ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 1/2010

О локальной структуре 5 и 6-связных графов. [1]

С.А. Образцова

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,

School of Physical and Mathematical Sciences
Nanyang Technological University, Singapore

svetlana.obraztsova@gmail.com

Февраль, 2010

В статье рассматриваются минимальные и минимальные по стягиванию 5 и 6-связные графы. Для них доказываются нижние оценки на долю вершин степеней 5 и 6 в общем числе вершин, соответственно. Полученные оценки: 4/7 для 5-связных графов и 1/2 для 6-связных.

[1]Исследования частично поддержаны грантами РФФИ 09-01-12137-офи-м, президентским грантом поддержки ведущих научных школ НШ-4392.2008.1 и A*STAR SINGA Scholarship.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Вступление

Интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после работы В. Татта [3], в которой было дано полное описание структуры 3-связного графа в терминах удаления и стягивания ребер. Вопрос о том, какова структура минимального и минимального по стягиванию k-связного для k больших 3 был рассмотрен в статье Р. Халина [1]. В этой же статье был задан вопрос о том, какова константа c, такая что количество вершин степени k в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе равно по крайней мере $c|V|$. В дальнейшем исследовались в основном k-связные графы обладающие только одним из двух свойств - минимальность или минимальность по стягиванию. Наибольшее продвижение в первом из этих направлений было получено В. Мадером в статье [6] (см. теорему 2.1). Общих результатов во втором направлении получено не было, но существуют продвижения в изучении 4, 5, 6 и 7-связных графов. Случай 4-связных графов полностью описан в работах М. Фонте [4] и Н. Мартинова [5], для 4-связных графов также получено, что из минимальности по стягиванию следует минимальность и доказано $c = 1$. Для графов более высокой связности существуют примеры минимальных по стягиванию, но не минимальных графов, и, таким образом, рассмотрение графов, обладающих обоими свостами, становится содержательным. Структура минимальных по стягиванию 5-связных графов наиболее подробно изучена в серии статей К. Андо и др., завершающейся статьей [7] (см. теорему 2.2). В изучении графов связности выше 7 существенных продвижений получено не было. В нашей статье доказываются оценки на количество вершин степени 5 и 6 в 5 и 6-связных графах соответственно.

2 Определения.

Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер — $E(G)$. Степень вершины v обозначается $d(v)$. Подграф, индуцированный множеством вершин A, — $G(A)$. Количество вершин графа G мы будем обозначать $|G|$.

Определение 2.1. Пусть A — подмножество множества вершин графа G. Тогда через $N_G(A)$ будет обозначаться подмножество множества вершин графа G, состоящее из всех тех вершин, которые смежны хотя бы с одной вершиной из A и не лежат в A.

Определение 2.2. Если $A \subset V(G)$, то через $G - A$ обозначается граф с удаленным множеством вершин A и множеством ребер, инциндентным вершинам из множества A.

Определение 2.3. Пусть A — подграф графа G. Тогда через $\overline{A}$ обозначим подграф $G(V(G) \setminus (V(A) \cup N_G(A)))$ графа G.

Определение 2.4. *Вершинной связностью* графа G (обозначаемой $\kappa(G)$) называется мощность наименьшего подмножества множества вершин графа G такого, что при его удалении G становится несвязным или тривиальным (то есть состоящим из одной вершины). При этом, граф G называется k-связным, если $\kappa(G) \geq k$.

Заметим, что если граф G — k-связный, то $d(v) \geq k$ для всех вершин графа G.

Определение 2.5. *Разделяющее множество* — это множество вершин, при удалении которых теряется связность. Соответственно, k-разделяющее множество — разделяющее множество, состоящее из k вершин.

Определение 2.6. Будем говорить, что разделяющее множество T *отделяет* некоторый подграф B графа G, если подграф B представляется в виде объединения не менее чем одной, но не всех, компонент связности, получающихся после удаления разделяющего множества T.

