ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 13/2009

К описанию обобщенного осциллятора тремя обобщенными осцилляторами

В. В. БОРЗОВ

Кафедра Математики
Санкт-Петербургский
университет
телекоммуникаций
191065, Россия,
Санкт-Петербург,
Наб. реки Мойка 61

Е. В. ДАМАСКИНСКИЙ

Кафедра Математики
Военный Инженерный
Технический Университет
191123, Россия,
Санкт-Петербург,
ул. Захарьевская 22,

Обсуждается описание обобщенного осциллятора тремя осцилляторами Чебышева[1]

[1]Работа выполнена при подержке РФФИ грант 09-01-00504-а

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения

Математического института им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

В современной квантовой теории часто встречается ситуация, когда для определения спектра и состояний сложной системы она рассматривается как конгломерат конечного числа более простых однотипных систем групповые свойства, собственные функции и спектр гамильтониана которых достаточно хорошо изучены. При этом если речь идет о свободной теории, то решение вопроса сводится к описанию неприводимых представлений составной системы в виде тензорного произведения неприводимых представлений более простых систем. В случае, когда теория не является свободной, взаимодействие составляющих подсистем вводится "ad hoc" либо в гамильтониан, либо в уравнение Шредингера для составной системы. Отметим, что в последнее время взаимодействие образующих подсистем иногда трактуется как некоторая "деформация".

В настоящей работе, имеющей в значительной мере предварительный характер, рассматривается несколько иной подход к этой проблематике. Именно, мы обсудим задачу реализации заданного обобщенного осциллятора посредством системы из N обобщенных осцилляторов другого типа. Мы будем рассматривать обобщенный осциллятор [1, 2] связанный с фиксированной системой ортогональных полиномов, которые определяются трехчленным рекуррентным соотношением и соответствующей трехдиагональной матрицей Якоби J. Примеры таких осцилляторов, связанных с классическими ортогональными полиномами и их q-аналогами, и когерентные состояния для таких осцилляторов обсуждались в предшествующих работах авторов (см. [3] и указанные там работы). В работе [4] нами обсуждена задача описания обобщенного осциллятора двумя оббобщенными осцилляторами. В настоящей работе мы обсудим случай $N = 3$. Оказалось, что такая задача допускает решение только в случае, когда коэффициенты рекуррентного соотношения, определяющего рассматриваемое семейство ортогональных полиномов удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Будет показано, что в случае $N = 3$ имеется только две возможности. Одна из них реализуется в случае, когда матрица Якоби, связанная с заданным "составным" обобщенным осциллятором имеет блочно-диагональный вид и состоит из однотипных блоков размера 3×3. Такая матрица Якоби соответствует системе независимых обобщенных осцилляторов, действующих в гильбертовых пространствах размерности 3 каждое. В данной работе мы не будем останавливаться подробно на этом сравнительно простом случае, поскольку вторая возможность представляется более интересной как с математической, так и с физической точек зрения. Эта вторая возможность реализуется когда матрица Якоби имеет вид

$$J=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
b & -i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & b & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
\hline
0 & 0 & b & i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & b & -i\epsilon & b & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b & 0 & 0 & \dots\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & i\epsilon & b & 0 & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & -i\epsilon & b & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots\\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots} & \dots\\
\multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots} & \dots
\end{array}\right)$$

Для этой матрицы в случае $b=1$, $\epsilon=\sqrt{3}$ будет построена соответствующая система ортогональных многочленов и выписаны явно первые из них. Эта система полиномов естественно разбивается на три серии, связанные с многочленами Чебышева первого рода. Будет приведено решение проблемы моментов для этой матрицы Якоби и построена соответствующая мера носитель которой приведен на Рис.1. Более подробное описание соответствующих обобщенных осциляторов и их свойства, а также анализ случая $N>3$ предполагается обсудить в дальнейшем. Отметим также, что полная проверка предположения о структуре множества точек накопления корней многочленов будет приведена в следующей работе.

2 Постановка задачи

Пусть заданы две числовые последовательности $A=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $B=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ причем $b_n\in\mathbb{R}$ $\forall n\geq 0$. Зададим систему полиномов $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ рекуррентным соотношением

$$x\psi_n(x)=b_n\psi_{n+1}(x)+a_n\psi_n(x)+b_{n-1}\psi_{n-1}(x),\quad \psi_0(x)=1,\ (b_{-1}=0) \tag{1}$$

Обозначим $\mathbb{R}_\alpha$ числовую ось проходящую через начало координат на комплексной плоскости под углом α к вещественной оси $\mathbb{R}_0$. Обозначим J матрицу Якоби, соответствующую рекуррентному соотношению (1):

$$J=\{a_{i,j}\}_{i,j=0}^{\infty},\quad a_{i,j}=a_i\delta_{i,j}+b_i\delta_{i+1,j}+b_j\delta_{i-1,j}. \tag{2}$$

Будем предпологать, что проблема моментов для J имеет (единственное) решение μ^α на $\mathbb{R}_\alpha$ и что все моменты комплекснозначной борелевской меры μ^α конечны:

$$\int_{\mathbb{R}_\alpha}\mu^\alpha(dx)=e^{i\alpha},\qquad \mu_k^\alpha=\int_{\mathbb{R}_\alpha}x^k\mu^\alpha(dx)<\infty,\quad k=0,1,\dots. \tag{3}$$

Заметим, что при такой нормировке $|\mu^\alpha(\mathbb{R}_\alpha)| = 1$. В связи с этим будем называть такую меру "вероятностной." В дальнейшем мы будем рассматривать борелевские меры $\mu^{(\alpha,N)}$ на комлексной плоскости $\mathbb{C}$ носители которых лежат на объединении лучей

$$\mathbb{R}_\alpha^{(N)} = \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathbb{R}_{\alpha+2\pi k/N}, \quad N \geq 2. \tag{4}$$

и удовлетворяющие условиям (3) на каждом из этих лучей.

Меру $\mu^{(\alpha,N)}$ назовем симметричной относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{N}$, если для любого борелевского множества $B_\alpha \subset \mathbb{R}_\alpha$ и для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$ выполняется равенство

$$\mu^{(\alpha,N)}(B_\alpha) = \mu^{(\alpha,N)}(e^{2\pi k/N} B_\alpha). \tag{5}$$

Меру $\mu = \mu^{(\alpha,N)}$ назовем P-симметричной, если для любого $k \geq 0$

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}_\alpha^{(N)}} x^k \mu(dx) = N\mu_k^\alpha \tag{6}$$

Наша цель — найти условия на заданные последовательности A и B при которых обобщенный осциллятор (см.[2]) [2], связанный с рекуррентными соотношениями (1) и мерой μ^α на $\mathbb{R}_\alpha$ (и соответственно с мерой $\mu^{(\alpha,N)}$ на $\mathbb{R}_\alpha^{(N)}$) можно описать как систему из N соответствующим образом подобранных обобщенных осцилляторов. Случай $N = 2$ был рассмотрен в работе [4]. В настоящей работе будет рассмотрен случай $N = 3$.

3 Анализ задачи при $N = 3$

В случае $N = 3$ из (1) нетрудно получить соотношения

$$\begin{aligned} x^3\psi_n(x) = B_n\psi_{n+3}(x) + C_n\psi_{n+2}(x) + D_n\psi_{n+1}(x) + A_n\psi_n(x) + \\ + D_{n-1}\psi_{n-1}(x) + C_{n-1}\psi_{n-2}(x) + B_{n-1}\psi_{n-3}(x), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} B_n = b_n b_{n+1} b_{n+2}, \quad C_n = b_n b_{n+1}(a_n + a_{n+1} + a_{n+2}), \\ D_n = b_n \left(b_{n-1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1}\right), \\ A_n = b_{n-1}^2 \left(2a_n + a_{n-1}\right) + b_n^2 \left(2a_n + a_{n+1}\right) + a_n^3. \end{gathered} \tag{8}$$

Условия на последовательности A и B получим из требования

$$C_n = 0, \quad D_n = 0, \quad n \geq 0. \tag{9}$$

[2]Строго говоря, понятие обобщенного осциллятора, связанного с системой ортогональных полиномов, было введено в [2] для случая полиномов ортогональных на вещественной оси. Поэтому в нашем случае это понятие требует дополнительного обсуждения, которое в данной работе мы опускаем.

