ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 12/2010

НЕРАВЕНСТВО ХИНЧИНА И ТЕОРЕМА ЧЕНА

М. М. Скриганов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: skrig@pdmi.ras.ru

ABSTRACT

Теорема Чена о средних значениях L_q-уклонений является одним из основных результатов теории равномерно распределенных точечных множеств. Это трудный результат, полученный с помощью глубоких и нетривиальных комбинаторных соображений.

Цель данной работы – показать, что результаты такого типа теснейшим образом связаны с лакунарностью и статистической независимостью определенных функциональных рядов. В частности, используя классическое неравенство Хинчина для рядов функций Радемахера, мы доказываем одно важное обобщение теоремы Чена.

В последующих публикациях мы продолжим исследование явления лакунарности и статистической независимости в контексте теории равномерно распределенных точечных множеств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, Проект No. 08-01-00182

Ключевые слова: равномерные распределения, гармонический анализ, лакунарные ряды

1. Введение. Основная теорема

1.1. Пусть D_N распределение $N > 1$ точек в d-мерном единичном кубе $U^d = [0,1)^d$. Определим *локальное уклонение* $\mathcal{L}[D_N, Y]$, $Y = (y_1, \dots, y_d) \in U^d$, как

$$\mathcal{L}[D_N, Y] = \#\{D_N \cap B_Y\} - N \operatorname{vol} B_Y \tag{1.1}$$

где $B_Y = [0, y_1) \dots [0, y_d) \subset v^d$ – прямоугольный ящик объема $\operatorname{vol} B_Y = y_1 \dots y_d$, и L_q – *уклонение* $\mathcal{L}_q[D_N]$, $1 \le q < \infty$, как

$$\mathcal{L}_q[D_N] = \left(\int\limits_{U^d} |\mathcal{L}[D_N, Y]|^q \, dY \right)^{1/q} \tag{1.2}$$

Известно, что при $1 < q < \infty$ для любого распределения D_N выполняется следующая оценка снизу

$$\mathcal{L}_q[D_N] > c_{d,q} (\log N)^{\frac{1}{2}(d-1)} \tag{1.3}$$

с постоянной $c_{d,q}$ независящей от N. Для $q \ge 2$ это теорема Рота, а для $1 < q < 2$ теорема Шмидта (см. [1, 7]).

Порядок оценки (1.3) является наилучшим. Более точно, для каждого q, $1 \le q < \infty$, и любого $N > 1$ существуют распределения D_N из N точек в U^d, такие что

$$\mathcal{L}_q[D_N] < C_{d,q} (\log N)^{\frac{1}{2}(d-1)} \tag{1.4}$$

с постоянной $C_{d,q}$ независящей от N. При $1 \le q \le 2$ этот результат был получен Дэвенпортом для $d = 2$ и Ротом для $d \ge 3$, а для произвольных q и d оценка (1.4) была доказана Ченом, см. [1, 2].

Доказательство Чена основано на теореме о среднем значении L_q-уклонений для p-адических сдвигах данного распределения D_N. Эта очень важная теорема была доказана в [2] с помощью глубоких и нетривиальных комбинаторных соображений.

В настоящей работе предложен принципиально новый подход к доказательству теорем о среднем для L_q-уклонений основанный на методах гармонического анализа. В рамках нашего подхода удается получить существенное уточнение теоремы Чена.

1.2. Напомним некоторые определения и известные факты.

Мы пишем $\mathbb{N}$ для множества всех положительных целых чисел, $\mathbb{N}_0$ для множества всех неотрицательных целых, $\mathbb{N}^d$ и $\mathbb{N}_0^d$ для прямого произведения d копий соответствующих множеств.

Для $s \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{Q}(2^s) &= \{x = m2^{-s} \in [0,1) : m = 0, 1, \dots, 2^s - 1\} \\ \mathbb{Q}^d(2^s) &= \{x = (x_1, \dots, x_d) \in U^d : x_j \in \mathbb{Q}(2^s), j = 1, \dots, d\} \\ \mathbb{Q}(2^\infty) &= \bigcup_{s \ge 0} \mathbb{Q}(2^s), \quad \mathbb{Q}^d(2^\infty) = \bigcup_{s \ge 0} \mathbb{Q}^d(2^s) \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Точки в $\mathbb{Q}^d(2^\infty)$ называются двоичными рациональными точками.

Любое $x \in [0,1)$ может быть представлено в виде

$$x = \sum_{i \geq 1} \eta_i(x) 2^{-i}, \tag{1.6}$$

где $\eta_i(x) \in \{0,1\} \simeq \mathbb{F}_2$, $i \in \mathbb{N}$. Здесь $\mathbb{F}_2$ – конечное поле из двух элементов, отождествленное с множеством вычетов $\{0,1\} \bmod 2$.

Двоичное разложение (1.6) единственно, если условиться считать, что сумма в (1.6) конечна для каждой двоичной рациональной точки. С учетом этого соглашения, $\eta_i(x) = 0$ при $i > s$ если $x \in \mathbb{Q}(2^s)$.

На множестве двоичных рациональных точек естественно определяется структура векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_2$. Для любых двух тчоек x и y в $\mathbb{Q}(2^\infty)$ определим их сумму $x \oplus y$ следующими соотношениями

$$\eta_i(x \oplus y) = \eta_i(x) + \eta_i(y) \bmod 2, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Аналогично, для любых двух векторов $X = (x_1, \dots x_d)$ и $Y = (y_1, \dots, y_d)$ в $\mathbb{Q}^d(2^\infty)$ определим

$$X \oplus Y = (x_1 \oplus y_1, \dots, x_d \oplus y_d). \tag{1.8}$$

По отношению к так определенному сложению $\oplus$ каждое множество $\mathbb{Q}^d(2^s)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$, причем $\dim \mathbb{Q}^d(2^s) = ds$, $\#\{\mathbb{Q}^d(2^s)\} = 2^{ds}$.

Для произвольной точки $x \in [0,1)$ с двоичным разложением (1.6) обозначим через $x^{(s)}$ ее *проекцию на* $\mathbb{Q}(2^s)$:

$$x^{(s)} = \sum_{i=1}^{s} \eta_i(x) 2^{-i}, \quad s \in \mathbb{N}, \tag{1.9}$$

а при $s = 0$ положим $x^{(0)} = 0$, так что

$$x = x^{(s)} + \theta_s(x) 2^{-s}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \tag{1.10}$$

где $\theta_s(x) \in [0,1)$ для всех $x \in [0,1)$.

Аналогично, для точки $X = (x_1, \dots, x_d) \in U^d$ обозначим через $X^{(s)} = (x_1^{(s)}, \dots, x_d^{(s)})$ ее проекцию на $\mathbb{Q}^d(2^s)$, так что

$$X = X^{(s)} + \Theta_s(X) 2^{-s}, \quad s \in \mathbb{N}_0 \tag{1.11}$$

где $\Theta_s(X) = (\theta_s(x_1), \dots, \theta_s(x_d)) \in U_d$ для всех $X \in U^d$. Для $X \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ "поправка" $\Theta_s(X) = 0$.

Отметим, что операция сложения $\oplus$ можно корректно определить и для пар точек X, Y, когда только одна из точек, скажем Y принадлежит $\mathbb{Q}^d(2^s)$. Для $X \in U^d$ и $Y \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ положим

$$X \oplus Y = X^{(s)} \oplus Y + \Theta_s(x) 2^{-s}. \tag{1.12}$$

Для $x \in [0,1)$ и $y \in \mathbb{Q}(2^s)$ формулу (1.12) можно записать в виде следующих равенств

$$\eta_i(x \oplus y) = \begin{cases} \eta_i(x) + \eta_i(y) \bmod 2 & \text{при} \quad 1 \leq i \leq s, \\ \eta_i(x) & \text{при} \quad i > s. \end{cases} \tag{1.13}$$

Более подробное обсуждение этих деликатных вопросов можно найти в [5] и [6].

Принимая во внимание сказанное выше, мы можем для любого распределения N точек $D_N \subset U^d$ и любой точки $T \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ определить бинарный сдвиг $D_N \oplus T = \{X \oplus T : X \in D_N\} \subset U^d$ и рассматривать его как новое распределение N точек в Y^d.

