q}^d(2^s)$, $L \in \mathbb{N}_0^d(2^s)$ образуют полный набор характеров аддитивной группы пространства $\mathbb{Q}^d(2^s)$. Любая функция $f : \mathbb{Q}^d(2^s) \to \mathbb{R}$ может быть разложена в конечнй ряд Фурье–Уолша

$$f(T) = \sum_{L \in \mathbb{N}_0^d(2^s)} \hat{f}_L W_L(T) \tag{5.42}$$

с коэффициентами Фурье–Уолша

$$\hat{f}_L = 2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} f(T)W_L(T) \tag{5.43}$$

Из (5.42) и (5.43) следуют оценки

$$\max_T |f(T)| \leq \max_L |\hat{f}_L| \#\{\operatorname{spec} f\}, \tag{5.44}$$

где spec $f = \{L \in \mathbb{N}_0^d(2^s) : \hat{f}_L \neq 0\}$ – спектр функции f и

$$\max_L |\hat{f}_L| \leq 2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} |f(T)|. \tag{5.45}$$

Пользуясь (5.40), легко получить следующую формулу

$$\sum_{X \in D} W_L(X) = \begin{cases} \#\{D\}, & \text{если} \quad L \in D^\perp, \\ 0, & \text{если} \quad L \notin D^\perp, \end{cases} \tag{5.46}$$

для любого подпространства $D \subset \mathbb{Q}^d(2^s)$ и любого $L \in \mathbb{N}_0^d(2^s)$. Как формула в теории характеров абелевых групп (5.46) хорошо известна.

Доказательство Теоремы 5.1. Пользуясь в формуле (5.26) соотношениями (5.40) и (5.46), получаем

$$\mathcal{L}^s[D \oplus T, Y] = \#\{D\} \sum_{L \in D^\perp \setminus \{0\}} \hat{\chi}_L(Y) W_L(T) \tag{5.47}$$

Отсюда следует, что

$$(\mathcal{L}^s[D \oplus T, Y])^{2m} = \sum_{L \in D^\perp} \Lambda_L(Y) W_L(T), \tag{5.48}$$

где

$$\Lambda_L(Y) = (\#\{D\})^{2m} \sum_{L_1 \oplus \ldots \oplus L_{2m} = L} \prod_{i=1}^{2m} \widehat{\chi}_{L_i}(Y) \tag{5.49}$$

и суммирование в (5.49) ведется по всем $L_i \in \widehat{D} \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq 2m$, таким что $L_1 \oplus \cdot \oplus L_{2m} = L$. Ясно, что $L \in \widehat{D}$, поскольку $\widehat{D}$ – линейное подпространство в $\mathbb{N}_0^d(2^s)$.

Подставляя (5.48) в (5.39) с $q = 2m$, получаем

$$(\mathcal{L}_{2m}^s[D \oplus T])^{2m} = \sum_{L \in D^\perp} \Lambda_L W_L(T), \tag{5.50}$$

где

$$\Lambda_L = (\#\{D\})^{2m} \sum_{L_1 \oplus \ldots \oplus L_{2m} = L} \prod_{j=1}^{d} \int_0^1 dy \prod_{i=1}^{2m} \widehat{\chi}_{l_{ij}}(Y) \tag{5.51}$$

и $L_i = (l_i, \ldots, l_{id}) \in \widehat{D} \setminus \{0\}$, $1 \le i \le 2m$.

Подставим (5.50) в формулу (5.31) и еще раз воспользуемся соотношением (5.46), заменив в нем подпространство D на усредняющее подпространство V. Мы получаем следующую формулу

$$(M^{(s)}_{s,2m}[D \oplus T, V])^{2m} = \sum_{L \in D^\perp \cap V^\perp} \Lambda_L W_L(T) \tag{5.52}$$

с теми же самыми коэффициентами Фурье–Уолша, что и в (5.50), (5.51).

