ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 2/2011

Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях

А. В. Банкевич

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: bantoon@mail.ru

Д. В. Карпов[1]

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: dvk0@yandex.ru

Аннотация

В работе доказывается, что у связного графа, в котором s вершин степени, отличной от 2, существует остовное дерево, в котором не менее $\frac{1}{4}(s-2)+2$ висячих вершин.

Пусть G — связный граф обхвата не менее g, в котором длина наибольшей цепочки последовательно соединённых вершин степени 2 не превосходит $k \geq 1$. Доказывается, что у графа G существует остовное дерево, в котором не менее $\alpha_{g,k}(v(G)-k-2)+2$ висячих вершин, где $\alpha_{g,k}=\frac{[\frac{g+1}{2}]}{[\frac{g+1}{2}](k+3)+1}$ при $k<g-2$ и $\alpha_{g,k}=\frac{g-2}{(g-1)(k+2)}$ при $k \geq g-2$.

Приводятся бесконечные серии примеров, показывающих точность всех доказанных оценок.

[1]Авторы благодарят за поддержку исследований РФФИ, Программу фундаментальных исследований ОМН РАН и грант Президента РФ НШ-5282.2010.1.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение. Основные обозначения

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер — через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Везде в работе графы не содержат петель и кратных рёбер.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$. Окрестность множества вершин $W \subset V(G)$ (то есть, множество всех вершин графа G, смежных хотя бы с одной вершиной из W) обозначим через $\mathrm{N}_G(W)$. Через $g(G)$ обозначим *обхват* графа G (то есть, длину его наименьшего цикла).

Определение 1. Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.

Замечание. Если F — дерево, то нетрудно понять, что $u(F)$ — количество его висячих вершин.

Опубликовано несколько работ, в которых доказываются оценки снизу на $u(G)$. Так, в 1981 году Сторер [1] предположил, что $u(G) > \frac{1}{4}v(G)$ при $\delta(G) \geq 3$. В 1981 году Линиал высказал более сильную гипотезу: $u(G) \geq \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1} + c$ при $\delta(G) \geq 3$, где константа $c > 0$ зависит только от $\delta(G)$. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geq 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Таким образом, оценка из гипотезы Линиала асимптотически точна в тех случаях, когда она верна.

Для $d = 3$ утверждение гипотезы доказали Клейтман и Вест ([3], 1991), для $d = 4$ и $d = 5$ — Григгс и Ву ([4], 1996). В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин*. С развитием этого метода для $d \geq 6$ есть значительные проблемы, дальнейших результатов на настоящий момент нет. Из работ [5, 6, 7] следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым.

В ряде работ рассматриваются остовные деревья в классе графов с дополнительными ограничениями вида запрета на какой-то подграф. Больше всего работ посвящено изучению остовных деревьев в графах без K_4^- (полного подграфа на 4 вершинах без одного ребра). Сначала ([2], 1989) было доказано, что $u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ в связном кубическом графе без K_4^-. Позже Бонсма ([8], 2008) доказал две интересные оценки для связного графа с $\delta(G) \geq 3$:

$u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ для графа без треугольников (то есть, с $g(G) \geq 4$) и $u(G) \geq \frac{2v(G)+12}{7}$ для графа без K_4^-.

Эти результаты не дают ответа на вопрос, как оценить количество висячих вершин в связном графе с вершинами степеней 1 и 2. Недавно появились работы, в которых наличие вершин степени 1 и 2 в графе не мешает построению остовного дерева с достаточно большим количеством висячих вершин. В работе [9] для связного графа G с $g(G) \geq 4$ и v_3 вершинами степени хотя бы 3 доказана оценка $u(G) \geq \frac{v_3+4}{3}$ (на самом деле, оценка доказана для более широкого класса графов). В работе [10] для связного графа G с $\delta(G) \geq 3$ и v_3 вершинами степени 3 и v_4 вершинами степени хотя бы 4 доказана оценка $u(G) \geq \frac{2v_4}{5} + \frac{2v_3}{15}$.

Естественным продолжением этих работ будет первая теорема из нашей работы, где свой вклад в оценку количества висячих вершин остовного дерева вносят и висячие вершины исходного графа.

Теорема 1. *Пусть G — связный граф, в котором s вершин имеют степень, отличную от 2. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее $\frac{1}{4}(s-2)+2$ висячих вершин.*

В качестве очевидного следствия мы получаем оценку на количество висячих вершин в остовном дереве графа без вершин степени 2.

