ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 5/2011

О вершинах степени k минимальных и минимальных относительно стягивания k-связных графов: верхние оценки. [1]

С.А. Образцова

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

А.В. Пастор

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

Февраль, 2011

В статье [4] был задан вопрос о том, какова наибольшая константа c_k, такая, что количество вершин степени k в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе G равно по крайней мере $c_k|G|$. На настоящий момент для $k = 4$ известна точная оценка (а именно $c_4 = 1$) и для $k \geq 5$ неизвестно никаких верхних оценок. В этой статье доказываются верхние оценки для c_k при всех $k \geq 5$.

[1]Исследования частично поддержаны грантом РФФИ 11-01-00760-а и президентским грантом поддержки ведущих научных школ НШ-5282.2010.1.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер — $E(G)$. Степень вершины v обозначается $d(v)$. Количество вершин графа G мы будем обозначать $|G|$. Кроме того, обозначим $V_k(G)$ множество вершин степени k графа G и $V_{>k}(G)$ — множество вершин графа G, степени которых больше, чем k.

Определение 1. Если $A \subset V(G)$, то через $G - A$ обозначается граф, полученный из G удалением всех вершин множества A и всех инцидентных им ребер. Для $v \in V(G)$ положим $G - v = G - \{v\}$.

Определение 2. Если $B \subset E(G)$, то через $G - B$ обозначается граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$. Для $e \in E(G)$ положим $G - e = G - \{e\}$.

Определение 3. *Окрестностью* вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, *о*крестностью множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A.

Определение 4. *Вершинной связностью* графа G (обозначаемой $\kappa(G)$) называется мощность наименьшего подмножества множества вершин графа G такого, что при его удалении G становится несвязным или тривиальным (то есть, состоящим из одной вершины). Граф G называется *k-связным*, если $\kappa(G) \geq k$.

Заметим, что если граф G — k-связный, то $d(v) \geq k$ для всех вершин графа G.

В данной работе будут исследоваться k-связные графы, которые перестают быть k-связными при удалении или стягивании любого из ребер (то есть минимальные и минимальные по стягиванию k-связные графы). Интерес к этому классу k-связных графов появился в 60-х годах двадцатого века в связи с работами У. Татта, в которых он характеризовал 3-связные графы в терминах стягивания и удаления ребер. Позже, в работах Р. Халина, была сформулирована задача о нахождении наибольшей константы c_k, такой, что количество вершин степени k в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе G равно по крайней мере $c_k|G|$. В этой же статье были получены первые нижние оценки на это число для случаев $k = 4, 5$ и 6. На настоящий момент никаких верхних оценок для c_k при $k \geq 5$ не существует (ни общих, ни для частных случаев k). Существующие оценки для минимальных или минимальных по стягиванию графов построены на основании графов обладающих строго одним из указанных свойств (см., например, [1], [2], [6] и [7]). В этой статье доказываются следующие верхние оценки $c_k < \frac{3\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor^2+8\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor+3}{6\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor^2+9\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor+3}$ для нечетных k и $c_k < \frac{9\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor^3+18\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor^2-59\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor+14}{18\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor^3-42\lfloor\frac{3(k-2)}{2}\rfloor+26}$ для четных k. Заметим, что при $k \to \infty$ эти оценки сходятся к $\frac{1}{2}$.

В статье также будет использоваться локальное определение связности.

Определение 5. *Вершинной связностью*(или просто *связностью*) двух вершин x и y графа G называется наименьшее количество вершин, которое необходимо удалить из G для того, чтобы в оставшемся графе вершины x и y оказались в разных компонентах связности. Вершинная связность двух смежных вершин считается равной $+\infty$. Обозначается вершинная связность x и y через $\kappa_G(x, y)$.

Обозначим через $P(G)$ множество всех пар различных вершин графа G. Легко видеть, что $\kappa(G) = \min_{(x,y)\in P(G)} \kappa_G(x, y)$.

Определение 6. Ребро называется *существенным*, если при его удалении связность графа уменьшается.

Определение 7. Граф называется *минимальным*, если при удалении любого ребра понижается его связность.

Определение 8. Пусть граф G — k-связный. Ребро называется *нестягиваемым*, если при его стягивании граф не сохраняет k-связность.