Заметим, что если при каком-то значении n коэффициент b_{n-1} обращается в нуль, то из (1) следует, что полином $\psi_n(x)$ не может быть определен из предыдущих полиномов $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)$. В этом случае матрица Якоби имеет блочно-диагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & \widehat{J} \end{pmatrix} \tag{10}$$

где J_n — квадратная матрица Якоби размера $n \times n$, а для определения полиномов $\psi_{n+1}(x), \psi_{n+2}(x), \ldots$ по рекурентному соотношению, соответствующему матрице $\widehat{J}$, следует дополнительно задать полином $\psi_n(x)$.

Рассмотрим первое из условий (9). Из (8) следует, что для того чтобы $C_n = 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0; \tag{11a}$$

$$b_n b_{n+1} = 0. \tag{11b}$$

Рассмотрим сначала случай, когда соотношение (11a) справедливо при всех $n \geq 0$. Это требование налагает на коэффициенты a_n условие периодичности

$$a_{n+3} = a_n, \quad \forall n \geq 0. \tag{12}$$

Обозначим

$$a_0 = \alpha_0, \; a_1 = \beta_0, \; a_2 = \gamma_0, \tag{13}$$

так что из (11a) следует

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 0. \tag{14}$$

Вычитая из матрицы Якоби J матрицу $\gamma_0 ⊮$ (что дает сдвиг спектра J на γ_0), можно без ограничения общности считать $\gamma_0 = 0$ и тогда $\alpha_0 = -\beta_0$, т.е. имеем

$$a_0 = \alpha_0, \; a_1 = -\alpha_0, a_2 = 0. \tag{15}$$

Тогда согласно соотношению (8) для того чтобы $D_n = 0$ достаточно, что бы выполнялось хотя бы одно из условий

$$b_n = 0; \tag{16a}$$

$$\left(b_{n-1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1}\right) = 0. \tag{16b}$$

Если $b_0 \neq 0$ и $b_1 \neq 0$, то из (15) и (48) следует, что

$$\alpha_0 = \epsilon_0 i, \quad \epsilon_0 \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad b_2 = 0. \tag{17}$$

Следовательно при $n = 2$ соотношение (16b) может не выполняться и мы получаем $b_3^2 + b_1^2 > 0$. Итак, можно считать, что $b_3 \neq 0$.

Так как при $n = 1$ соотношение (11b) выполнено, то (11a) может не выполняться, что дает $-\alpha_0 + a_3 \neq 0$ и равенство $a_3 = \alpha$ не обязано выполняться. При $n = 2$ имеем $a_3 + a_4 \neq 0$ и, следовательно, $a_4 \neq -a_3$.

Далее при $n = 3$ так как $b_3 \neq 0$, то из (11a) следует

$$a_3 + a_4 + a_5 = 0. \tag{18}$$

Пусть теперь $a_3 = \alpha_1$, $a_4 = \beta_1$, $a_5 = \gamma_1$. В этом случае не удается избавиться от γ_1 с помощью сдвига. Считая $b_3 \neq 0$ и $b_4 \neq 0$ из (16b) и (18) получаем соотношение $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_1\beta_1 = -\epsilon^2$, так что α_1 и β_1 не могут быть вещественными одновременно, и

$$b_5 = 0 \tag{19}$$

Повторяя эти рассуждения, приходим к выводу, что матрица J имеет блочно-диагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 & \dots \\ 0 & J_1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \tag{20}$$

с блоками

$$J_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & b_{3k} & 0 \\ b_{3k} & \beta_k & b_{3k+1} \\ 0 & b_{3k+1} & -(\alpha_k + \beta_k) \end{pmatrix} \tag{21}$$

причем

$$b_{3k+1}^2 = -b_{3k}^2 + \epsilon_k^2, \quad \epsilon_k^2 = -(\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k\beta_k). \tag{22}$$

Отметим, что если (11a) выполняется при всех $n \geq 0$, то (после сдвига $J \to J - \gamma_0 I$) имеем

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = -\alpha, \quad a_2 = 0, \quad a_{n+3} = a_n, \tag{23}$$

т.е. $J_k = J_0$ при всех $k \geq 0$.

Рассмотрим теперь второй случай. Пусть (11a) выполнено для всех n, а условие $D_n = 0$ не выполняется при $n = 0$, т.е.

$$D_0 \neq 0. \tag{24}$$

Если (23) выполнено, то из (24) следует что b_0 и b_1 принимают произвольные ненулевые значения. Из условия $D_1 = 0$ при $\alpha = i\epsilon$ получаем

$$b_2^2 = -\alpha^2 - b_0^2 - b_1^2. \tag{25}$$

Из условия $D_2 = 0$ следует

$$b_3^2 = b_0^2. \tag{26}$$

Наконец из условия $D_3 = 0$ имеем

$$b_4^2 = b_1^2. \tag{27}$$

Далее, из $D_4 = 0$ следует $b_5^2 = b_2^2$. Продолжая рассмотрение, получаем

$$b_0^2;\ b_1^2;\ b_2^2 = \epsilon^2 - b_0^2 - b_1^2;\ b_3^2 = b_0^2;\ b_4^2 = b_1^2;\ b_5^2 = b_2^2; \dots, b_{3n+j}^2 = b_j^2; j = 0, 1, 2. \tag{28}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & J^- & \mathbb{O} & \dots \\ J_+ & J_1 & J^- & \dots \\ \mathbb{O} & J^+ & J_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{29}$$

где

$$J_1 = \begin{pmatrix} i\epsilon & b_0 & 0 \\ b_0 & -i\epsilon & b_1 \\ 0 & b_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

а $\mathbb{O}$ — нулевая 3×3-матрица.

Вычислим спектр матрицы Якоби (20). Обозначим

$$\gamma_k = \alpha_k^3 + b_{3k}^2(2\alpha_k + \beta_k; \quad \rho_k = |\gamma_k|, \quad \phi_k = \mathrm{Arg}\gamma_k. \tag{31}$$

Учитывая условия (22), собственные значения матрицы J_k можно записать в виде

$$\lambda_s^{(k)} = \sqrt[3]{\rho_k}\exp(i\frac{\phi_k + 2\pi s}{3}), \quad s = 0, 1, 2. \tag{32}$$

Следовательно спектр $\left\{\lambda_s^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ матрицы J симметричен относительно поворотов на $2\pi/3$, а соответствующий обобщенный осциллятор распадается в совокупность независимых обобщенных осцилляторов, отвечающих матрицам Якоби (21).

Нам представляется, что случай, соответствующий матрице Якоби (29) наиболее интересен и мы рассмотрим его подробно на конкретном примере, когда

$$b_0 = b_1 = b_2 = 1, \quad \epsilon = \sqrt{3}, \tag{33}$$

т.е. далее мы будем рассматривать матрицу Якоби $\widetilde{J}$ вида

$$\widetilde{J} = \{a_{i,j}\}_{i,j=0}^{\infty}, \qquad a_{i,j} = a_i\delta_{i,j} + \delta_{i+1,j} + \delta_{i-1,j},$$

где

$$a_0 = i\sqrt{3}, \quad a_1 = -i\sqrt{3}, \quad a_2 = 0, \qquad a_{n+3} = a_n. \tag{34}$$

или подробнее

$$
\widetilde{J} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
1 & -i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
0 & 0 & 1 & i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & -i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i\sqrt{3} & 1 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i\sqrt{3} & 1 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots\dots} & \dots \\
\multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots\dots} & \multicolumn{3}{c|}{\dots\dots\dots\dots} & \dots
\end{array}\right)
$$

Отметим, что в отличие от первого случая, связанного с матрицей Якоби (20), решение проблемы моментов для матрицы Якоби $\widetilde{J}$ является не тривиальной задачей.