1.3. Следуя Чену [1], [2], определим для распределения D следующие средние значения для L_q-уклонений:

$$\mathcal{M}_{s,q}[D] = \left(2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} (\mathcal{L}_q[D_N \oplus T])^q \right)^{1/q} . \tag{1.14}$$

Наша цель изучить среднии (1.14) для специального класса точечных распределений. Рассмотрим *элементарные интервалы* $\Delta_a^m \subset [0,1)$, a, $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\Delta_a^m = [m2^{-a}, (m+1)2^{-a}), \quad 0 \le m < 2^a \tag{1.15}$$

и элементарные ящики $\Delta_A^M \subset U^d$, $A = (a_1, \dots a_d)$, $M = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}_0^d$,

$$\Delta_A^M = \Delta_a^{m_1} \times \dots \times \Delta_{a_d}^{m_d}, \quad 0 \le m_j < 2^{a_j}, j = 1, \dots, d. \tag{1.16}$$

Каждый такой ящик имеет объем $\mathrm{vol}_A^M = 2^{-a_1 - \dots - a_d}$.

Напомним такое Определение: Пусть $0 \le \delta \le s$ целые. Подмножество $D \subset U^d$ состоящее из $N = 2^s$ точек называется (δ, s, d)-сеткой с дефектом δ, если каждый элементарный ящик Δ_A^M объема $2^{\delta - s}$ содержит в точности 2^δ точек D.

Отметим, что для любой (δ, s, d)-сетки D и $T \in \mathbb{Q}^d(2^\infty)$ сдвиг $D \oplus T$ так же является сеткой и теми же параметрами.

(δ, s, d)-сетки представляют собой очень интересные комбинаторные структуры. Пример $(0, s, 2)$-сетки, $s \in \mathbb{N}_0$, был построен еще ван дер Корпутом, см, [1]. В произвольных размерностях d первые конструкции двоичных (δ, s, d)-сеток с $\delta = 0(d \log d)$ принадлежит Соболю [12].

В дальнейшем были предожены и другие конструкции сеток. Так, заменяя в определении и во всех приведенных выше формулах (1.9)–(1.16) основание 2 на произвольное простое число p, можно получить (δ, s, d)-сетки с основанием p, так же обладающими многими замечательными свойствами, см. [1, 4]. Используя методы алгебраической геометрии над конечными полями, можно доказать существование (δ, s, d)-сеток с $\delta = 0(d)$, причем эта оценка уже не улучшаема при больших d, см. [8]. Важно отметить что $(0, s, d)$-сетки с простым основанием p и произвольно большим s существуют если и тлько если $d \le p + 1$. В частности, бесконечные последовательности двоичных сеток с $\delta = 0$ существуют только в размерностях $d = 1, 2$ и 3, см. [1, 8, 11].

(δ, s, d)-сетки заполняют единичный куб очень равномерно и при всех q их L_q-уклонения допускают оценку порядка $0(2^\delta s^{d-1})$ при $s \to \infty$. Для произвольных (δ, s, d)-сеток эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. В то же время, эта оценка еще очень далека от оценки снизу (1.3).

Естественно возникает вопрос: Существуют ли в любой размерности двоичные (δ, s, d)-сетки достигающие нижней оценки (1.3). Положительный ответ на этот вопрос сразу же следует из следующей основной теоремы данной работы.

Теорема 1.1. *Пусть $D \subset U^d$ – двоичная (δ, s, d)-сетка, тогда для любого $q \ge 2$ среднее значение L_q-уклонений (1.14) удовлетворяет оценке*

$$M_{s,q}[D] < \gamma(q, \delta, d)(s+1)^{\frac{1}{2}(d-1)}, \tag{1.16}$$

где можно положить

$$\gamma(q, \delta, d) = 4^{\delta+d+1} q^{\frac{1}{2}(d+1)}. \tag{1.17}$$

Впервые оценки типа (1.16) были получены Ченом, см. [1, 2] для сеток с дефектом $\delta = 0$ на основе трудного комбинаторного анализа, включавшего совместную индукцию по параметрам d, s и целым четным q. При таком подходе предположение $\delta = 0$ оказывается существенным, и, как следствие, для каждого фиксированного простого основания теорема Чена может быть использована только в размерностях $d \leq p + 1$, для двоичных сеток только в размерностях 1, 2 и 3.

В настоящей работе развит новый подход к исследованию среднего значения L_q-уклонений (1.14), для которого величина дефекта сетки δ оказывается совершенно не существенной. Наш подход опирается на теорию лакунарных функциональных рядов. В случае двоичных (δ, s, d)-сетей это ряды функций Радемахера, образующих лакунарную подситсему функций Уолша, а в случае сеток с произвольным основанием p это лакунарные подсистемы для соответствующих функций Крестенсона–Леви, см. [6, 11].

В этой публикации мы не стремились к максимальной общности результатов, сосредоточив внимание на основных идеях нашего подхода. Поэтому мы ограничились в Теореме 1.1 рассмотрением только двоичных (δ, s, d)-сеток. В этом случае для доказательства оценки (1.16) достаточно классического неравенства Хинчина для функций Радемахера.

При фиксированных d, δ и q оценка (1.16) является предельно точной при $s \to \infty$, однако константу (1.17) можно было бы значительно улучшить и заменить на

$$\gamma(q, \delta, d) = c_d 2^{\delta} q^{\frac{1}{2}(d-1)} \tag{1.18}$$

с постоянной c_d зависящей только от размерности. Автор расчитывает рассмотреть эти вопросы в последующих публикациях.

План работы следующий. В §2 перечислены необходимые факты о функциях Уолша и Радемахера и приведено неравенство Хинчина в удобной для нас форме. В §3 получены явные формулы для уклонений и введены важные для нас характеристики точечных распределений – их дисбалансы. С помощью неравенства Хинчина в Теореме 3.1 средние значения уклонений произвольных распределений оценены в терминах дисбалансов. В §4 в Лемме 4.1 показано, что (δ, s, d)-сетки являются хорошо сбалансированными распределениями – их дисбалансы малы. Используя Теорему 3.1 и Лемму 4.1 мы завершаем в §4 доказательство Теоремы 1.1.

2. Функции Уолша и Радемахера. Неравенство Хинчина

2.1. Правильный взгляд на функции Уолша состоит в том, что они ялвюятся характерами вполне несвязанной топологической группы – так называемой диадической группы Кантора, см. [5, 6, 11]. Столь продвинутая теория для целей настоящей работы не понадобится. Мы ограничимся рассмотрением конечных групп $\mathbb{Q}(2^s)$, которые можно рассматривать как подходящие аппроксимации к группе Кантора, см. [11].

Любое целое $l \in \mathbb{N}_0$ можно единственным способом представить в виде

$$\ell = \sum_{i \geq 1} \lambda_i(\ell) 2^{i-1}, \tag{2.1}$$

где $\lambda_i(\ell) \in \{0, 1\} \simeq \mathbb{F}_2$, $i \in \mathbb{N}$. На множестве всех целых $\mathbb{N}_0$ естественно определяется структура векторного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_2$. Для любых двух целых ℓ и k в $\mathbb{N}_0$ определим их сумму $\ell \oplus k$ следующми соотношениями

$$\lambda_i(\ell \oplus k) = \lambda_i(\ell) + \lambda_i(k) \bmod 2, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Аналогично, для любых двух векторов $L = (\ell_1, \ldots, \ell_d)$ и $K = (k_1, \ldots, k_d)$ в $\mathbb{N}_0^d$ определим

$$L \oplus K = (\ell_1 \oplus k_1, \ldots, l_d \oplus k_d). \tag{2.3}$$

Удобно ввести следующие обозначения. Для $s \in \mathbb{N}_0$ положим

$$\mathbb{N}_0(2^s 0 = \{\ell \in \mathbb{N} : 0 \leq l < 2^s\},$$

и

$$\mathbb{N}_0^d(2^s) = \{L = (\ell_1, \ldots, \ell_d) \in \mathbb{N}_0^d : \ell_j \in \mathbb{N}_0(2^s), j = 1, \ldots, d\} \tag{2.4}$$

а для $A = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{N}_0^d$ положим

$$\mathbb{N}_0^d(2^A) = \{L = (\ell_1, \ldots, \ell_d) \in \mathbb{N}_0^d : \ell_j \in \mathbb{N}_0(2^{a_j}), j = 1, \ldots, d\}. \tag{2.5}$$

По отношению к так определенному сложению каждое множество $\mathbb{N}_0^d(2^A)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$, причем $\dim \mathbb{N}_0(2^A) = a_1 + \ldots + a_d$, $\#\{\mathbb{N}_0^d(2^A)\} = 2^{a_1+\ldots+a_d}$.