Следствие 1. *Пусть G — связный граф без вершин степени 2. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее, чем $\frac{1}{4}(v(G)-2)+2$ висячих вершин.*

Определение 2. Обозначим через $\ell(G)$ количество вершин в максимальной цепочке последовательно соединённых вершин степени 2 в графе G.

В работе [11] для связного графа G с $\ell(G) \leq k$ (где $k \geq 1$) доказана оценка $u(G) > \frac{1}{2k+4}v(G)$. Однако доказательство, приведённое в [11], существенно использовало, что $k \geq 1$. Следствие 1 показывает, что и для $k = 0$ оценка получается такой же. Мы усилим результат работы [11], получив новую серию оценок, которая связывает количество висячих вершин в остовном дереве с обхватом графа.

Теорема 2. *Пусть G — связный граф, $g(G) \geq g$, а $\ell(G) \leq k$, $k \geq 1$. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее, чем $\alpha_{g,k}(v(G)-k-2)+2$ висячих вершин, где*

$$\alpha_{g,k} = \begin{cases} \frac{n}{n(k+3)+1} \text{ (где } n = [\frac{g+1}{2}]) & \text{при } k < g-2, \\ \frac{g-2}{(g-1)(k+2)} & \text{при } k \geq g-2 \end{cases} .$$

Отметим, что вопрос о таких оценках для случая $k = 0$ (то есть, графа без вершин степени 2) остаётся открытым.

2 Основной инструмент

В этом разделе мы сформулируем и докажем лемму, являющуюся основным инструментом всех доказательств нашей работы. Эта лемма поможет редуцировать доказательство оценок в теоремах 1 и 2 в случаях, когда в графе есть точки сочленения и, наоборот, собирать экстремальные примеры для наших оценок, как из деталей конструктора.

Наш метод использует теорию блоков и точек сочленения. Для удобства мы приведем определения основных понятий. Подробнее классические результаты о блоках и точках сочленения изложены в [12] и других книгах.

Определение 3. *Точкой сочленения* связного графа G называется любая его вершина, при удалении которой теряется связность. *Двусвязным* графом называется непустой связный граф без точек сочленения. *Блок* графа G – это его максимальный по включению двусвязный подграф.

Мост графа G – это ребро, не входящее ни в один цикл.

Определение 4. 1) Пусть даны два графа G_1 и G_2 с $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_1)$. *Склеить* графы G_1 и G_2 по вершинам x_1 и x_2 значит склеить две вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, которой будут переданы все выходящие из x_1 и x_2 рёбра обоих графов. Остальные вершины и рёбра графов G_1 и G_2 войдут в полученный при склейке граф без изменений. *Все остальные вершины обоих графов при этой операции мы считаем различными.*

2) Для любого ребра $e \in E(G)$ определим граф $G \cdot e$, в котором концы ребра $e = xy$ склеены в одну вершину, которой переданы все инцидентные x и y рёбра. Будем говорить, что граф $G \cdot e$ получен из G в результате *стягивания ребра* e.

Замечание. 1) При стягивании мостов не образуется петель и кратных рёбер.

2) Пусть граф H получен из графа H' стягиванием нескольких мостов. Тогда, очевидно, $u(H) = u(H')$.

Лемма 1. *Пусть G_1 и G_2 — графы с $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ и висячими вершинами x_1 и x_2. Пусть G — граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по вершинам x_1 и x_2 и последующим стягиванием $m' - 1$ мостов. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $u(G) = u(G_1') + u(G_2') - 2$.

2) *Пусть*

$$u(G_1) \ge \alpha(v(G_1) - m) + 2, \quad u(G_2) \ge \alpha(v(G_2) - m) + 2 \quad \text{и } m' \ge m. \tag{1}$$

Тогда $u(G) \ge \alpha(v(G) - m) + 2$. *Если все три неравенства из* (1) *обращаются в равенство, то* $u(G) = \alpha(v(G) - m) + 2$.

Доказательство. 1) Пусть G' — граф, полученный из G_1' и G_2' склеиванием по x_1 и x_2. По замечанию 2 мы имеем $u(G') = u(G)$. Остаётся доказать, что $u(G') = u(G_1') + u(G_2') - 2$. Пусть x — вершина графа G', полученная из x_1 и x_2 в результате склеивания.

