

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК ВБЛИЗИ ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В.Б. Филиппов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
191013, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: filippov@pdmi.ras.ru
Декабрь, 2010

Abstract

В работе предлагается метод для нахождения коротковолновой асимптотики волнового поля, возбужденного точечным источником, расположенным вблизи вогнутой поверхности. Метод излагается на примере трехмерной задачи Неймана для уравнения Гельмольца. Для указанной задачи получены в явной форме главные члены асимптотики. Рассматриваются случаи одинаковых и разных главных кривизн, а также вырожденный случай, когда кривизна обращается в ноль.

Ключевые слова: коротковолновая асимптотика, волновое поле, точечный источник

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, В. Н. Кублановская
Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич
Н. Ю. нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серёгин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко.

1. Введение

Большое количество практически важных задач приводят к необходимости определения волнового поля, создаваемого различного рода локальными источниками. Такие задачи возникают в акустике, электромагнетизме, сейсморазведке и т.д. Как правило, в таких задачах имеет место волновое распространение, которое обусловлено наличием вогнутых поверхностей или градиента скоростей. Если физические размеры источника малы по сравнению с преобладающей длиной волны, то такие источники в первом приближении можно считать точечными. Вопросу получения коротковолновой асимптотики для такого класса задач посвящено ряд работ [1, 2], но в них рассматривается только двумерный случай.

В настоящей работе изучается трехмерный случай, когда точечный источник, расположен на идеально отражающей границе области, в которой имеет место распространение волн. Это рассмотрение можно считать модельным для широкого класса задач.

Итак рассмотрим стационарную задачу Неймана для волнового уравнения с источником на границе.

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0, & P \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \delta(P, P_0), & P, P_0 \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

где Ω область, ограниченная вогнутой поверхностью Γ (предполагаем, что Γ является достаточно гладкой поверхностью), $\delta()$ – дельта-функция Дирака.

Будем искать коротковолновую асимптотику (при $k \rightarrow \infty$) функции Грина u . Естественно предположить, что в непосредственной окрестности точки источника P_0 в главном приближении функции Грина u совпадает с решением задачи для случая, когда граница Γ является плоскостью. Это решение известно:

$$u = \frac{1}{2\pi R} \exp(ikR), \quad (2)$$

где R расстояние от точки источника до точки наблюдения.

Наша задача: найти асимптотику решения u вне окрестности источника, переходящее в решение (2) при приближении к источнику. Достаточно найти это решение в окрестности границы. Вне границы решение может быть найдено с помощью квадратур.

Пусть κ_1 и κ_2 главные кривизны поверхности Γ в точке P_0 (κ_1 – минимальная кривизна и κ_2 – максимальная кривизна). Представляется три случая:

1. $\kappa_1 = \kappa_2$, сфера,
2. $\kappa_1 < \kappa_2$, эллипсоид,
3. $\kappa_1 = 0$, цилиндр.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

2. Сфера

Итак, мы предполагаем, что в окрестности источника главные кривизны совпадают. Нас в первую очередь интересует решение в окрестности источника, но не слишком близко к нему, а именно, в области: $(k\rho^{-1} < s\rho < k\rho^{-1/3})$, где s расстояние от источника вдоль геодезической, k – волновое число, ρ радиус сферы. Введем полугеодезическую систему координат (s, θ, n) , где n – расстояние по нормали от точки приемника до границы Γ , s – расстояние вдоль геодезической от источника до основания перпендикуляра, ψ – угол поворота геодезической от некоторого фиксированного направления.

В первом приближении можно считать нашу поверхность Γ сферой. Очевидны соотношения между полугеодезическими и сферическими координатами:

$$\begin{aligned} n &= \rho - r; \\ s &= \theta * \rho; \\ \psi &= \varphi. \end{aligned}$$

Запишем оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u.$$

В соответствии с формулами перехода, запишем уравнение в полугеодезической системе координат, учитывая при этом, что величина θ мала. Для этого разложим тригонометрические функции, входящие в уравнение в ряд Тейлора и сохраним необходимые первые члены. Учтем также, что источник и граница сферически симметричны, т.е. отсутствует зависимость от угла φ . Тогда получим следующее выражение для уравнения:

$$\Delta u + k^2 u = \left[\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{2}{\rho(1 - \frac{n}{\rho})} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{(1 - \frac{n}{\rho})^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{(1 - \frac{n}{\rho})s} \frac{\partial}{\partial s} + \dots \right] u + k^2 u = 0.$$