Для любых $\ell \in \mathbb{N}_0$ и $x \in [0, 1)$ определим спаривание

$$\langle \ell, x \rangle = \sum_{i \geq 1} \lambda_i(\ell) \eta_i(x) \bmod 2, \tag{2.6}$$

где $\lambda_i(\ell)$ и $\eta_i(x)$ – коэффициенты в разложениях (2.1) и (1.9), соответственно. Для $L = (\ell_1, \ldots \ell_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и $X = (x_1, \ldots, x_d) \in U^d$ положим

$$\langle L, X \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle \ell_j, x_j \rangle \bmod 2. \tag{2.7}$$

Функции Уолша в d-измерениях определяются формулой

$$W_L(X) = (-1)^{\langle L, X \rangle}. \tag{2.8}$$

Очевидно, что

$$W_L(X) = \prod_{j=1}^{d} w_{\ell_j}(x_j), \tag{2.9}$$

где $w_\ell(x)$ – одномерные функции Уолша,

$$w_\ell(x) = (-1)^{\sum\limits_{i\geq 1} \lambda_i(\ell)\eta_i(x)}. \tag{2.10}$$

Функции Уолша $w_\ell(x)$, $\ell \in \mathbb{N}$, принимают только два значения ± 1. Кроме того, $w_\ell(x)$, $\ell \in \mathbb{N}_0$, кусочно-постоянна на всех элементарных интервалах $\Delta_a^m = [m2^{-a}, (m+1)2^{-a}) \subset [0,1)$, $0 \leq m < 2^a$ при условии $a \geq \rho(\ell)$, где

$$\rho(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad \ell = 0, \\ \max\{i : \lambda_i(\ell) \neq 0\} & \text{если} \quad \ell \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{2.11}$$

а при $a < \rho(\ell)$ имеют место соотношения

$$\int\limits_{\Delta_a^m} w_\ell(x) dx = 0. \tag{2.12}$$

Кроме того, при $\ell \in \mathbb{N}_0(2^s)$ справедливо равенство

$$w_\ell(x) = w_\ell(x^{(s)}), \tag{2.13}$$

где $x^{(s)}$ – проекция точки $x \in [0,1)$ на $\mathbb{Q}(2^s)$, см. (1.9).

В терминах функции $\rho(\ell)$ элементарные интервалы (1.15) и ящики (1.16) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{N}_0(2^s) &= \{\ell \in \mathbb{N} : \rho(\ell) \leq s\} \\ \mathbb{N}_0(2^A) &= \{L = (\ell_1, \ldots, \ell_d) \in \mathbb{N}_0^d : \rho(\ell_j) \leq a_j, j = 1, \ldots, d\} \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Стоит отметить, что на множестве целых чисел $\mathbb{N}_0$, снабженном операцией сложнения $\oplus$, выражение $\rho(\ell \oplus k)$ определяет (неархимедову) метрику Розенблюм–Цфасмана. Эта метрика оказывается теснейшим образом связанной с геометрической структурой равномерно распределенных точечных множеств, см. [10, 11]. Однако, в данной работе эти вопросы не рассматриваются – мы используем (2.11) просто как удобное обозначение.

Для всех L, $K \in \mathbb{N}_0^d$ и $X \in U^d$ имеет место соотношение

$$W_{L\oplus K}(x) = W_L(x) W_K(x), \tag{2.15}$$

а также соотношение

$$W_L(X \oplus Y) = W_L(X) W_L(Y), \tag{2.16}$$

при условии, что для X, $Y \in U^d$ их сумма $X \oplus Y$ корректно определена, например, если $Y \in \mathbb{Q}^d(2^\infty)$.

В частности, при каждом $s \in \mathbb{N}_0$ сужения функций Уолша $W_L(X)$, $L \in \mathbb{N}_0^d(2^s)$, на $X \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ образуют группу всех характеров аддитивной группы векторного пространства $\mathbb{Q}^d(z^s)$. Это влечет такие равенства

$$(2.17) \qquad 2^{-ds} \sum_{X \in \mathbb{Q}^d(2^s)} W_L(X) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad L = 0, \\ 0 & \text{если} \quad L \in \mathbb{N}_0^d(2^s0 \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Функции Уолша образуют полную ортонормированную систему в $L_2(U^d)$:

$$(2.18) \qquad \int\limits_{U^d} W_k(x) W_L(x) dx = \int\limits_{U^d} W_{k \oplus L}(x) dx = \delta(K \oplus L),$$

где Кронекеровская “дельта” $\delta(k) = 0$ если $k \in \mathbb{N}_0^d \setminus \{0\}$ и $\delta(0) = 1$, и для любой функции $f \in L_2(U^d)$ имеет место разложение в ряд Фурье–Уолша

$$(2.19) \qquad f(x) \simeq \sum_{L \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}_L W_L(x),$$

где коэффициенты Фурье–Уолша

$$(2.20) \qquad \hat{f}_L = \int\limits_{U^d} W_L(x) f(x) dx,$$

а символ $\simeq$ означает либо L_2-сходимость либо просто запись перечня коэффициентов Фурье–Уолша данной функции f. Поскольку функции Уолша вещественно-значные, мы будем предполагать что все рассматриваемые функции и коэффициенты в рядах Фурье–Уолша так же принимают только вещественные значения.

Ввиду полноты и ортонормированности системы функций Уолша имеет место равенство

$$(2.21) \qquad \|f\|_2 = \sum_{L \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}_L^2,$$

где, как обычно, $\|\cdot\|_q$ обозначает стандартную норму в пространстве $L_q(U^d)$

$$(2.22) \qquad \|f\|_q = \left(\int\limits_{U^d} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Для того чтобы рассматривать ряды Фурье–Уолша поточечно, удобно ввести кусочно-постоянные аппроксимации функций. Для $s \in \mathbb{N}_0$ обозначим через $\mathfrak{M}_s$ семейство элементарных кубиков, см. (1.15), (1.16), вида

$$(2.23) \qquad \Delta_S^M = [m, 2^{-s}, (m_1 + 1)2^{-s}) \times \ldots \times [m_d 2^{-s}, (m_d + 1)2^{-s}),$$

где $S=(s,\dots,s)$ и $M=(m,\dots,m_d)\in\mathbb{N}_0^d(2^S)$. Каждый такой кубик имеет объем 2^{-ds} и семейство $\mathfrak{M}_s$ образует разбиение единичного куба U^d. Пусть $f\in L_1(U^d)$, кусочно-постоянная аппроксимация $f^{(s)}$ определяется формулой

$$f^{(s)}(x)=2^{-ds}\int\limits_{\Delta_S^M}f(Y)dY\quad\text{при}\quad X\in\Delta_S^M\in\mathfrak{M}_s. \tag{2.24}$$

Из определения (2.24) сразу же следует такая оценка

$$\inf_{Y\in\Delta_S^M}f(Y)\le f^{(s)}(X)\le\sup_{Y\in\Delta_S^M}f(Y),\quad X\in\Delta_S^M \tag{2.25}$$

Перечислим еще некоторые простейшие свойства таких аппроксимаций. Они легко следуют из определений и приведенных выше свойств функций Уолша, подробности можно найти в [6].

Лемма 2.1. *Пусть $f\in L_1(U^d)$ с рядом Фурье–Уолша* (2.19) *и кусочно-постоянными аппроксимациями $f^{(s)}$, $s\in\mathbb{N}_0$. Тогда при каждом s справедливы следующие утверждения:*

(i) *Ряд Фурье–Уолша $f^{(s)}$ конечен и имеет вид*

$$f^{(s)}(X)=\sum_{L\in\mathbb{N}_0^d(2^s)}\hat f_L W_L(X)$$

с теми же самыми коэффициентами Фурье–Уолша f_L что и в (2.19).

(ii) *Для любой точки $x\in U^d$ имеет место соотношения*

$$f^{(s)}(X)=f^{(s)}(X^{(s)}),$$

где $X^{(s)}$ – проекция x на $\mathbb{Q}^d(2^s)$, см. (1.10), (1.11).