$\ge$. Рассмотрим остовные деревья T_1 и T_2 графов G_1' и G_2' с $u(T_1) = u(G_1')$ и $u(T_2) = u(G_2')$. Склеив в них висячие вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, мы получим остовное дерево T графа G с $u(T) = u(T_1) + u(T_2) - 2$ (все висячие вершины деревьев T_1 и T_2, кроме x_1 и x_2, остались висячими в дереве T). Следовательно, $u(G') \ge u(G_1') + u(G_2') - 2$.

$\le$. Теперь рассмотрим остовное дерево T' графа G' с $u(T') = u(G')$. Вершина x является точкой сочленения графа G' и потому не является висячей вершиной дерева T', значит, $d_{T'}(x) = d_{G'}(x) = 2$. Очевидно, дерево T' склеено по вершинам x_1 и x_2 из остовного дерева T_1' графа G_1' (в котором вершина x_1 — висячая) и остовного дерева T_2' графа G_2' (в котором вершина x_2 — висячая). Все остальные висячие вершины деревьев T_1' и T_2' являются висячими вершинами дерева T', поэтому

$$u(G') = u(T') = u(T_1') + u(T_2') - 2 \le u(G_1') + u(G_2') - 2.$$

2) Отметим, что $v(G) = v(G_1') + v(G_2') - m'$. Действительно, две вершины x_1 и x_2 мы склеили в одну вершину x, после чего еще $m' - 1$ вершину степени 2 стянули. После доказательства пункта 1 остаётся лишь написать цепочку неравенств:

$$u(G) = u(G_1') + u(G_2') \ge \alpha(v(G_1') - m) + 2 + \alpha(v(G_2') - m) + 2 - 2 =$$

$$= \alpha((v(G_1') + v(G_2') - m') - m + (m' - m)) + 2 \ge \alpha(v(G) - m) + 2. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что в случае, когда все неравенства из (1) обращаются в равенства, все неравенства в (2) также обращаются в равенства. □

3 Теорема 1 и серия экстремальных примеров

Доказательство теоремы 1. Мы будем считать, что в графе G есть висячие вершины, иначе можно воспользоваться результатом работы [3].

Лемма 2. (D. J. Kleitman, D. B. West, 1991.) *Пусть G — связный граф, $\delta(G) \ge 3$. Тогда $u(G) \ge \frac{v(G)}{4} + 2$.*

Пусть U — множество всех висячих вершин графа G, W — множество всех вершин графа G, смежных с висячими, X — множество всех невисячих вершин графа G, смежных с вершинами из W и, наконец, Y — множество всех остальных вершин. Для произвольного графа F обозначим через $S(F)$ множество вершин графа, степень которых не равна 2, а через $s(F)$ — их количество.

Пусть $H = G - U$. Очевидно, граф H связен. Доказательство теоремы 1 будем вести индукцией по размеру графа: приступая к доказательству для графа G будем считать утверждение доказанным для графов с меньшим числом вершин и графов с таким же числом вершин, но меньшим числом рёбер.

Базу индукции составит очевидный случай, когда в графе H не более двух вершин. Все возможные в этом случае варианты нетрудно перебрать.

В *индукционном переходе* мы разберём несколько случаев.

1. *В графе H есть вершина a степени 2.*
Если a — точка сочленения, то, стянув её, мы получим меньший граф G' с $s(G') = s(G)$ и $u(G') = u(G)$. Если же a — не точка сочленения, то инцидентное ей ребро ab — не мост и мы рассмотрим связный граф $G' = G - ab$. Поскольку $a \in S(G') \setminus S(G)$, $S(G) \setminus S(G') \subset \{b\}$, то мы имеем $s(G') \ge s(G)$. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, мы имеем $u(G') \le u(G)$. В обоих случаях утверждение теоремы для графа G следует из утверждения теоремы для меньшего графа G'.

Далее мы будем считать, что $s(G) = v(G)$ (то есть, все вершины графа G имеют степень не 2).

2. *Граф H не двусвязен.*

Пусть a — точка сочленения графа H. Тогда a — точка сочленения графа G, то есть существуют такие связные графы G_1 и G_2, что

$$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G), \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\} \quad \text{и} \quad v(G_1), v(G_2) > 2.$$

Для $i \in \{1,2\}$ рассмотрим граф G'_i, полученный из G_i присоединением новой висячей вершины x_i к вершине a. Тогда граф G получается из G'_1 и G'_2 склейкой вершин x_1 и x_2 в одну вершину x и последующего стягивания двух инцидентных x мостов (при этом две копии вершины a в графах G'_1 и G'_2 склеятся в вершину a графа G). Таким образом, выполняются условия пункта 1 леммы 1 и мы имеем $u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2$. Нетрудно понять, что $v(G'_1) < v(G)$ и $v(G'_2) < v(G)$. Тогда по индукционному предположению $u(G'_1) \geq \frac{s(G'_1)-2}{4} + 2$ и $u(G'_2) \geq \frac{s(G'_2)-2}{4} + 2$.