Предположим, что, как и в плоском случае, волны от источника распространяются вдоль геодезических на поверхности, т.е. в решении может быть выделена главная осцилляция:

$$u = \exp(iks)U(s, n, k). \quad (3)$$

Подставляя это выражение в уравнение и сохраняя главные члены, получим для функции $U(s, n, k)$ следующее уравнение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{(1 - \frac{n}{\rho})^2} \left(-k^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \frac{ik}{s} + k^2 + \dots \right] U = 0.$$

Из асимптотики решения аналогичной двумерной задачи видно, что зависимость функции U от переменных s, n происходит через посредство так-называемых "растянутых" координат σ и ν

$$\begin{cases} \sigma &= \left(\frac{k\rho}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{s}{\rho} \\ \nu &= \left(\frac{k\rho}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{n}{\rho}. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя вместо переменных переменные и собирая слагаемые при одинаковых степенях, получим следующее уравнение для главной части U_0 решения U :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + i \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{2\sigma} \right) - \nu \right] U_0 = 0. \quad (5)$$

После замены:

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \widetilde{U}_0 \quad (6)$$

уравнение преобразуется к виду:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + i \frac{\partial}{\partial \sigma} - \nu \right] \widetilde{U}_0 = 0. \quad (7)$$

К уравнению надо добавить еще граничное условие:

$$\left(\frac{\partial \widetilde{U}_0}{\partial \nu} \right)_{\nu=0} = 0. \quad (8)$$

Решение задачи (5,6) может быть получено с помощью суперпозиции частных решений вида:

$$\exp(i\zeta\sigma)w(\zeta + \nu),$$

где $w()$ - одно из решений уравнения Эйри.

Для аналогичной двумерной задачи было показано, что решение задачи имеет следующий вид:

$$\widetilde{U}_0 = \int_C \exp(i\zeta\sigma) \left[\frac{v(\zeta + \nu)}{v'(\zeta)} - \frac{w_2(\zeta + \nu)}{w_2'(\zeta)} \right] f(\zeta) d\zeta, \quad (9)$$

где $v()$ - интеграл Эйри, $w_2()$ - вторая функция Эйри, контур интегрирования C - прямая проходящая под углом $\pi/3$ от $-\infty \exp(i\pi/3)$ до $\infty \exp(i\pi/3)$ (контур C отделяет линию корней интеграла Эйри $\arg(\zeta) = \pi$ и линию корней второй функции Эйри $\arg(\zeta) = -\pi/3$), $f(\zeta)$ - пока неопределенная функция.

Обозначим через R расстояние от источника $P_0 = (0, 0)$ до точки наблюдения $P = (s, n)$. Для сферы, очевидно, имеем следующее выражение для расстояния R :

$$R^2 = \rho^2 + (\rho - n)^2 - 2\rho(\rho - n) \cos(s/\rho).$$

Найдем разложение для расстояния R в области, где величины s и n малы и выполняется условие $s \gg n$. Записывая разложение в ряд Тейлора для \cos и сохраняя главные члены, получим:

$$R^2 = s^2 + n^2 + \frac{ns^2}{\rho} - \frac{s^4}{12\rho^2} + \dots$$

Учитывая, что $s \gg n$, имеем:

$$R = s + \frac{n^2}{2s} + \frac{ns}{2\rho} - \frac{s^3}{24\rho^2} + \dots$$

Переходя от переменных s, n к переменным σ, ν , получим:

$$kR = ks + \frac{\nu^2}{2\sigma} + \nu\sigma - \frac{2}{3}\sigma^{\frac{3}{2}} + \dots$$

При малых σ , в главном приближении, имеем:

$$kR = ks + \frac{\nu^2}{4\sigma} + \dots,$$

т.е. решение нашей задачи в непосредственной окрестности источника, но не слишком близко от него имеет вид:

$$u = \frac{1}{s} \exp(iks + \frac{\nu^2}{4\sigma} +) \quad (10)$$

Вернемся к выражению для решения вне окрестности источника при $\sigma \ll 1, \nu = O(1)$. При таких значениях переменных начальный контур интегрирования может быть заменен на такой, на котором выполняется условие $|\zeta| \gg 1$. Для этого интеграл надо разбить на два в соответствии с формулой. Начальный контур интегрирования в первом интеграле (содержащем интеграл Эйри $v()$) надо заменить на контур определяемый условиями: $\arg(\zeta) = -2\pi/3, \infty > |\zeta| > Z; \pi/3 > \arg(\zeta) >$

$-2\pi/3$, $|\zeta| = Z$; $\arg(\zeta) = \pi/3$, $\infty > |\zeta| > Z$. Контур интегрирования во втором интеграле (содержащем функцию Эйри $w_2(\zeta)$) заменяется на контур: $\arg(\zeta) = -2\pi/3$, $\infty > |\zeta| > Z$; $-2\pi/3 > \arg(\zeta) > -4\pi/3$, $|\zeta| = Z$; $\arg(\zeta) = -4\pi/3$, $\infty > |\zeta| > Z$, где константа $Z \gg 1$.

