ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 14/2009

ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА СИНГУЛЯРНОМ СПЕКТРЕ

В.В.Капустин

Санкт-Петербургское отделение
Математического института имени В. А. Стеклова
Российской академии наук

kapustin@pdmi.ras.ru

Рассматривается проблема существования усреднённого волнового оператора в общем случае, когда спектральные меры унитарных операторов не предполагаются абсолютно-непрерывными.

Ключевые слова: волновой оператор, методы суммирования, сингулярная спектральная мера.

ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА СИНГУЛЯРНОМ СПЕКТРЕ

В.В.Капустин[1]

1. Введение

Конструкция состоит из пары унитарных операторов U_1, U_2, действующих в гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно, и оператора $X : H_1 \to H_2$. Спрашивается, существует ли волновой оператор, являющийся пределом последовательности

$$U_2^n X U_1^{-n} \quad \text{as} \quad n \to +\infty,$$

описывающий асимптотическое поведение системы с дискретным временем. Определим коммутатор K,

$$K = XU_1 - U_2 X.$$

Случай $K = 0$ тривиален, поскольку тогда все элементы последовательности очевидно равны X; естественно спрашивать, что происходит, когда K мал (ранга 1, ранга 2, конечного ранга, из класса операторов со следом, и т.д.)

Если спектральные меры унитарных операторов абсолютно-непрерывны (относительно меры Лебега), то в классической теории рассеяния устанавливается существование сильных волновых операторов, когда коммутатор K принадлежит классу операторов со следом [1].

Простые примеры, даже в одномерных пространствах, показывают, что в общем случае предел может не существовать. Действительно, возьмём $H_1 = H_2 = \mathbb{C}$, $U_1 = I$, $U_2 = \omega I$, где $|\omega| = 1$, $X = I$. Тогда ясно, что $U_2^n X U_1^{-n} = \omega^n I$. Если $\omega \neq 1$, то последовательность расходится. Однако можно надеяться, что предел будет существовать в каком-либо более слабом смысле, а именно, если применить некоторый метод суммирования. Например, рассмотрим метод суммирования, сопоставляющий последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ последовательность $(\tilde{x}_n)$ её средних Чезаро, $\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} x_m$. Для геометрических прогрессий $x_n = \omega^n$ ($|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) имеем $\tilde{x}_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \to 0$.

Если дана последовательность (x_n), то её абелевы средние имеют вид

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n x_n,$$

где $0 < r < 1$ и предел рассматривается при $r \nearrow 1$. Положим

$$A_r = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n X U_1^{-n},$$

[1]При частичной поддержке РФФИ, грант 08-01-00723-а.

т.е. A_r — абелевы средние последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$.

Метод суммирования по Абелю здесь рассматривается из-за его связи с интегралами типа Коши. Общая гипотеза может быть сформулирована следующим образом.

Предположение 1.1. *Пусть U_1, U_2 — унитарные операторы, и предположим, что X — такой оператор, что $K = XU_1 - U_2X$ — оператор конечного ранга. Тогда предел усреднений по Абелю последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существует в слабой операторной топологии, т.е. операторы A_r слабо сходятся при $r \nearrow 1$.*

Рассмотрим суммы B_n,

(1) $$B_n = \sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}, \quad n \geqslant 1.$$

Они связаны с операторами вида $U_2^n X U_1^{-n}$ соотношением

(2) $$B_n = X - U_2^n X U_1^{-n}.$$

Следовательно, сходимость последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ равносильна сходимости B_n. Определим новую норму $|||\cdot|||$:

$$|||K||| = \sup_{n \geqslant 1} ||B_n|| = \sup_{n \geqslant 1} ||\sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}||.$$

Если $K = XU_1 - U_2X$, то по формуле (2) норма $|||K|||$ конечна. Возникает естественный вопрос, следует ли из конечности $|||K|||$ то, что последовательность (B_n) будет сходящейся после применения какого-либо s-регулярного метода суммирования (метода Чезаро, Абеля, и т.д.; определение s-регулярности см. в §3).

Можно также рассматривать последовательность $U_2^n X U_1^{-n}$ при отрицательных n с направлением $n \to -\infty$. Если некоторые усреднённые пределы (двусторонней) последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существуют при $n \to \pm\infty$, то это же должно быть верно и для разности пределов, которая тогда представляет собой предел последовательности $U_2^n X U_1^{-n} - U_2^{-n} X U_1^n$ при $n \to +\infty$. В терминах коммутатора K эти операторы могут быть записаны как

(3)
$$U_2^n X U_1^{-n} - U_2^{-n} X U_1^n = \sum_{m=-n}^{n-1} (U_2^{m+1} X U_1^{-(m+1)} - U_2^m X U_1^{-m}) = -\sum_{m=-n}^{n-1} U_2^m K U_1^{-(m+1)}.$$

Равномерная ограниченность норм этих операторов очевидно равносильна конечности $|||K|||$.

Теперь пусть μ — мера Лебега на единичной окружности, возьмём оператор X в $L^2(\mu)$ такой, что $K = XU - UX = \sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$, где U — оператор умножения на z в $L^2(\mu)$, сумма конечна (или бесконечна, но $\sum ||u_k|| \cdot ||v_k|| < \infty$). Классические результаты теории рассеяния говорят о том, что сильные пределы последовательности $U^n X U^{-n}$ существуют при $n \to +\infty$ и $n \to -\infty$. Можно проверить, что их разность есть оператор умножения на функцию $\bar{z} \sum u_k v_k$ (изначально лежащую в $L^1(\mu)$, но таким образом на самом деле принадлежащую $L^\infty(\mu)$).

Теорема 6.1 ниже, согласно которой для сингулярного спектра сумма $\sum u_k v_k$ равна 0, естественно приводит к мысли, что если некоторый усреднённый предел последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существует при $n \to +\infty$ и $n \to -\infty$, то эти пределы совпадают. Объединяя Предположение 1.1 с формулой (3), можно сформулировать новое предположение уже в терминах оператора K.

Предположение 1.2. *Пусть U — унитарный оператор с сингулярным спектром, K — оператор конечного ранга (или из класса операторов со следом, и т.п.), для которого $|||K||| < \infty$. Тогда абелевы средние последовательности $\sum_{m=-n}^{n} U_2^m K U_1^{-m}$ стремятся к нулевому оператору в слабой операторной топологии при $n \to +\infty$.*

В настоящей статье делается несколько редукций этих общих предположений к частным случаям. В рамках этого подхода даётся доказательство Предположения 1.1 в более сильной форме для случая $\operatorname{rank} K = 1$. В §7 случай $\operatorname{rank} K = 2$ обсуждается более подробно и сводится к вопросу об одной функции из L^2-пространства, или, что равносильно, о функции из пространства K_θ, см. Теорему 7.2. Имеются причины считать, что ответ на этот вопрос может быть решающим шагом в доказательстве Предположения 1.1 для общего случая.