Заметим, что если ребро (x, y) — нестягиваемо, то существует k-разделяющее множество, содержащее одновременно вершины x и y.

Определение 9. Граф называется *минимальным относительно стягивания ребер*, если все его ребра нестягиваемы.

Определение 10. *Разделяющее множество* — это множество вершин, при удалении которых теряется связность графа. Соответственно, *k-разделяющее множество* — это разделяющее множество, состоящее из k вершин.

Определение 11. Будем говорить, что разделяющее множество T *отделяет* некоторый подграф B графа G, если подграф B представляется в виде объединения не менее чем одной, но не всех, компонент связности графа $G - T$.

В дальнейшем, для удобства изложения, вместо "компонента связности" будем говорить просто "компонента". Кроме того, полный подграф на трех вершинах мы будем называть треугольником.

Определение 12. Пусть $X, Y \subset V(G)$. Назовем XY -путем любой простой путь с началом в множестве X и концом в множестве Y, внутренние вершины которого не принадлежат множествам X и Y.

Следующая теорема является незначительно усиленной версией теоремы Менгера (см. [8]), но ее формулировка существенно удобнее для использования.

Теорема 1 (см. [5]). *Пусть $X, Y \subset V(G)$, $|X| \le k$, $|Y| \le k$ и любое множество $R \subset V(G)$, отделяющее X от Y , содержит хотя бы k вершин. Тогда существуют k непересекающихся XY-путей.*

2 5-связные графы

Обозначим полный граф на четырех вершинах (x_1, x_2, x_3, x_4) с удаленным ребром (x_2, x_4) через K_4^-.

Определение 13. Пусть G — произвольный граф и $\{v_1, \dots, v_5\} \subset V(G)$. Назовем *$K_4^-$-расширением графа G на вершинах $v_1, \dots, v_5$* граф G', отвечающий следующим свойствам:

(1) $V(G') = V(G) \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, где $x_1, x_2, x_3, x_4 \notin V(G)$;

(2) $E(G') = E(G) \cup E_1 \cup E_2$, где

$$E_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_3, x_2), (x_3, x_4)\},$$

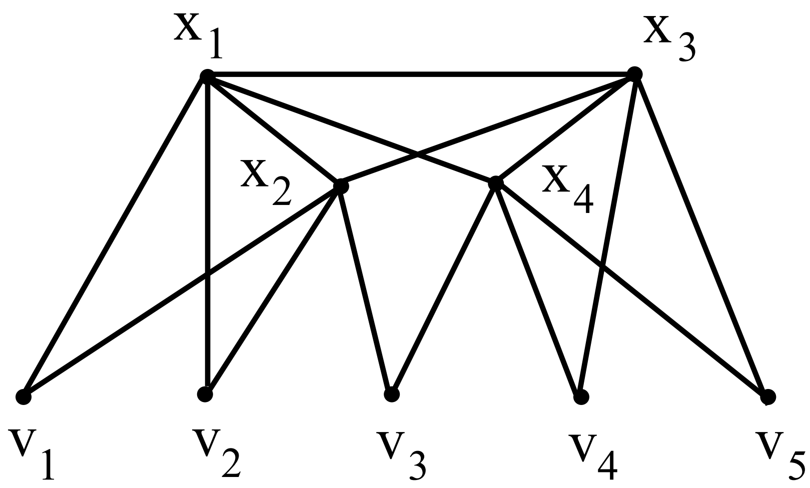

Рис. 1: Подграф, присоединяемый к графу G при K_4^--расширении.

$$E_2 = \{(x_1, v_1), (x_1, v_2), (x_2, v_1), (x_2, v_2), (x_2, v_3), \\ (x_3, v_4), (x_3, v_5), (x_4, v_3), (x_4, v_4), (x_4, v_5)\}.$$

Также K_4^-*-расширением графа* G будет называться и операция, в результате которой получается граф G'. Вершины x_1, x_2, x_3, x_4 будут называться *присоединенными* к графу G при K_4^--расширении.

Замечание 2.1. Отметим, что граф G' представляет из себя дизъюнктное объединение графов G и K_4^-, в котором вершины K_4^- соединены с вершинами $v_1, \dots, v_5$ так, как показано на рис. 1.