4 Решение проблемы моментов для матрицы Якоби $\widetilde{J}$

Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ задается формулами (34), а последовательность $B = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ состоит из единиц ($b_n = 1,\ \forall n \geq 0$). Определим систему полиномов $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, порождаемую рекуррентным соотношением

$$x\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x) + a_n\psi_n(x) + \psi_{n-1}(x), \quad \psi_0(x) = 1. \tag{35}$$

Имеем

$$
\begin{gathered}
\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = x - i\sqrt{3}, \quad \psi_2(x) = x^2 + 2, \quad \psi_3(x) = x^3 + x + i\sqrt{3}, \\
\psi_4(x) = x^4 - i\sqrt{3}x^3 + 1, \quad \psi_5(x) = x^5 + 2x^3, \\
\psi_n(x) = x^3\psi_{n-3}(x) - \psi_{n-6}(x), \quad n \geq 6.
\end{gathered} \tag{36}
$$

Приведем явный вид первых многочленов из этого семейства

$$
\begin{aligned}
\psi_6(x) &= x^6 + x^4 + i\sqrt{3}x^3 - 1; \\
\psi_7(x) &= x^7 - i\sqrt{3}x^6 + x^3 - x + i\sqrt{3}; \\
\psi_8(x) &= x^8 + 2x^6 - x^2 - 2; \\
\psi_9(x) &= x^9 + x^7 + i\sqrt{3}x^6 - 2x^3 - x - i\sqrt{3}; \\
\psi_{10}(x) &= x^{10} - i\sqrt{3}x^9 + x^6 - 2x^4 + 2i\sqrt{3}x^3 - 1;
\end{aligned}
$$

$$\psi_{11}(x) = x^{11} + 2x^9 - 2x^5 - 4x^3;$$
$$\psi_{12}(x) = x^{12} + x^{10} + i\sqrt{3}x^9 - 3x^6 - 2x^4 - 2i\sqrt{3}x^3 + 1;$$
$$\psi_{13}(x) = x^{13} - i\sqrt{3}x^{12} + x^9 - 3x^7 + 3i\sqrt{3}x^6 - 2x^3 + x - i\sqrt{3};$$
$$\psi_{14}(x) = x^{14} + 2x^{12} - 3x^8 - 6x^6 + x^2 + 2;$$
$$\psi_{15}(x) = x^{15} + x^{13} + i\sqrt{3}x^{12} - 4x^9 - 3x^7 - 3i\sqrt{3}x^6 + 3x^3 + x + i\sqrt{3};$$
$$\psi_{16}(x) = x^{16} - i\sqrt{3}x^{15} + x^{12} - 4x^{10} + 4i\sqrt{3}x^9 - 3x^6 + 3x^4 - 3i\sqrt{3}x^3 + 1;$$
$$\psi_{17}(x) = x^{17} + 2x^{15} - 4x^{11} - 8x^9 + 3x^5 + 6x^3;$$
$$\psi_{18}(x) = x^{18} + x^{16} + i\sqrt{3}x^{15} - 5x^{12} - 4x^{10} - 4i\sqrt{3}x^9 + 6x^6 + 3x^4 + 3i\sqrt{3}x^3 - 1;$$
$$\psi_{19}(x) = x^{19} - i\sqrt{3}x^{18} + x^{15} - 5x^{13} + 5i\sqrt{3}x^{12} - 4x^9 + 6x^7 - 6i\sqrt{3}x^6 + 3x^3 - x + i\sqrt{3};$$
$$\psi_{20}(x) = x^{20} + 2x^{18} - 5x^{14} - 10x^{12} + 6x^8 + 12x^6 - x^2 - 2;$$
$$\psi_{21}(x) = x^{21} + x^{19} + i\sqrt{3}x^{18} - 6x^{15} - 5x^{13} - 5i\sqrt{3}x^{12} + 10x^9 + 6x^7 + 6i\sqrt{3}x^6 - 4x^3 - x - i\sqrt{3};$$
$$\psi_{22}(x) = x^{22} - i\sqrt{3}x^{21} + x^{18} - 6x^{16} + 6i\sqrt{3}x^{15} - 5x^{12} + 10x^{10} - \\ - 10i\sqrt{3}x^9 + 6x^6 - 4x^4 + 4i\sqrt{3}x^3 - 1;$$
$$\psi_{23}(x) = x^{23} + 2x^{21} - 6x^{17} - 12x^{15} + 10x^{11} + 20x^9 - 4x^5 - 8x^3;$$
$$\psi_{24}(x) = x^{24} + x^{22} + i\sqrt{3}x^{21} - 7x^{18} - 6x^{16} - 6i\sqrt{3}x^{15} + 15x^{12} + 10x^{10} + \\ + 10i\sqrt{3}x^9 - 10x^6 - 4x^4 - 4i\sqrt{3}x^3 + 1;$$
$$\psi_{25}(x) = x^{25} - i\sqrt{3}x^{24} + x^{21} - 7x^{19} + 7i\sqrt{3}x^{18} - 6x^{15} + 15x^{13} - 15i\sqrt{3}x^{12} + 10x^9 - \\ - 10x^7 + 10i\sqrt{3}x^6 - 4x^3 + x + i\sqrt{3};$$
$$\psi_{26}(x) = x^{26} + 2x^{24} - 7x^{20} - 14x^{18} + 15x^{14} + 30x^{12} - 10x^8 - 20x^6 + x^2 + 2;$$
$$\psi_{27}(x) = x^{27} + x^{25} + i\sqrt{3}x^{24} - 8x^{21} - 7x^{19} - 7i\sqrt{3}x^{18} + 21x^{15} + 15x^{13} + 15i\sqrt{3}x^{12} - 20x^9 - \\ - 10x^7 - 10i\sqrt{3}x^6 + 5x^3 + x - i\sqrt{3};$$
$$\psi_{28}(x) = x^{28} - i\sqrt{3}x^{27} + x^{24} - 8x^{22} + 8i\sqrt{3}x^{21} - 7x^{18} + 21x^{16} - 21i\sqrt{3}x^{15} + 15x^{12} - \\ - 20x^{10} + 20i\sqrt{3}x^9 - 10x^6 + 5x^4 - 5i\sqrt{3}x^3 + 1;$$
$$\psi_{29}(x) = x^{29} + 2x^{27} - 8x^{23} - 16x^{21} + 21x^{17} + 42x^{15} - 20x^{11} - 40x^9 + 5x^5 + 10x^3;$$

Соотношение (36) указывает, что эти полиномы целесообразно разбить на три серии

$$a)\,\psi_{3k}(x); \quad b)\,\psi_{3k+1}(x); \quad c)\,\psi_{3k+2}(x); \quad k \geq 0,$$

причем

$$\psi_{3m+k}(x) = \phi_{m-1}(x^3)\psi_{3+k}(x) + \gamma_k\phi_{m-2}(x^3)\psi_k(x) \quad m \geq 2,\, k = 0, 1, 2, \tag{37}$$

где

$$\gamma_k = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad k = 0 \\ 1 & \text{при} \quad k = 1 \\ 0 & \text{при} \quad k = 2, \end{cases} \tag{38}$$

а многочлены $\phi_n(t)$ с рекуррентными соотношениями

$$t\phi_n(t) = \phi_{n+1}(t) + \phi_{n-1}(t), \quad \phi_0(t) = 1, \tag{39}$$

суть обычные многочлены Чебышева $\phi_n(t) = T_n(t/2)$ первого рода порядка n.

Мы будем предпологать, что предельные точки множества нулей рассматриваемых полиномов лежат на $\mathbb{R}^{(3)} = \mathbb{R}_0^{(3)} \cup \mathbb{R}_{\pi/2}^{(3)}$ и поэтому носитель меры ортогональности этих полиномов также лежит на $\mathbb{R}^{(3)}$. Он изображен на Рис.1 ниже. Исследованию ассимптотических свойств нулей многочленов $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}(x)$ будет посвящена отдельная работа.