Лемма 2.1 (см. [8]). *Пусть разделяющее множество R отделяет от k-связного графа G компоненту G_1. Тогда каждая из вершин множества R смежна с одной из вершин компоненты G_1.*

Определение 2.7. Будем говорить, что разделяющее множество R графа G разделяет набор вершин X, если при удалении множества R не все неудаленные вершины набора X окажутся в одной компоненте связности.

Определение 2.8. Назовем разделяющие множества R и T графа G *независимыми*, если R не разделяет T, и T не разделяет R. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

Лемма 2.2 (см. [8]). *Пусть разделяющие множества $R, T \in \mathfrak{T}(G)$ таковы, что R не разделяет T. Тогда T не разделяет R (то есть эти множества независимы).*

Определение 2.9. Ребро называется *существенным*, если при его удалении связность графа уменьшается.

Определение 2.10. Граф называется *минимальным*, если все его ребра существенны.

Определение 2.11. Пусть граф G — k-связный. Ребро называется *k-стягиваемым*, если при его стягивании граф сохраняет k-связность, иначе ребро называется *нестягиваемым*.

Заметим, что если ребро (x, y) — нестягиваемо, то существует k-разделяющее множество содержащее одновременно вершины x и y.

Определение 2.12. Граф называется *минимальным относительно стягивания ребер*, если все его ребра нестягиваемы.

Обозначим $V_k(G)$ множество вершин степени k графа G и $V_{>k}(G)$ — множество вершин графа G, степени которых больше, чем k.

Теорема 2.1 (см. [6]). *Пусть G — минимальный k-связный граф и C — множество вершин произвольного цикла в G. Тогда $C \cap V_k(G) \neq \varnothing$*

Следствие 2.1. *Пусть G — минимальный k-связный граф. Тогда $|V_k(G)| \geq \frac{k-1}{2k-1}|V(G)|$.*

Теорема 2.2 (см. [7]). *В 5-связном, минимальном отнисительно стягивания, графе любая вершина смежна по крайней мере с 2 вершинами из множества $V_5(G)$.*

3 Основной результат

Лемма 3.1. *Пусть G — минимальный k-связный граф, $|G| \geq k+4$ и $x, y \in V(G)$ — смежные вершины. Тогда если $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$, то степени всех вершин, входящих в $N_G(y)$, равны k.*

Доказательство. Заметим, что степень по крайней мере одной из вершин x и y больше k. Иначе $N_G(\{x,y\}) = k-1$ и, следовательно, x, y отделяются $(k-1)$-разделяющим множеством. По предположению леммы $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$ и, следовательно, $d(x) \geq d(y)$, значит, можно считать, что $d(x) > k$. Предположим, что утверждение леммы не выполняется. Следовательно, существует вершина, смежная с x и y, степень которой больше k. Обозначим эту вершину z. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество в графе $G - \{(x,z)\}$ и обозначим его T. Обозначим H_x и H_z компоненты $G - \{(x,z)\} - T$, содержащие x и z соответственно.

Очевидно, $y \in T$. С другой строны, $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\} \subset V(H_x) \cup T$. Кроме того, $d(x) > k$ и $d(z) > k$ и, следовательно, $V(H_x) \setminus \{x\} \neq \varnothing$ и $V(H_z) \setminus \{z\} \neq \varnothing$. Следовательно, $T \cup \{z\}$ — k-разделяющее множество в G. Таким образом, в G есть k-разделяющее множество, содержащее вершину (а именно — y), смежную с вершинами только в одной компоненте связности графа $G - (T \cup \{z\})$. Полученное противоречие с 2.1 доказывает лемму. □

Лемма 3.2. *Пусть G — минимальный 6-связный граф, $|G| \geq 10$. Предположим, что 6-разделяющее множество T, содержащее смежные вершины x и y, отделяет множество, состоящее из не более чем двух вершин. Тогда x смежна с вершиной степени 6.*

Доказательство. Заметим, что если множество T отделяет одну вершину, то эта вершина степени 6, которая смежна со всеми вершинами, входящими в T. Таким образом, утверждение леммы выполняется.

