

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

# **Полином Кауфмана рациональных зацеплений**

**М.С. Школьников**

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

Октябрь, 2011

## **Аннотация**

В данной работе выводится явная формула для полинома Кауфмана рациональных узлов и зацеплений в терминах квантовых целых знаменателей произвольного цепного разложения соответствующего рационального числа.

## **Ключевые слова:**

полином Кауфмана, рациональное зацепление, квантовые целые

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ  
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина,  
В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин,  
В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

## 1. Полином Кауфмана

Полином Кауфмана был предложен в конце 1980-х как естественное обобщение полинома Джонса ([1]) и BLM/Но-полинома ([8, 9]). Не удивительно, что существует мало примеров его вычислений на нетривиальных сериях зацеплений – значения полинома как правило громоздки и плохо поддаются осмыслению. Но последнее обстоятельство оказывается своего рода преимуществом, полином Кауфмана содержит много информации о зацеплении, и потому порой он оказывается последним элементарным инструментом для решения типичных задач теории узлов ([2]).

Полином Кауфмана – инвариант ориентированных зацеплений. Он определяется в два этапа. Вначале строится предварительный полином, который оказывается инвариантом неориентированных зацеплений относительно регулярной изотопии, а затем он нормируется специальным образом.

Скобкой Кауфмана от двух переменных называется отображение  $\Lambda$  заданное на неориентированных диаграммах зацеплений со значениями в Лорановских полиномах (с целыми коэффициентами) от  $a$  и  $z$ , инвариантное относительно регулярной изотопии, и удовлетворяющее следующим условиям:

- $\Lambda(U) = 1$ , где  $U$  – тривиальный узел.
- $\Lambda(L_1) + \Lambda(L_{-1}) = z(\Lambda(L_0) + \Lambda(L_\infty))$
- $\Lambda(s_{\pm 1}) = a^{\pm 1}\Lambda(s_0)$ .

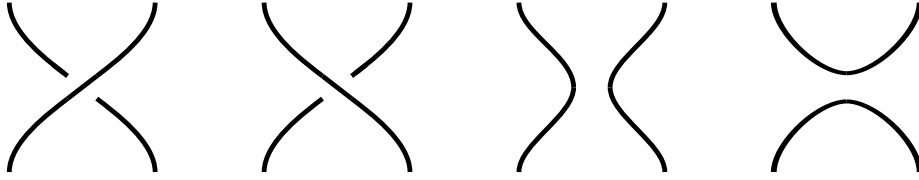


Рис. 1: Второе условие на  $\Lambda$ , блоки  $L_1, L_{-1}, L_0, L_\infty$

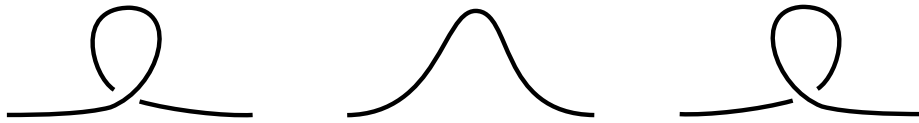


Рис. 2: Третье условие на  $\Lambda$ , блоки  $s_{-1}, s_0, s_1$

Здесь предполагается, что диаграммы  $L_1, L_{-1}, L_0, L_\infty$  устроены внутри некоторой окрестности так, как на Рис. 1, а вне нее совпадают. Тоже самое

требование предъявляется к  $s_{-1}, s_0, s_1$  (Рис. 2). Кауфман в своей работе [1] доказал, что существует единственный полиномиальный инвариант, удовлетворяющий этой системе соотношений.

Теперь рассмотрим некоторую ориентированную диаграмму  $D$ . Все ее перекрестки разбиваются на два типа: положительные и отрицательные (см. Рис. 3). Рассмотрим сумму по всем перекресткам, в которой каждое слагаемое равно  $\pm 1$ , а знак выбирается в соответствии со знаком перекрестка. Это число обозначим  $w(D)$ .



Рис. 3: Положительный (слева) и отрицательный(справа) перекресток

Пусть  $L$  – ориентированное зацепление. Возьмем его некоторую диаграмму  $D$ . Оказывается, что полином  $a^{-w(D)}\Lambda(D)$ , не будет зависеть от выбора диаграммы  $D$ . Потому корректно обозначение

$$F(L) = a^{-w(D)}\Lambda(D)$$

Последнее и называется полиномом Кауфмана зацепления  $L$ .

## 2. Рациональные зацепления

Рациональные зацепления играют важную роль в теории узлов. Их класс сочетает в себе с одной стороны относительную простоту в изучении, а с другой – он зачастую оказывается модельным для проверки различных общих гипотез. Основные факты о рациональных зацеплениях могут быть найдены в книгах [6] и [7].