Будем решать проблему моментов для матрицы Якоби (34) в пространстве $\widetilde{L}^2 = L^2(\mathbb{R}^{(3)})$ квадратично суммируемых функций по некоторой комплекснозначной борелевской мере $\mu = \mu_(0;3) + \mu_(\pi/2;3)$. Будем предпологать, что все моменты этой меры конечны

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}^{(3)}} x^k \mu(dx) < \infty, \quad k \geq 0, \tag{40}$$

$$\mu_0 = \int_{\mathbb{R}^{(3)}} \mu(dx) = 1. \tag{41}$$

Будем предпологать также, что носитель меры μ симметричен относительно поворотов на $\frac{2\pi}{3}$ и что меры $\mu_(0;3)$ и $\mu_(\pi/2;3)$ P-симметричны (и, следовательно мера μ также P-симметрична).

Полиномы $\psi_n(x)$, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям (35), ортонормированы в $\widetilde{L}^2(\mathbb{R}^{(3)})$ следующим образом ($x = iy$ на $\mathbb{R}_{\pi/2}$)

$$(\psi_m(x), \psi_n(x))_{\widetilde{L}^2} = (-1)^n \delta_{m,n}, \tag{42a}$$

$$(\phi, \chi)_{\widetilde{L}^2} = 3\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(iy)\bar{\chi}(iy)\mu_(\pi/2;3)(idy) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\bar{\chi}(x)\mu_(0;3)(dx)\right). \tag{42b}$$

Из соотношений (40)-reff137 единственным образом находим моменты $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Моменты с нечетным номером вычисляются по формуле

$$\mu_{2n+1} = i(-2)^n\sqrt{3}. \tag{43}$$

Моменты с четными номерами вычисляются по более сложной формуле. Для ее вывода приведем первые из них, используя числа Каталана $c_s = \frac{(2s)!}{s!(s+1)!}$.

$$
\begin{aligned}
\mu_0 &= 1\\
\mu_2 &= -2\\
\mu_4 &= (-2)(-2)+c_1 = 5\\
\mu_6 &= (-2)^3+(-2)c_1 = -10\\
\mu_8 &= (-2)^4+(-2)^2c_1 = 20\\
\mu_{10} &= (-2)^5+(-2)^3c_1+c_2 = -39\\
\mu_{12} &= (-2)^6+(-2)^4c_1+(-2)c_2 = 78\\
\mu_{14} &= (-2)^7+(-2)^5c_1+(-2)^2c_2 = -156\\
\mu_{16} &= (-2)^8+(-2)^6c_1+(-2)^3c_2+c_3 = 314\\
\mu_{18} &= (-2)^9+(-2)^7c_1+(-2)^4c_2+(-2)c_3 = -628\\
\mu_{20} &= (-2)^{10}+(-2)^8c_1+(-2)^5c_2+(-2)^2c_3 = 1256\\
\mu_{22} &= (-2)^{11}+(-2)^9c_1+(-2)^6c_2+(-2)^3c_3+c_4 = -2507\\
\mu_{24} &= (-2)^{12}+(-2)^{10}c_1+(-2)^7c_2+(-2)^4c_3+(-2)c_4 = 5014\\
\mu_{26} &= (-2)^{13}+(-2)^{11}c_1+(-2)^8c_2+(-2)^5c_3+(-2)^2c_4 = -10028\\
\mu_{28} &= (-2)^{14}+(-2)^{12}c_1+(-2)^9c_2+(-2)^6c_3+(-2)^3c_4+c_5 = 20070\\
\mu_{30} &= (-2)^{15}+(-2)^{13}c_1+(-2)^{10}c_2+(-2)^7c_3+(-2)^4c_4+(-2)c_5 = -40140\\
\mu_{32} &= (-2)^{16}+(-2)^{14}c_1+(-2)^{11}c_2+(-2)^8c_3+(-2)^5c_4+(-2)^2c_5 = -80280\\
\mu_{34} &= (-2)^{17}+(-2)^{15}c_1+(-2)^{12}c_2+(-2)^9c_3+(-2)^6c_4+(-2)^3c_5+c_6 = -160518\\
\mu_{36} &= (-2)^{18}+(-2)^{16}c_1+(-2)^{13}c_2+(-2)^{10}c_3+(-2)^7c_4+(-2)^4c_5+(-2)c_6 = 321036\\
\mu_{38} &= (-2)^{19}+(-2)^{17}c_1+(-2)^{14}c_2+(-2)^{11}c_3+(-2)^8c_4+(-2)^5c_5+(-2)^2c_6 = -642072\\
\mu_{40} &= (-2)^{20}+(-2)^{18}c_1+(-2)^{15}c_2+(-2)^{12}c_3+(-2)^9c_4+(-2)^6c_5+(-2)^3c_6+c_7 = 1284276\\
\mu_{42} &= (-2)^{21}+(-2)^{19}c_1+(-2)^{16}c_2+(-2)^{13}c_3+(-2)^{10}c_4+(-2)^7c_5+(-2)^4c_6+(-2)c_7 = -2568552\\
\mu_{44} &= (-2)^{22}+(-2)^{20}c_1+(-2)^{17}c_2+(-2)^{14}c_3+(-2)^{11}c_4+(-2)^8c_5+(-2)^5c_6+(-2)^2c_7 = 5137104\\
\mu_{46} &= (-2)^{23}+(-2)^{21}c_1+(-2)^{18}c_2+(-2)^{15}c_3+(-2)^{12}c_4+(-2)^9c_5+(-2)^6c_6\\
&\quad +(-2)^3c_7+c_8 = -10273779\\
\mu_{48} &= (-2)^{24}+(-2)^{22}c_1+(-2)^{19}c_2+(-2)^{16}c_3+(-2)^{13}c_4+(-2)^{10}c_5+(-2)^7c_6\\
&\quad +(-2)^4c_7+(-2)c_8 = 20547558\\
\mu_{50} &= (-2)^{25}+(-2)^{23}c_1+(-2)^{20}c_2+(-2)^{17}c_3+(-2)^{14}c_4+(-2)^{11}c_5+(-2)^8c_6\\
&\quad +(-2)^5c_7+(-2)^2c_8 = 41095116\\
\mu_{52} &= (-2)^{26}+(-2)^{24}c_1+(-2)^{21}c_2+(-2)^{18}c_3+(-2)^{15}c_4+(-2)^{13}c_5+(-2)^9c_6\\
&\quad +(-2)^6c_7+(-2)^3c_8+c_9 = 82191662
\end{aligned}
$$

Нетрудно проверить, что справедливы соотношения

$$\mu_{6k} = (-2)^{3k} + \frac{1}{4}(1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k-1}(-2)^{3(k-s)}c_s, \tag{44}$$

$$\mu_{6k+2} = (-2)^{3k+1} - \frac{1}{2}(1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k-1}(-2)^{3(k-s)}c_s, \tag{45}$$

$$\mu_{6k+4} = (-2)^{3k+2} - (1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k}(-2)^{3s}c_s, \tag{46}$$

так что

$$\mu_{2n} = \mu_{2(3k+j)} = (-2)^n + (-2)^{j-2}(1-\delta_{k,0})\sum_{s=0}^{k-1}(-2)^{3(k-s)}c_s + c_k\delta_{j,2}, \quad j=0,1,2,\ k\geq 0. \tag{47}$$

Надо рассмотреть проблему моментов для последовательности моментов μ_n, определяемых формулами (43) и (47). С этой целью представим меру в виде

$$\mu = \mu^{even} + \mu^{odd}. \tag{48}$$

Мера μ^{even} определена на $\mathbb{R}^{(3)}$ так, что для любого борелевского множества B_+^{α}, целиком лежащего на правой полуоси $\mathbb{R}_+^{\alpha}$ и борелевского множества B_-^{α} симметричного множеству B_+^{α} относительно начала координат имеет место равенство

$$\mu^{even}(B_+^{\alpha}) = \mu^{even}(B_-^{\alpha}), \quad \alpha = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$$

Аналогично определим меру μ^{odd} на $\mathbb{R}_{\pi/2}^{(3)}$ так, что для любого борелевского множества B_+^{α}, целиком лежащего на $\mathbb{R}_+^{\alpha}$ и борелевского множества B_-^{α} симметричного множеству B_+^{α} относительно начала координат имеет место равенство

$$\mu^{odd}(B_+^{\alpha}) = -\mu^{odd}(B_-^{\alpha}), \quad \alpha = 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \qquad \mu^{odd}(0) = 0.$$

Из (47) и (48) для моментов получаем соотношения

$$\mu_k = \mu_k^{even} + \mu_k^{odd}, \quad \text{причем} \quad \mu_{2l+1}^{even} = 0, \quad \mu_{2l}^{odd} = 0,\ l = 0,1,2,\ldots.$$

Это означает, что

$$\mu_{2l} = \mu_{2l}^{even}, \quad \mu_{2l+1} = \mu_{2l+1}^{odd},$$

так что μ^{even} определяется по моментам с четными номерами, а μ^{odd} по моментам с нечетными номерами.