Построим семейство графов $\mathcal{F} = \{F_m | m \in \mathbb{N}\}$, таких что граф F_m из этого семейства содержит 5^m вершин степени выше 5 и является минимальным и минимальным по стягиванию 5-связным графом.

Строить графы из этого семейства мы будем по индукции.

База. $m = 1$. Рассмотрим граф G_0, такой что $V(G_0) = \{v_1, \dots, v_5\}, E(G) = \varnothing$. Граф F_1 получается из графа G_0 последовательным применением трех операций K_4^--расширения на вершинах $v_1, \dots, v_5$.

Переход $m \to m+1$. Рассмотрим 5 копий графа F_m — $F_m^1, \dots, F_m^5$. Их объединение будет графом G_m. В каждом из подграфов F_m^i выберем по пять вершин $\{v_{1,i}, \dots, v_{5,i}\}$, степени которых больше 5. Применим к графу G_m последовательно 5 операций K_4^--расширения на вершинах

$\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,5}\}, \ldots, \{v_{5,1}, \ldots, v_{5,5}\}$, соответственно. Полученный в результате этих операций граф обозначим F_{m+1}.

Лемма 1. *Граф F_m — минимальный и минимальный по стягиванию 5-связный граф.*

Доказательство. База. $m = 1$. Докажем 5-связность графа F_1. Предположим обратное. Заметим, что каждое K_4^--расширение добавляет два непересекающихся пути между любыми вершинами v_i и v_j, где $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$. Операция K_4^--расширения применяется три раза, следовательно, между любыми двумя вершинами v_i и v_j, где $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$, — найдется шесть непересекающихся путей. Очевидно, что при удалении менее, чем шести вершин, вершины $\{v_1, \ldots, v_5\}$ будут лежать в одной компоненте связности. Таким образом, если существует 4-разделяющее множество графа F_1, то одна из отделяемых им компонент состоит только из вершин, присоединенных при одном из K_4^--расширений. Обозначим компоненту, отделяемую 4-разделяющим множеством, через H, а вершины, присоединенные при этом K_4^--расширении, через x_1, x_2, x_3, x_4. Очевидно, что если компонента H состоит из одной или всех вершин x_1, x_2, x_3, x_4, то $N_G(H) \geq 5$. Рассмотрим два оставшихся случая — компонента состоит из двух вершин (случай (1)) и из трех вершин (случай (2)).

(1) Заметим, что $|N_G(x_i) \cap N_G(x_j)| \leq 3$ для любых различных $i, j \in \{1, \ldots, 4\}$ и, следовательно, любые две вершины из x_1, x_2, x_3, x_4 отделяются множеством по крайней мере из 5 вершин.

(2) Заметим, что любое трехэлементное подмножество множества вершин x_1, x_2, x_3, x_4 отделяется разделяющим множеством, содержащим $\{v_1, \ldots, v_5\}$.

Таким образом, получено противоречие с существованием 4-разделяющего множества. Следовательно, F_1 — 5-связный граф.

Докажем минимальность графа F_1. Заметим, что все ребра графа F_1 присоединены при K_4^--расширении и, следовательно, у любого ребра один из концов имеет степень 5. Отсюда получаем, что все ребра существенны и граф F_1 — минимальный 5-связный. Докажем минимальность по стягиванию графа F_1. Рассмотрим вершины присоединенные при каком-либо из трех K_4^--расширений — x_1, x_2, x_3, x_4 (причем

$d_{K_4^-}(x_1) = d_{K_4^-}(x_3) = 3$). Заметим, что все ребра множеств E_1 и E_2, за исключением (v_3, x_2) и (v_3, x_4), входят в треугольник, третья вершина которого имеет степень 5. Таким образом, получаем, что все ребра множеств E_1 и E_2, за исключением (v_3, x_2) и (v_3, x_4), — нестягиваемы. Легко видеть, что множество $\{x_1, x_2, v_3, v_4, v_5\}$ отделяет $\{x_3, x_4\}$, и, следовательно, ребро (x_2, v_3) нестягиваемо. Аналогично, нестягиваемо и ребро (x_4, v_3). Таким образом, минимальность по стягиванию доказана, поскольку рассматривалось произвольное K_4^--расширение.

