ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 9/2009

Динамические правильные раскраски вершин графа

Д. В. Карпов [1]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191013, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

Назовем подразбиением полного графа K_n любой граф, который можно получить заменой нескольких ребер K_n на цепочки длины 2 (с каждой такой цепочкой добавляется новая вершина степени 2).

Пусть G — связный простой граф с максимальной степенью вершин $d \geq 8$. В работе доказывается, что динамическая правильная раскраска вершин графа G в d цветов существует тогда и только тогда, когда G отличен от K_{d+1} и его подразбиений.

[1] Автор благодарит за поддержку исследований Программу фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-4392.2008.1 и грант РФФИ 09-01-12137-офи-м.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение. Основные результаты

В настоящей работе рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер, изучаются правильные раскраски вершин таких графов. Цвет вершины v в раскраске ρ мы будем обозначать через $\rho(v)$.

Максимальную и минимальную степени вершин графа G мы будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно. Для любой вершины $v \in V(G)$ через $d_G(v)$ будем обозначать степень вершины v в графе G, а через $\mathrm{N}_G(v)$ — *окрестность* вершины v, то есть, множество всех вершин, смежных с v. Так как в рассматриваемом графе нет петель, $v \notin \mathrm{N}_G(v)$.

Определение 1. Правильная раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины $v \in V(G)$ степени не менее двух окрестность $\mathrm{N}_G(v)$ содержит вершины хотя бы двух различных цветов.

По аналогии с классическим определением хроматического числа, определим динамическое хроматическое число графа.

Определение 2. *Динамическое хроматическое число* графа G (обозначение: $\chi_2(G)$) — это наименьшее натуральное число такое, что существует динамическая раскраска вершин графа G в $\chi_2(G)$ цветов.

Теорема Брукса ([1, 2, 5]) говорит нам, что $\chi(G) \le \Delta(G)$ для любого связного графа G, кроме ряда исключений. (При $\Delta(G) > 2$ единственное исключение — это полный граф на $d+1$ вершине K_{d+1}, при $\Delta(G) = 2$ исключения — циклы нечетной длины.)

В работе [6] доказано похожее на теорему Брукса утверждение о динамическом хроматическом числе: $\chi_2(G) \le \Delta(G)+1$ для любого связного графа G при условии $\Delta(G) \ge 3$. Более того, в [6] доказано, что при $\Delta(G) \le 3$ имеет место неравенство $\chi_2(G) \le 4$ за исключением случая, когда граф G — это цикл из пяти вершин.

Мы усилим результат работы [6], доказав для связных графов G (кроме ряда исключений) при $\Delta(G) \ge 8$ аналогичную теореме Брукса оценку $\chi_2(G) \le \Delta(G)$. Основные результаты работы сформулированы в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Пусть G — связный граф без вершин степени два, удовлетворяющий условию $\Delta(G) \ge 8$ и отличный от полного графа на $\Delta(G)+1$ вершине. Тогда $\chi_2(G) \le \Delta(G)$.*

Определение 3. Пусть $n \ge 3$. Рассмотрим любой граф H, полученный из полного графа K_n следующей операцией: заменой нескольких ребер графа K_n на цепочки длины 2 (с каждой такой цепочкой добавляется одна новая вершина степени 2). Назовем такой граф *подразбиением* K_n.

Пусть класс графов $\mathcal{K}_n$ состоит из полного графа K_n и всех его подразбиений.

Теорема 2. *Пусть $d \geq 8$.*

1) *Для любого графа $H \in \mathcal{K}_{d+1}$ выполняется утверждение $\chi_2(H) = d+1$.*

2) *Пусть G — связный граф, $\Delta(G) \leq d$, причем G не изоморфен никакому из графов класса $\mathcal{K}_{d+1}$. Тогда $\chi_2(G) \leq d$.*

В настоящее время весьма популярно использование вероятностных методов для доказательства подобных теорем. Однако, такие методы подразумевают значительные ограничения снизу на $\Delta(G)$. Например, в работах [3, 4] с помощью вероятностных методов доказываются весьма интересные обощения теоремы Брукса, но на $\Delta(G)$ накладываются ограничения e^{10^7} и 10^{14} соответственно.

С помощью более точного использования подсчетных методов можно значительно снизить оценки на $\Delta(G)$. Так, при $\Delta(G) \geq 254$ теорема 2 несложно доказывается с помощью техники и результатов из работы [7]. Однако, для работы с малыми значениями $\Delta(G)$ требуется придумывать специальные алгоритмы, что значительно труднее. В настоящей работе мы доказываем теоремы 1 и 2, предлагая полиномиальные относительно количества вершин алгоритмы построения искомой раскраски при $\Delta(G) \geq 8$. Выскажем предположение, что результаты теорем 1 и 2 верны и при $\Delta(G) \geq 5$.

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теорем 1 и 2. Определим понятия, необходимые нам в доказательствах.

Определение 4. Пусть G — произвольный граф, ρ — раскраска его вершин.

1) Назовем вершину $v \in V(G)$ *плохой* в раскраске ρ, если $d_G(v) > 1$ и все вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ имеют одинаковый цвет. Назовем вершину $v \in V(G)$ *двуцветной* в раскраске ρ, если $d_G(v) > 1$, и все вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ покрашены в два цвета (но v не является плохой).

2) Пусть вершины a и b смежны. Будем называть вершину b *опасным соседом* вершины a в раскраске ρ графа G, если $d_G(b) > 1$, все вершины из множества $\mathrm{N}(b) \setminus \{a\}$ покрашены в один цвет, а a — в другой.

3) Пусть ρ и ρ' — две раскраски. Будем говорить, что $\rho' \leq_G \rho$, если выполняются два условия.

(1) Для любой пары смежных вершин u и v из $\rho'(u) = \rho'(v)$ следует $\rho(u) = \rho(v)$.