Некоторые результаты этой статьи или факты, близкие к ним, могут быть уже известными специалистам в качестве “фольклора”, однако автору не удалось найти их в литературе. Здесь они представлены для полноты изложения.

Автор признателен А.Б. Александрову, А.Г. Полторацкому, Р.В. Романову за полезные обсуждения, а также всем коллегам, проявившим интерес к этой работе.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим простой, однако важный пример, накладывающий некоторые ограничения на то, что можно получить.

Пример. Возьмём оператор ранга 1, $X = (\cdot, a)b$. Тогда $U_2^n X U_1^{-n} = (\cdot, U_1^n a)U_2^n b$. Пусть U_1, U_2 — операторы умножения на z в $L^2(\mu)$, $L^2(\nu)$ соответственно, где μ, ν — меры на единичной окружности, $a = 1$, $b = 1$. Тогда получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = \hat{\mu}_n z^n$, где $\hat{\mu}_n = \int \bar{z}^n d\mu(z)$. Для мер μ, удовлетворяющих соотношению $\hat{\mu}_n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 \to 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда μ — дискретная мера. Например, пусть μ — атом в точке ω единичной окружности, тогда пространство $L^2(\mu)$ одномерно. Получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = (\bar{\omega} z)^n$, это выражение расходится если только ν не есть точечная масса в ω; однако, как вытекает из Предложения 3.1, сходимость может быть получена применением любого s-регулярного метода суммирования.

Для произвольной меры μ без атомов воспользуемся классической теоремой Винера, согласно которой для любой меры, не имеющей точечных масс, имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{-n \leqslant m \leqslant n} |\hat{\mu}(m)| = 0.$$

Отсюда следует, что средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n} 1 = \hat{\mu}_n z^n$ стремятся к нулю.

Сходимость установлена на одном векторе $1 \in L^2(\mu)$; для остальных векторов из $L^2(\mu)$ достаточно заметить, что множество векторов, для которых имеется сходимость, есть замкнутое подпространство, приводящее оператор U_1.

Определим отображение $\mathcal{B}$, сопоставляющее оператору K предел последовательности B_n (если предельный оператор существует в разумном смысле, например, может быть получен с помощью некоторого s-регулярного метода суммирования). Также можно задавать вопрос, может ли отображение $\mathcal{B}$ быть продолжено на множество всех K, для которых $|||K||| < \infty$ (или всех K, представимых в виде $K = XU_1 - U_2 X$, если это другое множество), с помощью какой-либо непрерывности. Другими словами, можно пытаться найти топологию на указанном множестве, чтобы отображение $\mathcal{B}$ было непрерывным.

Первой задачей является определение волнового оператора с помощью метода суммирования, который может быть весьма жёстким, или даже по непрерывности. Если отображение $\mathcal{B}$ может быть корректно продолжено на более широкую область операторов K по непрерывности в некоторой топологии, возникает естественный вопрос, может ли расширенное отображение реализовано в терминах оператора K более конструктивно, скажем, как предел средних для некоторого s-регулярного метода суммирования. Далее, естественно спрашивать, может ли предел достигаться более мягкими методами суммирования, в сильной операторной топологии вместо слабой, и т.д.

Заметим, что если последовательность $U_2^n X U_1^{-n}$ сходится в некотором разумном смысле, то предельный оператор A сплетает U_1 и U_2:

$$AU_1 = U_2 A.$$

Чтобы это увидеть, достаточно перейти к пределу в соотношении

$$(U_2^{n+1} X U_1^{-(n+1)}) U_1 = U_2 (U_2^n X U_1^{-n}).$$

Аналогично, если $B = \mathcal{B}(K)$, то $BU_1 - U_2 B = K$.

Без потери общности можно считать, что кратность спектра унитарного оператора U_1 равна 1. Действительно, при изучении последовательности операторов $U_2^n X U_1^{-n}$, применённых к вектору $h \in H_1$, можно рассматривать подпространство, приводящее U_1, порождённое вектором h, вместо всего пространства H_1. Спектральная теорема для унитарных операторов может быть сформулирована следующим образом.

Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H, возьмём $h \in H$. Тогда существуют мера μ на единичной окружности и изометрическое отождествление приводящего подпространства, порождённого вектором h, с пространством $L^2(\mu)$ такое, что оператор умножения на z в $L^2(\mu)$ соответствует оператору U, а функция $1 \in L^2(\mu)$ — вектору h.

Таким образом, можно предполагать, что $H_1 = L^2(\mu)$, где μ — мера на единичной окружности, и U_1 — оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$. Без потери общности можно взять вероятностную меру μ. При рассмотрении сходимости в слабой операторной топологии можно предполагать, что и кратность спектра U_2 также равна 1. Следовательно, в качестве оператора U_2 можно взять оператор умножения на независимую переменную в $H_2 = L^2(\nu)$ для некоторой (вероятностной) меры ν на единичной окружности.

Применим оператор B_n при $K = (\cdot, \bar{u})v$ к вектору $h \in L^2(\mu)$ и найдём значение получающейся функции в точке z, $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}(B_n h)(z) = \left[\left(\sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}\right) h\right](z) &= \sum_{m=1}^{n} z^{m-1} \left(\int \bar{\xi}^m h(\xi) u(\xi) d\mu(\xi)\right) v(z) \\ &= v(z) \cdot \int \frac{1 - (\bar{\xi} z)^n}{1 - \bar{\xi} z} \bar{\xi} h(\xi) u(\xi) d\mu(\xi).\end{aligned}$$

Для $K = \sum_k (\cdot, \bar{u}_k) v_k$ получаем

$$(B_n h)(z) = \sum_k v_k(z) \cdot \int \frac{1 - (\bar{\xi} z)^n}{1 - \bar{\xi} z} \bar{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi). \tag{4}$$

3. Регулярные линейные методы суммирования

Здесь даётся необходимая информация о методах усреднения для ограниченных последовательностей, занумерованных неотрицательными целыми числами. Возьмём упорядоченное множество (α), которое будет либо множеством неотрицательных целых чисел с направлением $n \to +\infty$, либо интервалом $[0, 1)$ с направлением $r \nearrow 1$. Пусть $p_{\alpha,n}$ — веса, определяющие регулярный метод суммирования. Точнее, предположим, что

1) $p_{\alpha,n} \geqslant 0$; $\quad \forall \alpha \ \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} = 1$; $\qquad$ 2) $\forall n \geqslant 0 \quad p_{\alpha,n} \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0$.