(iii) *Выполняются следующие равенства*

$$2^{-ds}\sum_{X\in\mathbb{Q}^d(2^s)}f^{(s)}(X)=\int\limits_{U^d}f^{(s)}(X)\,dx=\hat f_0.$$

2.2. В одномерном случае функции Радемахера $r_i(x)$, $x\in[0,1)$, $i\in\mathbb{N}$, можно определить одним из следующих выражений

$$r_i(x)=w_{2^{i-1}}(x)=(-1)^{\eta_i(x)}=1-2\eta_i(x), \tag{2.26}$$

где $\eta_i(x)$ – коэффициенты в двоичном разложении (1.6). Удобно так же считать, что $r_0(x)\equiv 1$. Каждая функция Уолша $w_\ell(x)$ единственным образом разлагается в произведение функций Радемахера:

$$w_\ell(x)=\prod_{i\ge1}(r_i(x))^{\lambda_i(\ell)}, \tag{2.27}$$

где $\lambda_i(\ell)$ – коэффициенты в двоичном разложении (2.1).

Многомерные функции Радемахера $R_L(X)$, $L=(\ell_1,\dots,\ell_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $X=(x_1,\dots,x_d)\in U^d$, определяются формулой

$$R_L(X)=\prod_{j=1}^{d} r_{\ell_j}(x_j). \tag{2.28}$$

Очевидно, что

$$R_L(X\oplus Y)=R_L(X)R_L(Y), \tag{2.29}$$

если сумма $X\oplus Y$ определена, например, $Y\in\mathbb{Q}^d(2^\infty)$.

Приведем теперь некоторые простые и полезные формулы с функциями Уолша и Радемахера. Удобно считать, что функции $w_\ell(x)$ и $r_i(x)$ периодически продолжены на всю вещественную ось. В таком случае

$$r_i(x)=r_1(2^{i-1}x),\quad x\in\mathbb{R},\quad i\in\mathbb{N}. \tag{2.30}$$

Сравнивая (2.26) и (1.6), получаем

$$\{x\}=\frac{1}{2}-\sum_{i\geq 1}2^{-i-1}r_i(x), \tag{2.31}$$

где $\{x\}$ – дробная часть $x\in\mathbb{R}$.

Пользуясь формулами (2.27) легко получить тождество

$$\sum_{\ell\in\mathbb{N}_0(2^k)} w_\ell(x)=\prod_{i=1}^{k}(1+r_i(x)),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.32}$$

Мы будем пользоваться обозначением $\chi(\mathcal{E},.\,)$ для характеристической функции подмножества $\mathcal{E}\subset U^d$,

$$\chi(\mathcal{E},x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad X\in\mathcal{E},\\ 0 & \text{при}\quad X\notin\mathcal{E}.\end{cases} \tag{2.33}$$

Тождество (2.32) можно записать в терминах характеристической функции $\chi(\Delta_k^0,.\,)$ элементарного интервала $\Delta_a^0\subset[0,1)$, см. (1.15):

$$2^{-k}\sum_{\ell\in\mathbb{N}_0(2^k)} w_\ell(x)=\chi(\Delta_k^0,x),\quad k\in\mathbb{N}_0. \tag{2.34}$$

В такой форме это тождество остается справедливым и при $k=0$.

Введем следующие интервалы в $\mathbb{N}_0$:

$$\Pi_0=\{0\},\quad \Pi_k=\{\ell\in\mathbb{N}:\,2^{k-1}\leq\ell<2^k\},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{2.35}$$

Заметим, что используя определение (2.11), итнтервалы (2.35) можно определить следующим образом

$$\Pi_a = \{\ell \in \mathbb{N}_0 \,:\, \rho(\ell) = k\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.36}$$

Легко вычислить сумму функций Уолша по интервалам (2.35). С учетом (2.15) и (2.26) получаем

$$\sum_{\ell \in \Pi_k} w_\ell(x) = r_k(x) \sum_{a \in \mathbb{N}_0(2^{k-1})} w_a(x), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.37}$$

Используя (2.37) и (2.34), получаем

$$2^{-k-1} \sum_{\ell \in \Pi_k} w_\ell(x) = r_k(x) \chi(\Delta^0_{k-1}, x), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Введем обозначение

$$k^* = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k = 0, \\ k-1 & \text{при} \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.39}$$

Тождество (2.38) можно переписать в виде

$$2^{-k^*} \sum_{\ell \in \Pi_k} w_\ell(x) = r_k(x) \chi(\Delta^0_{K^*}, x), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.40}$$

В такой форме это тождество остается справедливым и при $k = 0$.

Рассмотрим прямоугольные ящики $\Pi_K \subset \mathbb{N}_0^d$, $K = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$, следующего вида

$$\Pi_K = \Pi_{k_1} \times \ldots \times \Pi_{k_d} = \{L = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}_0^d \,:\, \rho(\ell_j) \le k_j, \quad j = 1, \dots, d\}, \tag{2.41}$$

где $\Pi_k \subset \mathbb{N}_0$ интервалы (2.35), (2.36). Мы будем пользоваться обозначением $K^* = (k_1^*, \dots, k_d^*$, где k_j^*, $j = 1, \dots, d$, определяются формулой (2.39).

Перемножая формулы (2.34) с $k = k_j$, $j = 1, \dots, d$, и, аналогично, формулы (2.40) с $k = k_j$, $j = 1, \dots, d$, получаем следующее утверждение.

Лемма 2.2. *При каждом $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}_0^d$ имеют место тождества*

$$2^{-k_1 - \ldots - k_d} \sum_{L \in \mathbb{N}_0(2^K)} W_L(X) = \chi(\Delta^0_K, X), \tag{2.42}$$

$$2^{-k_1^* - \ldots - k_d^*} \sum_{L \in \Pi_K} W_L(X) = R_K(X) \chi(\Delta^0_{K^*}, X). \tag{2.43}$$

Нам будут полезны следующие простые факты об элементарных интервалах (1.15) и ящиках (1.16). При каждом фиксированном $a \in \mathbb{N}_0$ элементарные интервалы Δ^m_a, $m \in \mathbb{N}_0(2^a)$, образуют разбиение единичного интервала, каждая точка $x \in [0, 1)$

принадлежит в точности одному из этих интервалов. Если (1.6) ее двоичное представление, то $x \in \Delta_a^m$ с номером

$$m = m(x) = [2^a x] = \sum_{i=1}^{a} 2^{a-i}\eta_i(x) = \sum_{i=1}^{a} \eta_{a+1-i}(x) 2^{i-1}, \tag{2.44}$$

здесь $[t]$ – целая часть $t \in \mathbb{R}$ и равенства (2.44) определяют двоичное представление (2.1) для номера m.

Пусть $x, y \in [0,1)$ и определена их сумма $x \oplus y$, скажем, $y \in \mathbb{Q}(2^\infty)$, см. §1. Используя двоичные представления для x и y, непосредственно проверяется, что $x \oplus y \in \Delta_a^0$ если и только если $m(x) = m(y)$, т.е. x и y принадлежат одному и тому же элементарному интервалу Δ_a^m. Этот факт можно записать в виде следующей формулы для характеристических функций $\chi(\Delta_a^m, .\,)$ интервалов Δ_a^m:

$$\chi(\Delta_a^0, x \oplus y) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0(2^a)} \chi(\Delta_a^m, x)\chi(\Delta_a^m, y). \tag{2.45}$$

В многомерном случае эта формула приобретает вид

$$\chi(\Delta_A^0, X \oplus Y) = \sum_{M \in \mathbb{N}_0^d(2^A)} \chi(\Delta_A^M, X)\chi(\Delta_A^M, Y). \tag{2.46}$$

2.3. В одномерном случае функции Радемахера образуют лакунарную по Адамару подсистему функций Уолша. Это влечет следующий з а м е ч а т е л ь н ы й факт: Пусть функция $f \in L_2(0,1)$ разлагается в ряд по функциям Радемахера

$$f(x) \simeq \sum_{\ell \geq 1} \hat{f}_\ell r_\ell(x), \tag{2.47}$$

тогда для всех $q < \infty$ $f \in L_q(0, \infty)$ и все нормы $\|f\|_q$ эквивалентны $\|f\|_2$. Точнее, имеет место *неравенство Хинчина*

$$\beta_q \left(\sum_{\ell \geq 1} \hat{f}_\ell^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_q \leq \alpha_q \left(\sum_{\ell \geq 1} \hat{f}_\ell^2 \right)^{1/2} \tag{2.48}$$

с положительными постоянными α_q и β_q независящими от f. В частности, можно взять

$$\alpha_q = \left(\frac{1}{2} q + 1 \right)^{1/2}.$$

Неравенство Хинчина (2.48) является одним из базовых фактов в гармоническом анализе и теории вероятностей, его доказательство можно найти во многих источниках, см., например, [6, 13]; сошлемся еще на обзор [9], где это неравенство обсуждается в широком контексте, в частности, с вниманием к точным значениям констант α_q и β_q.

