ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 7/2010

Заметка о правильных раскрасках гиперграфов

Н. В. Гравин   Д. В. Карпов[1]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191013, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: gravin@pdmi.ras.ru,   dvk0@yandex.ru

Аннотация

Пусть $\mathcal{H}$ — гиперграф с максимальной степенью вершины Δ, каждое гиперребро которого содержит не менее, чем δ вершин. Мы докажем, что вершины $\mathcal{H}$ можно правильным образом покрасить в $\lceil \frac{2\Delta}{\delta} + 1 \rceil$ цветов (то есть так, чтобы в каждом гиперребре было хотя бы две разноцветных вершины). В качестве следствия будет получен результат о динамических раскрасках вершин графа.

[1]Авторы благодарят за поддержку исследований Программу фундаментальных исследований ОМН РАН, грант Президента РФ НШ-5282.2010.1 и грант РФФИ 09-01-12137-офи-м.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы и гиперграфы. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер — через $E(G)$. Для любой вершины $v \in V(G)$ ее степень в графе G будем обозначать через $d_G(v)$. Минимальную и максимальную степени вершин графа G мы будем обозначать через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ соответственно. Аналогичные обозначения ($V(\mathcal{H})$, $E(\mathcal{H})$, $d_{\mathcal{H}}(v)$, $\delta(\mathcal{H})$ и $\Delta(\mathcal{H})$) будем применять для гиперграфа $\mathcal{H}$.

Окрестность вершины v графа G (то есть, множество всех смежных с v вершин графа G) мы будем обозначать через $N_G(v)$.

Существует несколько способов обобщать понятие правильной раскраски на гиперграфы. Например сильные вершинные раскраски (см. [3]), в которых все вершины в одном гиперребре должны иметь различные цвета. Мы же будем работать с определением, предложенным в свое время П. Эрдешем.

Определение 1. Раскраска вершин гиперграфа $\mathcal{H}$ называется *правильной*, если в любом гиперребре есть хотя бы две вершины разных цветов.

Про раскраски гиперграфов на сегодняшний день известно не так много фактов, что не удивительно в виду того, что даже для правильных раскрасок простых графов до сих пор остаются открытыми многие естественные вопросы. Одним из хорошо изученных вопросов, привлекшим значительное внимание исследователей [6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15], является задача нахождения n-однородного и не раскрашиваемого в k цветов гиперграфа с минимальным количеством гиперребер $m_k(n)$. С этой задачей тесно связана другая, более конкретная задача поиска минимального такого n, что любой n-однородный и n-регулярный гиперграф (то есть, гиперграф, все гиперрёбра которого содержат по n вершин, а все вершины имеют степень n) допускает раскраску в два цвета. Вероятностными методами, с помощью локальной леммы Ловаса нетрудно показать (см. например [5]), что при $n = 9$ любой такой граф будет 2-раскрашиваем. Алон и Брегман в работе [4] усилили утверждение для $n = 8$ и наконец Томассен [16] доказал наличие 2-раскраски для всех $n \geq 4$.

Следующая теорема, является основным результатом нашей статьи.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{H}$ — гиперграф с максимальной степенью вершины Δ, каждое гиперребро которого содержит не менее, чем δ вершин. Тогда вершины $\mathcal{H}$ можно правильно раскрасить в $\lceil \frac{2\Delta}{\delta} + 1 \rceil$ цветов.*

Эта теорема дает более слабые результаты для случая, когда минимальный размер гиперребер сопоставим с максимальной степенью вершин, чем процитированные ранее результаты. Однако для малых относительно степени Δ значений δ утверждение теоремы становится интересным, а при $\delta = 2$ оценка на количество цветов в правильной раскраске оказывается точной. Наше доказательство теоремы использует только классические комбинаторные методы.

Из этой теоремы мы выведем результат о динамической раскраске вершин обычного графа.

Определение 2. Раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины v степени хотя бы 2 в ее окрестности есть хотя бы две вершины разных цветов.