Отметим, что $s(G) = v(G)$ и все вершины графов G'_1 и G'_2, кроме a, имеют степень не 2. Поскольку $3 \leq d_G(a) = d_{G'_1}(a) + d_{G'_2}(a) - 2$, то вершина a имеет степень не 2 хотя бы в одном из графов G'_1 и G'_2. Поэтому

$$s(G) = v(G) = v(G'_1) + v(G'_2) - 3 \leq s(G'_1) + s(G'_2) - 2.$$

Таким образом,

$$u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2 \geq \frac{s(G'_1) - 2}{4} + \frac{s(G'_2) - 2}{4} + 2 \geq \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы будем считать, что в графе H нет точек сочленения. Это означает, что все точки сочленения графа G — это вершины множества W (вершина $w \in W$ отделяет смежные с ней висячие вершины от остальных вершин графа).

Для дальнейших продвижений нам потребуется лемма.

Лемма 3. *Пусть $a, b \in V(G)$ — смежные вершины, а подграф G' — компонента связности графа $G - a$, содержащая вершину b. Тогда, если b — точка сочленения графа G', то $u(G) \geq u(G') + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим остовное дерево T' графа G' с $u(T') = u(G')$. Построим остовное дерево T графа G, присоединив вершину a к b и далее присоединив к вершине a все отличные от G' компоненты связности графа $G - a$. Вершина b — точка сочленения графа G', поэтому она не является висячей вершиной в дереве T'. Следовательно, $u(G) \geq u(T) \geq u(T') + 1 = u(G') + 1$. □

Продолжим разбор случаев в доказательстве теоремы 1.

3. *Существуют такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что $d_G(a) \leq 3$, а b — точка сочленения графа $G - a$.*
Пусть G' — компонента связности графа $G - a$, содержащая b. Из двусвязности H понятно, что в G' не попала только вершина a и смежные с ней висячие вершины. Таким образом,

$$S(G) \setminus S(G') \subset \{a\} \cup \mathrm{N}_G(a), \quad \text{поэтому} \quad s(G') \geq s(G) - d_G(a) - 1 \geq s(G) - 4.$$

По индукционному предположению, лемме 3 и доказанному выше мы имеем

$$u(G) \ge u(G') + 1 \ge \frac{s(G')-2}{4} + 3 \ge \frac{s(G)-2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать.

4. *Существуют такие смежные вершины $x, y \in V(H)$, что $d_G(x) \ge 4$, $d_G(y) \ge 4$.*
Тогда рассмотрим граф $G' = G - xy$. Так как граф H двусвязен, граф G' — связен и для него утверждение теоремы уже доказано. Понятно, что $s(G') = s(G)$, а остовное дерево графа G' является остовным деревом G, поэтому утверждение доказано и для G.

5. Подытожим разобранные случаи и выясним свойства, которыми теперь обладает граф G.

Лемма 4. *Если граф G не удовлетворяет условию ни одного из разобранных случаев, то он удовлетворяет следующим свойствам.*

1° *Никакие две вершины множества W не смежны.*

2° *Все вершины множества W имеют степень* 3.

3° *Множество X не пусто и состоит из вершин степени более* 3.

4° *Каждая вершина множества W смежна с одной висячей вершиной графа G и двумя вершинами множества X.*

Доказательство. Все вершины из W — точки сочленения графа G. Так как граф не был рассмотрен в пункте 3, для каждой вершины $w \in W$ все смежные с ней вершины, кроме ровно одной висячей, имеют степень более трёх. Таким образом, степени всех вершин множества X больше 3.

Докажем, что W — независимое множество графа G. Пусть вершины $w, w' \in W$ смежны. Тогда хотя бы одна из них имеет степень не более 3, пусть $d_G(w') \le 3$. Но в этом случае вершина $w \in W$ смежна с невисячей вершиной степени не более 3, что противоречит доказанному выше.