Построим сначала дискретную P-симметричную меру μ^{odd} с носителем

$$\mathrm{supp}(\mu^{odd}) = \{z_p\}_{p=0}^{5}, \qquad z_p = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{p\pi}{3}\right)}, \quad p = 0,1,\ldots,5. \tag{49}$$

Обозначим σ_p нагрузки в точках z_p, которые в силу нечетности меры удовлетворяют условиям

$$\sigma_0 = -\sigma_3, \quad \sigma_1 = -\sigma_4, \quad \sigma_2 = -\sigma_5, \tag{50}$$

и ищутся в виде

$$\sigma_p = \sum_{s=0}^{2} \sigma_p^{(s)}, \qquad \sigma_p^{(0)} = C_p^{(0)}, \quad \sigma_p^{(1)} = C_p^{(1)} z_p^{-2}, \quad \sigma_p^{(2)} = C_p^{(2)} z_p^{2}. \tag{51}$$

Последовательность моментов $\{\mu_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ разобьем на три серии

$$\{\mu_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\mu_{2n+1}^{I}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n+1}^{II}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n+1}^{III}\right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{52}$$

где

$$\mu_{2n+1}^{I} = \mu_{6k+1}, \ (n = 3k); \quad \mu_{2n+1}^{II} = \mu_{6k+3}, \ (n = 3k+1); \quad \mu_{2n+1}^{III} = \mu_{6k+5}, \ (n = 3k+2).$$

Введем обозначения

$$\mu_{6k+2j+1}^{(s)} = \sum_{p=0}^{5} z_p^{6k+2j+1} \sigma_p^{(s)}, \qquad \mu_{6k+2j+1,+}^{(s)} = z_0^{6k+2j+1} \sigma_0^{(s)}. \tag{53}$$

Для P-симметричности меры μ^{odd} достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\mu_{6k+2j+1}^{(s)} = 6\delta_{j,s} \mu_{6k+2j+1,+}^{(s)}, \quad j, s = 0, 1, 2. \tag{54}$$

Для нахождения нагрузок σ_p, определяемых равенствами (50) и (51) достаточно решить систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{2} z_{2m}^{6k+2j+1} \sigma_{2m}^{(s)} = \delta_{j,s} \frac{1(-2)^n \sqrt{3}}{2} i. \tag{55}$$

Подставляя в (55) выражения $\sigma_p^{(s)}$ через $C_p^{(s)}$ по формулам (51) получим систему из девяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_{2m}^{(s)}$, которая распадается на три системы

$$\begin{cases} iC_0^{(0)} + e^{i7\pi/6} C_2^{(0)} + e^{-i\pi/6} C_4^{(0)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} i, \\ C_0^{(0)} + C_2^{(0)} + C_4^{(0)} = 0, \\ iC_0^{(0)} + e^{-i\pi/6} C_2^{(0)} + e^{i7\pi/6} C_4^{(0)} = 0; \end{cases} \tag{56}$$

$$\begin{cases} iC_0^{(1)} + e^{-i\pi/6} C_2^{(1)} + e^{i7\pi/6} C_4^{(1)} = 0, \\ C_0^{(1)} + C_2^{(1)} + C_4^{(1)} = 0, \\ iC_0^{(1)} + e^{i7\pi/6} C_2^{(1)} + e^{-i\pi/6} C_4^{(1)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} i; \end{cases} \tag{57}$$

$$
\begin{cases}
iC_0^{(2)} + e^{-i\pi/6}C_2^{(2)} + e^{i7\pi/6}C_4^{(2)} = 0, \\
C_0^{(2)} + C_2^{(2)} + C_4^{(2)} = 0, \\
iC_0^{(2)} + e^{i7\pi/6}C_2^{(2)} + e^{-i\pi/6}C_4^{(2)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}i;
\end{cases}
\tag{58}
$$

Решая эти системы находим

$$
C_0^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \qquad C_2^{(0)} = -e^{i\pi/3}\frac{1}{2\sqrt{6}}, \qquad C_4^{(0)} = -e^{i5\pi/3}\frac{1}{2\sqrt{6}}, \tag{59}
$$

$$
C_0^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad C_2^{(1)} = -e^{-i2\pi/3}\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad C_4^{(1)} = -e^{i2\pi/3}\frac{1}{\sqrt{6}}, \tag{60}
$$

$$
C_0^{(2)} = -\frac{1}{4\sqrt{6}}, \qquad C_2^{(2)} = -e^{i4\pi/3}\frac{1}{4\sqrt{6}}, \qquad C_4^{(2)} = -e^{i2\pi/3}\frac{1}{4\sqrt{6}}; \tag{61}
$$

Нетрудно проверить что для построенной в результате меры μ^{odd} выполняются соотношения (54), т.е. она является P-симметричной.

Перейдем теперь к построению четной P-симметричной меры μ^{even} с носителем на $\mathbb{R}_0^{(3)}$. Формулу (47) представим в виде

$$
\mu_{2n} = \mu_{2(3k+j)} = (-2)^n + (-2)^{j-2}\epsilon_{k,j} \sum_{s=0}^{k+\delta_{j,2}-1} (-8)^{k-s} c_s. \tag{62}
$$

где

$$
\epsilon_{k,j} = 1 - \delta_{k,0}(1-\delta_{j,2}) = \begin{cases} 1 & \text{если}\, k \geq 1 \quad \text{или} \quad k=0,\ j=2, \\ 0 & \text{если}\, k=0,\ j=0,1. \end{cases} \tag{63}
$$

Нетрудно проверить справедливость интегрального представления чисел Каталана

$$
c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^4 \left(y^n \sqrt{\frac{4-y}{y}} \right) dy. \tag{64}
$$

Действительно замена $t = \sqrt{\dfrac{4-y}{y}}$ превращает интеграл в правой части (64) в

$$
2\int_0^\infty 4^{n+1}\frac{t^2}{(t^2+1)^n}dt = 2\cdot 4^{n+1}(I_{n+1} - I_{n+2}) \tag{65}
$$

где интеграл I_n несложно вычислить применяя теорию вычетов, что дает

$$
I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^n} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} \tag{66}
$$

Подставив (65) и (66) в (64) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^4 \left(y^n\sqrt{\frac{4-y}{y}}\right)dy =$$
$$= 2^{2n+1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right) = 2^{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right) =$$
$$= 2^{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = 2^n\frac{(2n-1)!!n!}{(n+1)!n!} == \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = a_n, \quad (67)$$

что доказывает формулу (64).