Отметим, что в ряде работ [11, 1, 2] исследуются динамические правильные раскраски вершин графа. Доказывается существование динамической правильной раскраски вершин графа G в $\Delta(G) + 1$ цвет [11] и, кроме серии графов-исключений, в $\Delta(G)$ цветов [2]. Мы не требуем от раскраски правильности и получаем следующий результат.

Теорема 2. *Граф G допускает динамическую раскраску вершин в $\lceil \frac{2\Delta(G)}{\delta(G)} + 1 \rceil$ цветов.*

Перейдём к основным определениям и обозначениям, которые потребуются для доказательства нашего результата. Пусть G — граф. Обозначим через $|G|$ *размер* графа G, определяемый как количество ребер и вершин G (то есть, $|G| = |V(G)| + |E(G)|$).

Определение 3. Назовем *k-редукцией* графа G максимальный по включению подграф $R_k(G)$ графа G, в котором степень любой вершины по крайней мере k. Если такого подграфа нет, то определим пустой граф как k-редукцию G. В последнем случае G будет называться *k-редуцируемым* графом.

Замечание 1. 1) k-редукция графа G определена единственным образом, так как объединение двух подграфов G с минимальной степенью по крайней мере k, также будет иметь минимальную степень по крайней мере k.

2) Также понятно, что k-редукция $R_k(G)$ является индуцированным подграфом графа G на множестве вершин $V(R_k(G))$.

2 Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Введём обозначения $k = \lceil \frac{2\Delta}{\delta} + 1 \rceil$, $V = V(\mathcal{H})$.

Определение 4. Назовем *образом* гиперграфа $\mathcal{H}$ любой граф G (возможно, с кратными рёбрами), для которого $V(G) = V(\mathcal{H})$ и существует такая биекция $\varphi : E(G) \to E(\mathcal{H})$, что $e \subset \varphi(e)$ для любого ребра $e \in E(G)$. Назовём φ *биекцией образа.*

Чтобы доказать теорему, достаточно построить раскрашиваемый в k цветов образ гиперграфа $\mathcal{H}$. Предположим, что такого образа не существует и рассмотрим тогда образ G_1 графа $\mathcal{H}$ с наименьшим возможным $|R_k(G_1)|$. Так как каждый k-редуцируемый граф k-раскрашиваем, $R_k(G_1)$ не пусто. Пусть $H_1 = R_k(G_1)$, $S_1 = V(H_1)$.

Для доказательства теоремы мы построим:

— последовательность множеств $S_1 \subsetneq S_2 \subsetneq \ldots \subsetneq S_i \ldots \subset V$;

— последовательность $G_1, \ldots, G_i, \ldots$ образов гиперграфа $\mathcal{H}$;

— последовательность графов $H_1, \ldots, H_i, \ldots$, где $V(H_i) = S_i$.

Обозначим через $\mathcal{G}_i$ множество всех образов G гиперграфа $\mathcal{H}$, для которых $R_k(G) = H_1$ и $G(S_j) = H_j$ для всех $j \in [1, i]$.

Мы будем действовать так, чтобы для всех i наша конструкция удовлетворяла следующим условиям.

1° $G_i \in \mathcal{G}_i$.

2° Не существует графа $G \in \mathcal{G}_1$, для которого $G(S_i)$ — собственный подграф H_i (то есть, $E(G(S_i)) \supsetneq E(H_i)$).

3° $|E(H_i)| > \frac{\Delta}{\delta}|S_i|$.

Легко видеть, что S_1, H_1 и G_1 удовлетворяют всем условиям для $i = 1$. Так как $|S_\ell|$ ограничено сверху, для получения противоречия и завершения доказательства достаточно научиться продолжать конструкцию на следующий $\ell + 1$ шаг для любого ℓ.

Шаг построения.