Осталось рассмотреть случай, когда T отделяет множество, состоящее из двух смежных вершин. Во этом случае либо для этих вершин выполняются условия леммы 3.1, либо их степени равны 6 и по крайней мере одна из них смежна с x. Предположим, что реализуется первая возможность. Если степени обеих вершин равны 7, то они смежны со всеми вершинами 6-разделяющего множества T и, следовательно, по лемме 3.1 степени всех вершин множества T равны 6. В том числе и вершины y, лежащей в T и смежной с x по условию леммы. Если только одна из вершин, отделяемых T, имеет степень 7, то вторая должна быть смежна либо с x, либо с y. В первом случае вершиной степени 6, смежной с x, является вершина одна из отделяемых T вершин, во втором случае — по лемме 3.1 степень 6 имеет вершина y. □

Лемма 3.3. *Пусть G — 6-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания, граф и $|G| \geq 12$. Степень вершины a равна 6. Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:*

(1) существует 6-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну вершину из $N_G(a)$, такое что среди компонент связности $G - T$ есть содержащая ровно одну вершину из $N_G(a)$.

(2) $N_G(a) \cap V_6(G) \neq \varnothing$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное 6-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну вершину из $N_G(a)$. Если среди компонент связности $G - T$ есть содержащая ровно одну вершину из $N_G(a)$, то утверждение леммы выполнено. Предположим противное. Таким образом, все компоненты связности $G - T$ содержат по крайней мере 2 вершины из $N_G(a)$. Следовательно, $G - T$ содержит ровно 2 компоненты связности и одна из них содержит ровно 2 вершины из $N_G(a)$. Обозначим H компоненту $G - T$, такую что $|V(H) \cap N_G(a)| = 2$. Вершины множества $V(H) \cap N_G(a)$ обозначим a_1, a_2.

Рассмотрим разделяющее множество T_1, содержащее a, a_1. Множества T и T_1 могут быть либо независимы, либо зависимы (случаи (1) и (2) соответственно). Рассмотрим эти случаи.

(1) По нашему предположению, множества T и T_1 независимы. Следовательно, $T_1 \cap V(\overline{H}) = \varnothing$. Таким образом, $\overline{H}$ содержится в одной из компонент $G - T_1$, поскольку в $G - T$ было ровно 2 компоненты — H и $\overline{H}$. Все вершины T были смежны с какими-то вершинами $\overline{H}$. То есть вершины $(T \cap N_G(a)) \setminus T_1$ и $\overline{H}$ лежат в одной компоненте связности $G - T_1$. Следовательно, вершины множества $N_G(a) \setminus (T_1 \cup \{a_2\})$ лежат в одной компоненте $G - T_1$. Следовательно, в $G - T_1$ ровно 2 компоненты, одна из которых содержит единственную вершину, смежную с a — a_2. Таким образом, утверждение леммы выполняется: компонента, содержащая единственную смежную с a вершину, отделяется 6-разделяющим множеством T_1 таким, что $\{a_1\} \subset T_1 \cap N_G(a)$.

(2) По нашему предположению, множества T и T_1 зависимы. То есть $V(H) \cap T_1 \neq \varnothing$, $V(\overline{H}) \cap T_1 \neq \varnothing$. Заметим, что все компоненты $G - T_1$ пересекаются с T. Обозначим произвольную компоненту $G - T_1$ — H_1. Очевидно, что $T \cap T_1$ содержит a. Кроме того, множество $V(H) \setminus T_1$

содержит не более одной вершины, смежной с a. Заметим, что если подграф $H \cap H_1$ непуст, то он отделяется разделяющим множеством $(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)$. Тогда либо $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| \geq 7$, либо $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| = 6$ и a смежна ровно с одной вершиной в $H \cap H_1$. Аналогично, если непуст подграф $H \cap \overline{H_1}$, то либо $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| \geq 7$, либо $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T)| = 6$ и a смежна ровно с одной вершиной в $H \cap \overline{H_1}$. Если вторая из двух возможностей реализуется для одного из подграфов $H \cap H_1$ и $H \cap \overline{H_1}$, то утверждение леммы выполнено. Предположим обратное и рассмотрим 3 случая: среди подграфов $H \cap H_1$ и $H \cap \overline{H_1}$ ровно 2, 1 или 0 непустых (случаи (2.1), (2.2) и (2.3) соответсвенно).

