ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 15/2011

Остовные деревья с большим количеством висячих вершин: новые оценки через количество вершин степеней 3 и не менее 4

Д. В. Карпов[1]

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: dvk0@yandex.ru

Аннотация

В работе доказывается, что у связного графа G, в котором s вершин степени 3 и t вершин степени не менее 4, существует остовное дерево, в котором не менее $\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha$ висячих вершин, где $\alpha \geq \frac{8}{5}$. Доказано, что для всех графов, кроме трёх исключений, $\alpha \geq 2$. Исключение составляют единственный регулярный граф степени 4 на 6 вершинах и два регулярных графа степени 4 на 8 вершинах (в которых каждое ребро входит в треугольник).

Приводится бесконечная серия примеров графов, содержащих только вершины степеней 3 и 4, для которых максимальное количество висячих вершин в остовном дереве равно $\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + 2$. Тем самым, доказана точность всех оценок.

[1]Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ № 11-01-00760-а.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

1 Введение. Основные обозначения

Мы рассматриваем графы без петель и кратных рёбер. В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер — через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Везде в работе графы не содержат петель и кратных рёбер.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$. Окрестность вершины $x \in V(G)$ (то есть, множество всех вершин графа G, смежных с x) обозначим через $\mathrm{N}_G(x)$.

Для ребра $e \in E(G)$ через $G \cdot e$ мы обозначим граф, полученный в результате *стягивания* ребра e (концы e стягиваются в новую вершину, которой будут инцидентны в $G \cdot e$ все вершины, инцидентные в G хотя бы одному из концов ребра e).

Определение 1. Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.

Замечание 1. Если F — дерево, то нетрудно понять, что $u(F)$ — количество его висячих вершин.

Опубликовано немало работ об оценках $u(G)$. Подробнее об истории вопроса можно прочитать в [12]. Мы же приведем лишь результаты и предположения, непсредственно связанные с нашей работой.

В 1981 году Линиал высказал гипотезу: $u(G) \geq \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1} + c$ при $\delta(G) \geq 3$, где константа $c > 0$ зависит только от $\delta(G)$. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geq 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Из работы Алона ([4], 1990) следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, нам интересны как раз случаи малых d.

В 1991 году Клейтман и Вест [2] доказали, что $u(G) \geq \frac{1}{4} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geq 3$ и $u(G) \geq \frac{2}{5} \cdot v(G) + \frac{8}{5}$ при $\delta(G) \geq 4$. В 1996 году Григгс и Ву [3] еще раз доказали утверждение для $\delta(G) \geq 4$ и доказали, что $u(G) \geq \frac{1}{2} \cdot v(G) + 2$ при $\delta(G) \geq 5$. Для $d > 5$ вопрос остается открытым. В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин*, который применяется и в настоящей работе. Подробное описание метода дано в следующей части.

В работе [2] сказано о еще одной, более сильной гипотезе Линиала: $u(G) \geq \sum_{x \in V(G)} \frac{d_G(x)-2}{d_G(x)+1}$ для связного графа G с $\delta(G) \geq 2$.

Понятно, что раз для больших степеней неверна более слабая гипотеза, то неверна и эта. Мы приведём бесконечную серию связных графов, все вершины которых имеют степени 3 и 4, опровергающих эту гипотезу. Таким образом, гипотеза неверна не только для неосязаемых больших степеней, приходящих к нам из вероятностных методов, но даже для степеней 3 и 4.

Однако, сильная гипотеза Линиала стимулирует попытки получить оценку на $u(G)$, в которую каждая вершина вносит вклад, зависящий от ее степени. Возникает вопрос: какой вклад должна вносить вершина степени d?

Н. В. Гравин в работе [10] доказал, что для произвольного связного графа G, в котором v_3 вершин степени 3 и v_4 вершин степени хотя бы 4, $u(G) \ge \frac{2}{5} \cdot v_4 + \frac{2}{15} \cdot v_3$. В этой работе допускается наличие в графе вершин степени 1 и 2. Точность константы $\frac{2}{5}$ не вызывает сомнений, а вот константу $\frac{2}{15}$ можно заменить на большую, как показывает основной результат нашей работы.

Теорема 1. *Пусть G — связный граф с более, чем одной вершиной, s — количество его вершин степени 3, а t — количество его вершин степени не менее 4. Тогда $u(G) \ge \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}s + \alpha$, где $\alpha \ge \frac{8}{5}$. Более того, $\alpha \ge 2$, кроме трёх графов-исключений: C_6^2, C_8^2 (квадраты циклов на 6 и 8 вершинах) и регулярного графа G_8 степени 4 на 8 вершинах, изображенного на рисунке 1.*

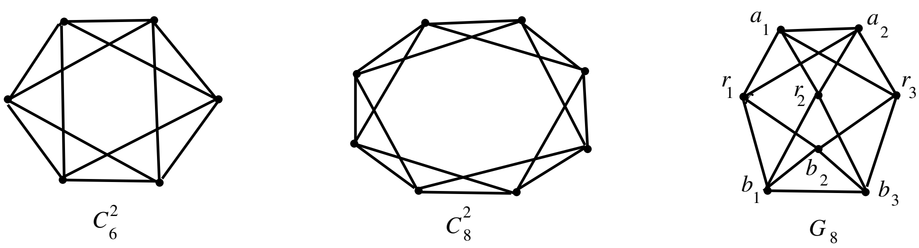

Рис. 1: Графы-исключения.

Отметим, что эта оценка оптимальна по всем трём константам. Существуют бесконечные серии примеров, где оценка достигается. Мы приведём серию примеров, в которой графы содержат только вершины степеней 3 и 4.

Доказательство было бы гораздо короче, если исключить из теоремы последнее утверждение. Интерес к поиску точной аддитивной константы обоснован желанием найти точную оценку, которая не является краевым эффектом. Ведь $\alpha = \frac{8}{5}$ достигается только на графе C_6^2! А бесконечные серии примеров существуют только для $\alpha = 2$, и именно такая аддитивная константа фигурирует в оценках для случая минимальных степеней 3 и 5. Возможно, поэтому Клейтман и Вест [2] предположили, что существуют только два связных графа с $\delta(G) \geq 2$, для которых не проходит оценка $u(G) \geq \frac{2}{5}v(G)+2$: это C_6^2 иC_8^2. Более того, в работе [2] доказано, что граф-исключение должен быть 4-регулярным и каждое его ребро должно входить в треугольник.

В своем предположении о графах-исключениях Клейтман и Вест оказались почти правы, не заметив только граф на 8 вершинах с рисунка 1. Однако их метод не дает возможность доказать даже конечность множества графов-исключений. В теореме 1 мы докажем аналогичное утверждение даже для более общей задачи.

2 Доказательство теоремы 1

Как всегда, при построении искомого остовного дерева для графа G мы будем считать, что для всех меньших графов теорема уже доказана. Через $s(H)$ обозначим количество вершин степени 3 в графе H, а через $t(H)$ — количество вершин степени не менее 4 в графе H.

Пусть S — множество вершин степени 3, а T — множество вершин степени не менее 4 в графе G.

Будем считать, что *цена* вершины $x \in T$ — это $\frac{2}{5}$, *цена* вершины $x \in S$ — это $\frac{1}{5}$, цена любой другой вершины 0. *Стоимостью* графа H назовём величину $c(H) = \frac{2}{5}t(H) + \frac{1}{5}s(H)$.

Мы хотим доказать неравенство $u(G) \geq c(G)+\alpha$, где константа α почти для всех графов не менее 2.

2.1 Редукционные правила

Сначала мы изменим граф так, чтобы с ним было удобнее работать. Опишем два редукционных правила.

R1. *Пусть* $x \in V(G)$, $d_G(x) = 2$, $\mathrm{N}_G(x) = \{a, b\}$, *причём* a *и* b *несмежны.*
Построим граф $G' = G - x + ab$. Очевидно, $c(G') = c(G)$.

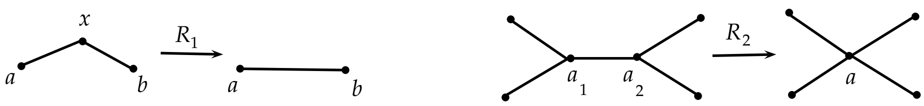

Рис. 2: редукционные правила

R2. *Пусть* $a_1, a_2 \in S$ *— смежные вершины,* $\mathrm{N}_G(a_1) \cap \mathrm{N}_G(a_2) = \varnothing$.

Пусть $G' = G \cdot a_1 a_2$, причём a — вершина, полученная при склейке a_1 и a_2. Понятно, что $d_{G'}(a) = 4$, а тогда $c(G') = c(G)$.

В обоих случаях если мы построим в графе G' остовное дерево F' с $u(F') = u(G') \geq c(G') + \alpha$, мы без труда сможем преобразовать это дерево в остовное дерево F графа G с неменьшим числом висячих вершин и тем самым докажем оценку для графа G с аддитивной константой, не меньшей, чем α.

Замечание 2. Далее мы будем считать, что граф удовлетворяет следующим условиям:

1° любая вершина степени 2 входит в треугольник с двумя вершинами своей окрестности;

2° нет двух смежных вершин степени 3, окрестности которых не пересекаются.

2.2 Общее описание метода мёртвых вершин

Для доказательства теоремы мы построим искомое остовное дерево, используя *метод мёртвых вершин.*

Мы будем выделять в графе G остовное дерево последовательно, по шагам добавляя к нему вершины. Подробнее остановимся на шаге алгоритма.

Пусть после нескольких шагов построения мы получили дерево F (естественно $V(F) \subset V(G)$, $E(F) \subset E(G)$).

Определение 2. Висячую вершину x дерева F назовем *мертвой*, если все вершины графа G, смежные с x, входят в дерево F. Остальные висячие вершины мы будем называть *живыми.*

Замечание 3. Нетрудно заметить, что мертвые вершины останутся мертвыми висячими вершинами на всех последующих этапах построения. По окончании построения, когда будет построено остовное дерево, все его висячие вершины будут мёртвыми.