(2) Любая вершина, являющаяся плохой в ρ', является плохой и в ρ .

Будем говорить, что $\rho' <_G \rho$, если $\rho' \leq_G \rho$ и хотя бы одна из плохих вершин в раскраске ρ не является таковой в ρ'.

Замечание 1. 1) Легко видеть, что если $d_G(b) \neq 2$, то вершина b может быть опасным соседом не более, чем для одной другой вершины.

2) Пусть $d_G(a) > 2$ и вершину a можно сделать плохой, перекрасив одного из ее соседей. Тогда такой сосед вершины a, очевидно, единственен и является опасным соседом a.

3) Если раскраски ρ, ρ_1 и ρ_2 таковы, что $\rho \leq_G \rho_1$ и $\rho_1 \leq_G \rho_2$, то $\rho \leq_G \rho_2$. Если хотя бы одно из первых двух “неравенств” строгое, то $\rho <_G \rho_2$.

2 Алгоритм DN

В этом разделе мы опишем вспомогательный алгоритм DN, который будет в некоторых случаях вызываться главным алгоритмом перекраски вершин.

Пусть даны граф H и раскраска ρ вершин графа H более, чем в 6 цветов. (Никаких условий на соотношение количества цветов и $\Delta(H)$ не накладывается. Раскраска может быть неправильной.) Пусть a — плохая вершина в этой раскраске, $\rho(a) = i_0$, а все вершины из $\mathrm{N}_H(a)$ покрашены в цвет i_1.

Опишем алгоритм $DN(H, \rho, a, J)$ (здесь H и ρ — это граф и раскраска, с которыми мы имеем дело, a — плохая вершина, а $J = (j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$ — упорядоченный набор из пяти различных цветов, удовлетворяющий условиям

$$i_0 \notin J, \quad i_0 \neq i_1, \quad i_1 \notin \{j_2, j_3, j_4, j_5\}. \tag{1}$$

Пусть $J' = J \cup \{i_0, i_1\}$. Определим функцию $\nu : J' \to J'$ следующим образом:

$$\nu(i_0) = i_1, \nu(i_1) = j_2, \nu(j_2) = j_3, \nu(j_3) = j_4, \nu(j_4) = j_5, \nu(j_5) = j_6, \nu(j_6) = j_2.$$

Для каждого цвета $j \in J'$ цвет $\nu(j)$ мы будем называть *следующим цветом*. Через $\nu^k(j)$ мы будем обозначать k-ю итерацию функции ν.

Замечание 2. 1) нетрудно проверить, что определение функции ν корректно. В самом деле, из условия (1) следует что среди цветов, на которых определена функция ν возможно только совпадение $i_1 = j_6$, а по определению $\nu(i_1) = \nu(j_6) = j_2$.

2) Пусть $j \in J'$. Из условий (1) следует, что все цвета j, $\nu(j)$, $\nu^2(j)$, $\nu^3(j)$ и $\nu^4(j)$ различны.

Целью алгоритма $DN(H, \rho, a, J)$ является изменение раскраски ρ на такую раскраску ρ', что $\rho' \leq_H \rho$, выполняется условие (S) и одно из двух условий $(DN1)$ или $(DN2)$.

(S). Если $\rho'(v) \neq \rho(v)$ для некоторой вершины v, то $\rho(v) \in J'$ и $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$.

$(DN1)$. $\rho'(a) = \nu^2(\rho(a)) = j_2$.

$(DN2)$. $\rho'(a) = \rho(a)$. Существует единственная такая вершина $v \in \mathrm{N}_H(a)$, что $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$. Цвета отличных от v вершин из $\mathrm{N}_H(a)$ в раскрасках ρ и ρ' совпадают.

Замечание 3. Так как степень плохой вершины a не менее двух, то в случае, когда раскраска ρ' удовлетворяет условию $(DN2)$, мы имеем $\rho' <_H \rho$.

2.1 Построение множества L

Перед началом работы алгоритма мы построим вспомогательное множество L и орграф $\overline{L}$ на множестве вершин L.

Мы будем помещать в множество L некоторые вершины графа H, имеющие цвета из множества J' и ориентировать некоторые ребра между вершинами множества L. Ориентированные ребра будем для удобства называть *стрелками.* Некоторые вершины множества L мы будем объявлять *помеченными.* Стрелки будут выходить только из помеченных вершин. Изначально пусть $L = \{a\}$, вершина a не помечена, никакие ребра не ориентированы.

Опишем шаг построения. Пусть $u \in L$ — непомеченная вершина, а M — множество всех вершин из $\mathrm{N}_H(u)$, из которых не выходят стрелки в u. Если $M \neq \varnothing$ и $\rho(v) = \nu(\rho(u))$ для каждой вершины $v \in M$, то объявим вершину u отмеченной, поместим все вершины из $M \setminus L$ в множество L и добавим в $\overline{L}$ стрелки от u ко всем вершинам множества M.

С каждым шагом увеличивается количество помеченных вершин, поэтому ввиду конечности графа процесс построения конечен. В некоторый момент он закончится, рассмотрим множество L на момент окончания процесса. Пусть $\overline{L}$ — ориентированный граф с вершинами из L и ребрами-стрелками, расставленными в ходе построения L.

Определение 5. 1) Пусть $u \in L$. Обозначим через $\mathrm{N}^-(u)$ множество всех вершин, из которых выходят стрелки в u, а через $\mathrm{N}^+(u)$ — множество всех вершин, в которые выходят стрелки из u. Назовем вершины из $\mathrm{N}^-(u)$ *предками*, а вершины из $\mathrm{N}^+(u)$ — *потомками* вершины u.

2) Назовем вершину $u \in L$ *особой*, если $\mathrm{N}_H(u) = \mathrm{N}^-(u)$.