(2.1) По нашему предположению, $H \cap H_1$ непусто и $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| \geq 7$. Если непуст так же подграф $\overline{H} \cap \overline{H_1}$, то в отделяющем его множестве $(V(\overline{H}) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T)$ по крайней мере 6 вершин. Следовательно,

$$|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| + |(V(\overline{H}) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T)| \geq 13.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| + |(V(\overline{H}) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T)| = \\ = |V(H) \cap T_1| + |T \cap T_1| + |V(\overline{H}) \cap T_1| + |V(H_1) \cap T| + |T \cap T_1| + |V(\overline{H_1}) \cap T| = \\ = |T| + |T_1| = 12. \end{aligned}$$

Из полученного противоречия следует, что подграф $\overline{H} \cap \overline{H_1}$ пуст. Аналогично из нашего предположения о непустоте $H \cap \overline{H_1}$ и $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T)| \geq 7$ выводится $V(\overline{H} \cap H_1) = \varnothing$. Таким образом, $V(\overline{H} \cap \overline{H_1}) = V(\overline{H} \cap H_1) = \varnothing$ и, следовательно, $V(\overline{H}) = V(\overline{H}) \cap T_1$. Докажем, что $|V(\overline{H})| = |V(\overline{H}) \cap T_1| \leq 2$. Предположим обратное, то есть $|V(\overline{H}) \cap T_1| \geq 3$.

$$|T_1| = |V(H) \cap T_1| + |T \cap T_1| + |V(\overline{H}) \cap T_1| = 6.$$

Следовательно, $|V(H) \cap T_1| + |T \cap T_1| \leq 3$. По нашему предположению,

$$|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| \geq 7,$$

и

$$|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T)| \geq 7.$$

Следовательно, $|(V(H_1) \cap T)| \geq 4$, и $|(V(\overline{H_1}) \cap T)| \geq 4$. С другой строны,

$$6 = |T| = |V(H_1) \cap T| + |T \cap T_1| + |V(\overline{H_1}) \cap T| \geq 8.$$

Из полученного противоречия следует, что $|V(\overline{H})| = |V(\overline{H}) \cap T_1| \leq 2$. Таким образом, выполняется условие леммы 3.2 и a смежна с вершиной степени 6. Получаем, что в случае (2.1) утверждение леммы выполняется.

(2.2) Не умаляя общности можно считать $V(H \cap H_1) \neq \varnothing$ и $V(H \cap \overline{H_1}) = \varnothing$. По нашему предположению, $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| \geq 7$. Аналогично случаю (2.1) получим, что $V(\overline{H} \cap \overline{H_1}) = \varnothing$. Рассмотрим 2 возможности: $V(\overline{H} \cap H_1) \neq \varnothing$ и $V(\overline{H} \cap H_1) = \varnothing$ (случаи (2.2.1) и (2.2.2) соответственно).