Усреднения последовательности (x_n) имеют вид

$$\tilde{x}_\alpha = \sum_n p_{\alpha,n} x_n.$$

Если x_n сходятся, то $\tilde{x}_\alpha$ также сходятся, однако обратное в общем случае неверно; это позволяет рассматривать усреднённые пределы последовательностей, которые не сходятся в обычном смысле. Свойство 1) означает, что каждый элемент $\tilde{x}_\alpha$ является усреднением x_n; по свойству 2) предел (когда он существует) не зависит от любого конечного числа элементов последовательности.

Регулярный метод суммирования будет называться s-регулярным, если, кроме того,

3) $\sum_{n=0}^{\infty} |p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1}|$ — ограниченная функция от α, стремящаяся к 0.

Простое достаточное условие для свойства 3) состоит в том, что

3$'$) $\forall \alpha, n \ p_{\alpha,n} \geqslant p_{\alpha,n+1}$.

Свойство s-регулярности метода суммирования означает, что средние последовательности (x_n) сходятся одновременно (и к тому же самому пределу) с любой подпоследовательностью вида (x_{n+m}), $m > 0$.

Все s-регулярные методы суммирования обладают одним важным свойством.

Предложение 3.1. *Если $(p_{\alpha,n})$ — s-регулярный метод суммирования, то для любой непостоянной унимодулярной геометрической прогрессии (x_n) ($x_n = \omega^n$, где $|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) средние $\tilde{x}_\alpha$ стремятся к нулю.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}(1-\omega)\tilde{x}_\alpha &= (1-\omega)\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^n - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^{n+1} \\ &= \left(p_{\alpha,0} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n+1}\omega^{n+1}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^{n+1} \\ &= p_{\alpha,0} - \sum_{n=0}^{\infty}(p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1})\omega^{n+1} \xrightarrow[\alpha]{} 0. \qquad \square\end{aligned}$$

Простым примером s-регулярного метода суммирования является метод Чезаро C_1, где $\tilde{x}_n$ — арифметические средние, $\tilde{x}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$. Существуют s-регулярные методы суммирования более мягкие, чем C_1, например, методы Чезаро C_α при $\alpha < 1$, или классы методов Вороного (или Нёрлюнда), см. [2].

Теперь зафиксируем метод суммирования $(p_{\alpha,n})$ и применим процедуру усреднения к ограниченной последовательности операторов $U_2^n X U_1^{-n}$. Определим

$$A_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} U_2^n X U_1^{-n}, \quad B_\alpha = X - A_\alpha.$$

Имеем

$$B_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(X - U_2^n X U_1^{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\left(\sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}\right).$$

В силу (4), для $K = \sum_k (\cdot, \bar{u}_k) v_k$, $K : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$, имеем

$$(5) \qquad (B_\alpha h)(z) = \sum_k v_k(z) \cdot \left(\int \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\bar{\xi}z)^n}{1 - \bar{\xi}z} \bar{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi)\right).$$

Метод усреднения по Абелю сопоставляет последовательности (x_n) семейство $(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^n x_n$, $0 \leqslant r < 1$, с направлением $r \nearrow 1$. Подставляя в формулу (5) $p_{r,n} = (1-r)r^n$, получаем

(6)

$$(B_r h)(z) = \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n K U_1^{-(n+1)}\right) h\right](z) = r \sum_k v_k(z) \cdot \int \frac{\bar{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z}.$$

Если удастся доказать, что это выражение имеет пределы при $r \nearrow 1$ в ν-почти всех точках z, сразу же получится слабая сходимость $B_r h$. Следует отметить, однако, что сам по себе факт поточечной сходимости намного глубже, чем слабая сходимость.

Для случая, когда K — оператор ранга 1, существование угловых пределов интегралов типа Коши (6) почти всюду было доказано в статье [3]. Из этого немедленно вытекает, что Предположение 1.1 верно, если K — оператор ранга 1. Однако даже более сильное утверждение может быть доказано гораздо проще, см. Теорему 7.1 ниже.

4. Сходимость интегральных операторов

Пусть μ — мера на единичной окружности, K — интегральный оператор в $L^2(\mu)$,

$$(Kh)(z) = \int k(z,\xi)h(\xi)d\mu(\xi), \quad h \in L^2(\mu), \tag{7}$$

Если $K = \sum_n (\cdot, \bar{u}_n)v_n$, то K записывается как интегральный оператор (7) с ядром k,

$$k(z,\xi) = \sum u_n(\xi)v_n(z).$$

Как обычно, U — оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$.

Предложение 4.1. *Пусть K — интегральный оператор* (7) *в $L^2(\mu)$. Если $|||K||| < \infty$, и для μ-почти всех z выполнено $\int |\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}|d\mu(\xi) < \infty$, то для любого s-регулярного метода суммирования операторы B_α сходятся в слабой оператороной топологии к интегральному оператору B с ядром $\frac{k(z,\xi)}{\xi-z}$: $(Bh)(z) = \int \frac{k(z,\xi)}{\xi-z}h(\xi)d\mu(\xi)$, $h \in L^2(\mu)$.*

Если X — оператор, для которого $XU - UX = K$, то усреднённые пределы последовательности U^nXU^{-n} существуют для любого s-регулярного метода суммирования при $n \to \pm\infty$ и равны $X - B$.

Оператор B корректно определён на плотном множестве ограниченных функций $h \in L^2(\mu)$ и может быть распространён на всё пространство $L^2(\mu)$ по непрерывности.

