ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 4/2011

АВТОМОРФИЗМ ПАСКАЛЯ ИМЕЕТ ЧИСТО НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

Памяти В. И. Арнольда — нарушителя спокойствия

А. М. Вершик
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191013, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
Email: vershik@pdmi.ras.ru

Abstract

В статье доказывается непрерывность спектра автоморфизма Паскаля — естественного преобразования пространства путей графа Паскаля, (= бесконечного треугольника Паскаля). Если реализовать этот автоморфизм в виде сдвига в пространстве последовательностей нулей и единиц, что делается ниже, то возникнет стационарная мера, названная мерой Паскаля, свойства которой мы изучаем. В частности, множество почтипериодических последовательностей имеют по ней меру нуль, из чего в конечном итоге и следует непрерывность спектра соответствующего оператора.

Преобразования, порожденные классическими градуированными графами такими, как обычный и многомерные графы Паскаля, граф Юнга, граф блужданий в камерах Вейля и др., доставляют примеры комбинаторного происхождения нового, очень интересного класса адических пребразований веденных еще в [1]; к ним приводят и некоторые рассмотрения В. И. Арнольда. Мы обсуждаем возникающие здесь задачи.

Partially supported by RFBR 08-01-00379-a

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

“У тех математиков, которые остаются только математиками, ум здравый, но лишь в том случае, если им все растолковать через определения и правила; иначе они глупы и несносны, потому что рассуждают здраво только, когда имеют перед собой ясные правила”

Блез Паскаль. “Мысли. Серия XXII.” (Пер. Ю. Гинзбурга)

ПОСВЯЩЕНИЕ. Дима Арнольд очень любил Б. Паскаля (как и я), а Р.Декарта он не любил, считая его провозвестником ненавидимого им бурбакизма. Я же в юности к Бурбаки относился с пиэтетом, ценил его 5-й том, и даже как-то написал ему (Н. Бурбаки) большое панегирическое письмо, что Дима не одобрил. В ответ Н. Бурбаки (в воплощении Ж. Дьедонне) прислал в подарок только что вышедший очередной 6-й том “Интегрирование”, — на тему весьма близкую мне, но оказавшийся очень неудачным. Я расстроился и стал думать, что, наверно, в чем-то Арнольд прав.

Проявившийся в последние годы жизни В.И.Арнольда острый интерес к комбинаторике и асимптотикам, сблизивший нас еще больше, был, как я думаю, еще и проявлением того, что всякие рамки, запреты были противны его разуму, он постоянно уходил от канонов, а лучше сказать, вводил новые, и это удавалось ему, поскольку он был (по Паскалю) не только математиком.

Содержание

1 Введение: определение адического автоморфизма Паскаля

1.1 Линейный порядок и другие структуры на множестве вершин куба.

Определение автоморфизма Паскаля, как одного из примеров адических преобразований, было сформулировано в [1, 2], тогда же была поставлена задача о вычислении его спектра. Его определение основывается на введении лексико-графического (линейного) упорядочения пространства путей конечного или бесконечного графа Паскаля[1]. В свою очередь определение лексико-графического порядка сводится к введению естественного линейного порядка на множестве всех подмножеств данной мощности множества из n элементов, или, на геометрическом языке, к определению линейного порядка на множестве вершин n-мерного координатного куба с данным количеством нулевых координат. Мы начнем с нескольких вариантов определения этого порядка.

1. Пусть $I_n = \{0,1\}^n$ -множество вершин единичного n-мерного куба. Рассмотрим гиперплоскоскости, содержащие вершины с суммой координат $m, m = 0, 1, \dots n$. и обозначим $C_{m,n-m}$ множестов вершин на $m-$ой гиперплоскости; у этих вершин m координат равны 0 и $n - m$ равны 1. Определим по индукции линейный порядок на всех $C_{n,m}$. При $n = 2$ порядок на одноточечных множествах $C_{2,0}, C_{0,2}$ трвиален, а на $C_{1,1}$ порядок таков $(0,1) \succ (1,0)$. Пусть порядок задан на $C_{k,n-k}$ при всех $k = 0, 1 \dots n$, тогда на $C_{m,n+1-m}$ для пар вершин с одинаковой последней координатой — такой же, как на паре вершин из $C_{m,n-m}$, получающихся отбрасыванием последней координаты; если же последняя координата у пар вершин из $C_{m,n+1-m}$ различна, то больше та, у которой эта координата равна 1.

2. То же самое но несколько в других терминах выглядит так. Удобно обозначить $k = n - m$. Рассмотрим семейство $C(m, k)$ всех C^m_{m+k} подмножеств мощности k линейно упорядоченного множества из $m + k$ элементов $\{\mathbf{1,2,\dots k,\ k{+}1,\ \dots k{+}m}\}$ и введем на этом семействе линейный лексико-графическом порядок: подмножество F больше подмножества G, если максимальный номер элемента из подмножества F, не входящий в подмножество G больше, чем максимальный номер элемента из подмножества G, не входящий в подмножество F. Минимальное в смысле этого порядка подмножество имеет характеристическую функцию $(1, 1, ...(k), 1, 0, ..., 0)$, а максимальное — $(0, 0, ...(m), 0, 1, 1..., 1)$. Таким образом, мы линейно упорядочили все точки множеств $C(m + k, m)$.

3. Наконец, "числовая" интерпретация этого порядка состоит в следующем: рас-

[1] Более распространен термин "треугольник Паскаля", но он, правда, относится в основном к конечному объекту, и в вершинах такого графа ставят биномиальные коэффициенты. Поэтому называть бесконечный граф Паскаля треугольником не вполне естественно. Но есть возражения и против термина "треугольник Паскаля": прежде всего потому, что его открытие приписывают также индийцу Пингала (10 век), персу Омару Хайяму (12 век) и китайцу Хуэю (13 век). С другой стороны при вызове в Гугле слов "граф Паскаля" появляется прежде всего Граф Л. Н. Толстой, который тоже очень любил Паскаля, а также тема графических режимов в машинном языке "Паскаль".