Замечание 4. 1) Вершина a обязательно является помеченной, $\mathrm{N}^+(a) = \mathrm{N}_H(a)$. Вершина a не может быть потомком никакой другой вершины.

2) $\mathrm{N}^-(u) \neq \varnothing$ для любой отличной от a вершины $u \in L$. Множество $\mathrm{N}^+(u)$ непусто тогда и только тогда, когда вершина u помечена.

3) По построению, орграф $\overline{L}$ —ациклический (то есть, в нем нет ориентированных циклов). Действительно, на очередном шаге построения $\overline{L}$ мы добавляем стрелки, выходящие из вершины u (которую мы объявляем помеченной) в непомеченные вершины. Следовательно, все вершины, откуда можно попасть в u по стрелкам графа $\overline{L}$, были помечены ранее и ни в одну из них вновь добавленные стрелки не входят.

4) Если $u \in L$ — особая или помеченная вершина, то $\mathrm{N}_H(u) \subset L$.

5) Пусть вершина $u \in L$ не помечена. Тогда либо u — особая, либо не все вершины из $\mathrm{N}_H(u) \setminus \mathrm{N}^-(u)$ имеют цвет $\nu(\rho(u))$, иначе мы могли бы продолжить построение множества L и орграфа $\overline{L}$.

Определение 6. 1) Для каждой вершины $u \in L$ определим $L(u)$, как множество всех вершин, достижимых из u в орграфе $\overline{L}$ (то есть, множество потомков u, потомков их потомков, и так далее).

2) *Ветвью потомков* вершины u мы назовем любой путь в орграфе $\overline{L}$ с началом в u.

3) *Высотой* $h(u)$ вершины u назовем длину наибольшей ветви потомков u (то есть, количество ребер в соответствующем пути).

Замечание 5. 1) Очевидно, $L(a) = L$.

2) Так как граф $\overline{L}$ — ациклический, то любая ветвь потомков любой вершины $u \in L$ конечна и не проходит ни через какую вершину дважды. Следовательно, высота любой вершины конечна.

3) Высота помеченной вершины больше нуля, а высота любой непомеченной вершины из L равна нулю.

4) Если $v \in \mathrm{N}^+(u)$, то $h(u) > h(v)$.

2.2 Алгоритм изменения раскраски: итерации

Для любой помеченной вершины $u \in L$ мы построим алгоритм $A(u)$, изменяющий раскраску ρ на такую раскраску ρ' , что выполняются условия $(S(u))$, $(P(u))$ и одно из двух условий $(DN1(u))$ или $(DN2(u))$.

$(S(u))$. Если $\rho'(v) \neq \rho(v)$ для некоторой вершины v, то $\rho(v) \in J'$ и $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$, причем $v \in L(u)$ — помеченная или особая вершина.

$(P(u))$. Для любой помеченной вершины $w \in L(u)$, если $\rho'(y) \neq \rho(y)$ для некоторого $y \in N^-(w)$, то существует такая вершина $z \in N^+(w)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$. Для любой особой вершины $w \in L(u)$ и любой вершины $y \in \mathrm{N}^-(w) \quad \rho'(y) = \rho(y)$.

$(DN1(u))$. $\rho'(u) = \nu^2(\rho(u))$.

$(DN2(u))$. $\rho'(u) = \rho(u)$. Существует единственная такая вершина $v \in \mathrm{N}^+(u)$, что $\rho'(v) = \nu^2(\rho(v))$. Цвета отличных от v вершин из $\mathrm{N}_H(u)$ в раскрасках ρ и ρ' совпадают.

Назовем алгоритм $A(u)$ *перекраской типа 1*, если выполняется условие $(DN1(u))$ и *перекраской типа 2*, если выполняется условие $(DN2(u))$.

Лемма 1. *Пусть $v, w \in L$, $w \in L(v)$, а раскраска ρ' получена из ρ перекраской $A(v)$, удовлетворяющей условию $(P(v))$. Пусть раскраска ρ'' такова, что $\rho''(x) = \rho'(x)$ при $x \in L(w)$ и $\rho''(x) = \rho(x)$ при $x \notin L(w)$. Тогда раскраска ρ'' удовлетворяет условию $(P(w))$.*

Доказательство. Рассмотрим помеченную вершину $x \in L(w)$, пусть $\rho''(y) \neq \rho(y)$ для некоторого $y \in \mathrm{N}^-(x)$. Тогда, очевидно, $y, x \in L(w)$, следовательно, $\rho''(y) = \rho'(y)$ и по условию $(P(v))$ существует такая вершина $z \in \mathrm{N}^+(x)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$. Очевидно, $z \in L(w)$, следовательно, $\rho''(z) = \rho'(z) \neq \rho(z)$, то есть, в раскраске ρ'' перекрашен хотя бы один потомок вершины y.

Пусть $x \in L(u)$ — особая вершина, $y \in \mathrm{N}^-(x)$ и $\rho''(y) \neq \rho(y)$. Тогда $\rho'(y) = \rho''(y) \neq \rho(y)$, что противоречит условию $(P(v))$.

Таким образом, раскраска ρ'' удовлетворяет условию $(P(w))$. $\square$

Построение алгоритма $A(u)$.
Построение будет вестись индукцией по $h(u)$. Пусть $j = \rho(u)$.

База.
Разберем два случая.

1. Пусть в $\mathrm{N}^+(u)$ есть особая вершина w. Тогда $\rho(w) = \nu(j)$, положим $\rho'(w) = \nu^3(j)$, остальные вершины не изменят цвета. Очевидно, раскраска ρ' удовлетворяет условиям $(S(u))$ и $(DN2(u))$. Так как единственная перекрашенная вершина — особая вершина w — не имеет потомков, то не существует вершины из L, предка которой мы перекрасили, а значит, выполнено условие $(P(u))$.