Итак, W — независимое множество. Тогда $X \ne \varnothing$ и каждая вершина $w \in W$ смежна хотя бы с $d_G(w) - 1 \ge 2$ вершинами из X. Так как степени вершин множества X более 3, то $d_G(w) = 3$. Таким образом, все утверждения леммы доказаны. □

Рассмотрим вершину $w \in W$ и смежные с ней вершины $x, x' \in X$. Пусть $a \ne w$ — смежная с x вершина. Легко понять, что $a \in W$ или $a \in Y$ и $d_G(a) = 3$.

Пусть $G^* = G - x'w$, а G' — компонента связности графа $G^* - a$, содержащая вершину w. Очевидно, вершина x — точка сочленения графа G' (отделяющая w и смежную с ней висячую вершину от остальных вершин графа), поэтому, применив лемму 3 к графам G^* и G', мы получим $u(G^*) \ge u(G') + 1$.

Граф $G - a$ связен и вершина x не является его точкой сочленения (иначе это был бы случай 3), поэтому xw — не мост графа $G - a$. Так как w смежна с висячей вершиной и двумя вершинами $x, x' \in X$, это означает, что $x'w$ — также не мост графа $G - a$. Следовательно, в графе $G - a - x'w = G^* - a$ все вершины, кроме a и — в случае, когда $a \in W$ — смежной с ней висячей вершины, входят в компоненту связности G'. Отметим, что если $x' \notin \mathrm{N}_G(a)$, то $d_{G'}(x') = d_G(x') - 1 \ge 3$. Следовательно,

$$S(G) \setminus S(G') \subset \{a\} \cup \mathrm{N}_G(a), \quad \text{поэтому} \quad s(G') \ge s(G) - d_G(a) - 1 \ge s(G) - 4.$$

По индукционному предположению, $u(G') \ge \frac{s(G')-2}{4} + 2$. Учитывая, что G^* — подграф G и доказанные выше неравенства, мы имеем

$$u(G) \ge u(G^*) \ge u(G') + 1 \ge \frac{s(G') - 2}{4} + 3 \ge \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать. □

3.1 Экстремальные примеры

Рассмотрим дерево T, в котором есть только вершины степени 1 и 3, причём вершин степени 3 ровно n. Легко видеть, что количество вершин степени 1 тогда равно $n+2$, а $e(T) = 2n+1$. Заменим каждую вершину x степени 3 дерева T на треугольник, передав каждой из трёх вершин треугольника по одному из рёбер, инцидентных в дереве T вершине x. В полученном графе G будет $n+2$ вершины степени 1 и n треугольников, итого $v(G) = n + 2 + 3n = 4n + 2$. Все невисячие вершины графа G являются точками сочленения и потому не могут быть висячими вершинами остовного дерева. Следовательно, $u(G) = n + 2 = \frac{v(G)-2}{4} + 2$.

4 Теорема 2 и серия экстремальных примеров

Сначала приведем необходимые определения и формулировку леммы о расщеплении больших блоков из работы [11].

Определение 5. *Граница* блока B — это множество всех входящих в него точек сочленения графа G (обозначение: $\mathrm{Bound}(B)$). *Внутренность* блока B — это множество вершин $\mathrm{Int}(B) = V(B) \setminus$

$\mathrm{Bound}(B)$. Вершины из $\mathrm{Int}(B)$ мы будем называть *внутренними вершинами* блока B.

Блок называется *пустым*, если у него нет внутренних вершин (то есть, $\mathrm{Int}(B) = \varnothing$.) Иначе блок называется *непустым.*

Блок B называется *большим*, если количество его внутренних вершин больше количества его граничных вершин (то есть, $|\mathrm{Int}(B)| > |\mathrm{Bound}(B)|$).

Лемма 5. *Пусть G — граф с более чем двумя вершинами. Тогда существует набор рёбер $F \subset E(G)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1° *граф $G - F$ связен;*

2° *у графа $G - F$ нет больших блоков;*

3° *если вершины x и y смежны в $G - F$ и $d_{G-F}(x) = d_{G-F}(y) = 2$, то $d_G(x) = d_G(y) = 2$.*

Доказательство теоремы 2. И на этот раз доказательство будет индукцией по количеству вершин графа, только мы поменяем местами базу и переход.

1. *Спуск.*
Будем считать, что граф G' меньше графа G если $u(G') < u(G)$. В этой части мы разберём случаи, когда из утверждения теоремы 2 для всех меньших графов мы можем вывести утверждение для графа G.