смотрим точки конечномерного куба, координаты куба упорядочены) как целые числа в двоичном разложении. Возьмем два таких числа, у которых, одинаковое число единиц (и нулей) в этом разложении. Тогда это самый обычный порядок $<$ на множестве натуральных числах по величине. Совпадение наших трех независимых определений порядка легко проверить.

Поскольку пути в конечном треугольнике Паскаля высоты n можно отождествить с последовательностью нулей и единиц, то мы фактически линейно упорядочили каждое из множеств путей, ведущих в какую-либо конечную вершину треугольника.

2 Бесконечномерный куб и автоморфизм Паскаля

Рассмотрим теперь множеству вершин бесконечномерного единичного куба, т.е. счетное произведение двоеточий: $I^\infty = \{0;1\}^\infty$, мы будем его коротко назвать бесконечномерным кубом. Число важных математических структур на этом замечательном объекте, их полезных интерпретаций и самых разных их применений— огромно.

Прежде всего мы рассматриваем бесконечномерный куб, как компактную аддитивную группу целых диадических чисел $\mathbf{Z}_2$, Мы реализуем ее, как группу последовательностей вычетов по модулям 2^n, и используем аддитивную запись. В нашей интерпретации целое диадическое число есть тоже бесконечная односторонняя последовательность нулей и единиц. Слабая топология на I^∞ порождает структуру стандартного измеримого пространство; мера Бернулли μ, есть бесконечное произведение мер на сомножителях $\{0,1\}$ с вероятностями $(1/2, 1/2)$. Она является одновременно и мерой Хаара на кубе, как на группе $\mathbf{Z}_2$. Можно также рассмотреть и другие бернуллиевские меры μ_p — произведения мер $(p, 1-p), 0 < p < 1$, они уже не инвариантны (а лишь квазиинвариантны) относительно сложения (но будут инвариантны относительно автоморфизма Паскаля). Бесконечномерный куб естественно отождествляются с пространством бесконечных путей графа Паскаля, (нуль есть выбор левого, а единица -правого направления пути)— и оно-то и будет фазовым пространством для автоморфизма Паскаля, определяемого ниже. Все эти интерпретации идентичны и мера одна и та же; выбор удобной реализации - дело вкуса. Нам по большей части удобнее говорить о бесконечномерном кубе; топология пространства для нас не имеет особого значения.

Удобно записывать целые диадические числа в форме

$$0...(m_1)...01...(k_1)...1**=0^{m_1}1^{k_1}**.$$

Преобразование сдвига на единицу T в аддитивной группе $\mathbf{Z}_2$, т.е. преобразование $Tx = x+1$, разумеется, сохраняет меру Хаара-Бернулли, его называют в теории динамических систем *одометром или диадическим автоморфизмом*, оно является самым простым эргодическим автоморфзимом; его спектр (=множество собственных чисел) есть группа всех корней из единицы степеней $2^n, n = 1\dots$ Орбиты одометра есть классы смежности по (всюду плотной) подгруппе $\mathbb{Z} \subset \mathbf{Z}_2$. Общая адическая модель преобразований, сохраняющих меру есть далекое обобщение одометра ([1, 2]).

Рассмотрим 2-адическую метрику ρ на аддитивной группе $\mathbf{Z}_2$ целых 2-адических чисел; она индуцирует слабую топология на I^∞. Метрика ρ выглядит так: $\rho(x,y) = \|x-$

$x'\|$ где $\|g\| = 2^{-t(g)}$ есть *каноническое нормирование*, здесь $t(g)$ - есть номер первой ненулевой координаты элемента g. Метрика ρ, очевидно, инвариантна относительно одометра, но, как мы увидим, не относительно автоморфизма Паскаля.

Введем теперь упорядочение на $\mathbf{Z}_2 \sim I^\infty = \{0;1\}^\infty$ следующим образом: назовем пару вершин (точек) бесконечномерного куба сравнимыми, если у них совпадают все координаты, начиная с некоторого места ("одинаковый хвост"), а число единиц до этого места у обеих последовательностей одинаково. Их двух сравнимых вершин больше по определнию та, у которой начальный конечный отрезок больше в смысле определения, данного выше. Это и есть нужный лексикографический порядок на бесконечномерном кубе; обозначим его $\prec$. Легко пересказать все вышеприведенные описания порядка на конечномерном кубе для бесконечномерного куба

Но, каждая вершина бесконечномерного куба может рассматриваться как бесконечный путь на графа Паскаля. Сравнимыми в этом порядке оказываются пути с одинаковым "хвостом", т.е. с равными координатами, начиная с некоторого места. Тем самым введен линейный порядок на множестве путей графа Паскаля.

Тип упорядочения на классе сравнимых путей есть тип бесконечной в одну ($\mathbb{N}$) или обе ($\mathbb{Z}$) стороны цепи:. бесконечным влево этот тип оказывается. если у соответствующей вершины куба лишь конечное число нулей, и бесконечным вправо, если конечно число единиц. Для всех остальных точек (путей) упорядочение имеет тип $\mathbb{Z}$; они составляют полную меру по мере Бернулли. Можно сказать, что мы переопределили порядок на классах смежности по подгруппе $\mathbb{Z}$, при этом почти каждый класс смежности распался на счетное число линейно упорядоченных подмножеств.