Через Δu и Δb мы будем обозначать прирост количества висячих вершин и количества мертвых висячих вершин в дереве F на очередном шаге алгоритма, через Δt и Δs — количество вошедших в дерево F вершин из T и из S соответственно.

Назовём *доходом* шага A величину

$$p(A) = \frac{13}{15}\Delta u + \frac{2}{15}\Delta b - \frac{2}{5}\Delta t - \frac{1}{5}\Delta s.$$

Мы будем выполнять только шаги, для которых доход неотрицателен.

Пусть мы начали построения с базового дерева с u' висячими вершинами, b' мёртвыми висячими вершинами, s' вершинами множества S и t' вершинами множества T, причём $u' \cdot \frac{13}{15} + b' \cdot \frac{2}{15} - t' \cdot \frac{2}{5} - s' \cdot \frac{1}{5} = \alpha'$.

Пусть после нескольких шагов мы построили дерево F. Тогда $u(F)$ не меньше совокупной стоимости всех вершин из $V(F)$, увеличенной на константу α, которая есть сумма α' и доходов всех выполненных шагов. В частности, если F — остовное дерево графа G, то $u(F) \geq c(G) + \alpha$.

Сначала мы опишем все возможные шаги, а потом рассмотрим начало построения и оценим константу α.

Для удобства мы в описании шага будем обозначать множество вершин, не вошедших в дерево F, через W. Вершины множества W, смежные хотя бы с одной из вершин $V(F)$, назовем *вершинами уровня* 1. Не вошедшие в уровень 1 вершины из W, смежные хотя бы с одной вершиной уровня 1, назовем *вершинами уровня* 2.

Для каждой вершины x из W через $P(x)$ обозначим множество всех вершин из $V(F)$, смежных с x.

2.3 Шаг алгоритма

Мы будем пытаться выполнить очередной шаг алгоритма, переходя к следующему варианту только когда невозможно выполнить ни один из предыдущих. Дополнительно об этом упоминать в описании шагов мы не будем. Начнем с шага, который таковым фактически не является, но поможет нам в описании других шагов.

Z0. *Висячая вершина u, посчитанная ранее как живая, оказалась мёртвой.*
Очевидно, $\Delta u = 0$, $\Delta b = 1$, $p(Z0) = \frac{2}{15}$.

Замечание 4. 1) При описании шагов мы будем считать, что все висячие вершины, про которые не сказано, что они мёртвые — живые. Добавление лишней мёртвой вершины будет оформлено, как шаг $Z0$.

2) При вычислении дохода шага мы будем считать, если не сказано обратное, что все добавленные вершины принадлежат множеству T, Если какая-то добавленная вершина, учтенная как вершина из T не принадлежит T, то доход шага увеличится хотя бы на $\frac{1}{5}$.

Начнем с более простых шагов. В первых четырёх вариантах в дерево добавляются новые висячие вершины.

A1. *В дереве F есть невисячая вершина x, смежная с вершиной $y \in W$.*

Тогда присоединим y к x. Очевидно,

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(A1) \geq \frac{13}{15} - \frac{2}{5} \geq \frac{7}{15}.$$

A2. *В дереве F есть вершина x, смежная с $k \geq 2$ вершинами из W.*
Тогда присоединим к x две смежные с ней вершины из W. Очевидно,

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(A2) \geq \frac{13}{15} - 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

A3. *Существует вершина x уровня 1, смежная с $k \geq 3$ вершинами из W.*
Тогда присоединим к дереву F вершину x и затем три смежных с x вершины множества W. В этом случае $\Delta t \leq 4$,

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(A3) \geq 2 \cdot \frac{13}{15} - 4 \cdot \frac{2}{5} \geq \frac{2}{15}.$$

Замечание 5. Далее мы считаем, что невисячие вершины дерева F не смежны с вершинами из W, каждая висячая вершина смежна ровно с одной вершиной из W и, наконец, каждая вершина уровня 1 смежна не более, чем с двумя вершинами из W.

В частности, если $x \in T$ — вершина уровня 1, то $|P(x)| \geq 2$ и при присоединении вершины x к дереву хотя бы одна из вершин множества $P(x)$ станет мёртвой.

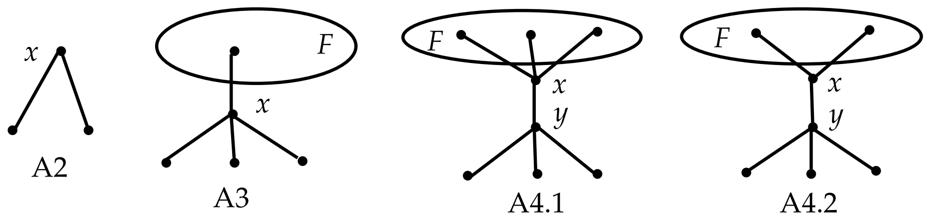

Рис. 3: Шаги А

A4. *Существует вершина $x \in S$ уровня 1, смежная ровно с одной вершиной из W, причём эта вершина — $y \in T$ уровня 2.*
Присоединим к дереву F вершины x, y и три отличные от x вершины из W, смежные с y (вершина y не смежна с деревом F). Тогда

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 1, \quad p(A4) \geq 2 \cdot \frac{13}{15} + \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

Далее мы расмотрим гораздо более сложный случай. В зависимости от конфигурации, будут выполены различные варианты шага.

M. *Вершина $x \in T$ уровня 1 смежна с двумя вершинами из W.* Мы присоединим к дереву вершину x. Цена этой вершины составляет $\frac{2}{5}$. Присоединим две смежные с x вершины $y_1, y_2 \in W$, фактически выполнив шаг $A2$. Мы получим

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(M) = \frac{2}{15} - \frac{2}{5} + \frac{1}{15} \geq -\frac{3}{15}.$$

N. *Вершина $x \in S$ уровня 1 смежна с двумя вершинами из W.* Мы присоединим к дереву вершину x и две смежные с x вершины $y_1, y_2 \in W$ и получим доход

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(N) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{15} \geq -\frac{2}{15}.$$

Шаги M и N мы не считаем законченными. После их выполнения мы имеем следующую задачу:

– каждая висячая вершина из $V(F)$ смежна не более чем с одной вершиной из W;

–каждая вершина первого уровня смежна не более чем с двумя вершинами из W.

Мы добавили в дерево вершины x, y_1, y_2, однако, пусть F пока что обозначает дерево, построенное после предыдущего законченного шага. Требуется выполнить шаг с доходом не менее $\frac{3}{15}$. Приступим к разбору случаев.

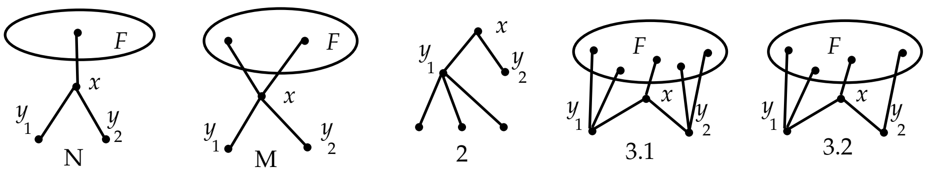

Рис. 4: Шаги M, N, 2 и 3

1. $y_1, y_2 \notin T$.
Эти вершины стоят дешевле, чем было посчитано, что добавляет доход хотя бы $\frac{2}{5}$ получаем

$$\Delta u = \Delta b = 0, \quad p(1) \geq \frac{6}{15}.$$

Замечание 6. Далее мы будем считать, что $y_1 \in T$, то есть, $d_G(y_1) \geq 4$.

2. *Одна из вершин y_1 или y_2 смежна с $k \geq 3$ вершинами из W.* Присоединим к дереву три из этих вершин, фактически выполнив шаг $A2$ и шаг $A1$. Получаем

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(2) = p(A1) + p(A2) = \frac{8}{15}.$$

3. *Каждая из вершин y_1, y_2 смежна не более, чем с одной вершиной из $W \setminus \{x, y_1, y_2\}$.*
Так как $d_G(y_1) \geq 4$, то y_1 — вершина уровня 1, а значит, $|P(y_1)| \geq 2$, что добавит нам хотя две мёртвых вершины.

3.1. *Если $y_2 \in T$*, то это добавит нам еще две мёртвые вершины. В этом случае

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 4, \quad p(3.1) = 4 \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{15}.$$

3.2. *Если $y_2 \notin T$*, то это добавит нам хотя бы $\frac{1}{5}$. В этом случае

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 2, \quad p(3.2) = \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{2}{15} \geq \frac{7}{15}.$$

4. *Вершина y_1 смежна ровно с двумя вершинами $z_1, z_2 \in W$.* Присоединим к дереву вершины z_1 и z_2 (через y_1), выполнив шаг $A1$ и получим $p(4) = \frac{1}{15}$, этого недостаточно. Продолжим разбирать случаи.

4.1. *Среди вершин y_2, z_1, z_2 есть вершина, смежная с деревом F.*
Пусть, например, вершина z_1 смежна с деревом F, то есть, входит в уровень 1. Для остальных вершин рассуждения аналогичны.

4.1.1. *Если $z_1 \in T$*, то по замечанию 5, вершина z_1 должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами дерева F, что добавит нам две мёртвые вершины и обеспечит

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 2, \quad p(4.1.1) = \frac{1}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{5}{15}.$$

4.1.2. *Если $z_1 \notin T$*, то вершина z_1 стоит дешевле минимум на $\frac{1}{5}$, но добавляет лишь одну мёртвую вершину. Поэтому

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.1.2) = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15}.$$

4.2. *Среди вершин y_2, z_1, z_2 есть вершина не из множества T.* Это увеличит доход на $\frac{1}{5}$, в результате

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.2) = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15}.$$

4.3. $\mathrm{N}_G(y_2) = \{x, y_1, z_1, z_2\}$.
Тогда вершина y_2 оказывается мёртвой, в результате получится

$$\Delta u = 1, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.3) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15}.$$

Замечание 7. Итак, подведём итоги. В оставшихся случаях вершины y_1, y_2, z_1, z_2 принадлежат множеству T и уровню 2. Каждая из вершин y_1, y_2 смежна ровно с двумя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2\}$, а значит, вершины y_1 и y_2 смежны, $d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$.