(2.2.1) Заметим, что $V(\overline{H_1}) = V(\overline{H_1}) \cap T$, поскольку $V(H \cap \overline{H_1}) = \varnothing$ и $V(\overline{H} \cap H_1) = \varnothing$. Докажем, что $|V(\overline{H_1})| = |V(\overline{H_1}) \cap T| \leq 2$. Предположим обратное, то есть $|V(\overline{H_1})| = |V(\overline{H_1}) \cap T| \geq 3$.

$$|T| = |V(H_1) \cap T| + |T \cap T_1| + |V(\overline{H_1}) \cap T| = 6.$$

Следовательно, $|V(H_1) \cap T| + |T \cap T_1| \leq 3$. По нашему предположению,

$$|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| \geq 7,$$

и

$$|(V(H_1) \cap T) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H}) \cap T_1)| = 6.$$

Следовательно, $|V(H) \cap T_1| \geq 4$, и $|V(\overline{H}) \cap T_1| \geq 3$. С другой строны,

$$6 = |T_1| = |V(H) \cap T_1| + |T \cap T_1| + |V(\overline{H}) \cap T_1| \geq 7.$$

Из полученного противоречия следует, что $|V(\overline{H_1})| = |V(\overline{H_1}) \cap T| \leq 2$. Отсюда, по лемме 3.2 получим, что yndth;ltybt леммы выполняется.

(2.2.2) Из $V(H \cap \overline{H_1}) = \varnothing$, $V(\overline{H} \cap \overline{H_1}) = \varnothing$ и $V(\overline{H} \cap H_1) = \varnothing$ следует, что $V(\overline{H_1}) = V(\overline{H_1}) \cap T$ и $V(\overline{H}) = V(\overline{H}) \cap T_1$. Докажем, что верно $|V(\overline{H_1})| = |V(\overline{H_1}) \cap T| \leq 2$ или $|V(\overline{H})| = |V(\overline{H}) \cap T_1| \leq 2$. Предположим обратное, то есть $|V(\overline{H_1})| = |V(\overline{H_1}) \cap T| \geq 3$ и $|V(\overline{H})| = |V(\overline{H}) \cap T_1| \geq 3$. Следовательно, $|V(H_1) \cap T| + |T \cap T_1| \leq 3$ и $|V(H) \cap T_1| + |T \cap T_1| \leq 3$. Следовательно, $|V(H_1) \cap T| + |T \cap T_1| + |V(H) \cap T_1| \leq 6$. С другой стороны, по нашему предположению $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(H_1) \cap T)| \geq 7$. Полученное противоречие доказывает, что $|V(\overline{H_1})| = |V(\overline{H_1}) \cap T| \leq 2$ или $|V(\overline{H})| = |V(\overline{H}) \cap T_1| \leq 2$. Следовательно, по лемме 3.2 получаем, что утверждение леммы выполняется.

(2.3) По нашему предположению, $V(H \cap H_1) = \varnothing$ и $V(H \cap \overline{H_1}) = \varnothing$. Следовательно, $V(H) = V(H) \cap T_1$. Заметим, что не могут выполняться одновременно оба равенства: $V(\overline{H} \cap H_1) = \varnothing$ и $V(\overline{H} \cap \overline{H_1}) = \varnothing$ (иначе $|G| = |T \cup T_1| \leq 11$). Рассмотрим две возможности: среди $V(\overline{H} \cap H_1)$ и $V(\overline{H} \cap \overline{H_1})$ ровно 1 или 0 пустых множеств (случаи (2.3.1) и (2.3.2) соответственно).

(2.3.1) Не умаляя общности можем считать, что $V(\overline{H} \cap H_1) = \varnothing$ и $V(\overline{H} \cap \overline{H_1}) \neq \varnothing$. Следовательно, $V(H_1) = V(H_1) \cap T$.

Фрагмент $V(\overline{H} \cap \overline{H_1})$ отделяется множеством $(V(\overline{H}) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T)$, следовательно, $|V(\overline{H}) \cap T_1| + |T \cap T_1| + |V(\overline{H_1}) \cap T| \geq 6$.