Определение 1. *Автоморфизм Паскаля ([2]) определяется, как отображение P, бесконечномерного куба (в любой его интерпретации) в себя, переводящее точку в непосредственно следующую в смысле введенного выше порядка $\prec$.*

Для всех точек, за исключение счетного числа, следующая точка существует, и все точки за исключение счетного числа имеют и предыдущую точку, поэтому автоморфизм Паскаля и обратный к нему определены всюду за исключением счетного числа точек (а точнее, за исключением группы $\mathbb{Z}$, как подгруппы группы $\mathbf{Z}_2$. Легко понять, что преобразование P измеримо и даже непрерывно в слабой топологии всюду, кроме указанных исключений.

3 Автоморфизм Паскаля, как результат замены времени в одометре и случайные подстановки на группе $\mathbb{Z}$

.

Теперь мы можем перейти к более детальному рассмотрению адического автоморфизма Паскаля. Покажем, что автоморфизм Паскаля сохраняет меру. Действительно переход к следующей точке есть подстановка конечного числа координат, поэтому сохранение меры следует из того, что мера Бернулии с одинаковыми сомножителями инвариантна относительно действия бесконечной симметрической группе, действующей подстановками координат. Из предыдущего ясно, что каждая орбита автоморфизма Паскаля принадлежит одной орбите одометра, а именно тому же классе смежности по $\mathbb{Z}$. Поэтому элемент $x - Px$ в группе диадических чисел лежит в подрупппе $\mathbb{Z} \subset \mathbf{Z}_2$, и, следовательно, автоморфизм Паскаля можно представлять себе, как результат замены времени в одометре.

Если с помощью двоичных разложений отождествить с точностью до множества меры нуль группу $\mathbf{Z}_2$ с единичным отрезком, то автоморфизм Паскаля перейдет в пробразование отрезка, принадлежащее к классу, так называемых, счетных рациональных перекладываний.

Ниже будут даны явные формулы, показывающие, какую замену времени надо сделать в одометре, чтобы получить автоморфизм Паскаля. Как мы увидим, автормор-физм Паскаля, переупорядочивает точки на классах смежности по подгруппе $\mathbb{Z}$ (т .е. на траекториях одометра) весьма сложным образом.

То, что делается далее аналогично тому, что проделано в работе [7] в более простом по сравнению с автоморфизмом Паскаля случае, а именно там проведено детальное сравнению обычного порядка с *морсовским порядком*, возникающим из анализа автоморфизма Морса.

Из определения автоморфизма Паскаля легко вывести, что он задается следующей формулой:

$$x \mapsto Px; \quad P(0^m 1^k \mathbf{10} **) = 1^k 0^m \mathbf{01} **, \quad m, k = 0, 1 \dots .$$

Автоморфизм P^{-1} удобно записать в аналогичной форме

$$P^{-1}(1^k 0^m \mathbf{01} **) = 0^m 1^k \mathbf{10} ** \quad m, k = 0, 1 \dots .$$

Переход от P к P^{-1} меняет ролями m и k т.е 0 и 1. Автоморфизм P и обратный к нему P^{-1} определены для всех x с бесконечным числом нулей и единиц, т.е. на множестве $\mathbf{Z}_2 \setminus \mathbb{Z}$. С другой стороны, поскольку $P(x)$ лежит в том же классе смежности, что и x, можно спросить, чему равна разность $P(x) = x$. Подытожим ответ в лемме:

Лемма 1. *Автоморфзим Паскаля задается формулами:*

$$P(0^m 1^k 10 **) = 1^k 0^{m+1} 1 **, \quad m, k \geq 0,$$

или в числовом представлении:

$$P(2^{m+k} - 2^m + r) = 2^{m+k+1} + 2^k - 1 + r, \quad m, k \geq 0, r \in Ker(\theta_{m+k+1}),$$

здесь гомоморфизм θ_n определен формулой $\theta_n : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2 / Z_{2^n}$, и его ядро состоит и последовательностей с нулями на первых n местах.

Соответственно формула для замены переменной при переходе от одометра T к автоморфизму Паскаля P такова:

$$Px = T^{n(x)} x \equiv x + n(x),$$

где

$$n(x) = P(x) - x = 1^{min(k,m)}0^{|m-k|}10^{\infty}$$

или

$$n(x) = 2^m + 2^k - 1.$$

Этим автоморфизм Паскаля задан для любого элемента $x \in \mathbf{Z}_2$, в разложении которого есть фрагмент 10, т.е. задан для любого целого диадического число, отличного от чисел вида $0^m 1^{\infty}, m \geq 0$ (целых отрицаткльных). Приведенные формулы для $n(x)$ легко проверяются для каждого из случаев: $m > k$ и $m \leq k$.

Определим теперь функции $n_k(x) : P^k x = T^{n_k(x)} x = n_k(x) + x$, для всех натуральных $k = 0, 1, 2 \ldots$:

$$n_0(x) = 0, \quad n_1(x) = n(x), \quad n_k(x) = P^k x - x, \quad \ldots,$$

— формула для $n_k(x)$ следует из определения:

Лемма 2.

$$n_{k+1} = n_1(n_k(x) + x) + n_k(x).$$

Proof. $P^{k+1}x \equiv T^{n_{k+1}(x)}x = n_{k+1}(x) + x$.

Но

$$P^{k+1}x = P(P^k)x = T^{n_1(P^k x)} P^k x,$$

поэтому

$$P^{k+1}x = T^{n_1(P^k x) + n_k(x)} x$$

т.е. $x + n_{k+1}(x) = n_1(P^k x) + n_k(x) + x = n_1(x + n_k(x)) + n_k(x) + x$

□

Таким образом,

$$P^k x = n_1(n_{k-1}(x) + x) + n_{k-1}(x) = \cdots = x + n_1(x) + n_1(n_1(x) + x) + ... + n_1(n_{k-1}(x) + x).$$

Заметим, что формулы, выражающие функции $n_k(x), k > 1$ через функцию $n_1(x) = n(x)$ имеют, конечно, универсальный характер — они верны для замены времени в произвольном автоморфизме. Мы будем использовать только функцию $n(.) = n_1(.)$.