Вершина y_2 не смежна хотя бы с одной из вершин z_1, z_2. Не умаляя общности положим, что y_2 не смежна с z_1. Тогда z_1 смежна хотя бы с двумя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$.

4.4. *Вершина z_1 смежна с $k \geq 3$ вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$.*
Присоединим три из этих вершин в дерево, сделав шаг $A2$ и шаг $A1$. В результате получаем

$$\Delta u = 3, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.4) = \frac{1}{15} + \frac{8}{15} \geq \frac{9}{15}.$$

4.5. *Таким образом, вершина z_1 смежна ровно с двумя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$.*
Обозначим эти две вершины через p_1 и p_2 и добавим в дерево (см. рис. 6), фактически выполнив еще один шаг $A2$. В результате получим $p(4.5) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} \geq \frac{2}{15}$. Этого не хватает, продолжим разбор случаев.

4.5.1. *Среди вершин p_1, p_2 есть вершина, принадлежащая множеству T и смежная с деревом F.*
Пусть это вершина p_1. По замечанию 5 она смежна хотя бы с двумя вершинами дерева F, что добавит нам две мёртвые вершины и обеспечит

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 2, \quad p(4.5.1) = \frac{2}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} \geq \frac{6}{15}.$$

4.5.2. *Среди вершин p_1, p_2 есть вершина не из множества T.*

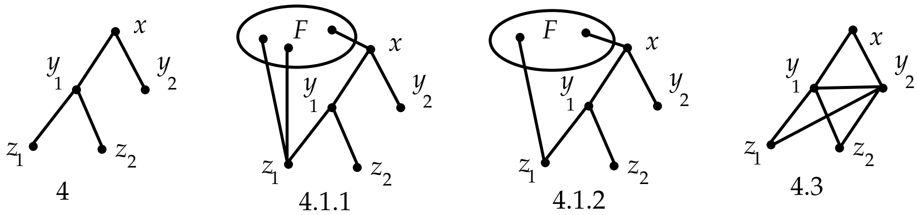

Рис. 5: Шаги 4, 4.1.1, 4.1.2 и 4.3

Это увеличит доход на $\frac{1}{5}$, получится

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.5.2) \geq \frac{2}{15} + \frac{3}{15} \geq \frac{5}{15}.$$

4.5.3. *Среди вершин y_2, z_2, p_1, p_2 есть вершина, не смежная с вершинами из $W' = W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2\}$.*
Тогда в построенном дереве эта вершина — мёртвая, что увеличивает доход от шага на $\frac{2}{15}$. Поэтому

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 1, \quad p(4.5.3) \geq \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \geq \frac{4}{15}.$$

Замечание 8. Таким образом, все вершины $y_1, y_2, z_1, z_2, p_1, p_2 \in T$ и не смежны с деревом F. Каждая из вершин y_2, z_2, p_1, p_2 смежна хотя бы с одной вершиной из W'.

4.5.4. *Одна из вершин p_1 и p_2 смежна с $k \geq 2$ вершинами не из W'.*
Добавим две из этих вершин q_1 и q_2 в дерево, выполнив шаг $A2$. Получится

$$\Delta u = 3, \quad \Delta b = 0, \quad p(4.5.4) \geq \frac{2}{15} + \frac{1}{15} \geq \frac{3}{15}.$$

4.5.5. *Каждая из вершин p_1 и p_2 смежна ровно с одной вершиной из W'.*
Тогда вершина p_1 смежна хотя бы с двумя из вершин p_2, y_2, z_2, а вершина p_2 смежна хотя бы с двумя из вершин p_1, y_2, z_2. Напомним, что по замечанию 7 вершины y_1 и y_2 смежны и $d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$. Поскольку y_2 смежна хотя бы с одной вершиной не из W', то y_2 не может быть смежна и с p_1, и с p_2. Не умаляя общности положим, что p_1 не смежна с y_2. Тогда $d_G(p_1) = 4$, вершина p_1 смежна с p_2 и z_2.

Заметим, что вершина z_2 не может быть смежна с p_2. (Иначе z_2 была бы смежна с тремя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$: это

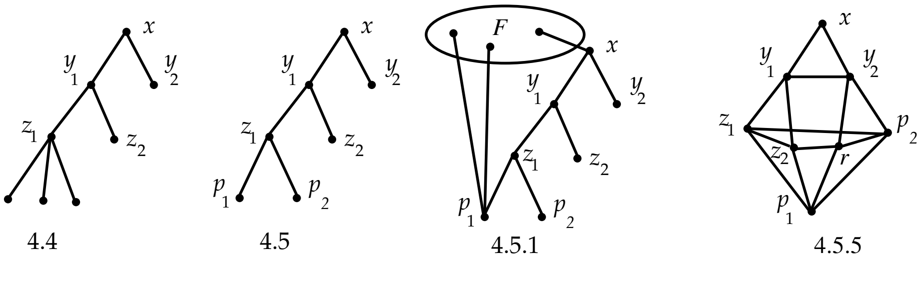

Рис. 6: Шаги 4.4, 4.5, 4.5.1 и 4.5.5

p_1, p_2 и вершина из W'. Тогда можно было бы выполнить шаг 4.4, добавив эти три вершины к z_2.) Значит, вершина p_2 смежна с y_2 и $d_G(p_2) = 4$.

Кроме того, y_2 смежна ровно с двумя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2\}$. Так как y_2 смежна с p_2 и вершиной из W', она не смежна ни с z_1, ни с z_2. Тогда z_1 смежна с z_2 и $d_G(z_1) = d_G(z_2) = 4$.

Обозначим через r единственную смежную с y_2 вершину из множества W'. Можно провести аналогичные сделанным выше для y_1 рассуждения шага 4 для вершины y_2. Окажется, что смежные с y_2 вершины r и p_2 смежны друг с другом и, кроме того, $d_G(r) = 4$.

Продолжая эти рассуждения для вершины p_2 и смежных с ней p_1 и z_1 мы убедимся, что одна из вершин p_1 и z_1 должна быть смежна с r. Поскольку z_1 не может быть смежна с r, то вершины p_1 и r смежны.

Теперь понятно, что z_2 должна быть смежна ровно с двумя вершинами из $W \setminus \{x, y_1, y_2, z_1, z_2\}$ и эти две вершины смежны друг с другом. (В нашем случае можно вместо вершины z_1 в поведенных выше рассуждениях рассмотреть z_2.) Так как одна из двух рассматриваемых смежных с z_2 вершин — это p_1, а вторая лежит в W', то вторая вершина — это r. Мы получили конфигурацию, изображенную на рисунке 6.

Добавим в дерево вершину r, присоединив ее к одной из смежных с ней. Отметим, что ни одна из добавленных в дерево вершин в этом случае не имеет смежных вершин вне дерева. Произведём подсчёт параметров этого шага: $\Delta t = 5$, $\Delta u = 2$, $\Delta b = 4$, $\Delta t = 5$. Таким образом,

$$\Delta u = 2, \quad \Delta b = 4, \quad p(4.5.5) \geq 2 \cdot \frac{13}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} - 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

Замечание 9. 1) Оказалось, что в продолжении шагов M и N всегда можно выполнить шаг с доходом не менее $\frac{3}{15}$, что в сумме дает неотрицательный доход. После шагов M и N мы обязательно будем выполнять описанные выше шаги, дающие в сумме ненулевой доход. Обозначение $M4.2$ будет означать шаг, состоящий из M и 4.2, аналогично с остальными шагами.

Нулевой доход получился только в шагах $M4.3$ и $M4.5.4$. В остальных шагах доход не менее $\frac{1}{15}$. Все шаги, кроме $M4.5.5$ и $N4.5.5$, не могут быть последними, так как добавляют хотя бы одну живую вершину.

2) Остаются лишь варианты, в которых каждая вершина уровня 1 имеет единственную смежную вершину в множестве W, а в уровне 2 нет вершин множества T.

В следующих вариантах в дерево не добавляется новых висячих вершин, но увеличивается количество мёртвых вершин.

Z1. *Существует вершина уровня* 1, *не смежная с вершинами из* W.
Пусть это вершина w. Тогда $\mathrm{N}_G(w) = P(w)$. Добавим вершину w в дерево, в результате все вершины из $\mathrm{N}_G(w)$, кроме одной, станут мёртвыми, так же как и вершина w. Мы имеем $\Delta b = d_G(w)$.

Z1.1. *При* $w \in T$ получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 4, \quad p(Z1.1) = 4 \cdot \frac{2}{15} - \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

Z1.2. *При* $w \in S$ получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 3, \quad p(Z1.2) = 3 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{3}{15}.$$

Z1.3. *При* $w \notin S \cup T$ получается $p(Z1.3) = \Delta b \cdot \frac{2}{15}$, этот шаг можно не рассматривать, эффект от него тот же самый, что от Δb шагов $Z0$. В момент перебора конфигураций-исключений этот шаг будет невозможен.

Z2. *Существует две смежные вершины* v, w *первого уровня.*
Пусть это вершины v, w. Тогда остальные смежные с v, w вершины — это висячие вершины дерева F. Очевидно, $v, w \in S \cup T$ (если, например, $d_G(v) = 2$ и $\mathrm{N}_G(v) = \{x, w\}$, то x смежна с w и мы можем выполнить шаг $A2$). Случай $v, w \in S$ невозможен, в нем мы бы применили редукционное правило $R2$. Добавим вершины w и v в дерево, присоединив к смежным с ними вершинам, в результате v и w станут мёртвыми и $\Delta b = d_G(w) + d_G(v) - 2$.