Доказательство. Зафиксируем точку z такую, что $\int |\frac{k(z,\xi)}{\xi-z}|d\mu(\xi) < \infty$. По аналогии с формулой (5), для s-регулярного метода суммирования $(p_{\alpha,n})$ получаем

$$(B_\alpha h)(z) = \int k(z,\xi)\frac{1 - \sum_{n=0}^\infty p_{\alpha,n}(\bar{\xi}z)^n}{1 - \bar{\xi}z}\bar{\xi}h(\xi)d\mu(\xi).$$

Применим операторы B_α, B к вектору $h = 1$:

$$(B_\alpha 1)(z) = \int k(z,\xi)\frac{1 - \sum_{n=0}^\infty p_{\alpha,n}(\bar{\xi}z)^n}{\xi - z}d\mu(\xi), \quad (B1)(z) = \int \frac{k(z,\xi)}{\xi - z}d\mu(\xi),$$

откуда

$$(B_\alpha 1)(z) - (B1)(z) = -\int \left(\sum_{n=0}^\infty p_{\alpha,n}(\bar{\xi}z)^n\right)\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}d\mu(\xi).$$

Поскольку $|\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\bar{\xi}z)^n| \leqslant 1$ для любого α, абсолютная величина выражения в интеграле не превосходит $|\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}|$. Из s-регулярности вытекает, что $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\bar{\xi}z)^n \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0$, следовательно $(B_\alpha 1)(z) - (B1)(z) \to 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

Доказано, что $B_\alpha 1 \to B1$ поточечно μ-почти всюду. Из предположения $|||K||| < \infty$ следует, что $B_\alpha 1 \to B1$ слабо. Следовательно, $B_\alpha h \to Bh$ слабо для любого вектора h из приводящего подпространства, порождённого функцией 1, т.е. для всех $h \in L^2(\mu)$.

Для волнового оператора, соответствующего пределу при $n \to -\infty$, рассуждение вполне аналогично. $\square$

Заметим, что если $\iint |\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}|^2 d\mu(\xi) d\mu(z) < \infty$, то все операторы B_α и оператор B принадлежат классу Гильберта–Шмидта и, кроме того, $B_\alpha \to B$ по норме Гильберта–Шмидта; тогда автоматически имеем $|||K||| < \infty$.

5. Взаимно-сингулярные меры

Теорема 5.1. *Допустим, что спектральные меры унитарных операторов U_1, U_2 взаимно сингулярны, $K = XU_1 - U_2X$ — оператор конечного ранга. Тогда для любого s-регулярного метода суммирования усреднения последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ стремятся к нулю в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Возьмём векторы $x \in H_1$, $y \in H_2$, и пусть $||x|| = ||y|| = 1$; требуется доказать, что $(\sum_n p_{\alpha,n} U_2^n X U_1^{-n} x, y) \to 0$. Без потери общности можно предполагать, что $H_1 = L^2(\mu)$, $x = 1$; $H_2 = L^2(\nu)$, $y = 1$, где μ, ν — вероятностные меры на единичной окружности.

Рассмотрим заряд $\mu - \nu$ как элемент пространства, сопряжённого к пространству всех непрерывных функций на окружности. Норма заряда $\mu - \nu$ равна 2, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественнозначная непрерывная функция s с нормой 1 такая, что $\int s\, d(\mu - \nu) > 2 - \varepsilon$. Поскольку $\int s d\nu \geqslant -1$, получаем $\int s\, d\mu > 1 - \varepsilon$. Возьмём открытые множества $e_1 = \{s > \frac{1}{2}\}$ и $e_2 = \{s < -\frac{1}{2}\}$. На множестве e_1^c, дополнительном к e_1, имеем $s \leqslant \frac{1}{2}$, следовательно, $\int_{e_1^c} s\, d\mu \leqslant \frac{\mu e_1^c}{2} = \frac{1 - \mu e_1}{2}$. Аналогично, $\int_{e_2^c} s\, d\nu \geqslant -\frac{1 - \nu e_2}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon < \int s\, d(\mu - \nu) &= \int_{e_1} s\, d\mu + \int_{e_1^c} s\, d\mu - \int_{e_2} s\, d\nu - \int_{e_2^c} s\, d\nu \\ &\leqslant \mu e_1 + \frac{1 - \mu e_1}{2} + \nu e_2 + \frac{1 - \nu e_2}{2} = \frac{\mu e_1}{2} + \frac{\nu e_2}{2} + 1, \end{aligned}$$

откуда $\mu e_1 + \nu e_2 > 2 - 2\varepsilon$. Следовательно, $\mu e_1 > 1 - 2\varepsilon$, $\nu e_2 > 1 - 2\varepsilon$. Множества e_1, e_2 открыты, и потому каждое из них является объединением открытых дуг. Среди них можно выбрать подмножества e_1', e_2', образованные конечными наборами дуг, которые будут содержать “почти полные” массы ($\geqslant 1-3\varepsilon$, т.е. с точностью до любого малого числа) мер μ и ν соответственно. Это значит, что векторы $x_\varepsilon = \chi_{e'_1}x, y_\varepsilon = \chi_{e'_2}y$ стремятся к x, y соответственно при $\varepsilon \to 0$, где $\chi_{e'_i}$ обозначает характеристические функции множеств e'_i, $i = 1, 2$.

По построению, для заданного числа ε расстояние между носителями мер $\mu_\varepsilon = \chi_{e'_1}\mu$ и $\nu_\varepsilon = \chi_{e'_2}\nu$ положительно. Следовательно для μ_ε-почти всех ξ и для ν_ε-почти всех z выражение $1 - \bar{\xi}z$ отделено от нуля. Для любого s-регулярного метода суммирования из Предложения 3.1 вытекает поточечная сходимость по α ν_ε-почти всюду в формуле (5), применённой к $h = x_\varepsilon$. Таким образом, получаем сходимость $(B_\alpha x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ по α.

Чтобы получить сходимость $(B_\alpha x, y)$ по α, остаётся перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. $\square$

Нам понадобится следующий очевидный факт. Допустим, что пространства H_1, H_2 представляются в виде конечных или счётных прямых сумм подпространств, приводящих унитарные операторы U_1, U_2 соответственно, и оператор X может быть записан в матричной форме, соответствующей этим разложениям пространств H_1, H_2. Тогда сходимость в слабой операторной топологии усреднений при любом s-регулярном методе суммирования имеет место (в частности, справедливо Предположение 1.1) для X тогда и только тогда, когда то же самое верно для каждой матричной клетки X. У каждого из оперторов U_1, U_2 можно выделять части, соответствующие попарно взаимно-сингулярным частям спектра. Поскольку для взаимно-сингулярных мер искомая сходимость устанавливается Теоремой 5.1, достаточно рассматривать лишь “диагональные” матричные клетки, в частности — соответствующие спектрам точечному, абсолютно-непрерывному, сингулярному непрерывному. Случай абсолютно-непрерывной меры покрывается классической теорией рассеяния; случай точечного спектра следует из Примера из §2. Тем самым общая задача сводится к рассмотрению сингулярных мер, не имеющих точечных масс. Поскольку, не умаляя общности, можно считать, что U_1, U_2 — унитарные операторы умножения на z в $L^2(\mu), L^2(\nu)$ соответственно, общая задача сводится к случаю, когда $\mu = \nu$, причём эта мера — сингулярная непрерывная.