Рациональные зацепления индексируются рациональными числами. Опишем эту конструкцию.

Пусть  $p$  и  $q$  взаимно простые целые числа,  $p > 0$ ,  $|\frac{p}{q}| \leq 1$ , тогда можно построить цепную дробь для их отношения:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}}, \quad (1)$$

где  $b_i$  – ненулевые целые числа.

Далее мы будем использовать короткое обозначение  $[b_1, b_2, \dots, b_n]$  для цепной дроби со знаменателями  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Случай  $p = q = 1$  является исключительным: результатом построения окажется тривиальный узел, единственный рациональный, но не двухмостовой узел. В некоторых случаях будет полезно позволить числам  $b_i$  принимать также значения  $0$  и  $\infty$ , арифметические операции для них продолжатся по стандартным правилам:  $1/0 = \infty$ ,  $1/\infty = 0$ ,  $\infty + x = \infty$ .

Рассмотрим косу на четырех нитях соответствующую слову  $A^{b_1} B^{b_2} A^{b_3} \dots$ , где  $A$  и  $B$  – участки изображенные на рисунке 4, а склейка производится слева направо.

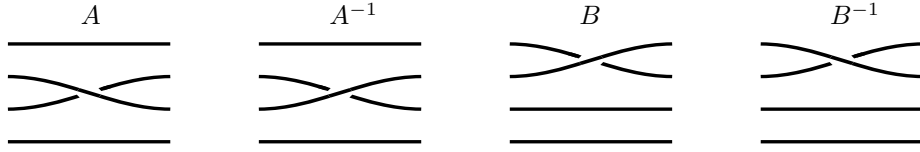


Рис. 4: Участки естественных диаграмм

Затем возьмем замыкание этой косы зависящее от четности  $n$  (см. Рис. 5). Полученную таким образом (неориентированную) диаграмму будем на-



Рис. 5: Нечетное и четное замыкание

зывать *естественной диаграммой рационального зацепления* и обозначать его  $D[b_1, b_2, \dots, b_n]$ . Теорема Шуберта (см. [6, 7]) утверждает, что такое зацепление с точностью до объемлющей изотопии не зависит от вида цепной дроби задающей  $p/q$ . Тогда оказывается возможным корректно ввести обозначение  $L(\frac{p}{q})$  для зацепления с диаграммой  $D[b_1, b_2, \dots, b_n]$ . При нечетном знаменателе  $L(\frac{p}{q})$  оказывается узлом, а при четном – двухкомпонентным зацеплением. Такие узлы и зацепления называются *двухмостовыми* или *рациональными*.



Рис. 6: Две диаграммы правого трилистника –  $D[-3]$  и  $D[2, -2]$

### 3. Основные результаты

В этом разделе будут сформулированы основные результаты данной работы. Для этого потребуются ввести несколько обозначений.

Рассмотрим кольцо лорановских полиномов с целыми коэффициентами от переменной  $\theta$ . Тогда для каждого целого числа  $m$  введем полином

$$[m] = \frac{\theta^m - \theta^{-m}}{\theta - \theta^{-1}},$$

называемый квантовым целым числа  $m$ .

Пусть теперь фиксированы две переменные  $a$  и  $z$ . Тогда с целым числом  $m$  можно связать следующие выражения, которые окажутся полиномами Лорана:

$$q_{\pm 1}(m) = \frac{[1 \pm m]}{[2]},$$

$$q_0(m) = -\frac{a[1+m] + a^{-1}[1-m] - a^m[2]}{a + a^{-1} - [2]},$$

где  $\theta$  берется таковым, что  $\theta + \theta^{-1} = z$ . Сам факт того, что описанные выражения являются полиномами от  $a$  и  $z$ , не вполне тривиален. Он будет обоснован в следующем разделе.

В этих терминах может быть дан главный результат, а именно явная формула скобки Кауфмана от двух переменных для естественной диаграммы рационального зацепления.

**Теорема 1.** Пусть  $b_1, \dots, b_n$  — ненулевые целые числа. Тогда

$$\Lambda(D[b_1, \dots, b_n]) = \sum_{f \in C(n)} a^{f(1)} \prod_{k=1}^n q_{f(k)}((b_k + f(k+1))(-1)^{k+1})$$

где  $C(n) = \{f : \overline{1, n+1} \rightarrow \{\pm 1, 0\}, f(n+1) = 0\}$ .