Переход $m \to m + 1$. Начнем с доказательства 5-связности графа F_{m+1}. Предположим обратное. По индукционному предположению F_m — 5-связный граф. Следовательно, если существует 4-разделяющее множество T в графе F_{m+1}, то все вершины, входящие в одну копию $F_m^1, \ldots, F_m^5$, входят в одну компоненту связности графа $F_{m+1} - T$. Заметим, что по теореме 1 в F_m^i между любой вершиной и множеством $\{v_{1,i}, \ldots, v_{5,i}\}$ существует 5 непересекающихся путей. Между множествами $\{v_{1,i}, \ldots, v_{5,i}\}$ из разных копий $F_m^1, \ldots, F_m^5$ также существует 5 непересекающихся путей. Отсюда следует, что вершины из различных копий $F_m^1, \ldots, F_m^5$ разделяются множеством, состоящим по крайней мере из 5 вершин. Следовательно, вершины графа G_m содержатся в одной компоненте. Отсюда получаем, что 4-элементным множеством может отделяться только компонента, целиком лежащая в одном из графов K_4^-, присоединенных на последнем шаге. Отсюда, аналогично базе индукции получаем, что граф F_{m+1} — 5-связный.

Заметим, что по построению F_m вершины, имеющие степень 5, не затрагиваются при присоединениях и, следовательно, не меняют своей степени. При добавлении любого ребра один из его концов имеет степень 5. Отсюда, очевидно, следует минимальность графа F_m. Минимальность по стягиванию графа F_{m+1} доказывается аналогично минимальности по стягиванию F_1 (поскольку при доказательстве минимальности по стягиванию графа F_1 показывалось, что любое ребро лежит в 5-элементном множестве, отделяющем подмножество вершин одного из присоединенных графов K_4^-, а эти вершины не затрагиваются при дальнейших присоединениях, так как имеют степень 5). □

Теорема 2. *В графе F_{m+1} доля вершин степени выше 5 среди всех вершин по крайней мере $\frac{5}{22}$.*

Доказательство. Очевидно, $|V_5(F_1)| = 12$ и $|V_{>5}(F_1)| = 5$. По построению, $|V_5(F_{m+1})| = 5|V_5(F_m)| + 20$ и $|V_{>5}(F_{m+1})| = 5|V_{>5}(F_m)|$. Следовательно,

$$|V_5(F_{m+1})| = 12 \cdot 5^m + 20 \cdot (5^{m-1} + \dots + 1) = 12 \cdot 5^m + 5 \cdot 5^m - 5$$

и $|V_{>5}(F_{m+1})| = 5^{m+1}$. Таким образом,

$$\frac{|V_{>5}(F_m)|}{|F_m|} = \frac{5^m}{17 \cdot 5^{m-1} + 5^m - 5} > \frac{5}{22}.$$

$\square$

Следствие 1. *Для минимального и минимального по стягиванию 5-связного графа* $c'_5 < \frac{17}{22}$.

3 k-связные графы

Определение 14. Пусть G — произвольный граф, $k \geq 6$ и $C = \{v_1, \dots, v_{\lfloor \frac{3(k-2)}{2} \rfloor}\} \subset V(G)$. Назовем (K_3, k)*-расширением графа* G *на вершинах* C граф G', отвечающий следующим свойствам:

(1) $V(G') = V(G) \cup \{x_1, x_2, x_3\}$, где $x_1, x_2, x_3 \notin V(G)$;

(2) $E(G') = E(G) \cup E_1 \cup E_2^1 \cup E_2^2 \cup E_2^3$, где $E_1 = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3)\}$,

$$E_2^1 = \{(x_1, v_i) | i = 1, \dots, k-2\},$$

$$E_2^2 = \{(x_3, v_{\lfloor \frac{3(k-2)}{2} \rfloor + 1 - i}) | i = 1, \dots, k-2\}$$

и $E_2^3 = \{(x_2, v_i), (x_2, v_{\lfloor \frac{3(k-2)}{2} \rfloor + 1 - j}) | i = 1, \dots, \lceil \frac{k-2}{2} \rceil, j = 1, \dots, \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor\}$.