Тогда $|V(H)\cap T_1| + |V(H_1)\cap T| \le 5$, поскольку

$$12 = |T| + |T_1| =$$
$$= |V(H_1)\cap T| + |T\cap T_1| + |V(\overline{H_1})\cap T| + |V(H)\cap T_1| + |T\cap T_1| + |V(\overline{H})\cap T_1| =$$
$$= (|V(\overline{H_1})\cap T| + |T\cap T_1| + |V(\overline{H})\cap T_1|) + |V(H_1)\cap T| + |T\cap T_1| + |V(H)\cap T_1|$$

и $|T\cap T_1| \ge 1$. Следовательно, $|V(H)| = |V(H)\cap T_1| \le 2$ или $|V(H_1)| = |V(H_1)\cap T| \le 2$. В обоих случаях мы получаем, что 6-разделяющее множество, содержащее вершину a и смежную с ней, отделяет компоненту, состоящую из не более чем 2 вершин. Отсюда, применив лемму 3.2, получим, что a смежна с вершиной степени 6. В этом случае утверждение леммы выполняется.

(2.3.2) По нашему предположению, $V(\overline{H}\cap H_1) \ne \varnothing$ и $V(\overline{H}\cap\overline{H_1}) \ne \varnothing$. Следовательно, отделяющие эти фрагменты множества $(V(\overline{H})\cap T_1)\cup(T\cap T_1)\cup(V(H_1)\cap T)$ и $(V(\overline{H})\cap T_1)\cup(T\cap T_1)\cup(V(\overline{H_1})\cap T)$ содержат по крайней мере 6 вершин. Отсюда,

$$12 \le |V(\overline{H})\cap T_1| + |T\cap T_1| + |V(H_1)\cap T| + |V(\overline{H})\cap T_1| + |T\cap T_1| + |V(\overline{H_1})\cap T| =$$
$$= |V(\overline{H_1})\cap T| + |T\cap T_1| + |V(H_1)\cap T| + |T\cap T_1| + 2|V(\overline{H})\cap T_1| =$$
$$= |T| + |T\cap T_1| + 2|V(\overline{H})\cap T_1| = 6 + |T\cap T_1| + 2|V(\overline{H})\cap T_1|.$$

Следовательно,
$$6 \le |T\cap T_1| + 2|V(\overline{H})\cap T_1|.$$

Отсюда, используя $|T\cap T_1| \ge 1$, получаем что

$$4 \le |T\cap T_1| + |V(\overline{H})\cap T_1|$$

и, следовательно,
$$|(V(H)\cap T_1)| \ge 2.$$

Следовательно, утверждение леммы выполняется по лемме 3.2.

Таким образом, все возможности рассмотрены. Лемма полностью доказана.

□

Лемма 3.4. *Пусть G — 6-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания, граф и $|V(G)| \ge 12$. Степень вершины a равна 6. Тогда выполняется $N_G(a)\cap V_6(G) \ne \varnothing$.*

Доказательство. По лемме 3.3 выполняется одно из следующих двух утверждений:

(1) существует 6-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну вершину из $N_G(a)$, такое что среди компонент связности $G - T$ есть содержащая ровно одну вершину из $N_G(a)$.

(2) $N_G(a) \cap V_6(G) \neq \varnothing$.

Во втором случае утверждение леммы выполнено. Рассмотрим первый случай. Обозначим компоненту связности, содержащую единственную вершину, смежную с a — H. Обозначим единственную вершину в $V(H) \cap N_G(a)$ — a_1. Рассмотрим 6-разделяющее множество, содержащее a и a_1 (и обозначим его T_1). Заметим, что 6-разделяющие множества T и T_1 не могут быть независимы, поскольку иначе все вершины, смежные с a, лежат в одной компоненте связности графа $G - T$. Таким образом, $V(H) \cap T_1 \neq \varnothing$, $V(\overline{H}) \cap T_1 \neq \varnothing$ и пересечение множества вершин любой компоненты связности графа $G - T_1$ с T непусто. Обозначим произвольную компоненту $G - T_1$ — H_1.