Особая орбита $\mathbb{Z} \subset \mathbf{Z}_2$ одометра под действием автоморфизма Паскаля распадается на счетное число огранченных орбит, с конечным числом единиц или нулей: а именно любое целое положительное число $x \in \mathbb{N}$ принадлежит полубесконечной орбите с концевой точкой – числом $2^s - 1$, где s – число единиц в двоичном разложении x, а любое отрицательное целое число принадлежит полубесконечной орбите с начальной точкой – числом $-2^s + 1$. Все остальные орбиты P как линейно упорядоченные множества имеют порядковый тип $\mathbb{Z}$.

В связи с формулой для Px возникает важный вопрос, упомянутый ранее: как преобразуются классы смежности по подгруппе $\mathbb{Z}$, т.е. орбиты одометра, под действием автоморфизма Паскаля? Иначе говоря, как описать подстановку $k \mapsto n(x+k)$, как подстановку в группе $\mathbb{Z}$:

$$\sigma_x : t \mapsto n(x+t), \quad t \in \mathbb{Z}?$$

Таким образом, автоморфизм Паскаля задает случайную (параметр случайности – $x \in \mathbf{Z}_2$) бесконечную подстановку σ_x, отображающую $\mathbb{Z}$ (просто как счетное множество) на себя и имеющая бесконечное число бесконечных циклов. Тем самым, определена мера на группе $S^{\mathbb{Z}}$ всех бесконечных подстановок $\mathbb{Z}$, которая есть образ меры Бернулли при соответствии $\mathbf{Z}_2 \ni x \mapsto \sigma_x \in S^{\infty}$. Эта мера существенно отличается от той меры, которая возникает при аналогичном анализе преобразования Морса [7] (там подстановки -одноцикловые); анализ этой меры представляет интерес по разным причинам.

Общий принцип, состоит в том, что всякая замена времени в некоторой динамической системе с инвариантной мерой определяет меру на группе бесконечных подстановок группы (времени), и свойства этой меры позволяют делать заключение о новой системе. Именно в этом смысле мы исползовали формулировку, о том, что действие группы с инвариантной мерой может рассматриваться, как действие случайной подстановки на этой группе. Но для этого надо выбрать *reference action* - отправное действие, в котором производится замена и которое упорядочивает траектории; тогда случайная подстановка соотносится со сдвигом на группе. В нашем случае это есть действие одометра.

4 Стационарная модель автоморфизма Паскаля и мера Паскаля.

Представим теперь действие автоморфирма Паскаля в более традиционных терминах, в виде сдвига в пространстве двусторонних последовательностей нулей и единиц (т.е. опять бесконечномерного куба), снабженном некоторой мерой, инвариантной относительно сдвига. Именно это представление будет использоваться в основной теореме.

Следующая теорема задает стационарную модель автоморфизма Паскаля.

Теорема 1. *Определим для каждого $x \in \boldsymbol{Z}_2$ последовательность из нулей и единиц $y_n(x)$ следующим образом*

$$y_n = (P^n x)_1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

здесь $(.)_1$ означает первый разряд диадического числа, стоящего в скобках т.е. 0 или 1. Тем самым, задано отображение

$$S : \prod_1^{\infty}\{0;1\} \equiv \boldsymbol{Z}_2 \to Y = \mathbf{2}^{\mathbb{Z}} = \prod_{-\infty}^{\infty}\{0;1\} :$$

$$\boldsymbol{Z}_2 \ni x \mapsto y \equiv \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : y_n(x) = (P^n x)_1, n \in \mathbb{Z}$$

Отображение S переводит меру Бернулли ν на бесконечномерном кубе в некоторую меру $S_*\nu \equiv \pi$ на другом (двусторонне бесконечномерном) кубе — $Y = \prod_{-\infty}^{\infty}\{0;1\}$, *которую мы назовем мерой Паскаля. Таким образом S осуществляет изоморфизм пространств с мерой, переводящий автоморфизм Паскаля P пространства $\mathbf{Z}_2$, в двусторонний сдвиг в пространстве $Y = 2^{\mathbb{Z}}$ со стационарной мерой $\pi = S_*\nu$).*

В терминах путей в графе Паскаля приведенное отображение есть сопоставление пути, как последовательность вершин графа Паскаля, последовательность изменений первого отрезка в процессе адической эволюции пути.

Лемма 3. *Разбиение пространства $\mathbf{Z}_2$ на два множества по значениям первой координаты есть (односторонняя) образующая автомофизма Паскаля. Иначе говоря: почти всякая точка однозначно восстанавливается по значениям последовательности первых координат ее образов под действием положительный степеней автоморфизма Паскаля:*

$$x \leftrightarrow \{(P^n x)_1\}_{n\in\mathbb{N}}$$

есть биекция для почти всех $x \in \mathbf{Z}_2$. Другими словами, отображение S есть изоморфизм пространства $\mathbf{Z}_2$ на образ $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ при отображении S.

Proof. Легко видеть из формул, что два несовпадающих элемента группы $\mathbf{Z}_2$, отличающиеся разрядом с минимальным номером n порождают последовательности первых координат $(P^k x)_1$, которые будут различаться хотя бы один раз в разрядах с номерами меньшими 2^n. □

Замечание. 1. Для одометра то же разбиение по первой координате, очевидно, не является образующим.

2. Множество, на котором сосредоточена мера Паскаля представляет большой интерес (см. таблицу). В работе [11], (см. также [6]) доказано, что число цилиндров в образе ("сложность" автоморфизма Паскаля), т.е число слов длины n равно асимптотчески $n^3/6$.