Ясно, что формула для полинома Кауфмана не будет значительно отличаться от описанной выше. Достаточно вычислить  $w(D[b_1, \dots, b_n])$  (при заданной на диаграмме некоторым образом ориентации) и домножить предыдущую формулу на соответствующую степень  $a$ . Этот вопрос будет обсуждаться в последнем разделе.

### 4. Вывод и доказательство

Логика доказательства такова: вначале выведем значение скобки Кауфмана для элементарных фрагментов, затем построим дерево его вычисления для естественной диаграммы рационального зацепления, после чего получим заявленную формулу как суммирование по обходам на этом дереве.

Определим элементарные фрагменты, с которыми нам предстоит работать. При целых  $n$  обозначим через  $T_n$  диаграмму, состоящую из  $|n|$  последовательных перекрестков, а при  $n = \infty$  примем  $T_\infty$  равным повернутому  $T_0$  на угол  $\pi/2$  (см. Рис. 7). Мы всегда можем думать о семействе  $T_n$  как о диаграммах зацеплений, которые совпадают вне некоторой окрестности, а внутри нее устроены определенным образом.

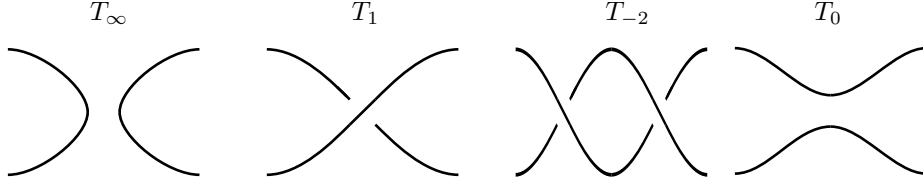


Рис. 7: Примеры фрагментов  $T_n$

Вычислим скобку Кауфмана для  $T_n$ . Введем обозначение  $x_n = \Lambda(T_n)$ . Пусть  $n$  не равно 0 и  $\infty$ , тогда мы можем рассмотреть какой-нибудь перекресток на  $T_n$  и применить к нему второе и третье соотношение для  $\Lambda$ . Мы получим, что полиномы  $x_n$  связаны уравнением

$$x_{n-1} + x_{n+1} = z(x_0 + a^n x_\infty).$$

Ясно, что, считая известными какие-либо три значения  $x_n$ , все остальные можно через них выразить. Например, в качестве этих значений можно взять  $x_{\pm 1}$  и  $x_\infty$ . Тогда для некоторых  $\alpha_{\pm 1, n}$  и  $\beta_n$  выполнено  $x_n = \alpha_{-1, n} x_{-1} + \alpha_{1, n} x_1 + \beta_n x_\infty$ . Мы попробуем вывести формулы этих последовательностей. Подставляя последнее выражение в рекуррентное соотношение для  $x_n$  мы получим, что последовательности являются решениями уравнений (для целых  $n$ )

$$\alpha_{\pm 1, n-1} + \alpha_{\pm 1, n+1} = z \alpha_{\pm 1, n}$$

$$\beta_{n-1} + \beta_{n+1} = z \beta_n + z a^n,$$

при начальных условиях  $\alpha_{\pm 1, \pm 1} = \beta_\infty = 1$  и  $\alpha_{\pm 1, \mp 1} = \beta_{\pm 1} = \alpha_{\pm 1, \infty} = 0$ .

Отсюда видно, что эти последовательности являются частным случаем более общей. Положим  $\gamma_{n-1} + \gamma_{n+1} = c \gamma_n + b a^n$ . Построим производящую функцию для  $\gamma_n$  при неотрицательных целых значениях  $n$ . Пусть  $\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$ . Тогда  $(t + t^{-1})\phi =$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^{n-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_{n+1} + \gamma_{n-1}) t^n - y_{-1} + y_1 t^{-1} = \\ y_1 t^{-1} - y_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (c \gamma_n + b a^n) t^n &= y_1 t^{-1} - y_{-1} + c \phi(t) + \frac{b}{1 - at} \end{aligned}$$



Остается привести подобные слагаемые, после чего получаем явное выражение для  $\phi$ :

$$\phi = \frac{tb + (1 - at)(\gamma_0 - t\gamma - 1)}{(t^2 - tc + 1)(1 - at)}.$$

Теперь нужно снова разложить  $\phi$  в ряд по  $t$  и получить явный вид  $\gamma_n$ . Ясно, что в общем случае  $\gamma_n$  обязано иметь вид линейной комбинации степенных функций от корней знаменателя  $\phi$ . Найдем эти корни в частном случае, когда  $\gamma_n = \alpha_{\pm 1, n}$  или  $\beta_n$ . В обоих случаях  $c = z$ , потому корнями являются  $a^{-1}$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , где  $\theta_1\theta_2 = 1$ ,  $\theta_1 + \theta_2 = z$ . Эти рассуждения можно довести до конца и вывести явные формулы для рассматриваемых последовательностей. Здесь мы не будем проводить эти вычисления, но докажем результат.