Пусть *шип* — это неразветвлённое дерево (все невисячие вершины которого имеют степень 2), присоединённое за одну из своих висячих вершин к точке сочленения a (которую мы назовём *основанием шипа*).

Назовём точку сочленения a графа G *несущественной*, если у графа $G - a$ ровно две компоненты связности, одна из которых является *шипом* с основанием a. В противном случае назовём точку сочленения *существенной.*

1.1. *В графе G есть существенная точка сочленения a.*
Если $d_G(a) = 2$, то вершина a принадлежит некоторой цепочке из последовательно соединённых вершин степени 2, пусть крайние вершины этой цепочки смежны с вершинами b и b' (степени которых не равны 2). Так как a — существенная точка сочленения, то $d_G(b) > 2$ и $d_G(b') > 2$, причем b и b' — также существенные точки сочленения.

Итак, рассмотрим случай $d_G(a) \geq 3$. Вершина a является существенной точкой сочленения графа G, поэтому существуют такие связные графы G_1 и G_2, что $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, причём ни один из графов G_1 и G_2 не является шипом с основанием a.

Построим из графа G_1 граф G'_1. Если $d_{G_1}(a) = 1$, то $G'_1 = G_1$. Если же $d_{G_1}(a) \geq 2$, то присоединим к вершине a шип из $k+1$ вершины. Таким образом $\ell(G'_1) \leq k$, $g(G'_1) \geq g(G)$. Аналогично построим граф G'_2.

Поскольку $3 \leq d_G(a) = d_{G_1}(a) + d_{G_2}(a)$, то $d_{G_1}(a) \geq 2$ или $d_{G_2}(a) \geq 2$. Таким образом, при построении хотя бы одного из графов G'_1 или G'_2 мы добавили шип из $k+1$ вершины. Учитывая, что вершина a входит в оба графа, мы получаем неравенство

$$v(G'_1) + v(G'_2) \geq v(G) + k + 2.$$

Граф G получается из G'_1 и G'_2 склейкой двух висячих вершин (концов присоединённых шипов) и последующим стягиванием не менее, чем $k+1$ моста (в результате две копии вершины a в графах G'_1 и G'_2 склеятся в вершину a графа G). По пункту 1 леммы 1 мы имеем $u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2$. Поскольку графы G_1 и G_2 не являются шипами с основанием a, то $u(G'_1), u(G'_2) \geq 3$ и следовательно $u(G'_1) < u(G)$ и $u(G'_2) < u(G)$. Тогда по индукционному предположению мы имеем

$$u(G'_1) \geq \alpha_{g,k}(v(G'_1) - k - 2) + 2, \quad u(G'_2) \geq \alpha_{g,k}(v(G'_2) - k - 2) + 2.$$

Теперь по пункту 2 леммы 1 получается, что $u(G) \geq \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2$, что и требовалось доказать.

1.2. *В графе G есть большие блоки.*
По лемме 5 мы можем выбрать такой набор рёбер $F \subset E(G)$, что граф $G' = G - F$ связен, не имеет больших блоков и для любых двух смежных в G' вершин x и y из $d_{G'}(x) = d_{G'}(y) = 2$ следует $d_G(x) = d_G(y) = 2$. Тогда $\ell(G') = \max(\ell(G), 1) \leq k$. Очевидно, $g(G') \geq g(G) = g$, $u(G') \geq u(G)$. Поэтому мы можем применить индукционное предположение для графа G'. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, то $u(G) \geq u(G') \geq \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2$, что и требовалось доказать.

2. *База.*
Будем уменьшать граф, выполняя шаги 1.1 и 1.2 до тех пор, пока это возможно. В результате останется проверить утверждение теоремы только для графов G, у которых нет существенных точек сочленения и больших блоков. Тогда каждая точка сочленения a графа G делит его на две компоненты связности, одна из которых — шип с основанием a. Пусть H — граф, полученный из G в результате удаления вершин всех этих шипов Нетрудно понять, что граф H двусвязен (любая точка сочленения графа H была бы существенной точкой сочленения графа G).

Пусть $h = v(H)$, m — количество точек сочленения графа G. Поскольку H не является большим блоком графа G, то $m \geq \frac{v(H)}{2}$.

Каждая из них отделяет от графа шип не более, чем из $\ell(G)+1 \leq k+1$ вершин. Поэтому $v(G) \leq h+(k+1)m$.