Для изучения автоморфизма Паскаля удобно кодировать целые диадические числа -элементы $\mathbf{Z}_2$ не столько двоичными последовательностями нулей и единиц, как выше, сколько с помощью последовательностей пар натуральных чисел $(m_i(x), k_i(x))$, которые определяются следующим образом:

$$x = (0^{m_1(x)}1^{k_1(x)}\mathbf{10}0^{m_2(x)}1^{k_2(x)}\mathbf{10}0^{m_3(x)}1^{k_3(x)}\dots)$$

Числа $m_i(x), k_i(x)$ определяют длины слов из нулей $(m_i(x))$ и единиц $(k_i(x))$, стоящие между двумя последовательными ($(i-1)$-м и i-м) вхождениями слова **10** в двоичном разложении числа x. Разумеется, обычные координаты тривиально восстанавливаются по последовательности пар $(m_i(x), k_i(x))$; эти координаты будем временно называть *парными.*

Очевидно, что векторы $(m_i(x), k_i(x))$ образуют последовательность (по i) независимых одинаково распределенных случайных векторов (как функции от x), а распределение каждой пары таково:

$$Pr\{m_i = m, k_i = k\} = 2^{-(m+k-2)}, \quad m, k = 0, 1, 2 \dots .$$

Определенное выше отображение $S : \mathbf{Z}_2 \to Y = \prod_{-\infty}^{\infty}\{0;1\}$ можно представить в более конкретной форме. Это приводит к понятию *опорных слов*.

Предположим, что первая парная координата элемента $x \in \mathbf{Z}_2$ равна $m_1(x) = m \geq 0, k_1(x) = k \geq 0$, т.е. начальный отрезок

$$x = 0^m 1^k 01 **.$$

Рассмотрим элементы $x, Px, P^2x \dots P^s x, \quad s = C^m_{m+k+1}$ и выпишем первые координаты этих элементов. Мы получим слово длины s, которое по определению и будет началом S-образа элемента x. Не посредственно проверяется следюущее индукционное правило изменения парных координат.

Лемма 4. *Если $k > 0$, то первая парная координата элемента Px такова $m_1(Px) = 0$ и $(Sx)_1 = S(Px)_1 = S(x)_2 = \dots = S(P^{k-1}x_1 = S(x)_{k-1} = 1$;*

Если $m > 0$, то $m_1(P^s x) = m + 1$;

Если при этом и $m_2(x) > 0$, то $k_1(P^s x) = k$, а если $m_2(x) = 0$, то $k_1(P^s x) = k + k_2 - 1$.

Опорным словом $O_{m,k}$ мы и назовем слово длины s, состоящее из первых координат элементов $x, Px, \dots P^s x$. Следствие

Следствие 1. *Почти любая последовательность по мере Паскаля π содержит произвольно длинную серию единиц.*

Действительно, в почти любом элементе $x\mathbf{Z}_2$ бесконечное число раз встречаются парные координаты $m_i(x), k_i(x)$ с произвольно большими значениями и по первому свойству леммы число последовательных единиц в образе будет равно $k_i(x) - 1$.

Другие два утверждения леммы позволяют последовательно строить координаты образа Sx как элемента $Y = \prod_{-\infty}^{\infty}\{0;1\}$. Образ Sx есть конкатенация случайных опорных слов определяемых последовательностью независимых парных координат $(m_i(x), k_i(x))$. Построение очередного опорного слова опредляется правилами, высказанными в лемме. Длины опорных слов растут экспоненциально вместе с ростом m и k, и изучение статистики меры Паскаля сводится к изучению послдовательности опорных слов. Любопытно, что координата меняется детерминированна $m \mapsto m + 1$, а координата k растет случайно со средним 1. Статистика слов может изучаться по асимптотическим свойствам растущих опорных слов, каждое из которых детерминировано, но их выбор случаен.

Замечание. Выше мы говорили о координатах Sx с положительными номерами. Для того, чтобы выяснить структуру координат с отрицательными номерами, надо в соответствии с замечанием выше рассмотреть то же элемент x точно таким же образом, но определив парные координаты, поменяв предварительно 0 и 1. С другой стороны нетрудно, доказать, что координаты с отрицатеьными номерами однозначно определяются по положительным для почти всех точек по мере Паскаля.

Приведем пример динамики автоморфизма Паскаля и укажем соответствующее опорное слово.

Рассмотрим пример фрагмента траектории автоморфзима Паскаля:

$$m_1 = 3, k_1 = 3, x = 00011\mathbf{110},$$

Длина фрагмента равна $C^{k_1}_{m_1+k_1+1}+1 = C^3_7 = 35+1 = 36$: $x --> P(x) = 11100001 -->$ $P^2(x) --> \cdots --> P^{35} = 00001111$. (напомним, что следить нужно за первым появлением слова **10** и затем применять алгоритм. Мы расположили цепочку из 36 последовательных образов точки x в таблицу 6×6.

00011110	11100001	11010001	10110001	01110001	11001001
10101001	01101001	10011001	01011001	00111001	11000101
10100101	01100101	10011001	01010101	00110101	10001101
01001101	00101101	00011101	11000011	10100011	10001101
10010011	01010011	00011101	10001011	01001011	00101011
00011011	10000111	01000111	00100111	00010111	00001111

Последовательность первых знаков приведенного отрезка траектории, т.е. опорное слово O(3,3) таково:

(1,1,1,0,1,1,0,1,0,0,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0).

Следующие данные дают представление о распределении вероятностей по мере Паскаля цилиндров длин от 6 до 10. [2]

Длина слова	Число групп	Число элементов по группам	Мера групп
6	3	5	0,312484741
		12	0,374969482
		20	0,312213898
7	4	2	0,124998093
		14	0,437492371
		16	0,249990463
		24	0,187408447
8	5	1	0,062498093
		12	0,374994278
		19	0,296865463
		20	0,156238556
		28	0,109274864
9	5	10	0,312494278
		22	0,343740463
		24	0,187488556
		24	0,093736649
		32	0,062393188
10	6	8	0,249994278
		21	0,328117371
		28	0,218738556
		29	0,113267899
		28	0,054672241
		36	0,03504467

[2]Эти вычисления проделали по моей просьбе аспиранты И. Манаев и А. Минабутдинов.