Таким образом, *чтобы доказать, что имеет место сходимость в слабой операторной топологии усреднений при каком-либо s-регулярном методе суммирования, достаточно проверить это для случая, когда $U_1 = U_2$ — оператор умножения на z в $L^2(\mu)$, где μ — сингулярная мера на единичной окружности, не имеющая точечных нагрузок. При этом меру μ можно разбивать на взаимно-сингулярные части и проверять аналогичное утверждение для каждой части. Утверждение для μ будет справедливым тогда и только тогда, когда оно будет верным для каждой из её частей.*

6. Пространства K_θ

С вероятностной сингулярной мерой μ на единичной окружности свяжем внутреннюю функцию θ по формуле

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z} d\mu(\xi).$$

Это соотношение задаёт взаимно-однозначное соответствие между вероятностными мерами μ на единичной окружности и внутренними функциями θ в единичном круге с единственным условием $\theta(0) = 0$. Применяя эту формулу к внутренним функциям $\bar{\alpha}\theta$ вместо θ, где α пробегает единичную окружность, получим семейство вероятностных мер σ_α на единичной окружности, связанных с θ:

$$\frac{1+\bar{\alpha}\theta(z)}{1-\bar{\alpha}\theta(z)} = \int \frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z} d\sigma_\alpha(\xi). \tag{8}$$

Имеем $\theta = \alpha$ σ_α-почти всюду в смысле угловых граничных значений. Опеределим $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Хорошо известно (см. [4], [5]), что для каждого α имеется естественное изометрическое отождествление V_α пространств K_θ и $L^2(\sigma_\alpha)$, отображающее функцию из K_θ в её граничную функцию из $L^2(\sigma_\alpha)$. Для $\alpha = 1$ оператор V_1 также будет обозначаться через V. Для оператора, обратного к V_α, имеется формула

$$(V_\alpha^{-1}s)(z) = (1-\bar{\alpha}\theta(z)) \int \frac{s(\xi)d\sigma_\alpha(\xi)}{1-\bar{\xi}z}, \quad s \in L^2(\sigma_\alpha).$$

Для каждого α носитель меры σ_α является объединением дополнения к подмножеству единичной окружности, на котором θ — аналитическая функция, и точек, в которых функция θ аналитическая и принимает значение α. Следовательно, если μ не имеет точечных масс, то носитель меры $\mu = \sigma_1$ содержится в носителе меры σ_α при любом α с модулем 1.

Техника пространств K_θ позволяет установить важное необходимое условие для того, чтобы норма $|||\ \cdot\ |||$ была конечной.

Теперь предположим, что K — ядерный оператор (т.е. принадлежит классу операторов со следом) в $L^2(\mu)$. Тогда K записывается в виде $K = \sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$, причём u_k, v_k удовлетворяют соотношению

$$\sum ||u_k|| \cdot ||v_k|| < \infty.$$

Линейное отображение

$$\sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k \mapsto \sum u_k v_k$$

корректно определено на классе ядерных операторов в $L^2(\mu)$ и является непрерывным (сжимающим) из класса ядерных операторов в пространство $L^1(\mu)$.

Теорема 6.1. *Пусть μ — сингулярная мера на единичной окружности, U — оператор умножения на z в $L^2(\mu)$. Предположим, что K — ядерный оператор в $L^2(\mu)$, $K = \sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$, причём*

$$|||K||| = \sup_{n\geqslant 1} ||\sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}|| < \infty.$$

Тогда μ-почти всюду имеем $\sum u_k v_k = 0$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что μ — вероятностная мера. Построим θ и функции $f_k \in K_\theta$, $f_k = V^{-1}u_k$. Применим (6) к вектору h, $h(\xi) = \xi$; получим

$$(B_r h)(z) = r \cdot \sum v_k(z) \cdot \int \frac{u_k(\xi) d\mu(\xi)}{1 - r\bar{\xi}z} = \frac{r \cdot \sum v_k(z) f_k(rz)}{1 - \theta(rz)}.$$

В [5] показано, что функции $f_{k,r}$ со значениями $f_k(rz)$, рассматриваемые как элементы пространства $L^2(\mu)$, стремятся к u_k в $L^2(\mu)$, причём $||f_{k,r} - u_k|| \leqslant ||u_k||$. Следовательно,

$$\sum v_k f_{k,r} \to \sum u_k v_k \quad \text{in} \quad L^1(\mu).$$

С другой стороны, для функций $B_r h$, где $h(\xi) = \xi$, по построению имеем $||B_r h|| \leqslant |||K|||$; поскольку $\theta(rz) \to 1$ для μ-почти всех z, получаем, что $1 - \theta_r \to 0$ в $L^2(\mu)$, и, следовательно, $(1 - \theta_r)(B_r h) \to 0$ в $L^1(\mu)$. Отсюда заключаем, что

$$\sum u_k v_k = \lim \sum v_k f_{k,r} = \lim(1 - \theta_r)(B_r h) = 0,$$

как и требовалось. $\square$

Замечание. Без предположения, что мера μ сингулярна, результат неверен. Возьмём ортопроектор P_+ на H^2 в качестве примера оператора X на пространстве L^2 (относительно меры Лебега на единичной окружности), где $U_1 = U_2$ — оператор умножения на z. Тогда ясно, что $K = (\cdot, \bar{u})v$, где $u = z$, $v = 1$ — оператор ранга 1, и таким образом $uv = z$. Похожие примеры могут быть построены для любых унитарных операторов U_1, U_2 с абсолютно-непрерывными спектральными мерами.