Случай, когда G — дерево, можно рассмотреть отдельно. Легко проверить, что в этом случае все оценки из теоремы 2 верны. Итак, пусть граф G — не дерево, тогда двусвязный граф H содержит цикл из не более, чем $v(H)$ вершин. Следовательно, $v(H) = h \geq g(G) = g$. Рассмотрим два случая.

2.1. $m = h$.
Тогда $v(G) \leq (k+2)h$, $u(G) \geq h$. Непосредственным вычислением проверяется, что в этом случае

$$u(G) \geq \beta_{h,k}(v(G)-k-2)+2 \quad \text{для} \quad \beta_{h,k} = \frac{h-2}{(h-1)(k+2)}.$$

Нам необходимо проверить, что

$$\min_h \beta_{h,k} \geq \alpha_{g,k}.$$

Очевидно, $\beta_{h,k}$ возрастает с ростом h, поэтому минимум достигается при $h = g$ и равен $\beta_{g,k}$.

2.2. $m < h$.
В рассматриваемом случае блок H — непустой, выберем вершину $u \in \mathrm{Int}(H)$. Несложно выделить в графе G остовное дерево, в котором висячими вершинами будут концы всех m шипов и вершина u, поэтому $u(G) \geq m+1$. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$u(G) \geq \gamma_{h,m,k}(v(G)-k-2)+2 \quad \text{для} \quad \gamma_{h,m,k} = \frac{m-1}{h+(k+1)m-k-2}.$$

Нам нужно проверить, что при $h \geq g$

$$\beta'_{h,k} = \min_m \gamma_{h,m,k} \geq \alpha_{g,k}.$$

Заметим, что $\gamma_{h,m,k}$ возрастает с ростом m, поэтому подставим минимальное возможное значение $m = \lceil \frac{h}{2} \rceil$ и получим, что

$$\beta'_{h,k} = \frac{\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1}{h+(k+1)\lceil \frac{h}{2} \rceil - k - 2}.$$

Легко видеть, что $\beta'_{2n-1,k} > \beta'_{2n,k}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\beta'_{2n,k} = \frac{n-1}{(n-1)(k+3)+1}$$

возрастает с ростом n. Поэтому минимум $\beta'_{h,k}$ достигается при $h = 2\lceil \frac{g}{2} \rceil$.

Теперь нам нужно сравнить полученные оценки с $\alpha_{g,k}$. Вместо этого мы сравним полученные в пунктах 2.1 и 2.2 оценки друг с другом и покажем, что $\alpha_{g,k}$ равна минимальной из них. Отдельно рассмотрим случаи разной четности g.

2.3. $g = 2n + 2$.
В этом случае нам нужно сравнить $\beta'_{2n+2,k}$ и $\beta_{2n+2,k}$. Несложное вычисление показывает, что

$$\beta'_{2n+2,k} = \frac{n}{n(k+3)+1} < \frac{2n}{(2n+1)(k+2)} = \beta_{2n+2,k}$$

тогда и только тогда, когда $k < 2n$. Именно при $k < 2n = g - 2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta'_{2n+2,k}$, а при $k \geq g - 2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta_{g,k}$. Таким образом, теорема в случае четного g доказана.

2.4. $g = 2n + 1$.
В этом случае нам нужно сравнить $\beta'_{2n+2,k}$ и $\beta_{2n+1,k}$. Несложное вычисление показывает, что

$$\beta'_{2n+2,k} = \frac{n}{n(k+3)+1} < \frac{2n-1}{2n(k+2)} = \beta_{2n+1,k}$$

тогда и только тогда, когда $k < 2n-1-\frac{1}{n}$. Именно при $k < 2n-1 = g-2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta'_{2n,k}$, а при $k \geq g-2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta_{g,k}$. Таким образом, теорема в случае нечетного g доказана. □

4.1 Экстремальные примеры

Мы приведем бесконечную серию примеров графов, подтверждающую точность оценки из теоремы 2. Логика построения примера достаточно проста: мы построим такой граф, для которого все доказанные в теореме неравенства станут равенствами. Пусть $\ell(G) = k$, $g(G) = g$. Разберём два случая.

1. $k < g - 2$.
Пусть $n = [\frac{g+1}{2}]$. В рассматриваемом случае $\alpha_{g,k} = \beta'_{2n+2,k} = \frac{n}{n(k+3)+1}$. Пусть $B_{g,k}$ — это цикл длины $2n+2$, у которого отмечена $n+1$ вершина через одну. К каждой отмеченной вершине присоединим шип из $k+1$ вершины. Отмеченные вершины будут точками сочленения в нашем графе, а неотмеченные — вершинами степени 2. Таким образом, никакие две вершины степени 2 графа $B_{g,k}$ не смежны. Тогда $v(B_{g,k}) = 2n+2+(n+1)(k+1) = (n+3)(k+1)$.