Также (K_3, k)*-расширением графа* G будет называться и операция, в результате которой получается граф G'. Вершины x_1, x_2, x_3 будут называться *присоединенными* к графу G при (K_3, k)-расширении.

Замечание 3.1. Отметим, что граф G' представляет из себя дизъюнктное объединение графов G и K_3, в котором вершины K_3 соединены с вершинами $v_1, \dots, v_{\lfloor \frac{3(k-2)}{2} \rfloor}$ аналогично тому, что показано на рис. 2 для случая $k = 7$ (отдельно отметим, что при $k = 7$ значение $\left\lfloor \frac{3(k-2)}{2} \right\rfloor$ также равно 7 и, следовательно, множество C содержит 7 вершин.)

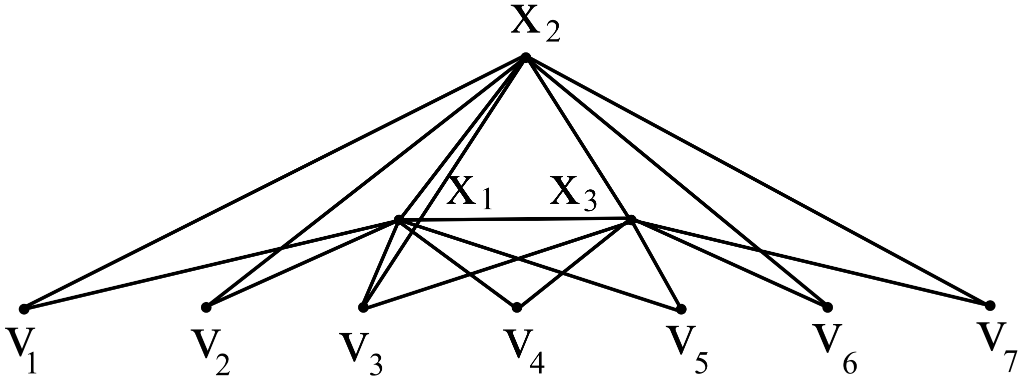

Рис. 2: $(K_3, 7)$-расширение

В дальнейшем будут использоваться следующие свойства графа, полученного при присоединении.

(1) любые две присоединенные вершины вместе смежны со всеми v_i;

(2) присоединенные вершины имеют степень k;

(3) любое добавленное при присоединении ребро входит в треугольник, одна из вершин которого — присоединенная, то есть, имеет степень k.

В дальнейшем мы будем строить минимальные и минимальные по стягиванию k-связные графы с помощью описанной операции присоединения. Построение будет аналогично случаю $k = 5$. Но полученная конструкция работает начиная с $k = 6$, поскольку для получения свойства минимальности по стягиванию важно, чтобы все вершины множества C были смежны хотя бы с двумя из присоединяемых вершин. Для $k = 5$ это условие достижимо только если C содержит не больше 4 вершин, что не позволит получить 5-связный граф.

3.1 Случай нечетного k.

Будем считать, что $k = 2\ell + 3$. Аналогично случаю 5-связного графа по индукции будет построено семейство k-связных графов $\mathcal{H} = \{H_m | m \in \mathbb{N}\}$, таких что граф H_m из этого семейства содержит $(3\ell + 1)^m$ (то есть,

$\left\lfloor \frac{3(k-2)}{2} \right\rfloor^m$) вершин степени выше k и является минимальным и минимальным по стягиванию.

База. $m = 1$. Рассмотрим граф T_0, такой что $V(T_0) = \{v_1, \dots, v_{3\ell+1}\}, E(T_0) = \varnothing$. Граф H_1 получается из графа T_0 последовательным применением $\ell + 2$ операций (K_3, k)-расширения на вершинах $v_1, \dots, v_{3\ell+1}$.

Переход $m \to m + 1$. Рассмотрим $3\ell + 1$ копию графа H_m — $H_m^1, \dots, H_m^{3\ell+1}$. Объединение этих графов возьмем за T_m. В каждом из подграфов H_m^i выберем по k вершин, имеющих степень выше k, и обозначим их через $\{v_{1,i}, \dots, v_{k,i}\}$. Заметим, что выбранные вершины не могут быть присоединены на предыдущих шагах. Применим к графу T_m последовательно k операций (K_3, k)-расширения на вершинах $\{v_{1,1}, \dots, v_{1,3\ell+1}\}, \dots, \{v_{k,1}, \dots, v_{k,3\ell+1}\}$, соответственно. Полученный в результате этих операций граф обозначим H_{m+1}.