Очевидно, что $(V(H) \setminus T_1) \cap N_G(a) = \varnothing$. Следовательно, если компонента $H \cap H_1$ или $H \cap \overline{H_1}$ непуста, то ее отделяющее множество ($(H \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (H_1 \cap T)$ и $(H \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (\overline{H_1} \cap T)$, соответственно) содержит по крайней мере 7 вершин (поскольку a лежит в обоих этих разделяющих множествах). Следовательно, из пары множеств $H \cap H_1$ и $\overline{H} \cap \overline{H_1}$ не более одного непустого, поскольку иначе

$$13 = 7+6 \leq |(H \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (H_1 \cap T)| + |(\overline{H} \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (\overline{H_1} \cap T)| =$$
$$= |H \cap T_1| + |T \cap T_1| + |\overline{H} \cap T_1| + |H_1 \cap T| + |T \cap T_1| + |\overline{H_1} \cap T| = |T_1| + |T| = 12$$

Аналогично, из пары множеств $\overline{H} \cap H_1$ и $H \cap \overline{H_1}$ также не более одного непустого. Рассмотрим две возможности — среди множеств $H \cap H_1$, $\overline{H} \cap H_1$, $H \cap \overline{H_1}$ и $\overline{H} \cap \overline{H_1}$ ровно 2 и ровно 3 пустых — случаи 1 и 2 соответственно (все 4 множества пустыми быть не могут, поскольку в этом случае в графе не более 11 вершин).

(1) Не умаляя общности можно считать, что пустые множества — $H \cap H_1$ и $\overline{H} \cap H_1$. Следовательно, $H_1 = H_1 \cap T$. Докажем, что $|V(H_1)| \leq 2$. Предположим обратное, то есть $|V(H_1)| \geq 3$. Следовательно, $|(T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1} \cap T)| \leq 3$. Очевидно, либо $|V(H) \cap T_1| \leq 2$, либо $|V(\overline{H}) \cap T_1| \leq 2$. Следовательно, либо $|(V(H) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1} \cap T)| \leq 5$, либо $|(V(\overline{H}) \cap T_1) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1} \cap T)| \leq 5$. Отсюда получаем, что либо $H \cap \overline{H_1}$, либо $\overline{H} \cap \overline{H_1}$ — пустое множество (иначе непустая компонента отделяется множеством, содержащим не более 5 вершин). Таким образом, получено противоречие с предположением, что в случае (1) среди множеств $H \cap H_1$, $\overline{H} \cap H_1$, $H \cap \overline{H_1}$ и $\overline{H} \cap \overline{H_1}$ ровно 2 непустых. Следовательно, $|V(H_1)| \leq 2$. По лемме 3.2 получаем, что a смежна с по крайней мере одной вершиной степени 6.

(2) Не умаляя общности можно считать, что единственное непустое множество — $\overline{H} \cap \overline{H_1}$. Следовательно, $(V(\overline{H}) \cap T) \cup (T \cap T_1) \cup (V(\overline{H_1}) \cap T_1)$ — множество, отделяющее $\overline{H} \cap \overline{H_1}$, содержит не менее 6 вершин. Следовательно, $|V(H) \cap T| + |V(H_1) \cap T_1| \leq 5$. Таким образом, либо $|V(H) \cap T| \leq 2$, либо $|V(H_1) \cap T| \leq 2$. Отсюда получаем, что $|V(H)| =$

$|V(H) \cap T| \leq 2$, либо $|V(H_1)| = |V(H_1) \cap T| \leq 2$. По лемме 3.2 получаем, что a смежна с по крайней мере одной вершиной степени 6.

Таким образом, лемма полностью доказана.

$\square$

Теорема 3.1. *Пусть G — 5-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания, граф. Тогда $V_5(G) > \frac{4}{7}|V(G)|$.*

Доказательство. Разобьем множество ребер, инцидентных вершинам из $V_{>5}(G)$, на два подмножества:

$E_{>5}(G)$ — ребра, инцидентные двум вершинам из $V_{>5}(G)$,

$E_5(G)$ — ребра, инцидентные одной вершине из $V_{>5}(G)$.