Заменяя в этих интегралах функции Эйри на их асимптотики,

$$\begin{cases} v(\zeta) & \sim \zeta^{-\frac{1}{4}} \exp(-\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}), & -\pi < \arg(\zeta) < \pi \\ w_2(\zeta) & \sim \zeta^{-\frac{1}{4}} \exp(\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}}), & -\frac{1}{3}\pi < \arg(\zeta) < \frac{5}{3}\pi \\ v'(\zeta) & \sim \sqrt{\zeta}v(\zeta) \\ w_2'(\zeta) & \sim \sqrt{\zeta}w_2(\zeta) \end{cases}$$

получим в главном приближении следующее выражение для интеграла:

$$\widetilde{U}_0 = \int_{C_0} \exp(i\zeta\sigma - \nu\sqrt{\zeta})f(\zeta) \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}},$$

где регулярная ветвь корня определяется условием $\sqrt{\zeta} > 0$ при $\zeta > 0$, разрез проведен по мнимой оси $\arg \zeta = \pi/2$, контур интегрирования C_0 определяется условиями: $\arg(\zeta) = -4\pi/3$, $\infty > |\zeta| > Z$; $-2\pi/3 > \arg(\zeta) > \pi/3$, $|\zeta| = Z$; $\arg(\zeta) = \pi/3$, $\infty > |\zeta| > Z$,

Контур интегрирования C_0 можно стянуть к контуру, огибающему разрез. Сделаем замену переменных в интеграле:

$$\zeta = i\zeta',$$

тогда интеграл преобразуется к виду:

$$\widetilde{U}_0 = \sqrt{i} \int_{C_{00}} \exp(-\zeta'\sigma - \nu\sqrt{i\zeta'})f(i\zeta') \frac{d\zeta'}{\sqrt{\zeta'}},$$

контур интегрирования C_{00} огибает разрез $\zeta' > 0$ с двух сторон (на нижнем берегу разреза $\sqrt{\zeta'} = -\sqrt{|\zeta'|}$)

Сделаем еще одну замену переменных в интеграле:

$$\zeta' = \xi^2.$$

Интеграл запишется тогда следующим образом:

$$\widetilde{U}_0 = 2\sqrt{i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2\sigma - \sqrt{i}\nu\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi.$$

Выделим полный квадрат в показателе экспоненты, получим:

$$\widetilde{U}_0 = 2\sqrt{i} \exp\left(i\frac{\nu^2}{4\sigma}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sigma\left[\xi + \sqrt{i}\frac{\nu}{2\sigma}\right]^2\right)\tilde{f}(\xi)d\xi.$$

Если взять функцию $\tilde{f}(\xi) = c$, то легко найти, что интеграл будет равен:

$$\widetilde{U}_0 = 2c\sqrt{\frac{2i\pi}{\sigma}} \exp\left(i\frac{\nu^2}{4\sigma}\right).$$

Учитывая (7), видим, что решение вне источника (но достаточно близко к нему), в главном приближении задается формулой:

$$u = \frac{c_1}{\sigma} \exp\left(iks + i\frac{\nu^2}{4\sigma}\right). \quad (11)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (10) для решения в непосредственной окрестности источника, находим, что они будут совпадать, если и взять $c_1 = c_0 k^{\frac{1}{3}}$, с некоторой константой c_0 .

3. Эллипсоид

Рассмотрим теперь случай, когда главные кривизны конечны и отличаются друг от друга. Введем, как и ранее, полугеодезическую систему координат (s, ψ, n) с центром в источнике. Запишем оператор Лапласа в этих координатах. В окрестности источника для коэффициентов Ламе будем иметь следующие формулы:

$$h_s = 1 - \frac{n}{\rho(\psi)}, h_\psi = s, h_n = 1,$$

где $\rho = \rho(\psi)$ радиус кривизны геодезической, выходящей под углом ψ , в точке источника.