Лемма 2. *Граф H_m — минимальный и минимальный по стягиванию k-связный граф.*

Доказательство. База. $m = 1$. В первую очередь докажем k-связность графа H_1. Предположим противное и обозначим $(k-1)$-разделяющее множество в графе H_1 через S. Обозначим вершины, присоединенные при i-той операции, через x_1^i, x_2^i, x_3^i. Заметим, что x_1^i, x_2^i, x_3^i не могут лежать в разных компонентах графа $H_1 - S$. Кроме того, поскольку $|S| = k - 1$, существует i такое, что по крайней мере две вершины из x_1^i, x_2^i, x_3^i лежат в $V(H_1) \setminus S$. Следовательно, все вершины из $\{v_1, \dots, v_{3\ell+1}\} \setminus S$ лежат в одной компоненте, поскольку любые две вершины из x_1^i, x_2^i, x_3^i вместе смежны со всеми вершинами $\{v_1, \dots, v_{3\ell+1}\}$. Отсюда легко получить, что для любого $j \neq i$ и любого $f = 1, 2, 3$ x_f^j либо лежит в S, либо находится в одной компоненте с вершинами $\{v_1, \dots, v_{3\ell+1}\} \setminus S$. Таким образом, в графе $H_1 - S$ ровно одна компонента. Полученное противоречие доказывает, что граф H_1 — k-связен. Заметим, что минимальность графа H_1 очевидно следует из того, что по крайней мере один из концов любого ребра имеет степень k. Минимальность по стягиванию легко следует из того, что любая пара смежных вершин a, b входит в треугольник a, b, c, где c — вершина степени k (см. свойство (3)).

Переход $m \to m + 1$. Докажем, что H_{m+1} — k-связный граф. Предположим обратное. По индукционному предположению H_m — k-связный граф. Следовательно, если существует $(k-1)$-разделяющее множество S

в графе H_{m+1}, то вершины, входящие в одну копию $H_m^1, \dots, H_m^l$, входят в одну компоненту связности графа $H_{m+1} - S$. Заметим, что по теореме 1 в H_m^i между любой вершиной и множеством $\{v_{1,i}, \dots, v_{k,i}\}$ существует k непересекающихся путей. Между множествами $\{v_{1,i}, \dots, v_{k,i}\}$ из разных копий $H_m^1, \dots, H_m^k$ также существует k непересекающихся путей. Очевидно, что вершины из различных копий $H_m^1, \dots, H_m^l$ разделяются множеством, состоящим по крайней мере из k вершин. Следовательно, вершины графа T_m содержатся в одной компоненте. Отсюда получаем, что $(k-1)$-элементным множеством может отделяться только компонента, целиком лежащая в одном из графов K_3, присоединенных на последнем шаге. Легко видеть, что любое подмножество графа K_3 отделяется множеством по крайней мере из k вершин. Таким образом, граф H_{m+1} — k-связен. Минимальность и минимальность по стягиванию доказываются аналогично доказательству минимальности и минимальность по стягиванию графа H_1, поскольку при операциях присоединения вершины уже имеющиеся в графе вершины степени k не затрагиваются. □

Теорема 3. *Предположим, что $k = 2\ell + 3$. Тогда в графе H_{m+1} доля вершин степени выше k среди всех вершин по крайней мере $\frac{3\ell^2+\ell}{6\ell^2+9\ell+3}$.*

Доказательство. Очевидно, $|V_k(H_1)| = 3(\ell+2)$ и $|V_{>k}(H_1)| = 3\ell+1$. По построению,

$$|V_k(H_{m+1})| = (3\ell+1)|V_k(H_m)| + 3k$$

и $|V_{>k}(H_{m+1})| = (3\ell+1)|V_{>k}(H_m)|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |V_k(H_{m+1})| = 3k((3\ell+1)^{m-1} + \dots + 1) + 3(\ell+2)(3\ell+1)^m = \\ = 3k\frac{(3\ell+1)^m - 1}{3\ell} + 3(\ell+2)(3\ell+1)^m \end{aligned}$$