7. Случай ранга $\leqslant 2$

Теорема 7.1. *Пусть U_1, U_2 — унитарные операторы с сингулярным спектром, и предположим, что X — такой оператор, что $K = XU_1 - U_2X$ является оператором ранга 1. Тогда для любого s-регулярного метода суммирования усреднения последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ имеют предел в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $U_1 = U_2$, и что этот оператор, который будет обозначаться через U, действует в $L^2(\mu)$, где μ — сингулярная мера на единичной окружности. Оператор K может быть записан в виде $K = (\cdot, \bar{u})v$. По Теореме 6.1 имеем $uv = 0 \quad \mu$-почти всюду. Сужения меры μ на множества, где $u \neq 0$ и $v \neq 0$, взаимно сингулярны (таким образом, получено новое доказательство этого известного факта). Остаётся применить Теорему 5.1. □

Теперь предположим, что $\operatorname{rank} K = 2$. Как обычно, можно работать в пространстве $L^2(\mu)$. Запишем

$$K = (\cdot, \bar{u}_1)v_1 + (\cdot, \bar{u}_2)v_2.$$

По Теореме 6.1 получаем $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Для множеств, где хотя бы одна из функций u_1, u_2, v_1, v_2 равна нулю, вопрос сводится к случаю меньшего ранга. Таким образом, задача сведена к случаю, когда все функции ненулевые. Согласно §5 можно считать, что все функции u_1, u_2, v_1, v_2 отделены от нуля и от бесконечности. Вместо оператора X можно рассмотреть оператор $M_{v_1^{-1}} X M_{u_2^{-1}}$, где M_α обозначает оператор умножения на функцию α. Очевидно, существование волнового оператора для X равносильно его существованию для $M_{v_1^{-1}} X M_{u_2^{-1}}$. Исходный оператор K преобразуется в оператор $(\cdot, \bar{u}_1/\bar{u}_2)1 + (\cdot, 1)v_2/v_1$, который теперь будет обозначаться через K. Положим

$$\varphi = \frac{u_1}{u_2} = -\frac{v_2}{v_1}.$$

Доказан следующий результат.

Теорема 7.2. *Для любого s-регулярного метода суммирования сходимость усреднений последовательности B_n для любого опертора K ранга 2 с конечной нормой $|||K|||$ равносильна такой же сходимости для всех частных случаев, когда K — оператор в $L^2(\mu)$ вида*

$$K = (\cdot, \bar{\varphi})1 - (\cdot, 1)\varphi \tag{9}$$

для некоторой вероятностной сингулярной меры μ на единичной окружности и функции $\varphi \in L^2(\mu)$.

Более того, достаточно рассматривать случаи вещественнозначных или унимодулярных функций φ. В первом случае, поскольку коммутатор K имеет вид $XU - UX$ тогда и только тогда, когда K^* также представляется в таком виде, общий случай комплекснозначной функции φ сводится к случаю, когда функция φ вещественнозначная. Это рассуждение позволяет рассматривать только самосопряжённые операторы K. Тогда K может быть записан в виде $K = (\cdot, a)a \pm (\cdot, b)b$. По Теореме 6.1 получаем, что $|a|^2 \pm |b|^2 = 0$, откуда знак может быть только минусом и K не может быть положительным или отрицательным оператором. Также μ-почти всюду имеем $|a| = |b|$. Преобразуем пространство $L^2(\mu)$ в весовое пространство $L^2(|a|^2\mu)$ унитарным оператором умножения на функцию $1/a$; тогда K перейдёт в оператор $(\cdot, 1)1 - (\cdot, \varphi)\varphi$ при унимодулярной функции $\varphi = b/a$. Если вместо оператора K рассмотреть его суперпозицию с оператором умножения на φ, получится формула (9).

Теорема 7.3. *Пусть μ — мера на единичной окружности, μ_1 — её сингулярная непрерывная часть. Пусть U_1 — оператор умножения на z в $L^2(\mu)$, U_2 — унитарный оператор в гильбертовом пространстве H. Допустим, что $X : L^2(\mu) \to H$ — оператор такой, что $K = XU_1 - U_2X$ является оператором ранга 2, $K = (\cdot, u_1)h_1 - (\cdot, u_2)h_2$. Положим $\varphi = \frac{u_1}{u_2}$. Предположим, что $|\varphi(\xi) - \varphi(z)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |\xi - z|^\alpha$, где либо*

a) $\alpha = 1$ *и μ_1 — произвольная мера, либо*

b) $\alpha < 1$ *и мера μ_1 такова, что $\mu_1 I \leqslant \mathrm{const} \cdot |I|^\beta$ для любого интервала I, причём $\alpha + \beta > 1$.*

Тогда для любого s-регулярного метода суммирования слабые пределы усреднений последовательности операторов $U_2^n X U_1^{-n}$ при $n \to +\infty$ и $n \to -\infty$ существуют и совпадают.

Доказательство. Из §5 вытекает, что без потери общности можно считать, что $\mu_1 = \mu$. По Теоремам 6.1, 7.2 и Предложению 4.1 достаточно проверить, что $\int |\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}| d\mu(\xi) < \infty$ для $k(z, \xi) = \varphi(\xi) - \varphi(z)$. В случае *a*) это очевидно. В случае *b*) для каждого z имеем

$$\int \left| \frac{\varphi(\xi) - \varphi(z)}{\xi - z} \right| d\mu(\xi) = \sum_l \int_{e_{z,l}} \left| \frac{\varphi(\xi) - \varphi(z)}{\xi - z} \right| d\mu(\xi)$$
$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \sum_l \frac{(2^{-l})^\alpha \cdot (2^{-l})^\beta}{2^{-l}} = \mathrm{const} \cdot \sum_l (2^{\alpha+\beta-1})^{-l} < \infty,$$

где $e_{z,l} = \{\xi : |\xi - z| \in [2^{-l-1}, 2^{-l})\}$ □

Замечание. На множестве, на котором функция u_2 мала, можно рассмотреть функцию $\frac{u_2}{u_1}$ вместо φ.

Результат остаётся верным, если предположение выполнено для меры, взаимно абсолютно-непрерывной с μ. Таким образом, оператор умножения на независимую переменную можно заменить на произвольный унитарный оператор; определение функции φ обобщается естественным образом.

Достаточные условия теоремы не являются необходимыми, однако можно надеяться, что качественная картина отражена правильно, скажем, что функция φ должна быть достаточно гладкой, и замыкание операторов K с такими φ, как в теореме, относительно нормы $|||\ \cdot\ |||_1$, см. параграф 8 ниже, покрывает общий случай.