2. Пусть $h(u) = 1$, причем в $\mathrm{N}^+(u)$ нет особых вершин. Тогда положим $\rho'(u) = \nu^2(j)$, остальные вершины не изменят цвета. Очевидно, раскраска ρ' удовлетворяет условиям $(S(u))$ и $(DN1(u))$. Так как единственная перекрашенная вершина u имеет высоту 1, то все вершины из $\mathrm{N}^+(u)$ (а это как раз те вершины, предком которых является u) — непомеченные, причем, кроме того, неособые. Следовательно, выполнено условие $(P(u))$.

Индукционный переход.

Пусть u — помеченная вершина высоты $h(u) > 1$, причем в $\mathrm{N}^+(u)$ нет особых вершин (случай, когда особые вершины есть, разобран в базе). Так как $h(u) > 1$, в $\mathrm{N}^+(u)$ есть хотя бы одна помеченная вершина. Пусть $v_1, \ldots, v_p$ — все помеченные потомки u, тогда $\rho(v_k) = \nu(j)$ при $k \in \{1, \ldots, p\}$. По замечанию 5, $h(v_k) < h(u)$, следовательно, для каждой из этих вершин существует алгоритм $A(v_i)$. Рассмотрим два случая.

a. Для каждой из вершин $v_1, \ldots, v_p$ существует перекраска $A(v_i)$ типа 2.

Если цвет какой-то вершины y должен меняться в нескольких из этих перекрасок, то ввиду условия (S) нужно менять этот цвет на один и тот же цвет $\nu^2(\rho(y))$. Положим $\rho'(u) = \nu^2(j)$ и для любой вершины $y \in L(u)$, цвет которой изменяется хотя бы в одной из перекрасок $A(v_1)$, $\ldots$, $A(v_p)$, мы положим $\rho'(y) = \nu^2(\rho(y))$. Очевидно, раскраска ρ' удовлетворяет условиям $(S(u))$ и $(DN1(u))$.

Проверим условие $(P(u))$. Рассмотрим помеченную вершину $x \in L(u)$, пусть $y \in \mathrm{N}^-(x)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Тогда, очевидно, $y \in L(u)$. Если $y = u$, то $x = v_k$ для некоторого $v_k \in \{v_1, \ldots, v_p\}$. Так как в перекраске $A(v_k)$ типа 2 изменяется цвет хотя бы одной вершины $z \in \mathrm{N}^+(v_k)$, то $\rho'(z) \neq \rho(z)$.

Пусть $y \neq u$. Тогда вершина y должна быть перекрашена в $A(v_t)$ для некоторого $t \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно $x, y \in L(v_t)$ и по условию $(P(v_t))$ был перекрашен хотя один потомок вершины x.

Пусть $w \in L(u)$ — особая вершина, $y \in \mathrm{N}^-(w)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Случай $y = u$ невозможен: по предположению у вершины u нет особых потомков, но в этом случае $w \in \mathrm{N}^+(u)$. Пусть $y \neq u$. Тогда существует такое k, что $y, w \in L(v_k)$ и вершина y должна быть перекрашена в $A(v_k)$. Однако, это противоречит условию $(P(v_k))$.

Таким образом, раскраска ρ' удовлетворяет условию $(P(u))$.

b. Для некоторых потомков вершины u существуют перекраски типа 1.

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — все такие потомки. Поскольку в графе $\overline{L}$ нет циклов, то можно считать, что $v_t \notin L(v_1)$ при $t \in \{2, \ldots, k\}$. Тогда положим $A(u) = A(v_1)$. Понятно, что перекраска $A(u)$ удовлетворяет условию $(S(u))$. Поскольку $\rho(v_1) = \nu(j)$, по условию $(DN1(v_1))$ мы имеем $\rho'(v_1) = \nu^3(j)$, как того требует условие $(DN2(u))$.

Предположим, что $\rho'(v) \neq \rho(v)$ для некоторой отличной от v_1 вершины $v \in \mathrm{N}^+(u)$. Так как $A(v_1)$ меняет цвета только у помеченных и особых вершин из $L(v_1)$, а особых вершин в $\mathrm{N}(u)$ нет, то $v = v_s \in L(v_1)$. Следовательно, $s > k$, то есть, для вершины v_s по предположению не существует перекраски типа 1. Докажем, что это не так.

Рассмотрим такую раскраску ρ'', что $\rho''(x) = \rho'(x)$ при $x \in L(v_s)$ и $\rho''(x) = \rho(x)$ при $x \notin L(v_s)$. Так как $v_s \in L(v_s)$, имеем $\rho''(v_s) = \rho'(v_s) = \nu^2(\rho(v_s))$, поэтому для раскраски ρ'' выполняется условия $(DN1(v_s))$. Для раскраски ρ'' условие $(S(v_s))$ очевидно, выполняется, а условие $(P(v_s))$ выполняется по лемме 1. Следовательно, для вершины v_s существует перекраска типа 1, противоречие с предположением.

Таким образом, $\rho'(v) = \rho(v)$ для любой отличной от v_1 вершины $v \in \mathrm{N}^+(u)$, то есть, раскраска ρ' удовлетворяет условию $(DN2(u))$.

Проверим условие $(P(u))$ для раскраски ρ'. Рассмотрим помеченную вершину $x \in L(u)$, пусть $y \in \mathrm{N}^-(u)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Тогда, очевидно, $y, x \in L(v_1)$ и по условию $(P(v_1))$ существует такая вершина $z \in \mathrm{N}^+(v_1)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$.

Пусть $w \in L(u)$ — особая вершина, $y \in \mathrm{N}^-(w)$ и $\rho'(y) \neq \rho(y)$. Так как перекрашивались только вершины из $L(v_1)$, то $y, w \in L(v_1)$ и по условию $(P(v_1))$ мы не могли перекрасить y, противоречие.

Таким образом, раскраска ρ' удовлетворяет условию $(P(u))$.