и $|V_{>k}(H_{m+1})| = (3\ell+1)^{m+1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{|V_{>k}(H_m)|}{|H_m|} = \frac{(3\ell+1)^m}{3k\frac{(3\ell+1)^{m-1}-1}{3\ell} + 3(\ell+2)(3\ell+1)^{m-1} + (3\ell+1)^m} > \\ > \frac{(3\ell+1)(3\ell)}{3k + 3(\ell+2)(3\ell) + (3\ell+1)(3\ell)} = \frac{\ell(3\ell+1)}{2\ell+3+3(\ell+2)\ell+\ell(3\ell+1)} = \\ = \frac{3\ell^2+\ell}{6\ell^2+9\ell+3}. \end{aligned}$$

□

Следствие 2. *Предположим, что $k > 6$ — нечетное число и $k = 2\ell + 3$. Тогда для минимального и минимального по стягиванию k-связного графа $c_k < 1 - \frac{3\ell^2+\ell}{6\ell^2+9\ell+3} = \frac{3\ell^2+8\ell+3}{6\ell^2+9\ell+3}$.*

3.2 Случай четного k.

Будем считать, что $k = 2\ell$. Так же, как и в предыдущих двух случаях (для 5 и для нечетного k), по индукции будет построено семейство k-связных графов $\mathcal{H} = \{H_m | m \in \mathbb{N}\}$, таких что граф H_m из этого семейства для $m \geq 2$ содержит $(3\ell - 3)^m$ (то есть, $\left\lfloor \frac{3(k-2)}{2} \right\rfloor^m$) вершин степени выше k и является минимальным и минимальным по стягиванию. Строиться это семейство будет аналогично случаю нечетного k: отличия будут только в двух первых шагах конструкции.

База. $m = 1, 2$. Рассмотрим граф T_0, такой что $V(T_0) = \{v_1, \ldots, v_{3\ell-3}\}, E(T_0) = \varnothing$. Граф H_1 получается из графа T_0 последовательным применением ℓ операций (K_3, k)-расширения на вершинах $v_1, \ldots, v_{3\ell-3}$. Первый шаг построения закончен. Теперь рассмотрим $3\ell-3$ копии графа H_1 — $H_1^1, \ldots, H_1^{3\ell-3}$ и обозначим объединение этих графов через T_1. Вершины i-той копии графа H_1, не являющиеся присоединенными на первом шаге, пронумеруем $v_{1,i}, \ldots, v_{3\ell-3,i}$. Теперь применим к графу T_1 последовательно $3\ell - 3$ операции (K_3, k)-расширения на вершинах $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,3\ell+1}\}, \ldots, \{v_{k,1}, \ldots, v_{k,3\ell+1}\}$, соответственно. Граф, полученный таким образом из T_2, обозначим через H_2.

Переход $m \to m + 1$. Рассмотрим $3\ell - 3$ копии графа H_m — $H_m^1, \ldots, H_m^{3\ell-3}$. Объединение этих графов возьмем за T_m. В каждом из подграфов H_m^i выберем по k вершин степени выше k — $\{v_{1,i}, \ldots, v_{k,i}\}$. Заметим, что вершины, присоединяемые на любом шаге, имеют степень k и дальнейшими присоединениями не затрагивались, а значит, сохраняют степень k. Очевидно, что и на этом шаге они не будут затронуты и вновь сохранят свою степень. Применим к графу T_m последовательно k операций (K_3, k)-расширения на вершинах $\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,3\ell-3}\}, \ldots, \{v_{k,1}, \ldots, v_{k,3\ell-3}\}$, соответственно. Полученный в результате этих операций граф обозначим H_{m+1}.