В этой работе нас будет интересовать только правое из неравенств (2.48), причем обобщенное на случай нескольких переменных.

К сожалению, при $d > 1$ теряется как однозначность разложения функций Уолша в произведение функций Радемахера ср. (2.27), так и лакунарность по Адамару множества d-мерных функций Радемахера. Тем не менее, аналог неравенства (2.48) остается в силе.

Используя правое неравенство (2.48) при $d = 1$, индукцией по d легко устанавливается следующий ф а к т (см. [13, Приложение Г]): Пусть функция $f \in L_2(U^d)$ разлагается в ряд по d-мерным функциям Радемахера

$$f(x) \simeq \sum_{L \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}_L \, R_L(x), \tag{2.49}$$

тогда для всех $q < \infty$ $f \in L_q(U^d)$ и имеет место *d-мерное неравенство Хинчина*

$$\|f\|_q \leq (2\alpha_q)^d \left(\sum_{L \in \mathbb{N}_0^d} \hat{f}_L^2 \right)^{1/2}, \tag{2.50}$$

где α_q – та же константа, что и в (2.48).

Отметим, что в разложении (2.49) учитываются все функции Радемахера зависящие от $k \leq d$ переменных; в частности, при $d = 1$ в (2.47) следует добавить постоянный член $\hat{f}_0 r_0(x)$. Поэтому в (2.50) участвует константа $2\alpha_q$ вместо α_q.

Нам понадобится следующая простая модификация неравенства (2.50). Рассмотрим линейные комбинации функций Радемахера

$$\Omega_K(x) = \sum_{L \in \mathbb{N}_0^d} \Omega_{K,L} \, R_L(x), \; k \in \mathbb{N}_0^d, \tag{2.51}$$

считая что матрица коэффициентов $((\Omega_{K,L}))$ порождает ограниченный оператор Ω в пространстве $\ell_2(\mathbb{N}_0^d)$. Предположим, например, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sup_K \sum_L |\Omega_{K,L}| < \infty, \\ \gamma_2 &= \sup_L \sum_K |\Omega_{K,L}| < \infty, \end{aligned} \tag{2.52}$$

тогда, как известно, оператор Ω ограничен и $\|\Omega\| \leq \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$.

С учетом сказанного, неравенство (2.50) сразу же влечет такое утверждение

Лемма 2.1. *Предположим, что выполнены условия* (2.52), *тогда при каждом* $q < \infty$ *и всех квадратично-суммируемых последовательностях* $\{b_k, k \in \mathbb{N}_0^d\}$ *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned} &\left(\int_{U^d} \left| \sum_{K \in \mathbb{N}_0^d} b_K \Omega_K(Y) \right|^q dY \right)^{1/q} \\ &\leq [\gamma_1 \gamma_2 (q+2)]^{d/2} \left(\sum_{K \in \mathbb{N}_0^d} b_k^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

3. Формулы для L^q-уклонений. Уклонения и дисбалансы распределений

3.1. Для получения явных формул для L_q-уклонений (1.2) нам понадобится разложение Фурье–Уолша (2.19) для характеристической функции $\chi(B_Y, \cdot)$ прямоугольного ящика $B_Y = [0, Y,) \dots [0, Y_d) \subset U^d$, см. (1.15), (1.16).

В одномерном случае характеристическая функция $\chi([0, Y), \cdot)$ интервала $[0, y) \subset [0, 1)$ имеет следующий ряд Фурье–Уолша

$$\chi([0, Y), x) \simeq \sum_{\ell \geq 0} \hat{\chi}_\ell(y) w_\ell(x), \tag{3.1}$$

с коэффициентами Фурье–Уолша

$$\hat{\chi}_\ell(y) = \int_0^y w_\ell(x) dx. \tag{3.2}$$

Вычисление интегралов (3.2) хорошее упражнение с функциями Уолша и Радемахера, но мы сошлемся на работу [5, §3], где это уже было сделано. Ответ следующий:

$$\hat{\chi}_\ell(y) = 2^{-\rho(\ell)} \psi_{\rho(\ell)}(y) w_\ell(y), \tag{3.3}$$

где $\rho(\ell)$ опрпеделено в (2.11) а функции $\psi_k(y)$, $k \geq 0$, имеют вид

$$\psi_0(y) = \{y\} = \frac{1}{2} - \sum_{i \geq 1} 2^{-i-1} r_i(y), \tag{3.4}$$

см. (2.31), а при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \psi_k(y) &= \{2^{k-1} y + \frac{1}{2}\} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} r_k(y) + \{2^{k-1} y\} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} r_k(y) - \sum_{i \geq 1} 2^{-i-1} r_{k+i}(y), \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\{x\}$ – дробная часть $x \in \mathbb{R}$.

Для нашего рассмотрения принципиально важно что ряды Фурье–Уолша (3.4) и (3.5) для функций $\psi_k(y)$ содержат только функции Радемахера и, следовательно, являются лакунарными.

Ряды (3.4) и (3.5) сходятся абсолютно и равномерно и удовлетворяют оценке

$$\sup_y |\psi_k(y)| \leq 1. \tag{3.4}$$

Подставляя формулу (3.3) в (3.1), получим

$$x([0, y), x) \simeq \sum_{\ell \geq 0} 2^{-\rho(\ell)} \psi_{\rho(\ell)}(y) w_\ell(y) w_\ell(x). \tag{3.5}$$

Здесь мы еще не можем воспользоватсья соотношением (2.16) и заменить $w_\ell(y)w_\ell(x)$ на $w_\ell(y \oplus x)$, поскольку x и y произвольны и выражение $y \oplus x$, вообще говоря, не определено. Для того чтобы сделать такое преобразование, рассмотрим кусочно-постоянные аппроксимации $\chi^{(s)}([0,y),\cdot)$ характеристической функции $\chi([0,y),\cdot)$.

Используя Лемму 2.1 (i) из (3.5), получаем

$$\begin{aligned} \chi^{(s)}([0,y),x) &= \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0(2^s)} 2^{-\rho(\ell)}\psi_{\rho(l)}(y)w_\ell(y)w_\ell(x) \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{N}_0(2^s)} 2^{-\rho(\ell)}\psi_{\rho(\ell)}(y)w_\ell(y^{(s)}\oplus x^{(s)}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $y^{(s)}$ и $x^{(s)}$ – соответственно, проекции y и x на $\mathbb{Q}(2^s)$, см. (1.9).

Оценим точность такой аппроксимации. Используя определение (2.24) и неравенства (2.25), находим

$$\chi([0,y),x) = x^{(s)}([0,y),x) + \theta(y,x)x(\Delta_s(y),x), \tag{3.7}$$

где $\chi(\Delta_s(y),x)$ – характеристическая функция единственного элементарного интервала $\Delta_s(y) = [m2^{-s},(m+1)2^{-s}), m = m(y)$, содержащего точку y, см. (2.44), а $\theta(y,x)\in[0,1)$ при всех y и x. Кроме того, с учетом (3.4) получаем оценку

$$0 \le \chi^{(s)}([0,y),x) \le 1$$

при всех y и x.

Преобразуем сумму (3.6), сгруппировав вместе члены с $\rho(\ell)=k$. Пользуясь (2.36), получаем

$$\chi^{(s)}(0,y),x) = \sum_{k=0}^{s} 2^{-k}\psi_k(y)\sum_{\ell\in\Pi_k} w_\ell(y^{(s)}\oplus x^{(s)}). \tag{3.8}$$

Внутренняя сумма в (3.8) была уже вычислена в (2.38). Пользуясь (2.38), получаем

$$\begin{aligned} \chi^{(s)}([0,y),x) &= \psi_0(y) + \sum_{k=1}^{s} 2^{-k}\frac{1}{2}\psi_k(y)r_k(y^{(s)}\oplus x^{(s)})\chi(\Delta^0_{k-1},y^{(s)}\oplus x^{(s)}) \\ &= \sum_{k=0}^{s} 2^{-k}\omega_k(y)r_k(y^{(s)}\oplus x^{(s)})\chi(\Delta^0_{K^*},y^{(s)}\oplus x^{(s)}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где мы обозначили для удобства

$$\omega_0(y)=\psi_0(y),\ \omega_k(y)=\frac{1}{2}\psi_k(y),\ k\ge 1, \tag{3.10}$$

а k^* определено в (2.39).