Найдём $u(B_{g,k})$. В остовном дереве графа $B_{g,k}$ висячими вершинами будут все $n+1$ висячие вершины этого графа (концы шипов). Так как удаление висячих вершин остовного дерева не должно нарушать связность, к ним можно добавить только одну вершину цикла, к которой не присоединен шип. Таким образом, $u(B_{g,k}) = n + 2$. Несложно проверить, что

$$u(B_{g,k}) = n + 2 = 2 + \frac{n}{n(k+3)+1} \cdot (v(B_{g,k}) - k - 2).$$

Следовательно, для графа $B_{g,k}$ оценка из теоремы 2 точна.

2. $k \geq g - 2$.

В рассматриваемом случае $\alpha_{g,k} = \beta_{g,k} = \frac{g-2}{(g-1)(k+2)}$. Пусть $B_{g,k}$ — это цикл длины g, в котором к каждой вершине присоединен шип из $k+1$ вершины. Тогда $v(B_{g,k}) = g(k+2)$.

Легко видеть, что висячими вершинами в любом остовном дереве этого графа будут концы шипов и только они, поэтому $u(B_{g,k}) = g$. Несложно проверить, что

$$u(B_{g,k}) = g = 2 + \frac{g-2}{(g-1)(k+2)} \cdot (v(B_{g,k}) - k - 2).$$

Следовательно, для графа $B_{g,k}$ оценка из теоремы 2 точна.

3. *Теперь покажем, как в обоих случаях собирать экстремальные примеры из графов $B_{g,k}$, как из деталей конструктора.*

Пусть G — граф, удовлетворяющей соотношениям

$$u(G) = \alpha_{g,k} \cdot (v(G) - k - 2) + 2, \quad g(G) \geq g, \quad \ell(G) \geq k,$$

имеющий хотя бы одну висячую вершину a. Построим граф G': склеим вершину a графа G с концом одного из шипов графа $B_{g,k}$ и стянем после этого $k+1$ мост (рёбра приклеенного шипа графа $B_{g,k}$). В результате получится граф G', удовлетворяющий соотношениям

$$v(G') = v(G) + v(B_{g,k}) - k - 2, \quad g(G') \geq g, \quad \ell(G') \geq k.$$

По пункту 2 леммы 1 мы имеем $u(G') = \alpha_{g,k} \cdot (v(G') - k - 2) + 2$, то есть, граф G' также является экстремальным примером, подтверждающим точность оценки в теореме 2. В качестве первого графа мы возьмём $G = B_{g,k}$, после чего можем построить сколь угодно большие экстремальные примеры, приклеивая каждый раз по очередному графу $B_{g,k}$.

Список литературы

[1] J. A. Storer. *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* Inform. Process. Lett. 13 (1981), №1, p. 8-11.

[2] J. R. Griggs, D. J. Kleitman, A. Shastri. *Spanning trees with many leaves in cubic graphs.* J. Graph Theory 13 (1989) №6, p. 669-695.

[3] D. J. Kleitman, D. B. West. *Spanning trees with many leaves.* SIAM J. Discrete Math. 4 (1991), №1, p. 99-106.

[4] J. R. Griggs, M. Wu. *Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5.* Discrete Math. 104 (1992) p. 167–183.

[5] N. Alon. *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* Graphs and Combinatorics 6 (1990), p. 1-4.

[6] G. Ding, T. Johnson, P. Seymour *Spanning trees with many leaves.* J. Graph Theory 37 (2001), №. 4, p. 189-197.

[7] Y. Caro, D. B. West, R. Yuster. Connected domination and spanning trees with many leaves. SIAM J. Discrete Math. 13 (2000), №. 2, p. 202-211.

[8] P. S. Bonsma *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), №. 3, p. 920-937.

[9] P. S. Bonsma, F. Zickfeld *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* LATIN 2008: Theoretical informatics, p. 531-543, Lecture Notes in Comput. Sci., 4957, Springer, Berlin, 2008.

[10] Н. В. Гравин. *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 381 (2010), стр. 31-46.

[11] Д. В. Карпов. *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* Записки научных семинаров ПОМИ т.381 (2010г.) стр.78-87.

[12] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, “Мир”, 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)