Итак, пусть $S_1, \ldots, S_\ell$; $H_1, \ldots, H_\ell$ и $G_1, \ldots, G_\ell$ уже построены.

1. *Пусть $\varphi : E(G_\ell) \to E(\mathcal{H})$ — биекция образа. Мы докажем, что найдется такое ребро $e \in E(H_\ell)$ и вершина $v \notin S_\ell$, что $v \in \varphi(e)$.*

Действительно, в противном случае все гиперрёбра графа $\mathcal{H}$, соответствующие при биекции образа φ рёбрам графа H_ℓ, содержатся в множестве S_ℓ. Поскольку по условию 3° мы имеем $|E(H_\ell)| > \frac{\Delta}{\delta}|S_\ell|$, то в множестве S_ℓ лежит больше чем $\frac{\Delta}{\delta}|S_\ell|$ гиперрёбер графа $\mathcal{H}$, каждое размера не менее δ. Следовательно, найдется вершина $w \in S_\ell$ степени $d_{\mathcal{H}} > \Delta$, что противоречит условию теоремы.

2. *Итак, пусть $e = uw \in E(H_\ell)$, $v \in \varphi(e) \setminus S_\ell$.*
Все графы из $\mathcal{G}_\ell$ содержат ребро e. Для каждого графа $G \in \mathcal{G}_\ell$ попытаемся заменить e на uv. Получившийся граф G_e будет образом $\mathcal{H}$. Действительно, если $\varphi : E(G) \to E(\mathcal{H})$ — биекция образа G, то биекцией образа G_e будет φ', совпадающая с φ на общих ребрах и доопределенная как $\varphi'(uv) = \varphi(e)$.

Отметим, что $E(G_e(S_j)) \subseteq E(H_j)$ для всех $j \in [1, \ell]$, причём для $j = \ell$ включение будет строгим. Таким образом по условию 2° получаем, что $R_k(G_e) \neq H_1$.

Предположим, что $v \notin V(R_k(G_e))$. Тогда $uv \notin E(R_k(G_e))$, поэтому $R_k(G_e)$ — подграф $R_k(G) = H_1$. Последнее невозможно, так как по доказанному выше $R_k(G_e) \neq H_1$ и тогда $|R_k(G_e)| < |H_1| = |R_k(G)|$, а это противоречит минимальности $|R_k(G)|$.

Следовательно $v \in R_k(G_e)$. Для каждого графа $G \in \mathcal{G}_\ell$ положим $S_G = V(R_k(G_e))$ и $H_G = G(S_\ell \cup S_G)$. Таким образом получаем $v \in S_G \subset V(H_G)$.

3. *Выберем граф G из $\mathcal{G}_\ell$ с минимально возможным $|H_G|$.*
Положим

$$G_{\ell+1} = G, \quad S_{\ell+1} = S_G \cup S_\ell, \quad H_{\ell+1} = H_G = G(S_{\ell+1}).$$

Вместе с графом $H_{\ell+1}$ автоматически определяется множество $\mathcal{G}_{\ell+1}$ образов гиперграфа $\mathcal{H}$. Так как $v \in S_{\ell+1}$ и $v \notin S_\ell$, имеем $S_\ell \subsetneq S_{\ell+1} \subset V$. По построению свойства 1° и 2° выполнены для $i = \ell+1$.

Пусть $x \in S_G$. Так как $S_G = V(R_k(G_e))$, мы имеем $d_{R_k(G_e)}(x) \geq k$. Мы знаем, что $R_k(G_e)$ — индуцированный подграф графа G_e на множестве вершин S_G, а H_G — индуцированный подграф графа G на множестве $S_G \cup S_\ell$, причём графы G_e и G отличаются одним ребром. Следовательно, $d_{H_G}(x) \geq k - 1 = \lceil \frac{2\Delta}{\delta} \rceil$. Таким образом, учитывая свойство 3° для графа H_ℓ, получаем

$$|E(H_{\ell+1})| \geq |E(H_\ell)| + \frac{1}{2} \sum_{x \in S_G \setminus S_\ell} d_{H_G}(x) >$$

$$> \frac{\Delta}{\delta}|S_\ell| + \frac{1}{2}\lceil \frac{2\Delta}{\delta} \rceil |S_G \setminus S_\ell| \geq \frac{\Delta}{\delta}|S_{\ell+1}|.$$

Таким образом, свойство 3° выполняется.