**Лемма 1.** Пусть  $[n] = (\theta^n - \theta^{-n})/(\theta - \theta^{-1})$ , где  $\theta + \theta^{-1} = z$ . При  $n \in \mathbb{Z}$

$$\Lambda(T_n) = \frac{[1 - n]}{[2]} \Lambda(T_{n-1}) + \frac{[1 + n]}{[2]} \Lambda(T_{n+1}) - \frac{a[1 + n] + a^{-1}[1 - n] - a^n[2]}{a + a^{-1} - [2]} \Lambda(T_\infty)$$

*Доказательство.* Применим индукцию. Для этого убедимся, что формула дает верный результат при начальных параметрах. При  $n = \pm 1$  это очевидно. Пусть  $n = 0$ . Заметим, что  $[2] = z$ , тогда правая часть равна  $z^{-1}(\Lambda(T_{-1}) + \Lambda(T_1)) - \Lambda(T_\infty)$ , что и есть  $\Lambda(T_0)$ . Теперь необходимо произвести шаг индукции. Но вместо этого мы докажем, что правая часть, обозначим ее  $\lambda_n$ , удовлетворяет рекуррентному соотношению для  $\Lambda(T_n)$  (эти действия равносильны). Для этого рассмотрим сумму правых частей:

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1} + \lambda_{n+1} &= \frac{[2 - n] + [-n]}{[2]} \Lambda(T_{n-1}) + \frac{[n] + [2 + n]}{[2]} \Lambda(T_{n+1}) - \\ &- \frac{a([n] + [n + 2]) + a^{-1}([2 - n] + [-n]) - a^n(a + a^{-1})[2]}{a + a^{-1} - [2]} \Lambda(T_\infty) = \end{aligned}$$

Но нам известно, что  $[n - 1] + [n + 1] = [2][n]$ .

$$= [1 - n]T_{n-1} + [1 + n]T_{1+n} - \frac{a[n + 1] + a^{-1}[1 - n] - a^n(a + a^{-1})[2]}{a + a^{-1} - [2]} \Lambda(T_\infty).$$

Нетрудно видеть, что последнее равно  $z(\lambda_n + \Lambda(T_\infty))$ .  $\square$

Теперь, после того, как обосновали их появление, мы можем вернуться к обозначениям, возникшим в предыдущем разделе. А именно,  $q_{\pm 1}(n) = \alpha_{\pm 1, n}$  и  $q_0(n) = \beta_n$ . В дальнейшем будет полезно знать несколько первых членов этих последовательностей. Оформим их в виде таблицы.

Приведем пример вычисления. Рассмотрим левый трилистник с диаграммой  $D[-3]$  (см. Рис. 6). Заметим, что его можно представить как  $T_3$ , в таком случае  $T_\infty$  будет тривиально, а  $T_{\pm 1}$  окажется замыканием  $s_{\mp 1}$  (см. Рис. 2). Отсюда  $\Lambda(D[-3]) = \Lambda(T_3) = q_{-1,3}\Lambda(T_{-1}) + q_{1,3}\Lambda(T_1) + q_{0,3}\Lambda(T_\infty) = -a + a^{-1}(z^2 - 2) + z + az^2 + a^2z = -2a^{-1} - a + z(1 + a^2) + z^2(a^{-1} + a)$ . Теперь

$n$	$q_{-1}(n)$	$q_1(n)$	$q_0(n)$
0	$z^{-1}$	$z-1$	$-1$
1	0	1	0
2	$-z^{-1}$	$z-z^{-1}$	$1+az$
3	$-1$	$z^2-2$	$z+az^2+a^2z$

осталось заметить, что при любом задании ориентации  $w(D[-3]) = -3$ . Поэтому, полином Кауфмана левого трилистника равен  $F(L(-1/3)) = -2a^2 - a^4 + z(a^3 + a^5) + z^2(a^2 + a^4)$ . Это значение совпадает с табличным (см. [1, 2, 3]).