Z2.1. *Если одна из вершин* v, w *лежит в* S, *а другая — в* T, то

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 5, \quad p(Z2.1) = 5 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

Z2.2. *При* $v, w \in T$ получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 6, \quad p(Z2.2) = 6 \cdot \frac{2}{15} - 2 \cdot \frac{2}{5} = 0.$$

Z3. *Вершина* w *уровня* 1 *смежна с* $v \notin S \cup T$.
Добавим вершины w и v в дерево. В результате вершина v станет мёртвой (так как при $d_G(v) = 2$ мы имеем $\mathrm{N}_G(v) \subset \mathrm{N}_G(w)$) и $\Delta b = d_G(w) - 1 > 0$.

Z3.1. *При* $w \in S$ получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 2, \quad p(Z3.1) = 2 \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Z3.2. *При $w \in T$* получается

$$\Delta u = 0, \quad \Delta b = 3, \quad p(Z3.2) = 3 \cdot \frac{2}{15} - \frac{2}{5} = 0.$$

Замечание 10. Пусть w — вершина уровня 1. Так как нельзя выполнить предыдущие шаги, она смежна с вершиной v уровня 2. Поскольку нельзя выполнить шаг $A4$, то $v \in T$. Поскольку нельзя выполнить редукцию $R2$, то $w \in T \cup S$.

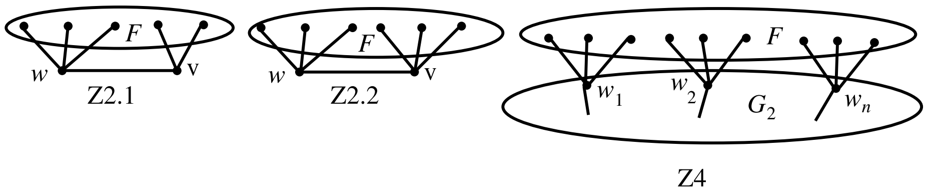

Рис. 7: Шаги Z.

Z4. *Существует не вошедшая в дерево вершина.*
Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — все вершины уровня 1. Тогда каждая из них смежна с тремя висячими вершинами дерева F, всего имеем $3n$ различных вершин, и это все живые висячие вершины дерева F, иначе было бы можно выполнить один из предыдущих шагов. Разрежем все рёбра, ведущие от $w_1, \ldots, w_n$ к дереву F, в результате граф G распадётся на $G_1 = G(V(F))$ и граф G_2. Отметим, что $c(G_2)$ меньше совокупной стоимости вершин $V(G_2)$ в графе G на $n \cdot \frac{2}{5}$. При этом, в дереве F добавится $3n$ мёртвых вершин, что принесёт равный убытку доход в $3n \cdot \frac{2}{15}$.

Отметим, что граф G_2 может быть несвязным, но в каждой его компоненте связности есть хотя бы четыре вершины и среди них есть висячая (одна из $w_1, \ldots, w_n$) и потому к каждой компоненте связности графа G_2 можно применить утверждение нашей теоремы (она не является исключением и содержит меньше вершин, чем граф G). Пусть в графе G_2 ровно k компонент связности. Тогда мы можем построить в нем остовный лес F' из k деревьев с $u(F') = c(G') + 2$. Присоединим к F каждую из k компонент связности леса F' произвольным ребром, в результате количество висячих вершин уменьшится на $2k$ и получится остовное дерево T графа G с $u(T) = u(F) + u(F') - 2k = c(G) + \alpha$, где α — константа, накопленная на предыдущих шагах построения остовного дерева.

2.4 Начало построения и оценка α

Итак, пусть мы начали построения с *базового дерева* с u' висячими вершинами, b' мёртвыми висячими вершинами, s' вершинами множества S и t' вершинами множества T, причём

$$u' \cdot \frac{13}{15} + b' \cdot \frac{2}{15} - t' \cdot \frac{2}{5} - s' \cdot \frac{1}{5} = \alpha'.$$

Мы постараемся начать построение дерева так, чтобы константа α' была как можно больше. В итоге получится остовное дерево F, для которого $u(F) \ge c(G) + \alpha$, где α есть сумма α' и доходов всех сделанных шагов.

Разберём несколько случаев, в каждом из них будем считать, что условия всех предыдущих случаев не выполняется. Начнем со случаев, в которых удается построить базовое дерево с $\alpha' \ge 2$ и тем самым закончить доказательство теоремы.

B1. *В графе есть две смежные вершины $a, a' \in T$, у которых $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(a') = \varnothing$.*
Мы начнём построение с базового дерева, в котором a и a' соединены друг с другом и со всеми вершинами из их окрестностей. В таком дереве $u' \ge 6$, $t' \le u'+2$ и $\alpha' = u' \cdot \frac{13}{15} - (u'+2) \cdot \frac{2}{5} = \frac{7u'-12}{15} \ge 2$.

B2. *В графе есть вершина $a \in T$, смежная с вершиной степени не более 2.*
Пусть $v \in \mathrm{N}_G(a)$, $d_G(v) \le 2$. Мы начнём построение с базового дерева, в котором a соединена со всеми вершинами из её окрестности. Если $d_G(v) = 1$, то вершина v, очевидно, мёртвая. Если же $d_G(v) = 2$, то, так как невозможно выполнить редукцию $R1$, вершины a и v входят в треугольник, третья вершина которого, очевидно, лежит в $\mathrm{N}_G(a)$. Значит, и в этом случае вершина v — мёртвая.

Таким образом, $u' = d_G(a) \ge 4$, $b' = 1$, $t' + s' = u'$ и $\alpha' \ge u' \cdot \frac{13}{15} + \frac{2}{15} - u' \cdot \frac{2}{5} = \frac{7u'+2}{15} \ge 2$.

В дальнейшем мы будем рассматривать начала построения, в которых $\alpha' < 2$. Для обеспечения оценки $\alpha \ge 2$ мы обратим внимание на конец построения.

Лемма 1. *Предположим, что в графе нет конфигураций, описанных в случаях $B1$ и $B2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если хотя бы один раз выполнялся шаг $Z4$, то существует базовое дерево с $\alpha' \ge 2$.*

2) *Если не выполнялся шаг $Z4$, то последний шаг не добавляет живых висячих вершин и даёт доход не менее $\frac{1}{15}$.*

Доказательство. 1) Вернёмся к шагу $Z4$ и отрезанному от заготовки дерева F графу G_2 (см. рис 7), точнее к одной из его компонент связности G'. Не умаляя общности положим, что в G'

попали вершины $w_1, \dots, w_k$ и не попали вершины $w_{k+1}, \dots, w_n$. Так как G' — меньший граф с висячими вершинами, в нем есть остовное дерево T' с $u(T') \geq c(G') + 2$. Перенесём это дерево в граф G. К сожалению, вершины $w_1, \dots, w_k$ стоят в графе G не по 0, как в графе G', а по $\frac{2}{5}$. К тому же, теперь эти висячие вершины дерева T' — не мёртвые, на чем мы теряем еще по $\frac{2}{15}$. Тем самым, в графе G построенное дерево T' удовлетворяет условию $\frac{13}{15}u' + \frac{2}{15}b' \geq \frac{2}{5}t' + \frac{1}{5}s' + 2 - \frac{8}{15}n$.

Вспомним шаг $Z4$ и при всех $i \in \{1, \dots, k\}$ выделим для каждой вершины w_i три смежные с ней вершины $x_1^i, x_2^i, x_3^i \in V(F)$. Такие тройки для разных вершин не пересекаются, все их вершины не входят в дерево T'. Выполним k раз — по очереди со всеми вершинами $w_1, \dots, w_k$ — шаг $A2$ и шаг $A1$, присоединив к w_i вершины x_1^i, x_2^i, x_3^i. В сумме мы получим доход $k \cdot \frac{8}{15}$ и построим базовое дерево F' с константой $\alpha' = 2$.

2) Рассмотрим последний шаг. Это мог быть шаг, не добавляющий жи вых висячих вершин, а именно, один из шагов $Z0$, $Z1.1$, $Z1.2$, $Z2.1$, $Z3.1$, $N4.5.5$ и $M4.5.5$. Любой из них даёт доход хотя бы $\frac{1}{15}$. $\square$

Таким образом, в дальнейшем нам достаточно доказывать, что шаги, на которых добавляются живые висячие вершины, обеспечат $\alpha' \geq \frac{29}{15}$. Продолжим разбор случаев.

B3. *В графе есть вершина a степени не менее* 5.
Начнём построение с базового дерева, в котором a соединена со всеми вершинами из её окрестности. Очевидно, $u' = d_G(a) \geq 5$, $t' + s' \leq u' + 1$ и $\alpha' = u' \cdot \frac{13}{15} - (u' + 1) \cdot \frac{2}{5} = \frac{7u'-6}{15} \geq \frac{29}{15}$, что нам и нужно.

B4. *В графе есть вершина $x \in S$, смежная с вершиной степени не более* 2.
Пусть $v \in \mathrm{N}_G(x)$, $d_G(v) \leq 2$, $\mathrm{N}_G(x) = \{v, y_1, y_2\}$. Мы начнём построение с базового дерева, в котором a соединена со всеми вершинами из её окрестности. Аналогично случаю $B2$, вершина v будет мёртвой. Таким образом, $u' = 3$, $b' = 1$. Рассмотрим случай $y_1, y_2 \in T$. Тогда $s' = 1$, $t' = 2$ и $\alpha' = 3 \cdot \frac{13}{15} + \frac{2}{15} - \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{26}{15}$.

Если хотя бы одна из вершин $y_1, y_2 \notin S \cup T$, то очевидно $\alpha' \geq 2$. В остальных случаях вершины y_1, y_2 — живые. Нам не хватает $\frac{4}{15}$. При разборе случаев M и N мы решали аналогичную задачу о недостатке дохода в $\frac{3}{15}$ (даже с теми же обозначениями x, y_1, y_2). Повторив эти рассуждения и шаги, мы обеспечим $\alpha' \geq \frac{29}{15}$. Более того, $\alpha' < 2$ мы получим только в конфигурациях $M4.3$ и $M4.5.4$, но в этих случаях в построенных деревьях есть живые вершины и по лемме 1 последний шаг построения даст дополнительный доход в $\frac{1}{15}$ и обеспечит $\alpha \geq 2$.