Обращает на себя внимание разделение цилиндров на несколько групп, в внутри которых вероятности цилиндров равны. Это упрощает получение нижних оценок роста масштабированной энтропии, из чего и должно последовать доказательство непрерывности спектра автоморфизма Паскаля по первоначальному сценарию ([4]), приведенному ниже.

4.1 Критерии непрерывности спектра автоморфизма и основная теорема.

Основной результат этой работы — доказательство того, что спектр автоморфизма Паскаля является чисто непрерывным, точнее, что в ортогональном дополнении к константам в пространстве $L^2(I^\infty, \mu)$, спектр унитарного оператора U_P, ассоциированного с автоморфизмом Паскаля по формуле $U_P f(x) = f(Px)$ - непрерывен. Эта задача вместе с определением автоморфизма Паскаля была поставлена автором в 1980 году [4], и рассматривалась позже в серии работ [9, 11, 13, 12, 14] и др, где были изучены различные полезные свойства автоморфзима Паскаля, однако задача до сих пор не была решена. Оказалось, что ее решение совсем несложно.

Первоначальный план решения этой задачи был связан с масштабированной энтропией, усреднением метрик и др. (см.[4, 6]). Предлагавшийся способ доказательства непрерывности спектра (см. [4]) был основан на том, что, условие читой непрерывности спектра равеносильно тому, что усреднение любой полуметрики вдоль траектории есть тривиальная (постоянная) метрика. т.е., что

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{s=0}^{n-1} \rho(P^s x, P^s x') = const$$

для почти по мере $\mu \times \mu$ всех пар x, x'.

В частности, в работе [4] доказана следующая теорема. Для того, чтобы спектр унитарного оператора U_T в $L^2(X, \mu)$, отвечающего автоморфизму T пространства Лебега (X, μ) был в ортогональном дополнении к константам чисто непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы для любой допустимой полуметрики, у которой предельное усреднение допустимо, масштабирующая последовательность энтропии была бы ограниченной.

Оговорка о предельной допустимости усреднения не нужна, потому что ее допустимость имеет место для любой начальной допустимой метрики, как показали Ф.Петров и П.Затицкий (см. [4]); первоначально допустимость предельной была доказана для класса компактных и ограниченных допустимых полуметрик. С другой стороны в [4] доказано, что постоянство усредненной полуметрики равносильно неограниченность масштабирующей последовательности для энтропии, т.е. тому .что ε-энтропия пространств, полученных последовательными усреднениями, стремится к б бесконечности. Для метрик Хэмминга близкий факт был ранне доказан в [10]. Поэтому можно было бы доказывать непрерывность спектра, ограничивая снизу рост энтропии допредельных усредненных метрик некоторой растущей последовательностью. Более того, это было бы достаточно сделать только для разрезных полуметрик, которые всегда фигурировали в эргодической теории не как метрики, а как образующие разбиения. Напомним, что *разрезной полуметрикой* называется полуметрика, определяемая конечным разбиением пространства с мерой на измеримые подмножества $\{A_i\}, i = 1 \dots k$ следующим образом:

$\rho(x,y) = \delta_i(x)i(y)$, где $i(x)$ -номер множества A_i, в котором лежит точка x.

Подводя итог, можно сформулировать следующий критерий непрерывности спектра автоморфзима.

Теорема 2. *Спектр оператора U_T в ортогональном дополнении к константам автоморфизма T непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

1. *Предел усреднений произвольной разрезной метрики ρ есть константа:*

$$\lim_n n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \rho(T^k x, T^k y) = const \quad a.e.$$

2. *Эпсилон-энтропия усреднений метрики неграниченно растет для произвольной начальной полуметрики.*

Подчеркнем, что разбиение, порождающее разрезную метрику в этой теореме отнюдь не предполагается образующим.

Заметим еще, что имеется связь приведенного утверждения о масштабированной энтропии с критерием дискретности спектра, данным Кушниренко в [5] с помошью A-энтропий.

Однако, использвать указанный путь доказательства непрерывности спектра пока не удалось из-за сложности оценок энтропии (см. замечание к таблицам выше), поэтому; мы используем здесь другие, более простые соображения, лишь отчасти связанные с упомянутыми.

Сначала напомним, что любой эргодический автоморфизм с чисто точечным (дискретным, как его называют в эргодической теории) спектром по известной теореме фон Неймана изоморфен сдвигу нанекоторый элемент компактной абелевой группе. С другой стороны, если реализовать этот автоморфизм, как сдвиг в пространстве ограниченных числовых последовательностей на группе $\mathbb{Z}$, то почти всякая реализация $\{x_n\}_n$, как элемент пространства $l^\infty(\mathbb{Z})$, есть линейная комбинацией характеров.

$$x_n = \sum_s c_s \exp\{i\lambda_s n\}, \quad \{c_s\}_s \in l^2; \quad n \in \mathbb{Z},$$

здесь λ_s - пробегает множество всех собственных значений оператора U_T.

Лемма 5. *Для того, чтобы сдвиг S в пространстве $A^{\mathbb{Z}}$ последовательностей в конечном алфавите $A = \{1, 2, \dots, l\}$ со стационарной (инвариантной относительно сдвига) мерой μ имел чисто точечный спектр, необходимо и достаточно, чтобы почти все реализации $\{x_n\} \in A^{\mathbb{Z}}$ являлись бы почти периодическими (по Безиковичу) функциями на $\mathbb{Z}$ со значениями в A.*

Это свойство позволяет дать простое достаточное условие чистой непрерывности спектра.