Используя доказанную формулу перепишем (62) в виде

$$\mu_{2n} = (-2)^n + \frac{(-2)^{j-2}}{2\pi}\epsilon_{k,j}\int_0^4 \sum_{s=0}^{k+\delta_{j,2}-1}(-8)^k\left(\frac{y}{-8}\right)^s\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy. \quad (68)$$

Напомним, что $n = 3k+j, \quad j = 0,1,2$. Учитывая соотношение

$$\sum_{s=0}^{k+\delta_{j,2}-1}(-8)^k\left(\frac{y}{-8}\right)^s = \frac{8(-8)^k}{y+8} + (-1)^{1-\delta_{j,2}}\frac{8^{1-\delta_{j,2}}y^{k+\delta_{j,2}}}{y+8}.$$

перепишем (68) в виде

$$\mu_{2n} = (-2)^n + \frac{(-2)^{j-2}}{2\pi}\epsilon_{k,j}\left[(-2)^{3k}\int_0^4\frac{8}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy+\right.$$
$$\left.+(-1)^{1-\delta_{j,2}}\int_0^4\frac{8^{1-\delta_{j,2}}y^{k+\delta_{j,2}}}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy\right] =$$
$$= (-2)^n\left(1+\frac{\epsilon_{k,j}}{\pi}\int_0^4\frac{1}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy\right)+$$
$$\frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi}\epsilon_{k,j}\int_0^4\frac{y^k}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy \quad (69)$$

Введем следующее обозначение

$$A_{k+1} = \int_0^4\frac{y^k}{y+8}\sqrt{\frac{4-y}{y}}dy, \quad (70)$$

так что $A_1 = \pi(\sqrt{3/2}-1)$. Обозначим также

$$\widetilde{\mu}_{2n} = (-2)^n\left(1+\frac{A_1}{\pi}\epsilon_{k,j}\right), \qquad \widehat{\mu}_{2n} = \frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi}\epsilon_{k,j}A_{k+1}. \quad (71)$$

В этих обозначениях имеем

$$\mu_{2n} = \widetilde{\mu}_{2n} + \widehat{\mu}_{2n}, \quad n \geq 0. \quad (72)$$

Далее имеем $(n = 3k + j)$

$$\widehat{\mu}_{2n} = -\frac{A_1}{\pi} + \mu_{2n}^{cont} = (1 - \sqrt{3/2}) + \mu_{2n}^{cont}, \tag{73}$$

$$\mu_{2n}^{cont} = \frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}\, 2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi} A_{k+1}, \tag{74}$$

$$\widetilde{\mu}_{2n} = -5\frac{A_1}{\pi} + \mu_{2n}^{disc} = 5(1 - \sqrt{3/2}) + \mu_{2n}^{disc}, \tag{75}$$

$$\mu_{2n}^{disc} = (-2)^n(1 + \frac{A_1}{\pi}) = (-2)^n\sqrt{3/2}. \tag{76}$$

$$\mu'_{2n} = 6(1 - \sqrt{3/2})\delta_{n,0}. \tag{77}$$

В результате имеем

$$\mu_{2n} = \mu'_{2n} + \mu_{2n}^{cont} + \mu_{2n}^{disc}. \tag{78}$$

Перейдем к построению мер, отвечающим трем слагаемым в разложении (78). Начнем с рассмотрения дискретной P-симметричной меры μ_{disc}^{even}, соответствующей моментам μ_{2n}^{disc}. Это построение аналогично приведенному выше построению дискретной меры μ^{odd}. Носитель меры μ_{disc}^{even} совпадает с носителем меры μ^{odd} (см. (49)). Нагрузки в точках z_p обозначим σ'_p. В силу четности они удовлетворяют соотношениям

$$\sigma'_0 = \sigma'_3, \quad \sigma'_1 = \sigma'_4, \quad \sigma'_2 = \sigma'_5, \tag{79}$$

и ищутся в виде

$$\sigma'_p = \sum_{p=0}^{2} {\sigma'}_p^{(s)}, \quad {\sigma'}_p^{(0)} = D_p^{(0)}, \quad {\sigma'}_p^{(1)} = D_p^{(1)}(z_p)^{-2}, \quad {\sigma'}_p^{(2)} = D_p^{(2)}(z_p)^2. \tag{80}$$

Как и выше разобьем последовательность моментов $\{\mu_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ на три серии

$$\{\mu_{2n}\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\mu_{2n}^{I}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n}^{II}\right\}_{n=0}^{\infty} \cup \left\{\mu_{2n}^{III}\right\}_{n=0}^{\infty}, \tag{81}$$

где

$$\mu_{2n}^{I} = \mu_{6k},\ (n = 3k); \quad \mu_{2n}^{II} = \mu_{6k+2},\ (n = 3k+1); \quad \mu_{2n}^{III} = \mu_{6k+4},\ (n = 3k+2).$$

Введем обозначение

$$\mu_{6k+2j}^{(s)} = \sum_{p=0}^{5} z_p^{6k+2j} {\sigma'}_p^{(s)}, \qquad \mu_{6k+2j,+}^{(s)} = z_0^{6k+2j} {\sigma'}_0^{(s)}. \tag{82}$$

Достаточным условием P-симметричности меры μ_{disc}^{even} является соотношение

$$\mu_{6k+2j}^{(s)} = 6\delta_{j,s}\mu_{6k+2j,+}^{(s)}, \quad j, s = 0, 1, 2. \tag{83}$$

Для нахождения нагрузок σ'_p, определяемых равенствами (80) достаточно решить систему уравнений

$$\sum_{m=0}^{2} z_{2m}^{6k+2j} {\sigma'}_{2m}^{(s)} = \delta_{j,s}\,\frac{1}{2}\sqrt{3/2}(-2)^n; \quad n = 3k + j,\ j, s = 0, 1, 2. \tag{84}$$

Подставляя в (84) выражения ${\sigma'}_p^{(s)}$ через $D_p^{(s)}$ по формулам (80) получим систему из девяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $D_{2m}^{(s)}$, которая распадается на три независимые системы для 3-х неизвестных. Эти системы имеют вид

$$\begin{cases} D_0^{(0)} + D_2^{(0)} + D_4^{(0)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ D_0^{(0)} + e^{-i2\pi/3} D_2^{(0)} + e^{i2\pi/3} D_4^{(0)} = 0, \\ D_0^{(0)} + e^{i2\pi/3} D_2^{(0)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(0)} = 0; \end{cases} \tag{85}$$

$$\begin{cases} D_0^{(1)} + e^{i2\pi/3} D_2^{(1)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(1)} = 0, \\ D_0^{(1)} + D_2^{(1)} + D_4^{(1)} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ D_0^{(1)} + e^{-i2\pi/3} D_2^{(1)} + e^{i2\pi/3} D_4^{(1)} = 0; \end{cases} \tag{86}$$

$$\begin{cases} D_0^{(2)} + e^{-i2\pi/3} D_2^{(2)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(2)} = 0, \\ D_0^{(2)} + e^{i2\pi/3} D_2^{(2)} + e^{-i2\pi/3} D_4^{(2)} = 0, \\ D_0^{(2)} + D_2^{(2)} + D_4^{(2)} = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; \end{cases} \tag{87}$$

Решая эти системы находим

$$D_0^{(0)} = D_2^{(0)} = D_4^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \tag{88}$$

$$D_0^{(1)} = D_2^{(1)} = D_4^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \tag{89}$$

$$D_0^{(2)} = D_2^{(2)} = D_4^{(2)} = \frac{1}{4\sqrt{6}}; \tag{90}$$

Нетрудно проверить что для построенной в результате меры μ_{disc}^{even} выполняются соотношения (83), т.е. она является P-симметричной.