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$, $A4$, $M4.2$, $N4.3$, $M4.5.3$	1	1
$A3$, $N4.2$, $M4.5.2$, $N4.5.3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	0	3
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$	1	4
$M2$	2	5
$N2$, $M4.4$	3	6
$M3.1$	-4	5
$N3.1$	-3	6
$M3.2$	-2	4
$N3.2$	-1	5
$M4.1.1$, $N4.5.5$, $Z0$	-1	2
$M4.3$	0	0
$N4.4$	4	7
$N4.5.2$	3	3
$M4.5.4$	3	0
$N4.5.4$	4	1
$M4.5.5$	-2	1
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3
$Z2.1$	-5	1

Таблица 1.

Далее мы рассматриваем случай, когда в графе степени всех вершин равны 3 *и* 4*. В таблице* 1 *приведена сводка данных по всем возможным шагам.* Мы учли невозможность шагов $Z2.2$, $Z3$ и $Z4$ в связи с невозможностью конфигураций из разобранных базовых случаев. Для простоты восприятия доходы всех шагов умножены на 15.

С таким большим количеством шагов неудобно работать и следующей леммой мы значительно сократим количество возможных шагов.

Лемма 2. *Если в процессе построения остовного дерева (с некоторым базовым деревом) хотя бы раз выполнялся один из указанных шагов, то можно построить остовное дерево с* $\alpha \geq 2$.

1) *Шаг* $N4.2$, $N4.3$, $N4.4$, $N4.5.2$, $N4.5.3$, $N4.5.5$ *или один из шагов* $N1$, $N2$, $N4.5.4$, *на котором все добавленные вершины, кроме* x, *не смежны с деревом* F.

2) *Шаг* $M4.2$, $M4.3$, $M4.4$, $M4.5.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$ *или один*

из шагов $M1$, $M2$, $M4.5.4$, на котором все добавленные вершины, кроме x, не смежны с деревом F.

Доказательство. Отметим, что во всех указанных в условии шагах все добавляемые в построенное ранее дерево F вершины, кроме x, не смежны с $V(F)$.

1) Пусть перед шагом было построено остовное дерево F, к которому через вершину $x \in S$ уровня 1 добавили поддерево F_0 из нескольких вершин, причём доход шага равен p. Из таблицы 1 видно, что $p \geq \frac{1}{15}$. Вершина x смежна с единственной вершиной $a \in V(F)$. Взяв за базовое дерево F_0, мы бы получили $\alpha' = p + \frac{13}{15} \geq \frac{14}{15}$ (доход шага был уменьшен на $\frac{13}{15}$, которые мы вычли при присоединении F_0 за то, что a перестала быть висячей вершиной.)

Очевидно, $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(x) = \varnothing$, поэтому в силу замечания 2 мы имеем $a \in T$. Следовательно, a смежна с тремя вершинами $b_1, b_2, b_3 \in V(F)$, эти вершины не вошли в дерево F_0. Построим новое базовое дерево F', присоединив к F_0 вершины a, b_1, b_2, b_3 (см. рис. 8, 1). От этой операции мы получим доход не менее, чем $3 \cdot \frac{13}{15} - 4 \cdot \frac{2}{5} = 1$, в результате $\alpha' \geq \frac{29}{15}$, что ввиду леммы 1 достаточно для $\alpha \geq 2$.

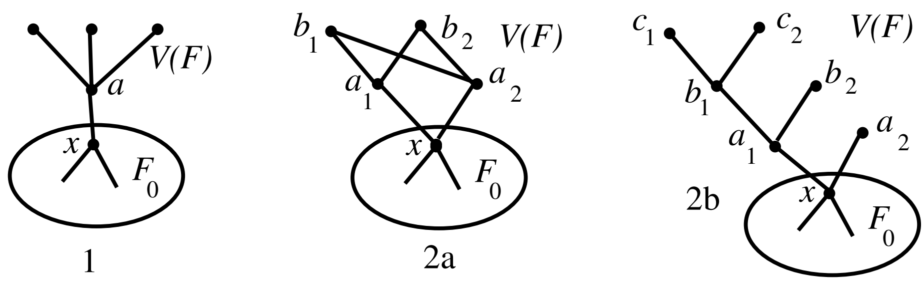

Рис. 8: Дерево F_0.

2) *Опишем общий алгоритм построения базового дерева для шагов типа M.*
Пусть перед шагом было построено остовное дерево F, к которому через вершину $x \in T$ присоединено поддерево F_0 из нескольких вершин, причём доход шага равен p. Вершина x смежна с двумя вершинами $a_1, a_2 \in V(F)$. Взяв за базовое дерево F_0, мы бы получили $\alpha' = p + \frac{11}{15}$ (доход шага был уменьшен на $\frac{13}{15}$, которые мы вычли при присоединении F_0 за то, что одна из вершин множества $P(x) = \{a_1, a_2\}$ перестала быть висячей вершиной и увеличен на $\frac{2}{15}$, прибавленные за то, что другая вершина из $P(x)$ стала мёртвой.)

Построим новое базовое дерево F', присоединив к x вершины $a_1, a_2 \in V(F)$. За этот шаг мы получили доход $2 \cdot (\frac{13}{15} - \frac{2}{5}) = \frac{14}{15}$, теперь мы имеем $\alpha' \geq \frac{25}{15} + p$. При $a_1, a_2 \notin T$ мы выиграем хотя бы $\frac{2}{5}$ и получим $\alpha' \geq \frac{31}{15}$, что нам достаточно.

Пусть $a_1 \in T$, тогда $d_G(a_1) = 4$. Отметим, что a_1 — висячая вершина дерева F, и потому не смежна с отличными от x вершинами из W, а значит, смежна хотя бы с двумя отличными от a_1 вершинами из $V(F)$. Этих вершин нет в F', добавим их в дерево. Если мы добавили более двух вершин, то получили доход хотя бы $\frac{8}{15}$ и $\alpha' > 2$. Остается случай, когда таких вершин две, пусть это b_1, b_2. Отметим, что в этом случае вершины a_1 и a_2 смежны. Добавим b_1 и b_2 в дерево T' и получим доход $\frac{1}{15}$ и $\alpha' \geq \frac{26}{15} + p$. При $p \geq \frac{3}{15}$ этого ввиду леммы 1 достаточно. Для осташихся шагов мы разберём два случая: a_2 — мёртвая (см. рис. 8, 2a) и живая (см. рис. 8, 2b) вершина дерева F' соответственно.

а. *Пусть a_2 — мёртвая вершина дерева F'.*
Это увеличивает доход на $\frac{2}{15}$ и обеспечивает $\alpha \geq \frac{28}{15} + p$. При $p \geq \frac{1}{15}$ этого достаточно, остаются лишь шаги с нулевым доходом $M4.5.4$ и $M4.3$.

а1. *Шаг $M4.5.4$.*
Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. У дерева F' ровно 7 живых висячих вершин, следовательно, в процессе построения стали мёртвыми не менее 7 живых висячих вершин, что даёт доход хотя бы $\frac{2}{15}$ (см. таблицу 1) и $\alpha \geq 2$.

а2. *Шаг $M4.3$.*
Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. У дерева F' ровно 4 живых висячих вершины, следовательно, в процессе построения стали мёртвыми не менее 4 живых висячих вершин. Нам нужно обеспечить суммарный доход оставшихся шагов не менее $\frac{2}{15}$. Единственное количество живых вершин, за умертвление которых мы получим менее $\frac{2}{15}$ — это 5. Но для получения 5 живых вершин нужно добавить ровно одну живую вершину, а за эту операцию мы получаем доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha \geq 2$.

б. *Пусть a_2 — живая вершина дерева F'.*
Так как a_2 смежна с a_1, в этом случае хотя бы одна из вершин b_1, b_2 (пусть b_1) несмежна с a_2. Если $b_1 \notin T$, то доход увеличился на $\frac{1}{5}$, в результате $\alpha' \geq \frac{29}{15}$ и по лемме 1 мы имеем $\alpha \geq 2$. Значит, $b_1 \in T$. Висячие вершины дерева F' не смежны с $b \in V(F)$, поэтому b_1 смежна хотя бы с двумя вершинами не из $V(F')$, которые мы и добавим в дерево F' (см. рис. 8, 2б). Таких вершин ровно две (пусть это c_1, c_2), иначе $\alpha' > 2$.

Выполнив этот шаг $A2$, мы получили доход $\frac{1}{15}$ и $\alpha' \geq \frac{27}{15}$. При $p \geq \frac{2}{15}$ мы имеем $\alpha' \geq \frac{29}{15}$ и по лемме 1 мы получим $\alpha \geq 2$. Остаются лишь шаги с доходом менее $\frac{2}{15}$, это $M4.5.4$, $M4.3$ (с доходом 0), $M4.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$ (с доходом $\frac{1}{15}$).

б1. *Шаг* $M4.5.4$.
В этом случае в дереве F' ровно 9 живых вершин. Рассмотрим дальнейшее построение остовного дерева указанным выше алгоритмом. За умертвление одним шагом любого количества висячих вершин, кроме 5, мы получаем доход не менее $\frac{2}{15}$ (можно умертвить за шаг 1, 2, 3, 4 или 5 висячих вершин). Поэтому единственное количество умертвленных вершин, не меньшее 9, за которое доход может быть менее $\frac{3}{15}$ — это 10 (доход $\frac{2}{15}$). Но для получения 10 вершин нужно добавить ровно одну живую вершину, а за эту операцию мы получаем доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha \geq 2$.

Замечание 11. Теперь случаи шагов $M4.5.4$ и $N4.5.4$ в лемме 2 полностью разобраны. Пусть в процессе построения остовного дерева (с некоторым базовым деревом) оказалось, что $\alpha < 2$ и выполнялся шаг $M4.5.4$ или $N4.5.4$.