Запишем формулу (3.9) для каждой координатной оси единичного куба полагая $y = y_j$, $x = x_j$, $j = 1, \dots, d$, и перемножим эти формулы. Мы получим следующую кусочно-постоянную аппроксимацию характеристической функции ящика $B_Y \subset U^d$:

$$\chi^{(s)}(B_y, x) = \sum_{K \in [0,s]^d} 2^{-k_1 - \dots - k_d} \Omega_K(Y) R_K(Y^{(s)} \oplus X^{(s)}) \chi(\Delta^0_{K^*}, Y^{(s)} \oplus X^{(s)}). \tag{3.11}$$

Суммирование в (3.11) ведется по всем $K = (k_1, \dots k_j)$ с $0 \le k_j \le s$, $j = 1, \dots, d$,

$$\Omega_K(Y) = \prod_{j=1}^{d} \omega_{k_j}(y_j), \tag{3.12}$$

$R_K(\cdot)$-d-мерная функция Радемахера (2.28), $K^* = (k^*_1, \dots, k^*_d)$ и k^*_j определены в (2.39), $\Delta^0_{K^*} \subset U^d$ – соответствующий элементарный ящик (1.16), $Y^{(s)}$ и $X^{(s)}$ – проекции соответствующих точек Y и X на $\mathbb{Q}^d(2^s)$.

Отметим следующее важное свойство суммы (3.11), ср. Лемма 2.3 (iii) и (2.13),

$$\chi^{(s)}(B_Y, X) = \chi^{(s)}(B_Y, X^{(s)}). \tag{3.13}$$

Отметим еще, что в сумме (3.11) член с $K = 0$ равен $y_1, \dots, y_d = \operatorname{vol} B_Y$.

Используя (3.7), нетрудно получить следующую оценку точности аппроксимации (3.11):

$$\chi(B_Y, X) = \chi^{(s)}(B_Y, X) + \varepsilon^{(s)}(Y, X), \tag{3.14}$$

где

$$\varepsilon^{(s)}(Y, X) = \sum_{j=1}^{d} \theta_j(Y, X) \chi(\Delta_{s,j}(Y), X), \tag{3.15}$$

здесь $\chi(\Delta_{s,j}(Y), X)$ – характеристические функции следующих элементарных ящиков

$$\Delta_{s,j}(Y) = \begin{cases} \Delta_s(y_1) \times [0,1)^{d-1} & \text{если} \quad j = 1, \\ [0,1)^j \times \Delta_s(y_j) \times [0,1)^{d-j} & \text{если} \quad j = 2, \dots, d; \end{cases} \tag{3.16}$$

а $\theta_j(Y, X)$, $j = 1, \dots, d$, – некоторые функции с $|\theta_j(Y, X)| < 1$ для всех Y и X.

Сумму (3.15) можно, очевидно, оценить следующим образом

$$|\varepsilon^{(s)}(Y, X)| < \sum_{j=1}^{d} \chi(\Delta_{s,j}(Y), X). \tag{3.17}$$

3.2. Пусть $D \subset U^d$ – произвольное распределение конечного числа точек. Локальное уклонение $\mathcal{L}[D, Y]$, см. (1.1), можно записать в виде

$$\mathcal{L}[D, Y] = \sum_{X \in D} \left(\chi(B_Y, X) - \operatorname{vol} B_Y \right). \tag{3.18}$$

Подставляя в (3.18) выражение (3.14), получим

$$\mathcal{L}[D, Y] = \mathcal{L}^{(s)}[D, Y] + \varepsilon^{(s)}(Y), \tag{3.19}$$

где

$$\mathcal{L}^{(s)}[D, Y] = \sum_{\chi \in D} (x^{(s)}(B_Y, x) - \operatorname{vol} B_Y) \tag{3.20}$$

и

$$\varepsilon^{(s)}[D, Y] = \sum_{\chi \in D} \varepsilon^{(s)}(Y, X) \tag{3.21}$$

Пользуясь (3.11), находим

$$\mathcal{L}^{(s)}[D, Y] = \sum_{K \in [0,s]^d \setminus \{0\}} 2^{-k_1 - \ldots - k_d} \Omega_K(Y) \Phi_K[D, Y^{(s)}], \tag{3.22}$$

где $\Phi_K[D, Y^{(s)}]$ обозначает следующую сумму

$$\Phi_K[D, Y^{(s)}] = \sum_{X \in D} R_K(Y^{(s)} \oplus X^{(s)}) \chi(\Delta^0_{K^*}, Y^{(s)} \oplus X^{(s)}). \tag{3.23}$$

Из формул (3.22) и (3.23) сразу же следуют такие важные свойства

$$\Phi_K[D, Y^{(s)} = \Phi_K[D^{(s)}, Y^{(s)}], \mathcal{L}^{(s)}[D, Y] = \mathcal{L}^{(s)}[D^{(s)}, Y] \tag{3.24}$$

где

$$D^{(s)} = \{X^{(s)} \, : \, X \in D\} \tag{3.25}$$

– проекция распределения D на $\mathbb{Q}^d(2^s)$.

Таким образом, аппроксимация (3.22) и суммы (3.23) зависят только от проекции $D^{(s)}$ распределения D.

Пользуясь (3.15), получаем для (3.21) следующую оценку

$$|\varepsilon^{(s)}[D, Y]| < \sum_{j=1}^{d} \sum_{X \in D} \chi(\Delta_{s,j}(Y), X) = \sum_{j=1}^{d} \#\{\Delta_{s,j}(Y) \cap D\}. \tag{3.26}$$

Положим

$$\mu^{(s)}[D] = \max\{\#\{\Delta^M_A \cap D\} : \operatorname{vol} \Delta^M_A = 2^{-s}\}, \tag{3.27}$$

где максимум вычисляется по всем элементарным ящикам (1.16) объема $\mathrm{vol}\,\Delta_A^M = 2^{-s}$. Поскольку, при любом $A \in \mathbb{N}_0(2^s)$ каждый сдвиг $\Delta_A^M \oplus T = \Delta_A^{M(T)}$, эквивалентен некоторой перестановке ящиков Δ_A^M, мы имеем равенство

$$\mu^{(s)}[D \oplus T] = \mu[D], \quad T \in \mathbb{Q}^d(2^s). \tag{3.28}$$

Из (3.26) и (3.27) получаем оценку

$$\sup_Y |\varepsilon^{(s)}[D, Y]| < d\mu^{(s)}[D]. \tag{3.29}$$

Подставляя (3.19), (3.29) в (1.2) и пользуясь неравенством Минковского, получаем следующее выражение для L_q-уклонения

$$\mathcal{L}_q[D] = \mathcal{L}_q^{(s)}[D] + \theta d\mu[D], \tag{3.30}$$

где

$$\mathcal{L}_q^{(s)}[D] = \left(\int_{U^d} |\mathcal{L}^{(s)}[D, Y]|^q dY \right)^{1/q}. \tag{3.31}$$

и, наконец, для средних (1.14) находим

$$\mathcal{M}_{s,q}[D] = \mathcal{M}_{s,q}^{(s)}[D] + \theta d\mu[D], \tag{3.32}$$

где

$$\mathcal{M}_{s,q}^{(s)}[D] = \left(2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} (\mathcal{L}_q^{(s)}[D \oplus T])^q \right)^{1/q} \tag{3.33}$$

В формулах (3.30) и (3.33) $|\theta| < 1$.