Перейдем к построению четной непрерывной P-симметричной меры μ_{cont}^{even}, отвечающей моментам μ_{2n}^{cont} (76):

$$\mu_{2n}^{cont} = \frac{(-1)^{j-1-\delta_{j,2}}\, 2^{j-3\delta_{j,2}}}{\pi} \int_0^4 \frac{y^{k+\delta_{j,2}}}{y+8} \sqrt{\frac{4-y}{y}} dy, \tag{91}$$

где $n = 3k + j$, $k \geq 0$, $j = 0, 1, 2$. Замена $y = t^6$ преобразует (91) в

$$\mu_{2n}^{cont} = 6(-2)^{j-\delta_{j,2}-1} 2^{1-2\delta_{j,2}} \int_0^{\sqrt[3]{2}} t^{2n} t^{-2j+6\delta_{j,2}} f(t) dt, \tag{92}$$

где
$$f(t)=\frac{1}{\pi(8+t^6)}\sqrt{\frac{4-t^6}{t^6}}t^5. \tag{93}$$

Введя обозначения

$$b(t)=\sum_{j=0}^{2}b_j(t), \qquad b_j(t)=\begin{cases}-1 & \text{при} \quad j=0\\ \dfrac{2}{t^2} & \text{при} \quad j=1\\ \dfrac{t^2}{2} & \text{при} \quad j=2,\end{cases} \tag{94}$$

$$F_+(t)=\sum_{j=0}^{2}F_+^{(j)}(t), \qquad F_+^{(j)}(t)=b_j(t)f(t)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}, \tag{95}$$

где $\chi_{[a,b]}$ — характеристическая функция промежутка $[a,b]$, мы можем переписать (93) в виде
$$\mu_{2n}^{cont}=\int_{\mathbb{R}_0^{(3)}}x^{2n}\mu_{cont}^{even}(dx)=\int_{\mathbb{R}_0^{(3)}}x^{2n}F(x)dx=6\int_0^\infty x^{2n}F_+(x)dx. \tag{96}$$

Последовательность моментов $\left\{\mu_{2n+1}^{cont}\right\}_{n=0}^\infty$ разобьем на три серии

$$\left\{\mu_{2n+1}^{cont}\right\}_{n=0}^\infty=\left\{\mu_{2n+1}^{cI}\right\}_{n=0}^\infty\cup\left\{\mu_{2n+1}^{cII}\right\}_{n=0}^\infty\cup\left\{\mu_{2n+1}^{cIII}\right\}_{n=0}^\infty, \tag{97}$$

где

$$\mu_{2n}^{cI}=\mu_{6k},\ (n=3k); \quad \mu_{2n}^{cII}=\mu_{6k+2},\ (n=3k+1); \quad \mu_{2n}^{cIII}=\mu_{6k+4},\ (n=3k+2).$$

Введем обозначения

$$\mu_{6k+2j}^{c,(s)}=\int\mathbb{R}_0^{(3)}x^{6k+2j}\mu_{cont(s)}^{even}(dx), \qquad \mu_{6k+2j,+}^{c,(s)}=\int_0^\infty x^{6k+2j}F_+^{(s)}(x)dx. \tag{98}$$

Достаточным условием P-симметричности меры μ_{cont}^{even} является соотношение

$$\mu_{6k+2j}^{c,(s)}=6\delta_{j,s}\mu_{6k+2j,+}^{c,(s)}, \quad j,s=0,1,2. \tag{99}$$

Следует рассмотреть три случая $s=0,1,2$.

1 $s=0$.

С учетом (98) имеем
$$\mu_{2n}^{c,(0)}=I_{0,n}^{(0)}+I_{1,n}^{(0)}+I_{2,n}^{(0)}, \tag{100}$$

где

$$I_{0,n}^{(0)}=\int_{\mathbb{R}_0}x^{2n}\mu_{cont(0)}^{even}(dx), \quad I_{1,n}^{(0)}=\int_{\mathbb{R}_{e^{i2\pi/3}}}x^{2n}\mu_{cont(0)}^{even}(dx), \quad I_{2,n}^{(0)}=\int_{\mathbb{R}_{e^{-i2\pi/3}}}x^{2n}\mu_{cont(0)}^{even}(dx). \tag{101}$$

Вычислим эти интегралы при $a)\, n=3k, \quad b)\, n=3k+1, \quad c)\, n=3k+2.$

a) $j=0,\ n=3k.$

Обозначим $x=ye^{i\alpha}$ на $\mathbb{R}_\alpha$. Учитывая (92)-(95), (98) и четность функции $F^{(0)}(x)$ получаем

$$I_{0,3k}^{(0)}=\int_{\mathbb{R}_0} y^{6k}F^{(0)}(y)dy=2\int_0^\infty y^{6k}F_+^{(0)}(y)dy=2\int_0^\infty y^{6k}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy=2\mu_{6k,+}^{c,(0)}. \quad (102)$$

$$I_{1,3k}^{(0)}=\int_{\mathbb{R}_{e^{i2\pi/3}}} y^{6k}e^{6(i2\pi/3)}(-1)f(ye^{i2\pi/3})\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}d\left(e^{i2\pi/3}y\right)=2\int_0^\infty y^{6k}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy=2\mu_{6k,+}^{c,(0)}. \quad (103)$$

$$I_{2,3k}^{(0)}=\int_{\mathbb{R}_{e^{-i2\pi/3}}} y^{6k}e^{6(-i2\pi/3)}(-1)f(ye^{-i2\pi/3})\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}d\left(e^{-i2\pi/3}y\right)=2\int_0^\infty y^{6k}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy=2\mu_{6k,+}^{c,(0)}. \quad (104)$$

Итак

$$\mu_{6k}^{c,(0)}=6\mu_{6k,+}^{c,(0)}. \quad (105)$$

b) $j=1,\ n=3k+1.$

Аналогично (103)-(104) имеем

$$I_{0,3k+1}^{(0)}=2\int_0^\infty y^{6k+2}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy; \quad (106)$$

$$I_{1,3k+1}^{(0)}=2\int_0^\infty y^{6k+2}e^{i4\pi/3}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy; \quad (107)$$

$$I_{2,3k+1}^{(0)}=2\int_0^\infty y^{6k+2}e^{-i4\pi/3}(-1)f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy; \quad (108)$$

Учитывая, что $1+e^{i4\pi/3}+e^{-i4\pi/3}=0$ и (100) получаем

$$\mu_{6k+2}^{c,(0)}=I_{0,3k+1}^{(0)}+I_{1,3k+1}^{(0)}+I_{2,3k+1}^{(0)}=0. \quad (109)$$

c) $j=2,\ n=3k+2.$ Точно также, как и выше, получаем

$$\mu_{6k+4}^{c,(0)}=I_{0,3k+2}^{(0)}+I_{1,3k+2}^{(0)}+I_{2,3k+2}^{(0)}=0. \quad (110)$$

Из формул (105), (109) и (110) следует

$$\mu_{6k+2j}^{c,(0)}=6\delta_{j,0}\mu_{6k+2j,+}^{c,(0)}. \quad (111)$$

Перейдем к рассмотрению второго случая.

2 $s = 1$

Для $j = 0$ имеем

$$\mu_{6k}^{c,(1)} = 2\int_0^\infty y^{6k}\frac{2}{y^2}f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy + 2\int_0^\infty y^{6k}\frac{2}{y^2}e^{-i4\pi/3}f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy+$$
$$+ 2\int_0^\infty y^{6k}\frac{2}{y^2}e^{i4\pi/3}f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy = 0. \quad (112)$$

Для $j = 1$ имеем

$$\mu_{6k+2}^{c,(1)} = 2\int_0^\infty y^{6k+2}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy + 2\int_0^\infty y^{6k+2}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy+$$
$$+ 2\int_0^\infty y^{6k+2}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy = 6\mu_{6k+2,+}^{c,(1)}. \quad (113)$$

Наконец, при $j = 2$ имеем

$$\mu_{6k+4}^{c,(1)} = 2\int_0^\infty y^{6k+4}\frac{1}{y^2}F_+^{(1)}(y)dy + 2\int_0^\infty y^{6k+4}\frac{1}{y^2}e^{i4\pi/3}F_+^{(1)}(y)dy+$$
$$+ 2\int_0^\infty y^{6k+4}\frac{1}{y^2}e^{-i4\pi/3}F_+^{(1)}(y)dy = 0. \quad (114)$$

Следовательно,

$$\mu_{6k+2j}^{c,(1)} = 6\delta_{j,1}\mu_{6k+2j,+}^{c,(1)}. \quad (115)$$

Аналогично рассматривается и третий случай.

3 $s = 2$

Имеем

$$\mu_{6k+2j}^{c,(2)} = 6\delta_{j,2}\mu_{6k+2j,+}^{c,(2)}. \quad (116)$$

Из полученных соотношений (111), (115) и (116) следует справедливость (99).