Тогда при малых s и n оператор Лапласа запишется следующим образом:

$$\Delta u = \frac{1}{s(1 - \frac{n}{\rho})} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(s(1 - \frac{n}{\rho}) \frac{\partial}{\partial n} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{s}{1 - \frac{n}{\rho}} \right] \frac{\partial}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{1 - \frac{n}{\rho}}{s} \right] \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \right] u.$$

Раскрывая скобки и сохраняя плавные члены, получим для уравнения следующее выражение:

$$\Delta u + k^2 u = \left[\frac{\partial^2}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho(1 - \frac{n}{\rho})} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{(1 - \frac{n}{\rho})^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{(1 - \frac{n}{\rho})s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \dots \right] u + k^2 u = 0.$$

Как и в предыдущей главе выделим главную осцилляцию:

$$u = \exp(iks)U(s, n, \psi, k).$$

Подставляя это выражение в уравнение и сохраняя главные члены, получим для функции $U(s, n, \psi, k)$ следующее уравнение:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + \frac{1}{(1 - \frac{n}{\rho})^2} \left(-k^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) + \frac{ik}{s} + k^2 + \dots \right] U = 0.$$

Как и в предыдущей главе, введем растянутые координаты по формуле (4): Теперь кривизна $\kappa = \frac{1}{\rho(\psi)}$, будет величиной переменной. Подставим в уравнение вместо переменных s, n переменные σ, ν и соберем члены при одинаковых степенях волнового числа k . Старший член (при $k^{\frac{4}{3}}$), будет такой же как и в случае постоянной кривизны:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + i \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{2\sigma} \right) - \nu \right] U_0 = 0,$$

где $U_0()$ старший член в разложении по обратным степеням волнового числа k решения $U()$. Поэтому, как и ранее, решение его задается формулой:

$$U_0 = \frac{A(\psi)}{\sqrt{\sigma}} \int_C \exp(i\zeta\sigma) \left[\frac{v(\zeta + \nu)}{v'(\zeta)} - \frac{w_2(\zeta + \nu)}{w_2'(\zeta)} \right] f(\zeta) d\zeta, \quad (12)$$

функции $A()$ и $f()$ находятся из условия шивания с решением в непосредственной окрестности источника. Процедура шивания подобна той, которую мы проводили в главе 2 для случая постоянной кривизны, поэтому мы на ней останавливаться не будем. Скажем только, что в результате этого получаем для функций $A()$ и $f()$ следующие выражения:

$$f(\zeta) = 1, \\ A(\psi) = ck^{\frac{1}{3}} \rho^{-\frac{2}{3}}(\psi).$$

4. Цилиндр

Рассмотрим теперь случай, когда граница области Γ является цилиндрической поверхностью. Как и ранее, введем полугеодезическую систему координат s, ψ, n . Поскольку нас интересует решение в главном приближении в малой окрестности источника, можно считать цилиндр круговым.

Остаются в силе все рассуждения, которые мы проводили в предыдущей главе. В отличие от случая, рассмотренного ранее, в нашем случае растянутые координаты вырождаются при $\psi \rightarrow 0$. Покажем, что при этом решение не испортится. Если обозначить через a радиус сечения этого цилиндра, то согласно формуле Эйлера, кривизна геодезической, выходящей под углом ψ из источника, будет равна:

$$\kappa(\psi) = \frac{1}{\rho(\psi)} = \frac{1}{a} \sin^2 \psi,$$

растянутые координаты

$$\begin{cases} \sigma &= \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{s}{a} \psi^{\frac{4}{3}}, \\ \nu &= \left(\frac{ka}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{n}{a} \psi^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Выделяя, как и ранее главную осцилляцию:

$$u = \exp(iks)U(s, n, \psi, k)$$

и заменяя в уравнении переменные s, n на растянутые σ, ν , нетрудно показать, что, как и в случае конечной положительной кривизны, главный член разложения функции удовлетворяет уравнению и его решение представляется формулой (12) с функциями $A()$ и $f()$ равными:

$$f(\zeta) = 1,$$

$$A(\psi) = ck^{\frac{1}{3}} \psi^{\frac{4}{3}}.$$

Как и следовало ожидать из физических соображений, в случае цилиндра нормальные моды шепчущей галереи, которые можно получить из интеграла (12) в качестве вычетов в полюсах функции $v'(\zeta)$, будут исчезать при $\psi \rightarrow 0$.

Литература

1. В. Б. Филиппов, *Поле точечного источника вблизи вогнутой границы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ РАН, **354** (2008).
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, М., 1972