Лемма 3. *Граф H_m — минимальный и минимальный по стягиванию k-связный граф.*

Доказательство. Заметим, что доказательство этой леммы легко получить аналогично случаю нечетного k. Отличие появится только при рассмотрении графов H_1 и H_2. Смысл отличия в конструкции в том, что при четном k все вершины H_1 будут иметь степень k и количество присоединений на втором шаге увеличено именно для того, чтобы все вершины из всех копий H_1 после второго шага имели степень выше k. Эти изменения в конструкции несущественно влияют на доказательство k-связности, минимальности и минимальности по стягиванию. $\square$

Теорема 4. *Предположим, что $k = 2\ell$. Тогда при $m \geq 2$ в графе H_{m+1} доля вершин степени выше k среди всех вершин по крайней мере $\frac{9\ell^3-18\ell^2+17\ell-12}{18\ell^3-42\ell+26}$.*

Доказательство. Очевидно, $|V_k(H_2)| = (3\ell+3)(3\ell-3)$ и $|V_{>k}(H_2)| = (3\ell-3)^2$. Заметим, что на m-том шаге количества вершин степени k и степени выше k меняются следующим образом:

$$|V_k(H_{m+1})| = (3\ell-3)|V_k(H_m)| + 3k$$

и $|V_{>k}(H_{m+1})| = (3\ell-3)|V_{>k}(H_m)|$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|V_k(H_{m+1})| = 3k((3\ell-3)^{m-2} + \cdots + 1) + (3\ell+3)(3\ell-3)^m = \\ = 3k\frac{(3\ell-3)^{m-1}-1}{3\ell-4} + (3\ell+3)(3\ell-3)^m\end{aligned}$$

и $|V_{>k}(H_{m+1})| = (3\ell-3)^{m+1}$. Таким образом,

$$\frac{|V_{>k}(H_m)|}{|H_m|} = \frac{(3\ell-3)^m}{3k\frac{(3\ell-3)^{m-2}-1}{3\ell-4} + (3\ell+3)(3\ell-3)^{m-1} + (3\ell-3)^m} >$$

$$> \frac{(3\ell-3)^2(3\ell-4)}{6\ell + (3\ell+3)(3\ell-3)(3\ell-4) + (3\ell-3)^2(3\ell-4)} = \frac{(3\ell-3)^2(3\ell-4)}{6\ell((3\ell-3)(3\ell-4)+1)} =$$

$$= \frac{9\ell^3-18\ell^2+17\ell-12}{18\ell^3-42\ell+26}.$$

$\square$

Следствие 3. *Предположим, что $k > 6$ — четное число и $k = 2\ell$. Тогда для минимального и минимального по стягиванию k-связного графа $c_k < 1 - \frac{9\ell^3-18\ell^2+17\ell-12}{18\ell^3-42\ell+26} = \frac{9\ell^3+18\ell^2-59\ell+14}{18\ell^3-42\ell+26}$.*

Следствие 4. *Для $k = 6, 7, 8, 9, 10$ выполнено $c'_6 < \frac{21}{31}$, $c'_7 < \frac{31}{45}$, $c'_8 < \frac{46}{73}$, $c'_9 < \frac{9}{14}$ и $c'_{10} < \frac{401}{665}$.*

Доказательство. Заметим, что это утверждение легко получить из следствий 2 и 3. $\square$

Список литературы

[1] K. Ando, A. Kaneko, K. Kawarabayashi *Vertices of Degree 5 in a Contraction Critically 5-connected Graphs*, Graphs Combin 21 (2005), p. 27–37.

[2] K. Ando, A. Kaneko, K. Kawarabayashi, *Vertices of degree 6 in a contraction critically 6-connected graphs*, Discrete Mathematics 273 (2003) p. 55–69.

[3] R. Halin, *A theorem on n-connected graphs,* J. Comb. Theory 7 (1969), p. 150–154.

[4] R. Halin, *On the structure of* n*-connected graphs* In: Recent Progress in Combinatorics (ed: W. T. Tutte), Academic Press, London – New York, 1969, p. 91-102.

[5] F. Go"ring, *Short proof of Menger's theorem,* Discrete Math. 219 (2000), no. 1-3, p 295–296.

[6] M. Li, X. Yuan, J. Su, *The number of vertices of degree 7 in a contraction-critical 7-connected graph*, Discrete Mathematics 308 (2008) p 6262–6268.

[7] W. Mader, *Zur Struktur minimal n-fach zusammenhËangender Graphen,* (German) Abh. Math. Sem. Univ. (Hamburg) 49 (1979), p. 49—69.

[8] K. Menger, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fund. Math. 10 (1927), p. 96–115.

[9] W. T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* Indag. Math. 1961, vol. 23, p. 441-455.