Итак, построена четная, непрерывная P-симметричная мера с носителем, лежащим на $\mathbb{R}_0^{(3)}$, которая на луче R_α ($\alpha = 0,\ 2\pi/3,\ -2\pi/3$) имеет вид ($x = e^{i\alpha}y$)

$$\mu_{cont}^{even}(dx) = F(x)dx = 2\sum_{j=0}^{2}F_+(x)dx = 2\sum_{j=0}^{2}F_+(e^{i\alpha}y)dy =$$
$$= 2\sum_{j=0}^{2}b_j(e^{i\alpha}y)f(e^{i\alpha}y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}e^{i\alpha}dy = 2\left\{\left(-1+\frac{2}{y^2}e^{-i2\alpha}+\frac{y^2}{2}e^{i2\alpha}\right)f(y)\chi_{[0,\sqrt[3]{2}]}dy\right\}, \quad (117)$$

где функция f определяется формулой (93).

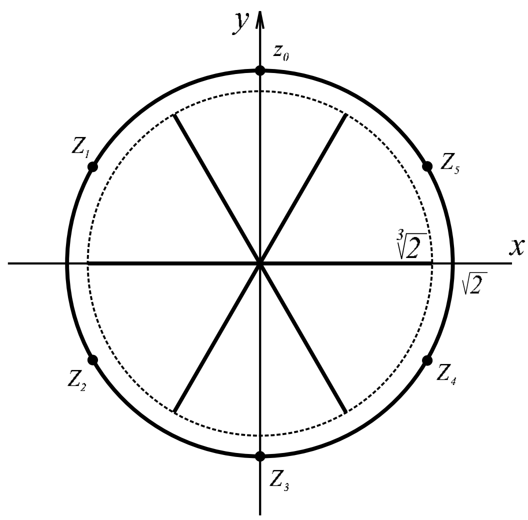

Рис. 1:

Нам осталось построить непрерывную меру $\mu^{even}_{cont,I}$, которая соответствует первому слагаемому $\mu'_{2n,I}$ в правой части (78). Будем считать, что мера $\mu^{even}_{cont,I}$ сосредоточена на окружности $|x| = \sqrt{2}$ и имеет плотность

$$\mu^{even}_{cont,I}(dx) = \frac{3}{\pi i}\left(1 - \sqrt{3/2}\right)\frac{1}{x}dx. \tag{118}$$

Тогда, как известно из теории аналитических функций

$$\mu_{2n} = \int_{|x|=\sqrt{2}} x^{2n}\mu(dx) = \frac{6}{2\pi i}\left(1 - \sqrt{3/2}\right)\int_{|x|=\sqrt{2}} x^{2n-1}dx = 6\left(1 - \sqrt{3/2}\right)\delta_{n,0}. \tag{119}$$

В результате мы показали, что искомая P-симметричная мера определяемая равенствами (48), (49), (51), (62), (72), (78), (82), (118), (119), сосредоточена на носителе приведенном на Рис.1. (Носитель состоит из окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, точек z_i расположенных на этой окружности и отрезков длины $\sqrt[3]{2}$ выходящих из начала координат под углом в $\pi/3$ друг к другу).

Соответствующие нагрузки равны:

$$\sigma_0 = -\sigma_3 = C_0^{(0)} + C_0^{(1)}z_0^{-2} + C_0^{(2)}z_0^2 - \frac{3(1-\sqrt{3/2}}{z_0 i\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} - \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\right); \tag{120}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_5 = C_2^{(0)} + C_2^{(1)}z_2^{-2} + C_2^{(2)}z_2^2 - \frac{3(1-\sqrt{3/2})}{z_2 i\pi} = \frac{3}{\sqrt{2}\pi}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)e^{i\pi/3}; \tag{121}$$

$$\sigma_4 = -\sigma_1 = C_4^{(0)} + C_4^{(1)}z_4^{-2} + C_4^{(2)}z_4^2 - \frac{3(1-\sqrt{3/2})}{z_4 i\pi} = \frac{3}{\pi\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)e^{-i\pi/3}; \tag{122}$$

$$\sigma'_0 = \sigma'_3 = D_0^{(0)} + D_0^{(1)} z_0^{-2} + D_0^{(2)} z_0^2 - \frac{3(1-\sqrt{3/2})}{z_0 i\pi} = -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2\pi}(\sqrt{2}-\sqrt{3}); \tag{123}$$

$$\sigma'_2 = \sigma'_5 = D_2^{(0)} + D_2^{(1)} z_2^{-2} + D_2^{(2)} z_2^2 - \frac{3(1-\sqrt{3/2})}{z_2 i\pi} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{2\pi}(\sqrt{2}-\sqrt{3})e^{i\pi/3}; \tag{124}$$

$$\sigma'_4 = \sigma'_1 = D_4^{(0)} + D_4^{(1)} z_4^{-2} + D_4^{(2)} z_4^2 - \frac{3(1-\sqrt{3/2})}{z_4 i\pi} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{2\pi}(\sqrt{2}-\sqrt{3})e^{-i\pi/3}; \tag{125}$$

Итак нагрузки равны:

$$\sigma_0 + \sigma'_0 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right), \qquad \sigma_3 + \sigma'_3 = \frac{-1}{2\sqrt{6}}, \qquad (\text{в точках} \quad z_0,\, z_3), \tag{126}$$

$$\sigma_5 + \sigma'_5 = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\pi}(\sqrt{2}-\sqrt{3})e^{i\pi/3}, \qquad \sigma_2 + \sigma'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad (\text{в точках} \quad z_5,\, z_2), \tag{127}$$

$$\sigma_4 + \sigma'_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{3}{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})e^{-i\pi/3}, \qquad \sigma_1 + \sigma'_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad (\text{в точках} \quad z_4,\, z_1), \tag{128}$$

Плотность меры на $\mathbb{R}_0^{(3)}$ определяется формулой (117) и равна ($x = e^{i\alpha}y$):

$$\mu_{cont}^{even}(dx) = \left(-1 + \frac{2}{y^2} + \frac{y^2}{2}\right)\frac{1}{8+y^6}\sqrt{\frac{4-y^6}{y^6}}\, y^5 \chi_{[-\sqrt[3]{2},-\sqrt[3]{2}]} dy, \tag{129}$$

(на $\mathbb{R}_0$);

$$\mu_{cont}^{even}(dx) = \left(-1 + \frac{2}{y^2}e^{-i4\pi/3} + \frac{y^2}{2}e^{i4\pi/3}\right)\frac{1}{8+y^6}\sqrt{\frac{4-y^6}{y^6}}\, y^5 \chi_{[-\sqrt[3]{2}e^{-i7\pi/6},\sqrt[3]{2}e^{i7\pi/6}]} dy, \tag{130}$$

(на $\mathbb{R}_{e^{i2\pi/3}}$);

$$\mu_{cont}^{even}(dx) = \left(-1 + \frac{2}{y^2}e^{i4\pi/3} + \frac{y^2}{2}e^{-i4\pi/3}\right)\frac{1}{8+y^6}\sqrt{\frac{4-y^6}{y^6}}\, y^5 \chi_{[-\sqrt[3]{2}e^{-i\pi/6},\sqrt[3]{2}e^{i\pi/6}]} dy, \tag{131}$$

(на $\mathbb{R}_{e^{-i\pi/6}}$);

Наконец плотность меры на окружности $C_{\sqrt{2}}$ определяется формулой (118) и равна ($x = \sqrt{2}e^{i\phi}$)

$$\mu_{cont}^{even}(dx) = \frac{3}{i\sqrt{2}\pi}(\sqrt{2}-\sqrt{3}). \tag{132}$$

References

[1] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, С.Б.Егоров, *Записки Научн. Семин. ЛОМИ* **245**, 80-107 (1997)

[2] V.V.Borzov, *Integral Transf. and Special Functions*, **12**, no.2, 115-138 (2001)

[3] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Теор. Матем. Физика*, **155**, вып.1, 39-46 (2008)

[4] V.V.Borzov, E.V.Damaskinsky, *Day on Diffraction 2009*, 49-53 (2009)