Используя предыдущую лемму, опишем схему вычисления скобки Кауфмана для естественных диаграмм рациональных зацеплений. отождествим последний блок в диаграмме с элементарным фрагментом. Индекс будет зависеть не только от последнего знаменателя в цепном разложении, но и от четности его номера. Это замечание очевидно из определения естественных диаграмм, его можно выразить следующим образом:  $D[b_1, \dots, b_n] = T_{(-1)^{n+1}b_n}$ . Тогда из леммы 1. следует, что

$$\begin{aligned} \Lambda(D[b_1, \dots, b_n]) &= q_{-1}((-1)^{n+1}b_n)\Lambda(D[b_1, \dots, -1]) + \\ &+ q_1((-1)^{n+1}b_n)\Lambda(D[b_1, \dots, 1]) - q_0((-1)^{n+1}b_n)\Lambda(D[b_1, \dots, \infty]). \end{aligned}$$

Теперь все готово для того, чтобы доказать Теорему 1, сформулированную в конце предыдущего раздела.

*Доказательство.* Для доказательства теоремы необходимо отметить несколько фактов из арифметики рациональных зацеплений. А именно  $D[b_1, \dots, b_n, \pm 1] = D[b_1, \dots, b_n \pm 1]$  и  $D[b_1, \dots, b_n, \infty] = D[b_1, \dots, b_n]$ . После этого можно написать соотношение сведения

$$\begin{aligned} \Lambda(D[b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]) &= q_{-1}((-1)^{n+1}b_n)\Lambda(D[b_1, \dots, b_{n-1} - 1]) + \\ &+ q_1((-1)^{n+1}b_n)\Lambda(D[b_1, \dots, b_{n-1} + 1]) - q_0((-1)^{n+1}b_n)\Lambda(D[b_1, \dots, b_{n-1}]). \end{aligned}$$

Эта формула работает при  $n > 1$ . Для  $n = 1$  в правой части имеем  $\Lambda(D[\pm 1]) = a^{\pm 1}$ . Теперь все вычисление можно интерпретировать как сумму по сквозным проходам по полному тринарному дереву. Их можно индексировать функциями выбора направления. В качестве этого множества удобно брать  $C(n)$ . Тогда из предыдущих рассуждений ясно, что каждый проход  $f$  даст вклад  $a^{f(1)} \prod_{k=1}^n q_{f(k)}((b_k + f(k+1))(-1)^{k+1})$ .

□

## 5. Ориентация

Как уже было замечено, вопрос ориентации в контексте полинома Кауфмана не является очень существенным. Она влияет только на множитель вида

$a^w$  перед полиномом. Для его нахождения требуется найти сумму величин  $b_m$  со знаками, которые несложно зависят от того, как ориентация устроена на соответствующем фрагменте. Но в общем случае тип этой ориентации может меняться не вполне предсказуемо, а именно он зависит от четности длин всех предыдущих блоков и ориентации в начале диаграммы. Ниже мы покажем, как этот процесс можно сделать регулярным.

В статье [4] был предложен однозначный способ построения по ориентированному рациональному зацеплению некоторой его диаграммы, выделяемой специальным свойством, а именно на любом перекрученном участке нити идут в противоположных направлениях. Рассмотрение в данном контексте только таких диаграмм решает описанную проблему, т.к. локальное поведение ориентации полностью контролируется. Оформи́м результат в виде утверждения.

**Утверждение 1.** *Рассмотрим  $b_1, \dots, b_n$  – ненулевые четные числа, и пусть на  $D[b_1, \dots, b_n]$  ориентация введена так, что две средние нити в каком-либо месте противоположны. Тогда  $w(D[b_1, \dots, b_n]) = \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k$ .*

*Доказательство.* Ясно, что для при данных условиях соседние нити всегда будут противоположны, т.к. локальная ориентация вообще не меняется. Потому утверждение мгновенно следует из определения числа  $w$ .  $\square$

## Список литературы

- [1] L. H. Kauffman, *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. 318:2, 1990, pp. 417–471
- [2] S. Chmutov, S. Duzhin, J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev knot invariants*, <http://arxiv.org/abs/1103.5628>
- [3] *Knot Atlas*, сетевой ресурс <http://katlas.math.toronto.edu/> поддерживается Scott Morrison и Dror Bar-Natan.
- [4] S. Duzhin, M. Shkolnikov, *A formula for the HOMFLY polynomial of rational links*, <http://arxiv.org/abs/1009.1800>
- [5] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трёхмерные многообразия*, М.: МЦНМО, 1997.
- [6] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Springer-Verlag New York, Inc. 1997.
- [7] K. Murasugi, *Knot Theory and Its Applications*, Birkhäuser, 1996
- [8] R. D. Brandt, W. B. R. Lickorish, K. C. Millett, *A Polynomial Invariant for Unoriented Knots and Links*, Invent. Math. 84, 563–573, 1986.
- [9] C. F. Ho, *A New Polynomial for Knots and Links—Preliminary Report*, Abstracts Amer. Math. Soc. 6, 300, 1985.