Теорема 3. *Предположим, что для некоторого образующего конечного измеримого разбиения $\xi = \{A_1, \dots A_l\}$ пространства (X, μ), в котором действует эргодический автоморфзим T, выполнено следующее условие: реализуем изоморфный образ автоморфизма T при изоморфизме V:*

$$V : X \ni x \mapsto \{i_n(x)\}_n : \quad \text{где} \quad T^n x \in A_{i_n(x)}, ---$$

как правый сдвиг в пространстве $l^\infty(\mathbb{Z}; l)$, последовательностей со значениями $\{1, 2 \dots l\}$? снабженном мерой $\nu \equiv V_* \mu$ — V-образом меры μ, и предположим, что существует такой символ (например 1), что все цилиндры $1^k, k = 1, 2 \dots$ имеютположительную меру (в очень частном случае -все цилиндры имеют положительную меру)

Тогда спектр оператора U_T в ортогональном дополнении к константам, непрерывен.

Proof. Прежде всего, из сделанного предположения вытекает, что почти все по мере ν реализации (т.е. элементы пространства $(l^\infty(\mathbb{Z}), \nu)$, не являются почти периодическими (по Безиковичу) последовательностями на $\mathbb{Z}$. Действительно, почти каждая реализация с единичной вероятностью пересекаются с цилиндрическими мнжествами, состоящими из произвольно длинного повторения выбранного символа, например символа 1 и поэтому должна быть константой. Тем самым, спектр не является чисто точечным,— у него есть непрерывная часть. Для того, чтобы доказать, что дискретной компоненты нет, надо проверить, что спектр ни в каком факторе не является чисто точечным. Проверим это для произвольоного фактор-автоморизмов автоморфирма T. Предположим, сначала, что фактор-автоморфизм порожден факторизацией по инвариантному разбиению пространства $(l^\infty(\mathbb{Z}), \nu)$, которое порождено конечным цилиндрическим разбиением, например порядка t. Это значит, что все слова длины, t разбиты на конечное число групп, которые образуют новый укрупненный алфавит. Тогда один из новых символов, например I будет содержаться постоянное слово 1^k, состоящее из повторения сивола 1. Но тогда слово в старом алфавите 1^{kt} будет и в новом выглядеть, как $I^{t(k-1)*}$, т.е I повторено $t(k-1)$-раз, и в силу произвольности k наш аргумент об отсутствии почти-периодичности из-за длинных отрезков постоянства, остается справедливым и для фактор-автоморфзима.

Для того,чтобы распространить этот вывод на фактор-автоморфизмы по произвольному конечному разбиению, мы используем другой аргумент. Прежде всего, любое конечное разбиение и, следовательно любую разрезную полуметрику ρ, можно сколь угодно точно аппроксимировать цилиндрическими разбиениеми, и соответственно цилиндрическими полуметриками ρ_ε — в топологии сходимости по мере:

$$(\mu \times \mu)\{(x, y) : |\rho(x, y) - \rho'(x, y)| > \varepsilon\} < \varepsilon.$$

Среднее расстояние между точками для всех полуметрик ρ_ε можно считать фиксированным и равным среднему расстоянию D по метрике ρ.

Рассмотрим усреднение этих неравенств и используем эргодическую теорему:

$$(\mu\times\mu)\{(x,y):\lim_n \sum_{k=0}^{n-1}|\rho(T^kx,T^ky)-\rho'(T^kx,T^ky)|>\varepsilon\}<\varepsilon(1-\varepsilon)+2D\varepsilon.$$

Поскольку предельное усреднение метрик ρ_ε есть постоянная метрика, равная для почти всех пар среднему расстоянию D, и поскольку ε - произвольно, то тогда усреднение и метрики ρ также есть постоянная метрика. Согласно упомянутому выше результату, это означает непрерывность спектра T. □

В основе доказаного факта об автоморфзиме Паскаля лежит отмеченное свойство опорных слов - существование в почти любой по мере Паскаля последовательности сколь угодно длинных серий единиц (или нулей). Любопытно, что заключение о непрерывности спектре сделано на существования множествэкспоненциально малой меры. Это и не удивительно, так как существование дискретного спектра крайне неустойчивое свойство.

Таким образом получаем

Теорема 4. 1. *Автоморфизм Паскаля имеет чисто непрерывный спектр.*

2. *Усреднение любой допустимой метрики ρ относительно автоморфизма Паскаля P, — есть константа:*

$$\rho_{av}(x,y)=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\|(n_k(x)-n_k(y)+x-y\|=const \quad a.e.$$

В частности, предельное усреднение диадической метрики на группе $\boldsymbol{Z}_2$ по мере Бернулли и метрики Хэминга на $(l^\infty(\mathbb{Z}),\nu)$ по мере Паскаля —есть постоянная метрика.

3. *Нормирующая последовательность для масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля неограниченно возрастает.*

Замечание. Доказательство не дает никакой оценки роста для нормирующей последовательности для масштабированной энтропии. Предположительно этот рост логарифмический (см. [4, 6]).

Проведенное рассуждение остается справедливым и для других мер Бернулли (вместо хааровской). Однако, естественно предположить, что автоморфизмы Паскаля для различных бернуллиевсих мер (μ_p) не изоморфны.

5 О спектре других адических автоморфзимов

По тому же плану можно доказать непрерывность спектра некоторых адических автоморфзимов. Опишем подробнее *автоморфзим Юнга*, полезный в теории представлений бесконечной симметрической группы.