Теперь хотелось бы обрисовать связь случая ранга 2 со свойствами непрерывности функций из $L^2(\mu)$. Пусть оператор K определён формулой (9) при $\varphi \in L^2(\mu)$. Допустим, что норма $|||K|||$ конечна. Определим $g_r = B_r h$, где $h(z) = z$. По формуле (6) имеем

$$g_r(z) = \int \frac{\varphi(\xi) - \varphi(z)}{1 - r\bar{\xi}z} d\mu(\xi),$$

Норма каждой функции g_r, $0 \leqslant r < 1$, не превосходит $|||K|||$. Заметим, что для функции $f = V^{-1}\varphi \in K_\theta$, g_r переписывается как $g_r(z) = -\frac{f(z)-f(rz)}{1-\theta(rz)}$. Принимая во внимание то, что μ-почти всюду имеем $\theta = 1$, получаем, что если предел функций g_r существует при $r \nearrow 1$, он может рассматриваться как производная $\frac{df}{d\theta}$.

Положим $\psi = V_{-1}V_1^{-1}\varphi = V_{-1}f$, где операторы V_α $(\alpha = 1, -1)$ определены в §6. По построению $\mu = \sigma_1$; обозначим здесь $\nu = \sigma_{-1}$. Определим операторы $Y_r : L^2(\nu) \to L^2(\mu)$,

$$(Y_r s)(z) = \frac{\lim_{q\nearrow 1} \int \frac{s(\xi)d\nu(\xi)}{1-q\bar{\xi}z} - \int \frac{s(\xi)d\nu(\xi)}{1-r\bar{\xi}z}}{\lim_{q\nearrow 1} \int \frac{d\nu(\xi)}{1-q\bar{\xi}z} - \int \frac{d\nu(\xi)}{1-r\bar{\xi}z}}. \tag{10}$$

Предел в числителе существует и равен $\frac{1}{2}V_1V_{-1}^{-1}s$, предел в знаменателе соответствует функции $s = 1$ и равен $\frac{1}{2}$. Получаем

$$(Y_r\psi)(z) = \frac{\frac{f(z)}{1+\theta(z)} - \frac{f(rz)}{1+\theta(rz)}}{\frac{1}{1+\theta(z)} - \frac{1}{1+\theta(rz)}} = \frac{f(z) + f(z)\theta(rz) - 2f(rz)}{\theta(rz) - 1} = f(z) - 2\frac{f(z) - f(rz)}{1 - \theta(rz)},$$

или

$$Y_r\psi = \varphi + 2g_r.$$

Следовательно, сходимость $Y_r\psi$ равносильна сходимость g_r (из которой, в свою очередь, вытекает сходимость операторов B_r). Для функций $s \in L^2(\nu)$, являющихся следами достаточно гладких функций на единичной окружности (также обозначаемых через s) имеем

$$
\begin{aligned}
(Y_r s)(z) - s(z) =& \frac{\lim_{q\nearrow 1}\int (s(\xi)-s(z))\left(\frac{1}{1-q\bar\xi z}-\frac{1}{1-r\bar\xi z}\right)d\nu(\xi)}{\frac{1}{1+\theta(z)}-\frac{1}{1+\theta(rz)}}\\
=& \frac{\int \frac{s(\xi)-s(z)}{1-\bar\xi z}\left(1-\frac{1-\bar\xi z}{1-r\bar\xi z}\right)d\nu(\xi)}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\theta(rz)}{1+\theta(rz)}}\\
=& -2z(1+\theta(rz))\cdot\frac{1-r}{1-\theta(rz)}\int\frac{s(\xi)-s(z)}{\xi-z}\cdot\frac{d\nu(\xi)}{1-r\bar\xi z}
\end{aligned}
$$

и

$$
\int\frac{s(\xi)-s(z)}{\xi-z}\cdot\frac{d\nu(\xi)}{1-r\bar\xi z} = \int\frac{s'(\xi)d\nu(\xi)}{1-r\bar\xi z}+\int\frac{s(\xi)-(s(z)+s'(z)(\xi-z))}{(\xi-z)(1-r\bar\xi z)}d\nu(\xi).
$$

Если функция s дважды дифференцируема, то второе слагаемое ограничено; первое слагаемое ограничено (по r) и даже стремится к $\frac{1}{2}V_1V_{-1}^{-1}s'$ при $r\nearrow 1$. Хорошо известно, что если μ не имеет атомов, то $\frac{1-r}{1-\theta(rz)}\to 0$ для μ-почти всех точек z. Следовательно, в таких точках получаем $(Y_r s)(z)-s(z)\to 0$ и тем самым $Y_r s\to s$ при $r\nearrow 1$.

Таким образом, чтобы построить естественного “кандидата” на роль волнового оператора, было бы достаточно показать, что если $\varphi\in L^2(\mu)$, и для оператора K, опередённого формулой (9), выполнено $|||K|||<\infty$, то $\psi = V_{-1}V_1^{-1}\varphi$ допускает непрерывное продолжение в μ-почти всех точках. Было бы даже достаточно доказать, что тогда μ-почти все точки являются точками Лебега функции ψ относительно меры μ, т.е. что $\frac{\int_{I_\varepsilon}\psi d\mu}{\int_{I_\varepsilon}d\mu}$ имеет предел при $\varepsilon\to 0$ для μ-почти всех z, где I_ε — дуга $\{\xi : |\xi - z| < \varepsilon\}$.

8. Ещё несколько предположений

Предположение 1.1 является качественно более сильным утверждением, чем Предположение 1.2, и в случае, когда K имеет вид (9) в $L^2(\mu)$, где μ — сингулярная мера, вариант последнего выглядит следующим образом.

Предположение 8.1. *Пусть μ — сингулярная вероятностная мера на единничной окружности. Если $\varphi\in L^2(\mu)$ и $|||K|||<\infty$ для оператора K, определённого формулой* (9), *то функции (от z)*

$$
\int\frac{1-r^2}{|\xi-rz|^2}(\varphi(\xi)-\varphi(z))d\mu(\xi)
$$

стремятся (сильно или слабо) к 0 в $L^2(\mu)$.

Полученные выше результаты наводят на мысль, что случай, когда K — оператор ранга 2, может быть ключевым для общей ситуации. В этом параграфе представлены некоторые идеи, показывающие, что рассуждения о плотности могут быть полезными в этой теории.

Предположим, что спектральная мера унитарного оператора U_1 сингулярна относительно меры Лебега. В Примере в §2 рассматривался оператор X ранга 1. Если $X = (\cdot, u)v$, то для коммутатора K имеется формула

$$K = (\cdot, U_1^* u)v - (\cdot, u)U_2 v. \tag{11}$$

Здесь коммутаторы K указанного вида рассматриваются как "элементарные блоки", для которых была установлена сходимость средних Чезаро последовательности (B_n), см. (1). Ясно, что сильная сходимость средних Чезаро имеет место и для конечных линейных комбинаций операторов вида (11), и для их замыкания относительно нормы $|||\cdot|||$. Трудно поверить, чтобы это замыкание могло исчерпывать, например, все операторы конечного ранга с конечной нормой $|||\cdot|||$. Однако может оказаться, что это верно для некоторой более слабой нормы, чего было бы достаточно для наших целей.