2.3 Алгоритм изменения раскраски: финал

Лемма 2. *Пусть раскраска ρ' получена из ρ в результате перекраски $A(a)$. Тогда $\rho' \leq_H \rho$, выполняется условие (S) и одно из условий $(DN1)$ или $(DN2)$.*

Доказательство. Раскраска ρ' удовлетворяет условию $(S(a))$, а следовательно, и более слабому условию (S). Для раскраски ρ' выполняется одно из условий $(DN1(a))$ или $(DN2(a))$, из которых следуют соответственно условия $(DN1)$ и $(DN2)$.

Остается лишь проверить, что $\rho' \leq_H \rho$. Далее мы подробно разберем случаи.

1. Пусть вершины u и v смежны, $\rho'(u) = \rho'(v)$, но $\rho(u) \neq \rho(v)$. Следовательно, мы изменили цвет хотя бы одной из этих вершин, пусть, например, $\rho'(u) \neq \rho(u)$. Тогда $u \in L$ — помеченная или особая вершина, следовательно, $\mathrm{N}_H(u) = \mathrm{N}^-(u) \cup \mathrm{N}^+(u)$. Пусть $\rho(u) = j$, тогда $\rho'(u) = \nu^2(j)$ по условию (S). Если $v \in \mathrm{N}^+(u)$, то $\rho(v) = \nu(j)$, следовательно, ввиду (S), либо $\rho'(v) = \nu(j)$, либо $\rho'(v) = \nu^3(j)$. Однако, цвет $\nu^2(j)$ отличен и от $\nu(j)$, и от $\nu^3(j)$ по замечанию 2, противоречие с предположением $\rho'(u) = \rho'(v)$.

Остается случай $v \in \mathrm{N}^-(u)$. Тогда $\rho(v) = \ell$, причем $\nu(\ell) = j = \rho(u)$. Ввиду (S), либо $\rho'(v) = \ell$, либо $\rho'(v) = \nu^2(\ell)$. Однако, цвет $\nu^2(j) = \nu^3(\ell)$ отличен и от ℓ, и от $\nu^2(\ell)$ по замечанию 2, противоречие с предположением $\rho'(u) = \rho'(v)$.

Таким образом, в результате изменения раскраски не могли появиться новые пары смежных одноцветных вершин.

2. Предположим, что вершина y является плохой в ρ', но не является плохой в ρ. Тогда y смежна хотя бы с одной из перекрашенных вершин w. Понятно, что $w \in L$ — помеченная или особая вершина, следовательно, $y \in \mathrm{N}_H(w) \subset L$. Рассмотрим несколько случаев для вершины y.

2.1. Пусть y — особая вершина. Тогда $w \in \mathrm{N}_H(y) = \mathrm{N}^-(y)$ и по условию $(P(a))$ мы имеем $\rho'(w) = \rho(w)$, противоречие.

2.2. Рассмотрим случай, когда y — помеченная вершина. Поскольку вершина a является плохой в раскраске ρ, то $y \neq a$, следовательно, $\mathrm{N}^-(y) \neq \varnothing$ и $\mathrm{N}^+(y) \neq \varnothing$. Рассмотрим два подслучая.

2.2.1. Предположим, что цвета всех вершин из $\mathrm{N}^-(y)$ в ρ и ρ' совпадают. Пусть $x \in \mathrm{N}^-(y)$ и $\rho'(x) = \rho(x) = j$, тогда $\rho(y) = \nu(j)$. Пусть $z \in \mathrm{N}^+(y)$, тогда $\rho(z) = \nu^2(j)$ и по условию (S) либо $\rho'(z) = \nu^2(j)$, либо $\rho'(z) = \nu^4(j)$. По замечанию 2 цвет j отличен и от $\nu^2(j)$, и от $\nu^4(j)$, следовательно, вершина y не является плохой в ρ', противоречие.

2.2.2. Пусть $x \in \mathrm{N}^-(y)$ и $\rho'(x) \neq \rho(x) = j$. Тогда по условию $(P(a))$ существует такая вершина $z \in \mathrm{N}^+(y)$, что $\rho'(z) \neq \rho(z)$. По построению, $\rho(z) = \nu^2(j)$. По условию (S) мы имеем $\rho'(x) = \nu^2(j)$ и $\rho'(z) = \nu^4(j)$, а эти цвета различны. Следовательно, y не является плохой в ρ', противоречие.

2.3. Пусть y — непомеченная неособая вершина. Так перекрашенная вершина w — помеченная или особая, то $\mathrm{N}_H(w) = \mathrm{N}^-(w) \cup \mathrm{N}^+(w)$, причем $\mathrm{N}^-(w)$ состоит из помеченных вершин. Следовательно, $y \in \mathrm{N}^+(w) \neq \varnothing$, то есть, w — помеченная вершина. Пусть $\rho(w) = j$, тогда $\rho'(w) = \nu^2(j)$ по условию (S). Так как вершина y — неособая, то $M = \mathrm{N}_H(y) \setminus \mathrm{N}^-(y) \neq \varnothing$. Однако, по замечанию 4 не все вершины из M имеют цвет $\nu(\rho(y)) = \nu^2(j)$, следовательно, вершина y не является плохой в ρ', противоречие.

Теперь мы доказали, что $\rho' \leq_H \rho$. □

В лемме 2 мы доказали, что раскраска ρ', полученная в результате перекраски $A(a)$, удовлетворяет всем заявленным целям алгоритма DN. Именно эту раскраску мы и объявим результатом работы алгоритма $DN(H, \rho, a, J)$.

Замечание 6. 1) В процессе работы алгоритма перекрашивались только невырожденные вершины из L, а степень таких вершин по построению не менее 2. Следовательно, ни одна вершина степени 1 или 0, существование которых допускается в графе H, не была перекрашена.

2) Если цвет $i \notin J$, то в результате работы алгоритма $DN(H, \rho, a, J)$ не появилось новых вершин цвета i.