Итак, если уже построены множества $S_1, \ldots, S_\ell$ и графы $H_1, \ldots, H_\ell$; $G_1, \ldots, G_\ell$, удовлетворяющие свойствам $1^\circ - 3^\circ$, мы можем выполнить очередной шаг и построить $S_{\ell+1}$, $H_{\ell+1}$ и $G_{\ell+1}$. Как уже отмечалось, ввиду условия $S_\ell \subsetneq S_{\ell+1}$ это противоречит конечности графа. Следовательно, сделанное в начале доказательства предположение неверно и существует k-редуцируемый (а следовательно, допускающий правильную раскраску в k цветов) образ гиперграфа H. $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим следующий гиперграф $\mathcal{H}$: множество вершин $V(\mathcal{H})$ совпадает с $V(G)$, а множество гиперребер $E(\mathcal{H})$ состоит из окрестностей $N_G(v)$ всех вершин $v \in V(G)$. Утверждение теоремы эквивалентно тому факту, что $\mathcal{H}$ допускает правильную раскраску в k цветов. Каждое гиперребро $\mathcal{H}$ имеет размер по крайней мере $\delta(G)$ и каждая вершина $\mathcal{H}$ лежит не более чем в $\Delta(G)$ гиперребрах. Теперь легко видеть, что доказываемое утверждение является прямым следствием теоремы 1. $\square$

Список литературы

[1] Н. В. Гравин. *Невырожденные раскраски в теореме Брукса.* Дискретная математика, 21 (2009), выпуск 4, стр 106-128.

[2] Д. В. Карпов. *Динамические правильные раскраски вершин графа.* ПОМИ препринт 9/2009.

[3] G. Agnarsson and M. M. Halldo'rsson *Strong Colorings of Hypergraphs* Approximation and Online Algorithms Lecture Notes in Computer Science, 2005, Volume 3351/2005, 253-266.

[4] N. Alon and Z. Bregman *Every 8-uniform 8-regular hypergraph is 2-colorable*, Graphs Combinat. 4 (1988), 303-305.

[5] N. Alon and J. Spencer *The probabilistic method*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[6] J. Beck *On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász*, Discrete Math 17 (1977), 127-131.

[7] J. Beck *On 3-chromatic hypergraphs*, Discrete Math 24 (1978), 127-137.

[8] P. Erdős *On a combinatorial problem*, Nordisk Mat Tidskr 11 (1963), 5-10.

[9] P. Erdős *On a combinatorial problem, II* , Acta Math Acad Sci Hungar 15 (1964), 445-447.

[10] P. Erdős and L. Lovász, *Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions*, Infinite and finite sets, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 10, North Holland, Amsterdam, 1974, pp. 609-627.

[11] L. Hong-Jian, B. Montgomery, H. Poon, *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number*, Ars. Combinatoria 68(2003), pp. 193-201.

[12] A. Kostochka, *Coloring uniform hypergraphs with few colors*, Random Structures and Algorithms 24 (2004), 1-10.

[13] A. Pluha'r *Greedy colorings of uniform hypergraphs*, Random Structures and Algorithms 35, (2009) 216-221.

[14] W. M. Schmidt *Ein kombinatoriches problem*, Acta Math Acad Sci Hungar 15 (1964), 373-374.

[15] J. H. Spencer *Coloring n-sets red and blue* J Combin Theory Ser A 30 (1981), 112-113.

[16] C. Thomassen *The even cycle problem for directed graphs*, J AmMath Soc 5 (1992), 217-229.