Заметим, что поскольку функция (5.52) неотрицательна, оценка (5.45) приобретает для нее следующий вид

$$\max_L |\Lambda_L| \le 2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} (M^{(s)}_{s,2m}[D \oplus T, V])^{2m} = (M^{(s)}_{s,2m}[D])^{2m}, \tag{5.53}$$

см. (5.33) с $q = 2m$.

Изложенное выше позволяет легко завершить доказательство Теоремы 5.1.

Спектр функции (5.52) содержится в пересечении $D^\perp \cap V^\perp$. С другой стороны, из формулы (5.51) и Леммы 5.1 сразу же следует, что если вес $\varkappa_1(L) > 2m$, то $\Lambda_L = 0$. Иными словами, спектр функции (5.52) содержится в пересечении подпространства $D^\perp \cap V^\perp$ с шаром радиуса $2m$ в метрике (2.14). Следовательно,

$$\begin{aligned} \#\{\mathrm{spec}(M^{(s)}_{s,2m}[\oplus\cdot, V])^{2m}\} &\le \#\{L \in D^\perp \cap V^\perp : \varkappa_1(L) \le 2m\} \\ &= \nu(D^\perp \cap V^\perp, 2m)^{2m}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

см. (2.19).

Применяя оценку (5.44) к функции (5.52) и пользуясь (5.53) и (5.54), получаем что для всех $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ имеет место оценка

$$(M^{(s)}_{s,2m}[D \oplus T, V])^{2m} \le (M^{(s)}_{s,2m}[D])^{2m} (\nu(D^\perp \cap V^\perp, 2m))^{2m}.$$

Это доказывает оценку (5.37).

Для доказательства равенства (5.38) достаточно заметить, что если условие (5.39) выполнено, то из (5.54) следует, что спектр функции (5.52) состоит из единственной точки $L = 0$. Поэтому, функция (5.52) не зависит от $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ и совпадает со своим средним. Это доказывает равенство (5.38).

Теорема 5.1 доказана. □

References

[1] J. Beck, W. W. L. Chen, *Irregularities of point distributions.* — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[2] W. W. L. Chen, *On irregularities of distributions. II.* — Quart. J. Math. Oxford **34** (1983), 257–279.

[3] W. W. L. Chen, M. M. Skriganov, *Explicit constructions in the classical mean aquares problem in irregulaririws of point distributions.* — J. reine angew. Math. **545** (2002), 67–95.

[4] N. J. Fine, *On the Walsh functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), 372–414.

[5] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша.* Наука, М., 1987.

[6] J. H. van Lint, *Introduction to coding theory.* 3-d edit., Springer Graduated Text in Math., vol. 86, Springer, Berlin-Verlag, Berlin, 1999.

[7] H. Niederreiter, *Nets, (t,s)-sequences, and algebraic curves over finite fields with many rational points.* — International Congress of Mathematicians in Berlin, Extra Volume III, Documenta Mathematica (1998), 338–386.

[8] М. Ю. Розенблюм, М. А. Цфасман, *Коды для m-метрики.* — Пробл. передачи информ. **33** (1997), 55–63.

[9] М. М. Скриганов, *Теория кодирования и равномерные распределения.* — Алгебра и анализ **13**(2) (2001), 220–273.

[10] M. M. Skriganov, *Harmonic analysis on totally disconnected groups and irregularities of point distributions.* — J. reine angew. Math. **600** (2006), 25–49.

[11] M. M. Skriganov, *On linear codes with large weights simultaneously for the Rosenbloom–Tsfasman and Hamming metrics.* — J. Complexity **23** (2007), 926–936.

[12] М. М. Скриганов, *Неравенство Хинчина и теорема Чена.* Препринт ПОМИ 12/2010. — Алгебра и анализ **23** (4) (2011), 179–205.

[13] M. M. Skriganov, *On mean values of the L_q-discrepancies.* (готовится к печати).

[14] И. М. Соболь, *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.* Наука, М., 1969.