3) Если $i \notin J$, то в процессе работы алгоритма изменила цвет не более чем одна из вершин цвета i — при $i = i_0$ это может быть вершина

a, при $i = i_1$ — одна из вершин окрестности a. В остальных случаях все вершины цвета i сохраняют цвет.

2.4 Алгоритм DN: применение

Вернемся к нашему исходному графу G. Зафиксируем вершину $b \in V(G)$. Пусть множество $B \subset \mathrm{N}_G(b)$ содержит всех соседей вершины b, кроме, может быть, какого-то одного. Рассмотрим новый граф G', полученный из G удалением ребер, соединяющих b с вершинами из множества B. Рассмотрим раскраску ρ вершин графа G (не обязательно правильную), она же является раскраской вершин графа G'. Пусть U — вершины из B, которые являются плохими в раскраске ρ графа G', а $T = B \setminus U$.

Лемма 3. *Пусть $u \in U$, $\rho(u) = i_0$, а все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$ покрашены в ρ в цвет i_1. Пусть K — набор цветов, содержащий $\rho(b)$, i_0 и, возможно, еще какие-то цвета. Рассмотрим набор $J = (j_2, j_3, j_4, j_5, j_6)$, $J \cap K = \varnothing$, удовлетворяющий условию (1), а также следующим двум условиям.*

($J1$) Если все вершины множества $B \setminus \{u\}$ покрашены в раскраске ρ в один цвет, то ни j_2, ни j_5 не совпадают с этим цветом.

($J2$) Если вершины множества $B \setminus \{u\}$ в раскраске ρ покрашены в два различных цвета, то j_2 не совпадает ни с одним из этих двух цветов.

Пусть в результате применения алгоритма $DN(G', \rho, u, J)$ раскраска ρ изменится на раскраску ρ'. Тогда $\rho' \le_G \rho$, причем $\rho'(b) = \rho(b)$.

Доказательство. По с войствам алгоритма DN мы имеем $\rho' \le_{G'} \rho$. Так как $d_{G'}(b) \le 1$, то $\rho'(b) = \rho(b)$. Граф G отличается от G' добавлением ребер от b к вершинам из B.

Пусть x и y смежны в G, $\rho'(x) = \rho'(y)$, но $\rho(x) \ne \rho(y)$. Так как $\rho' \le_{G'} \rho$, то x и y несмежны в G', следовательно, можно положить $x = b$, $y \in B$. Ввиду того, что $s = \rho'(b) = \rho(b) \notin J$, а все изменившие цвет вершины перекрашены в процессе применения алгоритма в цвета из множества J, вершина y должна была изначально иметь цвет s то есть $\rho(b) = \rho'(b) = \rho'(y) = \rho'(y)$, противоречие. Следовательно, если вершины x и y смежны в графе G и $\rho'(x) = \rho'(y)$, то $\rho(x) = \rho(y)$.

Покажем, что в раскраске ρ' не появилось новых плохих вершин. Если рассматривать ρ' и ρ, как раскраски графа G', то по лемме 2 все плохие в ρ' вершины являются плохими и в ρ.

Рассмотрим теперь ρ' и ρ, как раскраски графа G. Если вершина x — плохая в ρ', но не плохая в ρ (как в раскрасках графа G), то x, очевидно, должна быть смежна в графах G и G' с разными наборами вершин, то есть нам достаточно проверить вершины из множества B и саму вершину b.

Проверка вершины b.

Рассмотрим вершину b. Если $\rho'(u) = \rho(u) = i_0$, то в $\mathrm{N}_G(b)$ есть вершина u цвета $i_0 \notin J$, а новых вершин цвета i_0 не добавилось. Это означает, что если b — плохая вершина в раскраске ρ' графа G, то все ее соседи имеют в ρ' цвет i_0, но тогда они имели такой же цвет и в раскраске ρ, то есть, вершина b и до перекрашивания была плохой.

Пусть $\rho'(u) = \nu^2(i_0) = j_2$. Предположим, что вершина b стала плохой в полученной раскраске ρ' графа G. Тогда все вершины из B оказались покрашены в ρ' в цвет j_2, но в цвет j_2 мы могли перекрасить только вершины цветов i_0 и j_5, причем ровно одна вершина цвета i_0 оказалась в результате перекрашена — это вершина u. Следовательно, в изначальной раскраске ρ вершины множества $B \setminus \{u\}$ были покрашены не более, чем в два цвета: j_2 и j_5. Рассмотрим два случая.

1. Пусть вершины множества $B \setminus \{u\}$ покрашены в ρ в один цвет. По условию $(J1)$, ни j_2, ни j_5 не совпадают с этим цветом. Следовательно, в раскраске ρ' ни одна из вершин множества $B \setminus \{u\}$ не будет покрашена в цвет j_2, противоречие.

2. Пусть вершины множества $B \setminus \{u\}$ покрашены в ρ в два цвета. Хотя бы один из этих двух цветов не совпадает с j_5, пусть это цвет ℓ и $\rho(x) = \ell$, где $x \in B \setminus \{u\}$. По условию $(J2)$ мы имеем $j_2 \neq \ell$. Тогда $\rho(x) \notin \{j_2, j_5\}$, следовательно, $\rho'(x) \neq j_2$, то есть, не все вершины множества $B \setminus \{u\}$ имеют в ρ' цвет j_2, противоречие.

Таким образом, вершина b может быть плохой вершиной в раскраске ρ' графа G только в случае, когда b — плохая вершина в раскраске ρ графа G.

Проверка множества B.