Пространство, где действует автоморфзим Юнга есть пространство бесконечных стандартных таблиц Юнга (см. [8]), т.е. бесконечных путей в графе Юнга, например, мерой Планшереля. Порядок определяется на таблицах с заданной диаграммой также как и порядок в графе Паскаля -по индукции. Базой индукции служит порядок на диаграммах с тремя клетками: для двух стандартных таблиц с диаграммой $1^2 2$ таков: таблица

$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & \end{matrix}$$

больше, чем таблица

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & \end{matrix}$$

Пусть порядок уже определен на стандартных таблицах с $n-1$-ой клеткой. Тогда, если у двух стандартных таблиц с n клетками и одной и той же диаграммой последнее число n стоит в одной и той же клетке, то порядок определяется по диаграммам с $n-1$-ой клеткой, полученным отбрасыванием последней клетки. Если же число n стоит в разных клетках, то больше та таблица, где n стоит выше. Наибольшей является таблица упорядоченная по столбцам, а наименьшая — по строкам.

Определение 2. *Рассмотрим пространство $\mathcal{Y}$ всех таблиц Юнга (или путей в графе Юнга). Автоморфизмом Юнга называетя преобразование переводящее таблицу в следующую в смысле введенного порядка.*

Автоморфизм корректно определен для всех таблиц, кроме счетного числа. На пространстве таблиц естественно ввводится слабая топология и структура стандартного измеримого пространства. Борелевская мера называется центральной, если она инвариантна относительно произвольных замен любого начал таблицы или — эквивалентным образом—, инвариантна относительно автоморфзима Юнга. Наибольший интерес из центральных мер представляет мера Планшереля.

Лемма 6. *Снабдим пространтво бесконечных путей в графе Юнга, т.е пространство всех таблиц Юнга эргодической центральной мерой и разобьем его на два множества в зависимости от того, в какой строке — первой или второй строке стоит число 2. Это разбиение является двучленной образующей для автоморфизма Юнга.*

Следствие. Автоморфизм Юнга как преобразование пространства всех таблиц Юнга, снабженное эргодической центральной мерой может быть реализован как сдвиг в пространстве двусторонних бесконечных последовательностей нулей и единиц, с некоторой стационарной мерой.

Теорема 5. *Автоморфзим Юнга имеет непрерывный спектр относительно любой эргодической центральной меры.*

Доказательство теоремы в точности такое же как и для автоморфзима Паскаля и основано на том, что почти любая таблица содержит под действием автоморзима Юнга может иметь сколь угодно длинные периоды, когда число 2 стоит в первой (или во второй) строке. По существу используется лишь следующее свойство графа Паскаля, Юнга и др., а именно — эти графы являются диаграммами Хассе дистрибутивных решеток, т.е. решеток идеалов частично упорядоченных множеств с бесконечными цепями. Адические автоморфизмы соответствующие таким диаграммам принадлежит к новому интересному классу (адических) преобразований, занимающих промежуточное место между хаотическими системами с положительной энтропией и детерминированными системами типа подстановок Морса-Хедлунда.

References

[1] А.Вершик. Равномерная аппроксимация сдвига и мультипликатикаторов. ДАН СССР 259, N3, 526-529 (1981) English translation: Uniform algebraic approximations of shift and multiplication operators. Sov. Math. Dokl. 24, 97-100 (1981).

[2] А.Вершик. Теорема о периодической марковской апроксимации в эргодической теории. Зап. научн. сем. ЛОМИ 115, 72-82 (1982).English translation: A theorem on periodical Markov approximation in ergodic theory. J. Sov. Math. 28, 667-674 (1985). Another English translation in "Ergodic theory and related topics" (Vitte, 1981). Math. Res. 12, 195-206. Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[3] A.Vershik. Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants. Markov Processes and Related Fields 16, No. 1, 169-185 (2010).

[4] А.Вершик. Масштабированная энтропия и чисто точечный спектр Алгебра и Анализ. No.1 (2011)

[5] А.Кушниренко. Метрический инваринт энтропийного типа. Усп. мат.наук. N 5 (137) т.22, 57-65б (1967), English translation: Metric invariants of entropy type. *Uspekhi Mat. Nauk* **22** (1967), No.5 (137), 57–65.

[6] А.Лодкин,И.Манаев,А.Минабутдинов.Асимптотка масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля. Зап.нфучн. сем. ПОМИ, т.378. Теория представлений, динамические системы,комбинваторные методы. Вып 18.58-72, 2010.

[7] A.Vershik. Orbit theory, locally finite permutations and Morse arithmetic. In: Dynamical Numbers: Interplay between Dynamical Systems and Number Theory, Contemp. Math. 532, (2010), pp. 115–136. e

[8] А.Вершик, С.Керов. Локально полупростые алгебры. Комбинатроная теория и K-функтор. Итоги науки и техники Сер.Совр. Проблемы математики т.26, 3-56 вините 1985Ю English transl.Combinatorial theory and the K-functor . English translation: J. Sov. Math. 38, 1701-1733 (1987).

[9] Petersen K., Schmidt K., Symmetric Gibbs measures. *Trans. Amer. Math.* Soc. **349**:7 (1997), 2775Ц2811.

[10] Ferenczi S., Measure-theoretic complexity of ergodic systems. *Israel Math. J.* **100** (1997), 180Ц207.

[11] Mela X., Dynamical properties of the Pascal adic and related systems. PhD Thesis, *University of North Carolina at Chapel Hill*, (2002).

[12] Janvresse É., de la Rue T., The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli, *Ann. Inst. H. Poincaré (B), Probabilités et Statistiques*, **40**:3 (2004), 133Ц139.

[13] Mela X., Petersen K, Dynamical properties of the Pascal adic transformation, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **25** (2005), 227-256.

[14] Janvresse É., de la Rue T., Velenik Y., Self-Similar Corrections to the Ergodic Theorem for the Pascal-Adic Transformation, *Stochastics and Dynamics*, **5**:1,(2005), 1-25