Перепишем формулу (3.33) с учетом (3.31) следующим образом

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_{s,q}^{(s)}[D])^q &= 2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} \int_{U^d} |\mathcal{L}^{(s)}[D \oplus T, Y]|^q dY \\
&= \int_{U^d} dY\, 2^{-ds} \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} |\mathcal{L}^{(s)}[D \oplus T, Y]|^q
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Рассмотрим внутреннюю сумму в (3.34). С учетом (3.22) и (3.23), получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} |\mathcal{L}^{(s)}[D \oplus T, Y]|^q \\
&= \sum_{T \in \mathbb{Q}^d(2^s)} \Bigg| \sum_{k \neq 0} 2^{-k_1 - \ldots - k_j} \Omega_K(Y) \\
&\cdot \sum_{X \in D} R_K(Y^{(s)} \oplus X^{(s)} \oplus T) \chi(\Delta_{K^*}^0, Y^{(s)} \oplus X^{(s)} \oplus T) \Bigg|^q \\
&= \sum_{Z \in \mathbb{Q}^d(2^s)} \Bigg| \sum_{k \neq 0} 2^{-k_1 - \ldots - k_j} \Omega_K(Y) \\
&\cdot \sum_{X \in D} R_K(Z \oplus X^{(s)}) \chi(\Delta_{K^*}^0, Z \oplus X^{(s)}) \Bigg|^q,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

где при каждом фиксированном $Y^{(s)} \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ мы ввели новую переменную $Z = Y^{(s)} \oplus T$.

Таким образом, третья сумма в (3.35) не зависит от Y. Подставля (3.35) в (3.34), получаем

$$\mathcal{M}_q^{(s)}[D])^q = 2^{-ds} \sum_{Z\in\mathbb{Q}^d(2^s)} \int_{U^d} \Big| \sum_{K\neq 0} \beta_K[D,Z]\Omega_K(Y)\Big|^q dY, \tag{3.36}$$

где мы обозначили

$$\beta_K[D,Z] = \sum_{X\in D} R_K(X^{(s)} \oplus Z)\chi(\Delta^0_{K^*}, X^{(s)} \oplus Z). \tag{3.37}$$

Для упрощения записи, мы не указываем в суммах по K в (3.35), (3.36), область суммирования:

$$K \in [0,s]^d \setminus \{0\}. \tag{3.38}$$

Эта сокращенная запись используется и в последующих формулах.

Используя формулы (2.16) и (2.46), преобразуем выражение (3.37) следующим образом

$$\beta_K[D,Z] = \sum_{M\in\mathbb{N}_0^d(2^{K^*})} R_K(Z)\chi(\Delta^M_{K^*}, Z)\sigma_{K,M}[D], \tag{3.39}$$

где

$$\sigma_{K,M}[D] = \sum_{X\in D} R_K(X)\chi(\Delta^M_{K^*}, X) \tag{3.40}$$

Эту сумму можно записать так

$$\sigma_{K,M}[D] = N^+_{K,M}[D] - N^-_{K,M}[D], \tag{3.41}$$

где

$$N^{\pm}_{K,M}[D] = \#\{X \in D \cap \Delta^M_{K^*} : R_K(X) = \pm 1\}. \tag{3.42}$$

Например, при $d = 1$ и $k = 1$ единственная величина (3.40) это $\sigma_{1,0}[D] = N^+_{1,0} - N^-_{1,0}$, где $N^+_{1,0}$ и $N^-_{1,0}$ – количества точек D попавших соответственно, в интервалы $[0, 1/2)$ и $[1/2, 1)$. В связи с квадратурными формулами величины (3.41) рассматривались в [12].

Величину (3.40) естественно назвать *дисбалансом* распределения D в элементарном ящике $\Delta^M_{K^*}$.

Наша ближайшая цель – оценить средние (3.33) в терминах дисбалансов (3.40).

При каждом $Z \in \mathbb{Q}^d(2^s)$ к интегралу в сумме (3.36) можно применить модифицированное неравенство Хинчина из Леммы 2.1. Положительные постоянные γ_1, γ_2, см.

(2.52), для нашей конкретной системы функций (3.10), (3.12) легко оцениваются: γ_1, $\gamma_2 \le 1$. В результате мы получаем оценку

$$(\mathcal{M}^{(s)}_{s,q}[D])^q \le (q+2)^{\frac{1}{2}dq} 2^{-ds} \sum_{Z\in\mathbb{Q}^d(2^s)} \left(\sum_{K\neq 0} \beta^2_K[D,Z] \right)^{q/2} \tag{3.43}$$

и, следовательно,

$$(\mathcal{M}^{(s)}_{s,q}[D]) \le (q+2)^{d/2} \left(2^{-ds} \sum_{Z\in\mathbb{Q}^d(2^s)} \left(\sum_{K\neq 0} \beta^2_K[D,Z] \right)^{q/2} \right)^{1/q} \tag{3.44}$$

Пусть $q \ge 2$. Применим к правой части (3.44) неравенство Минковского с показателем $q/2 \ge 1$. Мы получим

$$(M^{(s)}_{s,q}[D]) \le (q+2)^{d/2} \left(\sum_{K\neq 0} \left(2^{-ds} \sum_{Z\in\mathbb{Q}^d(2^s)} |\beta_K[D,Z]|^q \right)^{2/q} \right)^{1/2} \tag{3.45}$$

При каждом K введем разбиение единичного куба на следующие элементарные ящики

$$U^d = \bigsqcup_{M\in\mathbb{N}^d_0(2^{K^*})} \Delta^M_{K^*} \tag{3.46}$$

Используя это разбиение и формулу (3.39), находим

$$|\beta_K[D,Z]|^q = \sum_{M\in\mathbb{N}^d_0(2^{K^*})} \chi(\Delta^M_{K^*}, Z) |\sigma_{K,M}[D]|^q \tag{3.47}$$

Легко проверить, что

$$2^{-ds} \sum_{Z\in\mathbb{Q}^d(2^s)} \chi(\Delta^M_{K^*}, Z) = 2^{-ds} \#\{\Delta^M_{K^*} \cap \mathbb{Q}^d(2^s)\} = \operatorname{vol} \Delta^M_{K^*} = 2^{-k_1^* - \dots k_d}, \tag{3.48}$$

достаточно, например, воспользоваться леммой 2.1 (iii).

Подставляя (3.47) и (3.48) в (3.44), получаем

$$\mathcal{M}^{(s)}_{s,q}[D] \le (q+2)^{d/2} \left(\sum_{K\neq 0} \tau^2_{q,K}[D] \right)^{1/2}, \tag{3.49}$$

где

$$\tau_{q,K}[D] \left(2^{-k^* - \dots k^*_d} \sum_{M\in\mathbb{N}^d_0(2^{K^*})} |\sigma_{K,M}[D]|^q \right)^{1/q}. \tag{3.50}$$

Величину (3.50) естественно назвать L_q-*средним дисбалансом по разбиению* (3.46).

Подведем итог нашего обсуждения. Пользуясь формулами (3.32) и (3.49), приходим к следующему утверждению

Теорема 3.1. *При всех $q \geq 2$ и $s \in \mathbb{N}_0$ для любого распределения $D \subset U^d$ средние L_q-уклонений* (1.14) *и L_q-средние дисбалансов* (3.50) *связаны следующим неравенством*

$$\mathcal{M}_{s,q}[D] \leq (q+2)^{\frac{1}{2}d} \left(\sum_{K \neq 0} \tau^2_{q,K}[D] \right)^{1/2} + d\mu^{(s)}[D], \tag{3.51}$$

где $\mu^{(s)}[D]$ определено в (3.27), *суммирования по K в* (3.51) *ведется по области* (3.38).

4. Доказательство Теоремы 1.1

Доказанная выше Теорема 3.1 справедлива для произвольных распределений конечного числа точек в единичном кубе. Для доказательства Теоремы 1.1 достаточно специализировать в Теореме 3.1 распределение D как (δ, s, d)-сетку.

Для (δ, s, d)-сеток дисбалансы (3.40) и (3.50) малы – можно сказать, что (δ, s, d)-сетки являются *хорошо сбалансированными распределениями.* В точных терминах этот факт выражается следующим образом.

Лемма 4.1. *Для любой (δ, s, d)-сетки D и $q \geq 2$ L_q – средние дисбалансы* (3.50) *удовлетворяют соотношениям*:

$$\tau_{q,k}[D] = 0 \tag{4.1}$$

при $0 < k_1 + \ldots + k_d \leq s - \delta$ *и*

$$\tau_{q,k}[D] \leq 2^{\frac{1}{q}(d+s-k_1-\ldots-k_d)+\delta+d} \tag{4.2}$$

при $k_1 + \ldots + k_d > s - \delta$.