Рассмотрим любую вершину $x \in B$. Она смежна с вершиной b, причем $\rho'(b) = \rho(b)$. В раскраске ρ' вершин цвета $\rho(b)$ не добавляется, следовательно, если вершина x является плохой в раскраске ρ' графа G, то она является таковой и в раскраске ρ графа G. Таким образом, $\rho' \leq_G \rho$. $\square$

3 Построение динамической раскраски для графа без вершин степени 2

В настоящем разделе пусть G — связный граф без вершин степени 2, удовлетворяющий условию $\Delta(G) \leq d$, где $d \geq 8$ — целое число, причем G отличен от полного графа K_{d+1}. Раздел посвящен доказательству теоремы 1, то есть, построению в графе G динамической раскраски вершин в d цветов.

3.1 Алгоритм построения цепи. Общие принципы выбора вершин и начало построения

По теореме Брукса существует правильная раскраска ρ вершин графа G в d цветов. Предположим, что в раскраске ρ существует плохая вершина a. Пусть $\rho(a) = 0$, все вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ имеют цвет 1, а цвет 2 отличен от 0 и 1. Мы хотим изменить раскраску ρ на $\rho' \leq_G \rho$ так, что некоторые (но не все) вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ будут в ρ' иметь цвет 2, остальные же вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ не поменяют цвет. Тогда вершина a не будет плохой в раскраске ρ', следовательно, $\rho' <_G \rho$.

Положим $c(k) = 1$ при нечетном k и $c(k) = 2$ при четном k. Мы построим последовательность различных вершин $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$. У каждой вершины b_k будет определен ровно один *предок* $\mathrm{asc}(b_k)$, который будет смежной с b_k вершиной, пусть $\mathrm{N}'_G(b_k) = \mathrm{N}_G(b_k) \setminus \{\mathrm{asc}(b_k)\}$. Смысл построения будет похожим на классический метод чередующихся цепей: каждая следующая вершина b_{k+1} будет "запретом", мешающим перекрасить b_k в цвет $c(k+1)$. Однако, конструкция будет значительно более сложной, чем в классическом доказательстве теоремы Брукса.

Определение 7. Пусть $i \neq c(k)$.

1) Если существует вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ цвета $\rho(v) = i$, то назовем такую ситуацию *запретом типа 1 на цвет i* для вершины b_k.

2) Если вершина $u \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ является опасным соседом b_k и после изменения цвета вершины b_k на цвет i вершина u станет плохой, то назовем такую ситуацию *запретом типа 2 на цвет i* для вершины b_k, а вершину u — *базовой вершиной* этого запрета.

Замечание 7. У вершины b_k может быть несколько запретов типа 2 на цвет i с различными базовыми вершинами.

Перейдем к построению цепи. В качестве b_1 мы возьмем произвольную вершину из $\mathrm{N}_G(a)$, предком b_1 будет вершина $a_0 = a$. Для $k > 1$ вершина b_k будет удовлетворять следующим условиям:

— $\rho(b_k) = c(k)$;

— возможна одна из двух ситуаций:

либо b_{k-1} и b_k смежны, тогда $\mathrm{asc}(b_k) = b_{k-1}$, вершина $b_k \in \mathrm{N}'_G(b_{k-1})$ является запретом типа 1 на цвет $c(k)$ для вершины b_{k-1},

либо b_{k-1} и b_k несмежны, тогда $\mathrm{asc}(b_k) = a_{k-1} \neq b_{k-1}$, вершина $a_{k-1} \in \mathrm{N}'_G(b_{k-1})$ является базовой вершиной запрета типа 2 на цвет $c(k)$ для вершины b_{k-1}, $b_k \in \mathrm{N}_G(b_{k-1})$.

Определение 8. Последовательность вершин $b_1, \ldots, b_p$, построенную для раскраски ρ в соответствии с указанными принципами, мы назовем *цепью запретов* в раскраске ρ.

Замечание 8. Если $\mathrm{asc}(b_k) = a_{k-1} \neq b_{k-1}$, то вершина a_{k-1} смежна и с b_{k-1}, и с b_k, следовательно, $\rho(a_{k-1}) \notin \{c(k-1), c(k)\} = \{1, 2\}$.

3.2 Условия $(C1)$ и $(C2)$

Пусть $b_1, \ldots, b_p$ — цепь запретов для раскраски ρ. Перед описанием шага алгоритма (выбора следующей вершины последовательности) мы сформулируем два важных условия и выясним ряд свойств цепи запретов, удовлетворяющей этим условиям.

$(C1(p))$ При всех $i \in \{1, \ldots, p\}$ существует единственный запрет на цвет $c(i+1)$ для вершины b_i.

$(C2(p))$ Пусть $i \in \{1, \ldots, p\}$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_i)$, все соседи v покрашены в цвета 1 и 2. Тогда v — базовая вершина запрета типа 2 на цвет $c(i+1)$ для вершины b_i.

Следующие три леммы покажут возможности для изменения цветов вершин цепи запретов. Мы будем применять эти леммы для доказательства корректности шагов построения.

Лемма 4. *Пусть $b_1, \ldots, b_s$ — цепь запретов для раскраски ρ, удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$. Рассмотрим новую раскраску ρ', в которой $\rho'(b_i) = c(i+1)$ для $i \in \{1, \ldots, s\}$, а цвета остальных вершин такие же, как в раскраске ρ. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если вершины u и v смежны и $\rho'(v) = \rho'(u)$, то либо $u = b_s$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$ и $\rho'(v) = \rho(v) = c(s+1)$, либо $v = b_s$, $u \in \mathrm{N}'_G(b_s)$ и $\rho'(u) = \rho(u) = c(s+1)$.*

2) *В раскраске ρ' вершина a не является плохой.*

3) *Если вершина v — плохая в ρ', но не плохая в ρ, то $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$, причем в раскраске ρ вершина v — базовая вершина запрета типа 2 на цвет $c(s+1)$ для вершины b_s.*

Доказательство. 1) Пусть вершины u и v смежны и $\rho'(v) = \rho'(u)$. Так как $\rho(v) \neq \rho(u)$ в силу правильности раскраски ρ, то хотя бы одна из этих двух вершин должна быть перекрашена. Не умаляя общности, пусть это $u = b_i$, мы перекрасили ее из цвета $c(i)$ в цвет $c(i+1)$.