Мы доказали, что одна из добавленных вершин на этом шаге должна быть смежна с деревом F. Это может быть только одна из двух добавленных висячих вершин, смежных с p_1 (иначе был бы выполнен один из предыдущих шагов), назовём эту вершину q.

Если $q \in T$ (в этом случае мы назовём шаги $M4.5.4.1$ и $N4.5.4.1$), то q смежна с двумя вершинами из $V(F)$ (по замечанию 5), что добавляет нам две мёртвые вершины. Таким образом,

$$p(M4.5.4.1) \geq \frac{4}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 3,$$

$$p(N4.5.4.1) \geq \frac{5}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 2.$$

Если $q \notin T$ (в этом случае мы назовём шаги $M4.5.4.2$ и $N4.5.4.2$), то добавляется одна мёртвая вершина и еще не менее $\frac{1}{5}$ в доход, так как цена вершины q уменьшается. В этом случае

$$p(M4.5.4.2) \geq \frac{5}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 2,$$

$$p(N4.5.4.2) \geq \frac{6}{15}, \quad \Delta u = 4, \quad \Delta b = 1.$$

Теперь можно утверждать, что любой увеличивающий число живых висячих вершин шаг приносит доход хотя бы $\frac{1}{15}$. Это обстоятельство мы будем использовать в последующих рассуждениях.

Продолжим доказательство леммы 2.

б2. *Шаг* $M4.3$.
В этом случае в дереве F' ровно 6 живых вершин. За умертвление любого количества живых висячих вершин, большего 5, мы получаем доход не менее $\frac{2}{15}$, причём за 6 вершин мы получаем хотя бы $\frac{3}{15}$. А при увеличении количества живых вершин получим дополнительный доход не менее $\frac{1}{15}$. В любом случае, мы получим $\alpha \geq 2$.

б3. *Шаги* $M4.2$, $M4.5.3$, $M4.5.5$.
В этих случаях $\alpha' \geq \frac{28}{15}$. Почти в любом из случаев, сделав все живые вершины мёртвыми, мы получим доход не менее $\frac{2}{15}$ и в результате $\alpha \geq 2$. Менее, чем $\frac{2}{15}$ мы можем получить только за "умертвление" 5 живых вершин. В дереве F' мы имеем 4 живых вершины для шага $M4.5.5$ и по 7 живых вершин в остальных случаях.

В этих случаях умертвить одним шагом 5 живых вершин можно единственным способом: к 4 живым вершинам нужно одну добавить, но за это получается дополнительный доход хотя бы $\frac{1}{15}$ и опять же $\alpha \geq 2$.

$\square$

Теперь в нашей таблице шагов произошли большие изменения, ниже приведём обновленный вариант — таблицу 2.

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$, $A4$	1	1
$A3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	0	3
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$	1	4
$M2$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$	2	5
$N2$, $N4.5.4.2$	3	6
$M3.1$	-4	5
$N3.1$	-3	6
$M3.2$	-2	4
$N3.2$	-1	5
$M4.1.1$, $Z0$	-1	2
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3
$Z2.1$	-5	1

Таблица 2.

Замечание 12. Анализируя таблицу 2, легко сделать следующие выводы.

1) За любой шаг мы получаем доход хотя бы $\frac{1}{15}$.

2) За один или несколько шагов, увеличивающих количество живых висячих вершин на 2 или 5, мы получаем доход хотя бы $\frac{2}{15}$.

3) Шаг, не меняющий количества живых вершин, приносит доход хотя бы $\frac{3}{15}$.

Продолжим рассмотрение случаев в построении базового дерева.

B5. *В графе есть две смежные вершины $a \in T$, $a' \in S$ у которых $\mathrm{N}_G(a) \cap \mathrm{N}_G(a') = \varnothing$.*
Мы начнём построение с базового дерева, в котором a и a' соединены друг с другом и со всеми вершинами из их окрестностей. В таком дереве $u' = 5$, $s' = 1$, $t' = 6$ и $\alpha' = 5 \cdot \frac{13}{15} - \frac{1}{5} - 6 \cdot \frac{2}{5} = \frac{26}{15}$. Если хотя бы одна из висячих вершин построенного дерева не принадлежит множеству T, это увеличит доход на $\frac{1}{5}$ и сделает $\alpha' \geq \frac{29}{15}$, что с учётом леммы 1 для нас достаточно. Остаётся случай, когда все эти вершины — из T, то есть, имеют степень 4. Будем достраивать дерево по нашему алгоритму. Рассмотрим два варианта.

B5.1. *В процессе построения увеличивалось количество живых вершин.*
Изначально это количество равно 5. За "умертвление" любого количества живых висячих вершин, большего 5, мы получим хотя бы $\frac{2}{15}$, причём ровно $\frac{2}{15}$ можно получить только за 7 или 10 вершин. Для остальных количеств мы получим за умертвление доход хотя бы $\frac{3}{15}$ и еще хотя бы $\frac{1}{15}$ за увеличение количества живых вершин.

Пусть количество живых вершин увеличилось до 7 или 10. По замечанию 12, мы на этом получили доход хотя бы $\frac{2}{15}$, после чего еще $\frac{2}{15}$ за "умертвление" живых вершин. В обоих случаях получается $\alpha \geq 2$.

B5.2. *В процессе построения не увеличивалось количество живых вершин.*
Предположим, что был выполнен какой-то шаг, не изменивший количество живых вершин. По замечанию 12, его доход был хотя бы $\frac{3}{15}$ и $\alpha' \geq \frac{29}{15}$. Как мы знаем по лемме 1, этого достаточно для $\alpha \geq 2$.

Остаётся случай, когда с базовым деревом производились только шаги, уменьшающие количество живых вершин. Нужно умертвить 5 живых вершин. Любой способ сделать это, кроме шага $Z2.1$, даст доход хотя бы $\frac{4}{15}$ и обеспечит $\alpha \geq 2$. Значит, выполнен шаг $Z2.1$, добавивший две смежные вершины a' степени 4 и b' степени 3.

Таким образом, наш граф состоит из 9 вершин: в нем есть две копии дерева F' (с центрами a, b и a', b') с пятью общими висячими вершинами $x_1, x_2, x_3 \in \mathrm{N}_G(a)$ и $y_1, y_2 \in \mathrm{N}_G(b)$. Так как $d_G(x_1) = d_G(x_2) = d_G(x_3) = d_G(y_1) = d_G(y_2) = 4$, то $G(\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2\})$ — однородный граф степени 2, то есть, цикл из пяти вершин. В любом случае, существуют два независимых ребра, соединяющих x_1, x_2, x_3 с y_1, y_2. Пусть это будут рёбра x_1y_1 и x_2y_2.

Можно считать, что x_1 и y_2 — несоседние вершины этого цикла из 5 вершин. Тогда $a, b, x_2, x_3, y_1 \in \mathrm{N}_G(x_1) \cup \mathrm{N}_G(y_2)$, причём одна из вершин x_2, x_3, y_1 входит в $\mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$.

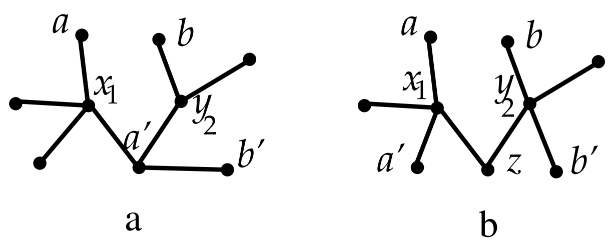

Рис. 9: Случай $B5.2$.

Если $a' \in \mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$, то построим остовное дерево, соединив a' с x_1 и y_2 и присоединив к ним все остальные вершины (вершину b' присоедним к a', см. рис. 9a). Аналогично в случае $b' \in \mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$. Остаётся случай, когда одна из вершин a' и b' смежна с x_1, а другая — с y_2. Тогда соединим x_1 и y_2 с вершиной из $\mathrm{N}_G(x_1) \cap \mathrm{N}_G(y_2)$ (выше сказано, почему такая есть — назовём ее вершиной z) и присоединим к этим двум вершинам все остальные (см. рис. 9b). В итоге получится остовное дерево с 6 висячими вершинами. Остается лишь отметить, что $6 > \frac{2}{5} \cdot 7 + \frac{1}{5} \cdot 2 + 2$.

Замечание 13. В рассматриваемых далее случаях не выполняются шаги $Z2.1$ и $A4$.

B6. *В графе нет вершин степени* 4.
Это означает, что G — регулярный граф степени 3. В работе [2] доказано, что в таком графе $u(G) \geq s \cdot \frac{1}{4} + 2$, откуда следует результат нашей теоремы.

Лемма 3. *В любом из шагов $M1$, $N1$, $M2$, $N2$, $M3.1$, $N3.1$, $M3.2$, $N3.2$, $M4.1.1$, $N4.1.1$, $M4.1.2$, $N4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$, $N4.5.4.2$ должна быть дополнительная (по отношению к таблице* 2*) мёртвая вершина.*

Доказательство. В каждом из этих шагов одна из добавленных висячих вершин была смежна с $V(F)$ (для шагов $M1$, $N1$, $M2$, $N2$, $M4.5.5.1$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$, $N4.5.4.2$ это было установлено в лемме 2, для шагов $M3.1$, $N3.1$, $M3.2$, $N3.2$ это установлено при описании деталей шага, для остальных шагов — следует из их описания). Пусть эта вершина — v, а w — её предок в добавленном поддереве. Отметим, что $v, w \in S \cup T$ и $w \in W$. Ввиду установленного выше, $\mathrm{N}_G(v) \cap \mathrm{N}_G(w) \neq \varnothing$.