Из теоремы 2.1 следует, что $G(V_{>5}(G))$ является лесом. Следовательно, ребер, инцидентных двум вершинам из $V_{>5}(G)$, не более $|G(V_{>5}(G))| - 1$. Заметим, что $\sum_{v \in V_{>5}(G)} d(v) = 2|E_{>5}(G)| + |E_5(G)|$. Следовательно,

$$|E_5(G)| = \sum_{v \in V_{>5}(G)} d(v) - 2|E_{>5}(G)| \geq \sum_{v \in V_{>5}(G)} d(v) - 2(|G(V_{>5}(G))| - 1) \geq$$
$$\geq 6|V_{>5}(G)| - 2(|G(V_{>5}(G))| - 1) > 4|G(V_{>5}(G))|.$$

С другой стороны, из теоремы 2.2 следует, что любой вершине из $V_5(G)$ инцидентно не более 3 ребер из $E_5(G)$. Следовательно,

$$3|V_5(G)| \geq |E_5(G)| > 4|G(V_{>5}(G))|.$$

Следовательно,

$$7|V_5(G)| = 3|V_5(G)| + 4|V_5(G)| > 4|V_{>5}(G)| + 4|V_5(G)| = 4|V(G)|.$$

Следовательно, $|V_5(G)| > \frac{4}{7}|V(G)|$. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть G — 6-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания, граф. Тогда $V_6(G) > \frac{1}{2}|V(G)|$.*

Доказательство. Разобьем множество ребер, инцидентных вершинам из $V_{>6}(G)$, на два подмножества:

$E_{>6}(G)$ — ребра, инцидентные двум вершинам из $V_{>6}(G)$,

$E_6(G)$ — ребра, инцидентные одной вершине из $V_{>6}(G)$.

Из теоремы 2.1 следует, что $G(V_{>6}(G))$ является лесом. Следовательно, ребер, инцидентных двум вершинам из $V_{>6}(G)$, не более $|G(V_{>6}(G))| - 1$. Заметим, что $\sum_{v \in V_{>6}(G)} d(v) = 2|E_{>6}(G)| + |E_6(G)|$. Следовательно,

$$|E_6(G)| = \sum_{v \in V_{>6}(G)} d(v) - 2|E_{>6}(G)| \geq \sum_{v \in V_{>6}(G)} d(v) - 2(|G(V_{>6}(G))| - 1) \geq$$
$$\geq 7|V_{>6}(G)| - 2(|G(V_{>6}(G))| - 1) > 5|G(V_{>6}(G))|.$$

С другой стороны, из леммы 3.3 следует, что любой вершине из $V_6(G)$ инцидентно не более 5 ребер из $E_6(G)$. Следовательно,

$$5|V_6(G)| \geq |E_6(G)| > 5|G(V_{>6}(G))|.$$

Следовательно,

$$10|V_5(G)| = 5|V_6(G)| + 5|V_6(G)| > 5|V_{>6}(G)| + 5|V_6(G)| = 5|V(G)|.$$

Следовательно, $|V_6(G)| > \frac{1}{2}|V(G)|$. □

Список литературы

[1] R.Halin, *A theorem on n-connected graphs* J. Comb. Theory 7 (1969), 150–154.

[2] C.Thomassen, *Planarity and duality of finite and infinite graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980), 244-271.

[3] W.T.Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* Indag. Math. 1961, vol. 23, p. 441-455.

[4] M.Fontet, *Graphes 4-essentiels*, C. R. Acad. Se. Paris, t. 287, serie A (1978), 289-290.

[5] N.Martinov, *A recursive characterization of the 4-connected graphs*, Discrete Mathematics 84 (1990), 105-108.

[6] W.Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* (German), Arch.Math. (Basel), 23 (1972), 219–224.

[7] K.Ando, *A Local structure theorem on 5-connected graphs*, J. Graph Theory 60 (2009), 99–129.

[8] Д.В.Карпов, А.В.Пастор, *О структуре k-связного графа*, Записки научных семинаров ПОМИ, т.266 (2000), 76–106.