Доказательство леммы 3.1 приводится ниже. Отметим, что оценку (4.2) можно несколько улучшить:

$$\tau_{q,k}[D] \leq 2^{\frac{1}{q}(d+s-k_1-\ldots-k_d)+(1-\frac{1}{q})\delta+d}, \tag{4.3}$$

но и оценка (4.2) достаточна для доказатеьства Теоремы 1.1.

Доказательство Теоремы 1.1. Из определения (δ, s, d)-сеток сразу же следует такая оценка

$$\mu^{(s)}[D] \leq 2^{\delta}, \tag{4.4}$$

поскольку, каждый элементарный ящик объема 2^{-s} содержится в большем элементарном ящике объема $2^{\delta-s}$, содержащем в точности 2^{δ} точек сетки D.

Подставляя оценку (4.4) и соотношения (4.1) и (4.2) в неравенство (3.51), получим

$$\mathcal{M}_{s,q}[D] \leq (q+2)^{\frac{1}{2}d} 2^{(1+\frac{1}{q})(d+\delta)} (\textstyle\sum_{s,\delta})^{\frac{1}{2}} + d2^{\delta}, \tag{4.5}$$

где $\sum_{s,\delta}$ обозначает следующую сумму

$$(4.6)\qquad \sum{}_{s,\delta} = \sum_{k_1+\ldots+k_d>s-\delta} 2^{\frac{2}{q}(s-\delta-k_1-\ldots-k_d)}$$

и суммирование ведется по $k = (k_1, \ldots, k_d) \in [0, s]^d$ с условием $k_1 + \ldots + k_d > s - \delta$.

Сумму (4.6) можно записать в виде

$$(4.7)\qquad \sum{}_{s,\delta} = \sum_{t=1}^{ds} a(t) 2^{-\frac{2}{q}t},$$

где $a(t) = \#\{K \in [0, s]^d : k_1 + \ldots + k_d = t\}$. Легко видеть, что $a(t) \le (s + 1)^{d-1}$ при всех t. Пользуясь этой оценкой, получаем

$$(4.8)\qquad \sum{}_{s,\delta} < (s+1)^{d-1} \sum_{t=1}^{\infty} 2^{-\frac{2}{q}t} = (s+1)^{d-1} 2^{-\frac{2}{q}} (1 - 2^{-\frac{2}{q}})^{-1} < 4q(s+1)^{d-1}.$$

Подставляя (4.8) в (4.5) и учитывая, что $q \ge 2$, находим

$$(4.9)\qquad \mathcal{M}_{s,q}[D] < 2^{2d+2\delta+2} q^{\frac{1}{2}(d+1)} (s+1)^{\frac{1}{2}(d-1)}.$$

Теорема 1.1 доказана. □

Доказательство Леммы 4.1. Равенство (4.1) непосредственно вытекает из определения (δ, s, d)-сеток и определений дисбалансов (3.40), (3.50). Действительно, если $K \ne 0$, то элементарный ящик $\Delta^M_{K^*}$ объема $2^{-k_1^*-\ldots-k_j^*}$ разбивается на четное число $2^{\varkappa(K)}$ меньших элементарных ящиков $\Delta^{M'}_K$ объема $2^{-k_1-\ldots-k_d}$. Здесь $\varkappa(K)$ – хеммингowский вес вектора $K = (k_1, \ldots, k_d)$, равный числу ненулевых компонент; ясно, что $1 \le \varkappa(K) \le d$, $K \ne 0$ и

$$(4.10)\qquad k_1^* + \ldots + k_d^* = k_1 + \ldots + k_d - \varkappa(K).$$

На одной половине этих меньших ящиков функция Радемахера $R_K(X) = 1$, а на другой половине $R_K(X) = -1$. Если $k_1 + \ldots + k_d \le s - \delta$, то $2^{-k_1-\ldots-k_d} \ge 2^{\delta-s}$, а это означает, что каждый из ящиков $\Delta^{M_1}_K$ разбивается на $2^{s-\delta-k_1-\ldots-k_d}$ еще меньших элементарных ящиков объема $2^{\delta-s}$ и, по определению (δ, s, d)-сеток, каждый из этих меньших ящиков содержит в точности 2^δ точек распределения D. Таким образом, по формуле (3.42) получаем

$$N^+_{K,M}[D] = N^-_{K,M}[D] = 2^\delta \cdot 2^{s-\delta-k_1-\ldots-k_d} \cdot 2^{\varkappa(K)-1} = 2^{s-k_1^*-\ldots-k^*-1}.$$

Следовательно, $\sigma_{K,M}[D] = 0$ и $\tau_{q,K}[D] = 0$.

Равенства (4.1) доказаны. □

Докажем теперь неравенства (4.2). Пусть $k_1 + \ldots k_d > s - \delta$. Тогда, объем любого элементарного ящика Δ^M_K меньше $2^{\delta-s}$ и, по определению (δ, s, d)-сеток $\#\{D \cap \Delta^M_K\} \le 2^\delta$. С другой стороны, каждый элементарный ящик $\Delta^M_{K^*}$ разбивается на $2^{\varkappa(K)} \le$

2^d меньших ящиков $\Delta_K^{M'}$ и, поэтому, $\#\{D \cap \Delta_{K^*}^M\} \le 2^{d+\delta}$. С учетом этой оценки, дисбаланс (3.40) можно оценить следующим образом

$$|\sigma_{K,M}[D] \le \#\{D \cap \Delta_{K^*}^M\}\varepsilon_{K^*,M} \le 2^{d+\delta}\varepsilon_{K^*,M}, \tag{4.11}$$

где

$$\varepsilon_{K^*,M} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad D \cap \Delta_{K^*}^M = \varnothing, \\ 1 & \text{при} \quad D \cap \Delta_{K^*}^M \ne 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Заметим, что

$$\sum_{M \in \mathbb{N}_0^d(2^{K^*})} \varepsilon_{K^*,M} \le \#\{D\} = 2^s. \tag{4.13}$$

Подставляя оценку (4.11) в формулу для дисбаланса (3.50) и учитывая (4.13) и (4.10), получаем

$$\tau_{q,K}[D] \le 2^{d+\delta} \left(2^{-k_1^* - \ldots - k_d^*} \sum_{M \in \mathbb{N}_0^d(2^{K^*})} \varepsilon_{K^*,m} \right)^{1/q} \le 2^{d+\delta} 2^{\frac{1}{q}(d+s-k_1-\ldots-k_1)}. \tag{4.14}$$

Неравенства (4.2) доказаны.

Лемма 4.1 доказана. □

Литература

1. J. Beck, W. W. L. Chen, *Irregularities of point distributions.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
2. W. W. L. Chen, *On irregularities of distributions* II. — Quart. J. Math. Oxford **34** (1983), 257–279.
3. W. W. L. Chen, M. M. Skriganov, *Orthogonality and digit shifts in the classical mean squares problem in irregularities of point distribution, Diophantine Approximation.* Festshrift dedicated to Wolfgang Shmidt's 70th birthday (H. P. Schlickewei et al. Editors), Springer-Verlag, Berlin 2008.
4. H. Faure, *Discrépance de suites associées a un système de numération (en dimension s).* — Acta Arith. **41** (1982), 337–351.
5. N. J. Fine, *On the Walsh functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), 372–414.
6. Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша.* Наука, М., 1987.
7. J. Matoušek, *Geometric discrepance. An illustrated quide.* Springer Ser. Algor. Combin. **18**, Springer, Berlin, 1999.
8. H. Niederreiter, *Nets, (t, s)-sequences, and algebraic curves over finite fields with many rational points*, International Congress of Mathematicians in Berlin, Extra Volume III, Documenta Mathematica (1998), 337–386.

9. Г. Пешкир, А. Н. Ширяев, *Неравенства Хинчина и мартингальное расширение сферы их действия.* — УМН, **50** (5) (1995), 3–62.
10. М. М. Скриганов, *Теория кодирования и равномерные распределения.* — Алгебра и анализ **13** (2) (2001), 220–273.
11. M. M. Skriganov, *Harmonic analysis on totally disconnected groups and irregularities of point distributions.* — J. reine angw. Math. **600** (2006), 25–49.
12. И. М. Соболь, *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.* Наука, М., 1969.
13. И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* Мир, М., 1973.