Пусть x — вершина, смежная и с v, и с w. Понятно, что $x \notin V(F)$. По построению, все смежные с w вершины лежат в $V(F)$ или уже добавлены в дерево F, то есть, v имеет две смежные вершины из $W = V(G) \setminus V(F)$, вошедшие в дерево. Как мы знаем по замечанию 5, вершина $v \in W$ не может быть смежна более чем с двумя вершинами из W, поэтому v после окончания шага будет мёртвой вершиной, которая не учтена в параметрах шага. $\square$

Шаг	$\Delta u - \Delta b$	15·доход
$A1$	1	7
$A2$	1	1
$A3$	2	2
$M1$, $M4.1.2$, $M4.5.1$, $N4.1.1$	-1	5
$N1$, $N4.1.2$, $N4.5.1$, $M4.5.4.1$	0	6
$M2$, $N4.5.4.1$, $M4.5.4.2$	1	7
$N2$, $N4.5.4.2$	2	8
$M3.1$	-5	7
$N3.1$	-4	8
$M3.2$	-3	5
$N3.2$	-2	6
$M4.1.1$	-2	4
$Z0$	-1	2
$Z1.1$	-4	2
$Z1.2$	-3	3

Таблица 3.

Перед последним и самым сложным случаем перепишем нашу таблицу шагов, добавив в указанные в лемме 3 шаги по мёртвой вершине и доход за нее. Кроме того, уберем шаги $Z2.1$ и $A4$, невозможные ввиду того, что окрестности любых двух смежных вершин $v, w \in S \cup T$ теперь пересекаются.

B7. *Граф не удовлетворяет условию ни одного из предыдущих случаев.*
Тогда в графе есть вершина a степени 4. Если соединить a с вершинами из ее окрестности, получится дерево F' с 4 висячими вершинами b_1, b_2, b_3, b_4 и $\alpha' = 4 \cdot \frac{13}{15} - 5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{22}{15}$. Продолжим построение по нашему алгоритму. Подсчитаем суммарное количество прибавок живых висячих вершин на шагах, когда их изменение положительно и обозначим его через ℓ. Уменьшающие количество живых

вершин шаги должны умертвить $\ell+4$ вершины. Разберём несколько случаев.

B7.1. $\ell \geq 2$.
Из таблицы 3 видно, что добавив ℓ живых вершин мы получили доход не менее $\frac{\ell}{15}$. При $\ell = 2$ мы должны умертвить 6 живых вершин, минимальный доход за это равен $\frac{6}{15}$, получаем $\alpha \geq 2$.

При $\ell = 3$ мы должны умертвить 7 живых вершин, минимальный доход за это равен $\frac{5}{15}$, получаем $\alpha \geq 2$.

При $\ell \geq 4$ мы должны умертвить не менее 8 живых вершин, минимальный доход за это не менее $\frac{4}{15}$, получаем $\alpha \geq 2$.

B7.2. $\ell = 0$.
Последний шаг добавляет в доход не менее $\frac{2}{15}$. Если был сделан шаг, не изменяющий количество живых вершин, за него получен доход не менее $\frac{6}{15}$, тогда $\alpha \geq 2$. Значит, выполнялись только шаги, уменьшающие количество живых вершин. Из таблицы 3 видно, что существуют три способа умертвить 4 живых вершины, заработав менее $\frac{8}{15}$ (и не обеспечив $\alpha \geq 2$) — это шаг $Z0$ вместе с шагом $M3.2$ (суммарный доход $\frac{7}{15}$) шаг $Z0$ вместе с шагом $Z1.2$ (суммарный доход $\frac{5}{15}$) или шаг $Z1.1$ (доход $\frac{2}{15}$).

B7.2.1. *Выполнены шаг $Z0$ и шаг $M3.2$.*
Для выполнения шага $M3.2$ необходимо, чтобы в имеющемся перед шагом дереве F было хотя бы 5 висячих вершин (см. рисунок 4: две висячие вершины F должны быть смежны с y_1, одна — с y_2 и, так как $x \in T$ для шага M, еще две висячие вершины F должны быть смежны с x). Но в нашем случае $F = F'$, а это дерево имеет 4 висячих вершины, противоречие.

B7.2.2. *Выполнены шаг $Z0$ и шаг $Z1.2$.*
Мы получаем доход $\frac{5}{15}$, итого $\alpha \geq \frac{27}{15}$. Если хотя бы одна из висячих вершин дерева F' не из T, доход вырастет хотя бы на $\frac{3}{15}$, получится $\alpha \geq 2$. Значит, все эти вершины из T и имеют степень 4 в графе G. Тогда в графе G ровно 6 вершин: 5 вершин степени 4 и одна вершина степени 3 (добавленная на шаге $Z1.2$). Очевидно, это невозможно.

B7.2.3. *Выполнен шаг $Z1.1$.*
Мы получаем доход $\frac{2}{15}$, итого $\alpha \geq \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$. Добавленная на последнем шаге вершина имеет степень 4. Если хотя бы две из вершин b_1, b_2, b_3, b_4 не принадлежит T, доход увеличивается на $\frac{6}{15}$ и $\alpha \geq 2$. Если одна из них не принадлежит T, мы получаем граф на 5 вершинах степени 4 и одной вершине степени 3, что невозможно. Значит, $\alpha < 2$ может быть только у регулярного графа степени 4 на 6 вершинах, нетрудно понять, что единственный такой граф — это C_6^2, который действительно является графом-исключением

(для него $\alpha = \frac{8}{5}$).

B7.3. $\ell = 1$.
То есть, мы сделали ровно один шаг, увеличивающий количество живых вершин на 1. Из таблицы 3 видно, что либо это шаг $A2$, либо мы получили доход хотя бы $\frac{7}{15}$, откуда $\alpha' \geq \frac{29}{15}$, что достаточно для $\alpha \geq 2$.

Значит, мы сделали ровно один шаг $A2$ с доходом $\frac{1}{15}$. Как и в предыдущем пункте, если мы сделали шаг, не изменяющий количество живых вершин, то $\alpha \geq 2$. Значит, шаг $A2$ был единственным, кроме шагов, уменьшающих число живых вершин. Из таблицы 3 видно, что существует единственный способ умертвить 5 живых вершин, заработав менее $\frac{7}{15}$ (и не обеспечив $\alpha \geq 2$) — это шаг $Z0$ вместе с шагом $Z1.1$ (доход $\frac{4}{15}$, добавляет вершину степени 4). Суммарный доход всех этих шагов обеспечивает $\alpha \geq \frac{27}{15}$.

Если хотя бы одна из вершин b_1, b_2, b_3, b_4 или двух вершин, добавленных на шаге $A2$, имеет степень 3, то доход увеличивается на $\frac{3}{15}$ и обеспечивает $\alpha \geq 2$. В оставшемся случае G — регулярный граф степени 4 на 8 вершинах. Очевидно, в графе-исключении не должно быть остовного дерева с 6 висячими вершинами, а для этого в 4-регулярном графе легко придумать необходимое и достаточное условие — *каждое ребро должно входить в треугольник.*

Пусть G — 4-регулярный граф на 8 вершинах, у которого каждое ребро входит в треугольник. Убедимся, что с точностью до изоморфизма существует два 4-регулярных графа на 8 вершинах, которые удовлетворяют этому условию. Если G является вершинно 4-связным графом, то воспользуемся работой [5] — там доказано, что G — это C_n^2 или рёберный граф 4-циклически-связного кубического графа. Вторая возможность отпадает, так как количество вершин такого рёберного графа должно делиться на 3, а первая возможность даёт граф C_8^2.

Пусть G имеет разделяющее множество R менее чем из 4 вершин. Нетрудно понять, что множество из $4 - k$ вершин не может отделить в 4-регулярном графе компоненту связности, сожержащую менее $k + 1$ вершины, поэтому $|R| \geq 2$.

Если в $|R| = 2$, то существует единственная возможность: множество R должно разделять граф на две компоненты связности из трёх вершин, причём все эти 6 вершин должны быть смежны с двумя вершинами множества R. Тогда степени вершин из R будут по 6, противоречие.

Пусть $|R| = 3$, $R = \{r_1, r_2, r_3\}$. Тогда одна из компонент связности содержит две вершины (пусть это a_1, a_2), а другая — три вершины (b_1, b_2, b_3). Легко понять, что a_1 и a_2 смежны и каждая из них смежна с r_1, r_2, r_3 (иначе $d_G(a_i) < 4$). От каждой из вершин

r_1, r_2, r_3 выходит по два ребра к b_1, b_2, b_3, значит, сумма степеней вершин в графе $G(\{b_1, b_2, b_3\})$ равна 6, то есть, это треугольник. Теперь двудольный граф с долями $\{r_1, r_2, r_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$ определяется однозначно — это $K_{3,3}$ без паросочетания. Полученный граф — это граф G_8, изображенный на рисунке 1.

2.5 Редукция и контрпримеры

Докажем, что если к графу G хотя бы один раз было применено редукционное правило $R1$ или $R2$, то G — не исключение.

Как мы знаем, применение правил $R1$ и $R2$ не может уменьшить α. Значит, достаточно доказать, что $\alpha \geq 2$ для графа G, из которого с помощью $R1$ или $R2$ получен один из графов C_6^2, C_8^2 или G_8. Рассмотрим 6 случаев.

1. *После применения $R1$ получился граф C_6^2.*
Пусть из нашего графа G получился квадрат цикла $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ после того, как на одном из рёбер убрали вершину w степени 2. Не умаляя общности положим, что вершина w была на ребре a_1a_2 или a_1a_3. В обоих случаях легко построить остовные деревья с 5 висячими вершинами: см. рис. 10a и 10b. Значит, $u(G) \geq 5 > 6 \cdot \frac{2}{5} + 2$.

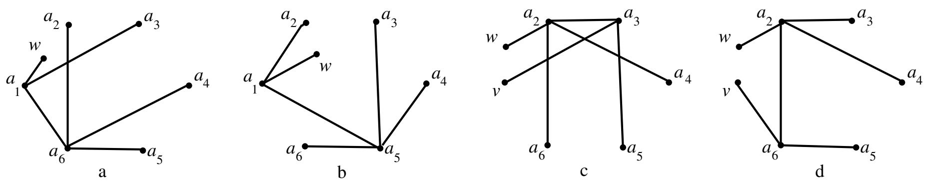

Рис. 10: Редукция: случай C_6^2.