Сходимость последовательности $(\sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m})h$, $h \in H_1$, очевидно равносильна сходимости $(\sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m})(U_1 h)$. Множество векторов, на которых сходимость имеет место, является замкнутым подпространством, приводящим оператор U_1. Следовательно, если сходимость установлена на одном векторе, она автоматически распространяется и на всё приводящее подпространство, порождённое этим вектором.

Как и обычно, можно работать с оператором умножения на z в пространстве $L^2(\mu)$ в качестве U_1, где μ — сингулярная мера. Таким образом, предполагается заменить норму $|||\cdot|||$,

$$|||K||| = \sup_{n \geqslant 1} || \sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m} ||,$$

нормой

$$|||K|||_1 = \sup_{n \geqslant 1} || \sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m}\, z || = \sup_{n \geqslant 0} || \sum_{m=0}^n U_2^m K \bar{z}^m ||,$$

т.е. рассмотреть те же самые операторы, но вместо их норм взять нормы векторов, получающихся в качестве образов функции $z \in L^2(\mu)$. По построению имеем $|||K|||_1 \leqslant |||K|||$. (Также можно рассматривать и нормы, в которых вместо сумм $\sum_{m=1}^n U_2^{m-1} K U_1^{-m}$ используются их усреднения, соответствующие некоторому s-регулярному методу суммирования.)

Некоторые из результатов на самом деле выводятся из ограниченности нормы $|||K|||_1$, см., например, доказательство Теоремы 6.1. Было бы очень важно описать замыкание всех линейных комбинаций "элементарных блоков" (операторов ранга 2, для которых известно, что сходимость имеет место) относительно нормы $|||\cdot|||_1$, ибо на этом замыкании получился бы результат, более сильный, чем Предположение 1.1, а именно, абелевы средние можно было бы заменить на средние Чезаро. В связи с содержанием настоящей статьи представляет интерес следующее предположение об операторах конечного ранга с конечной нормой $|||\cdot|||$.

Предположение 8.2. *Линейная оболочка операторов вида* (11) *(или как в Теореме* 7.3, *и т.п.) в* $L^2(\mu)$ *при сингулярной мере* μ *плотна относительно нормы* $|||\cdot|||_1$ *среди всех операторов конечного ранга с конечной нормой* $|||\cdot|||$.

Как мы видели, для того, чтобы доказать Предположение 1.1 для общих операторов K ранга 2, достаточно проверить его для операторов вида (9). Для этого, в свою очередь, было бы достаточно проверить следующее предположение.

Предположение 8.3. *Пусть* μ *— сингулярная мера на единичной окружности. На множестве функций* $\varphi \in L^2(\mu)$ *введём норму, равную норме* $|||K|||_1$ *для соответствующего оператора* K*, заданного формулой* (9)*. Тогда полиномы (от* z *и* $\bar{z}$*) плотны в классе функций, для которых эта норма конечна, относительно этой нормы.*

Из следующего предложения вытекает, что аналог утверждения из Предположения 8.2 справедлив, если заменить норму $|||\cdot|||_1$ нормой класса ядерных операторов. Таким образом также будет показано, что обращение Теоремы 6.1 имеет место для операторов из плотного множества относительно нормы класса ядерных операторов.

Предложение 8.4. *Среди операторов* $K = \sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$ *из класса ядерных операторов в* $L^2(\mu)$ *со свойством* $\sum u_k v_k = 0$ *операторы, которые представляются как коммутаторы* $K = XU - UX$*, образуют плотное множество в норме класса ядерных операторов.*

Доказательство. Достаточно взять множество всех операторов конечного ранга вида $K = \sum(\cdot, \bar{u}_k)v_k$, где сумма конечна, а функции u_k, v_k бесконечно гладкие и удовлетворяют условию $\sum u_k v_k = 0$. □

Во Введении упоминалась теорема Винера, согласно которой для любой конечной меры на окружности, не имеющей атомов, средние Чезаро абсолютных величин коэффициентов Фурье меры стремятся к нулю. Это обеспечивало сходимость к нулю средних Чезаро операторов вида $U_2^n X U_1^{-n}$, где X был оператором ранга 1, и, следовательно, K — оператор ранга 2 вида (11). Ясно, что такая сходимость в терминах оператора K имеет место, если K принадлежит замкнутой линейной оболочке всех операторов (11) относительно нормы $|||\cdot|||_1$ (которая, как предполагается, может содержать все операторы конечного ранга с конечной нормой $|||\cdot|||$).

Естественно возникает следующий вопрос: можно ли метод Чезаро (C_1) в теореме Винера заменить более мягким методом суммирования, например, методом Чезаро C_α при $\alpha < 1$? любым s-регулярным методом?

Если мера μ обладает свойством $\int z^n d\mu(z) \to 0$ при $n \to \infty$ (и тогда также $\int z^n f(z) d\mu(z) \to 0$ для любой функции $f \in L^1(\mu)$), имеем сильную сходимость для операторов вида (11). Если Предположения 8.2 и 8.3 о плотности справедливы, получилось бы обобщение классического результата о сильной сходимости последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ в предположении, что оператор $K = XU_1 - U_2 X$ имеет конечный ранг, от класса абсолютно-непрерывных спектральных мер на класс всех мер с коэффициентами Фурье, стремящимися к нулю.

Естественно задать вопрос, существуют ли классы между мерами с коэффициентами Фурье, стремящимися к нулю, и всеми сингулярными мерами, для которых сходимость реализуется методами суммирования более мягкими, чем метод Чезаро C_1.

Список литературы

[1] Д.Р. Яфаев, Математическая теория рассеяния, Издательство СПБГУ, Санкт-Петербург, 1994.

[2] Г. Харди, Расходящиеся ряды, Издательство иностранной литературы, Москва, 1951.

[3] В.В. Капустин, Граничные значения интегралов типа Коши, *Алгебра и анализ* **16** (2004), №4, 114–131.

[4] D.N. Clark, One-dimensional perturbations of restricted shifts, *J. Anal. Math.* **25** (1972), 169–191.

[5] А.Г. Полторацкий, Граничное поведение псевдопродолжимых функций, *Алгебра и анализ* **5** (1993), №2, 189–210.