2. *После применения $R2$ получился граф C_6^2.*
Обозначения оставим, как в предыдущем случае, пусть после склеивания двух вершин v и w степени 3 образовалась вершин a_1. Пусть вершина a_2 смежна в графе G с w. Если a_3 смежна в G с v, мы построим остовное дерево с 5 висячими вершинами, как на рисунке 10c. Если a_3 смежна в G с w, то вершина a_6 смежна в графе G с v и мы построим остовное дерево с 5 висячими вершинами, как на рисунке 10d. Таким образом, $u(G) \geq 5$.

3. *После применения $R1$ получился граф C_8^2.*
Пусть из нашего графа G получился квадрат цикла $a_1a_2 \ldots a_8$ после того, как на одном из рёбер убрали вершину w степени 2. Не умаляя общности положим, что вершина w была на ребре a_1a_2

или a_1a_3. В первом случае построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 11a, а во втором случае — как на рисунке 11b. Таким образом, $u(G) \geq 6 > 8 \cdot \frac{2}{5} + 2$.

4. *После применения* $R2$ *получился граф* C_8^2.
Обозначения оставим, как в предыдущем случае, пусть после склеивания двух вершин v и w степени 3 образовалась вершин a_1. Пусть вершина a_2 смежна в графе G с w.

Если a_3 смежна в G с v, мы построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 11c. Если a_3 смежна в G с w, то вершина a_8 смежна в графе G с v и мы построим остовное дерево с 6 висячими вершинами, как на рисунке 11d. Таким образом, $u(G) \geq 6$.

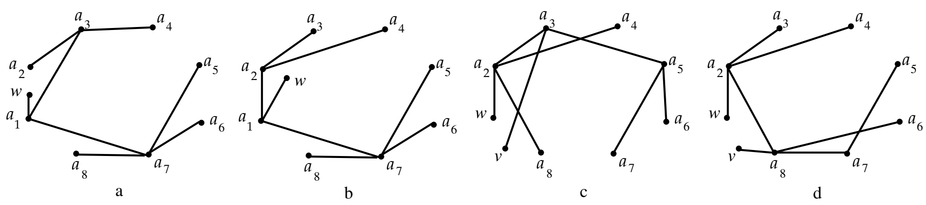

Рис. 11: Редукция: случай C_8^2.

5. *После применения* $R1$ *получился граф* G_8.
Будем использовать для графа G_8 обозначения, как на рисунке 1в. В силу симметрии достаточно разобрать четыре случая расположения вершины w в графе G на одном из ребер графа G_8: на a_1a_2 (остовное дерево с 6 висячими вершинами изображено на рисунке 12a), b_1b_3 (рисунок 12b), r_3b_3 (рисунок 12c) и r_3a_1 (рисунок 12d). Тем самым, в любом лучае построено остовное дерево графа G с 6 вершинами, $u(G) \geq 6$.

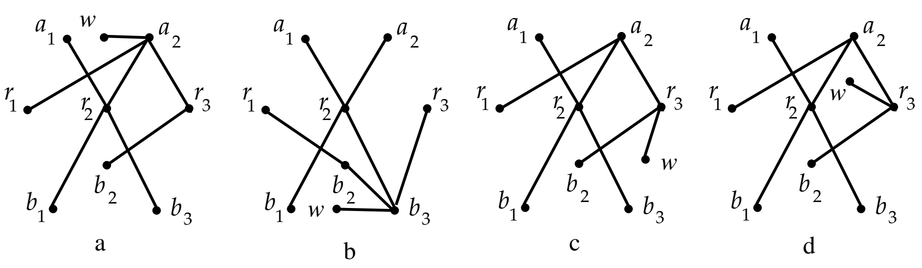

Рис. 12: Редукция: случай графа G_8 и правила $R1$.

6. *После применения* $R2$ *получился граф* G_8.
Обозначения оставим, как в предыдущем случае. В силу симметрии графа возможны три принципиально разных варианта: после

склеивания двух вершин v и w степени 3 в графе G образовалась вершина a_1, b_1, r_1 соответственно.

Если образовалась вершина a_1, то $\mathrm{N}_G(w) \cup \mathrm{N}_G(v) = \{a_2, r_1, r_2, r_3\}$. Рассмотрим дерево F_1, изображенное на рисунке 13a. В нем три невисячих вершины a_2, r_2, r_3 и каждая из вершин w и v смежна в графе G с одной из них. Тем самым, F_1 можно преобразовать в остовное дерево графа G с 6 висячими вершинами.

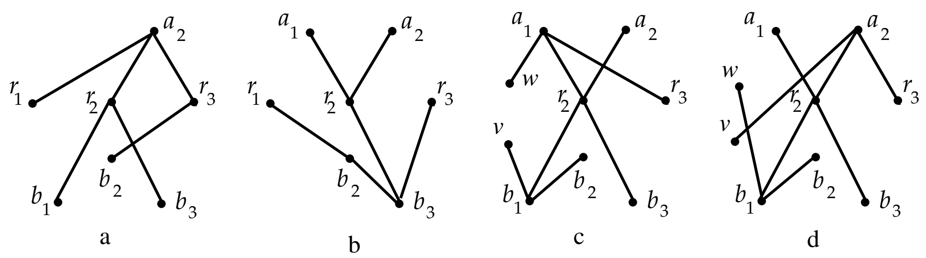

Рис. 13: Редукция: случай графа G_8 и правила $R2$.

Если образовалась вершина b_1, то $\mathrm{N}_G(w) \cup \mathrm{N}_G(v) = \{b_2, b_3, r_1, r_2\}$. Рассмотрим дерево F_2, изображенное на рисунке 13b. В нём три невисячих вершины b_2, b_3, r_2 и каждая из вершин w и v смежна с одной из них. Тем самым, F_2 можно преобразовать в остовное дерево графа G с 6 висячими вершинами.

Пусть образовалась вершина r_1, тогда $\mathrm{N}_G(w) \cup \mathrm{N}_G(v) = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. В силу симметрии возможны два принципиально разных случая:

— $a_1, a_2 \in \mathrm{N}_G(w)$, $\quad b_1, b_2 \in \mathrm{N}_G(v)$;

— $a_1, b_1 \in \mathrm{N}_G(w)$, $\quad a_2, b_2 \in \mathrm{N}_G(v)$.

В первом случае построим остовное дерево с 6 вершинами в графе G, как на рисунке 13c, а во втором случае — как на рисунке 13d.

Таким образом, в любом случае $u(G) \geq 6$.

Теперь мы полностью доказали теорему 1.

3 Экстремальные примеры

Существует много бесконечных серий примеров графов G, содержащих $s > 0$ вершин степени 3 и $t > 0$ вершин степени более 3, для которых $u(G) = \frac{2}{5}t + \frac{1}{4}s + 2$. Мы приведём пример серии графов, все вершины которых имеют степени 3 и 4. Таким образом, графы этой серии являются также обещанными во введении контрпримерами к сильной гипотезе Линиала.

Приступим к построению. Ключевой деталью нашего построения будет следующий граф H_i: к графу K_4 на вершинах x_i, y_i, z_i, v_i

добавлены вершина a_i, смежная с x_i и y_i и вершина b_i, смежная с z_i и v_i. Графы $H_1, \dots, H_n$ (где $n > 1$) мы расположим по циклу и соединим a_{i+1} с b_i (мы считаем, что $n + 1 = 1$). Полученный граф обозначим G_n (см. рисунок 14), очевидно, $c(G_n) = 2n \cdot \frac{1}{5} + 4n \cdot \frac{2}{5} = 2n$.

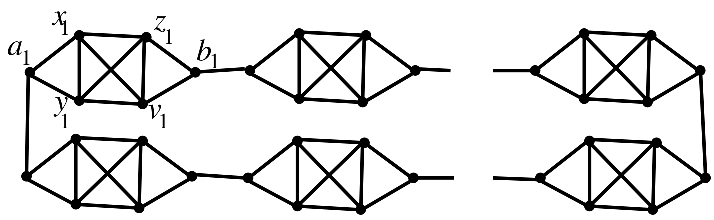

Рис. 14: Экстремальные примеры.

Отметим, что множество висячих вершин остовного дерева T не является разделяющим в графе G_n. С помощью этого факта несложно показать, что $u(G_n) = 2n + 2$.

Список литературы

[1] J. A. Storer. *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* Inform. Process. Lett. 13 (1981), №1, p. 8-11.

[2] D. J. Kleitman, D. B. West. *Spanning trees with many leaves.* SIAM J. Discrete Math. 4 (1991), №1, p. 99-106.

[3] J. R. Griggs, M. Wu. *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. Discrete Math. 104 (1992) p. 167–183.

[4] N. Alon. *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* Graphs and Combinatorics 6 (1990), 1-4.

[5] N. Martinov. *A recursive characterization of the* 4*-connected graphs.* Discrete Math. 84 (1990), no. 1, p. 105-108.

[6] G. Ding, T. Johnson, P. Seymour *Spanning trees with many leaves.* J. Graph Theory 37 (2001), №. 4, p. 189-197.

[7] Y. Caro, D. B. West, R. Yuster. Connected domination and spanning trees with many leaves. SIAM J. Discrete Math. 13 (2000), №. 2, p. 202-211.

[8] P. S. Bonsma *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), №. 3, p. 920-937.

[9] P. S. Bonsma, F. Zickfeld *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* LATIN 2008: Theoretical

informatics, p. 531-543, Lecture Notes in Comput. Sci., 4957, Springer, Berlin, 2008.

[10] Н. В. Гравин. *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 381 (2010), стр. 31-46.

[11] Д. В. Карпов. *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* Записки научных семинаров ПОМИ т.381 (2010г.) стр.78-87.

[12] А. В. Банкевич, Д. В. Карпов. *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 391 (2011), стр. 18-34.