Пусть $v = \mathrm{asc}(b_i)$. В случае, когда $\mathrm{asc}(b_i) = a_{i-1} \neq b_{i-1}$, мы имеем $\rho'(a_{i-1}) = \rho(a_{i-1}) \notin \{1, 2\}$, следовательно, $\rho'(a_{i-1}) \neq \rho'(b_i)$, что делает невозможным случай $u = b_i$, $v = a_{i-1}$. Так как $\rho'(b_{i-1}) = c(i) \neq c(i+1) = \rho'(b_i)$, случай $u = b_i$, $v = b_{i-1}$ также невозможен.

Таким образом, $v \neq \mathrm{asc}(b_i)$ и остается рассмотреть случай $u = b_i$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_i)$. Пусть $i < s$. Тогда по условию $(C1(s-1))$ у вершины b_i могло быть не более двух соседей цвета $c(i+1)$ — это b_{i-1} и b_{i+1}. Обе эти вершины поменяли свой цвет, следовательно, $i = s$.

Итак, $u = b_s$, $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$, $\rho'(v) = \rho'(b_s) = c(s+1)$. Мы перекрашивали в цвет $c(s+1)$ только вершины цвета $c(s)$, а $\rho(v) \neq \rho(b_s) = c(s)$ в силу правильности раскраски ρ. Следовательно, $\rho(v) = \rho'(v) = c(s+1)$.

2) Докажим, что вершина a не является плохой в новой раскраске ρ'. В раскраске ρ все соседи вершины a имеют цвет 1. Вершина $b_1 \in \mathrm{N}_G(a)$ перекрашена в цвет $\rho'(b_1) = c(2) = 2$. Докажем, что $b_2, \dots, b_{s-1} \notin \mathrm{N}_G(a)$ — тогда в $\mathrm{N}_G(a)$ входит максимум две перекрашенные вершины (это b_1 и, возможно, b_s) и из $|\mathrm{N}_G(a)| = d_G(a) \geq 3$ следует, что в $\mathrm{N}_G(a)$ есть вершины цветов 1 и 2 в раскраске ρ', то есть a не является плохой вершиной в этой раскраске.

Предположим, что некоторые из вершин $b_2, \dots, b_{s-1}$ лежат в $\mathrm{N}_G(a)$. Пусть i $(1 < i < s)$ — наименьший такой номер, что $b_i \in \mathrm{N}_G(a)$. Предположим, что $a = \mathrm{asc}(b_i)$. Так как $\rho(a) \notin \{1, 2\}$, то $a \neq b_{i-1}$, но тогда по построению вершина a смежна с b_{i-1}, противоречие.

Остается случай $a \in \mathrm{N}'_G(b_i)$. Тогда по условию $(C2(s-1))$ вершина a должна быть базовой для запрета на цвет $c(i+1)$ для вершины b_i в раскраске ρ, однако плохая вершина a таковой быть очевидно не может: она не является опасным соседом b_i. Полученное противоречие завершает доказательство.

3) Предположим, что вершина v — плохая в ρ', но не плохая в ρ. Так как все цвета кроме 1 и 2 остались на своих местах, окрестность вершины v должна быть покрашена в цвета 1 и 2 в раскраске ρ. Кроме того, v должна быть смежна хотя бы с одной из перекрашенных вершин. Пусть $v \in \mathrm{N}_G(b_i)$, но $v \notin \mathrm{N}_G(b_j)$ при $j < i$. Рассмотрим несколько случаев.

a. Предположим, что $v \in \mathrm{N}'_G(b_i)$. Пусть $i < s$. По условию $(C2(s-1))$, тогда v — базовая вершина запрета на цвет $c(i+1)$ для вершины b_i. В этом случае по построению вершина b_{i+1} смежна с $v = \mathrm{asc}(b_{i+1})$. Однако, мы перекрасили вершину b_{i+1} в отличный от $c(i+1)$ цвет, следовательно, вершина v не могла стать плохой.

Пусть $i = s$. Тогда вершина v не смежна с другими перекрашенными вершинами $b_1, \dots, b_{s-1}$, следовательно, все вершины из $\mathrm{N}_G(v) \setminus \{b_s\}$ в раскраске ρ имеют цвет $c(s+1)$. Таким образом, v — базовая вершина для запрета на цвет $c(s+1)$ для вершины b_s.

b. Пусть $v = \mathrm{asc}(b_i)$. Так как по выбору i вершина v не смежна с b_{i-1}, мы по постронию имеем $v = b_{i-1}$. Более того, вершина b_{i-1} не смежна ни с одной из вершин b_j где $j \leq i-2$.

Если b_{i-1} смежна с b_j и $j > i$, то $b_j \in \mathrm{N}'_G(b_{i-1})$, в этом случае из правильности исходной раскраски следует $\rho(b_j) = \rho(b_i) = c(i)$, но тогда у вершины b_{i-1} как минимум два запрета типа 1 на цвет $c(i+1)$, что противоречит условию $C1(s-1)$. Таким образом, b_{i-1} смежна ровно с одной перекрашенной вершиной b_i, для которой

$$\rho'(b_i) = c(i+1) = c(i-1) = \rho(b_{i-1}).$$

Остальные вершины из $\mathrm{N}_G(b_{i-1})$ имеют в раскрасках ρ и ρ' один и тот же цвет, следовательно, в силу правильности раскраски ρ не могут быть покрашены в цвет $\rho(b_{i-1})$. Таким образом, вершина $v = b_{i-1}$ не является плохой в раскраске ρ'. $\square$

Лемма 5. *Пусть $b_1, \dots, b_s$ — цепь запретов для раскраски ρ, удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$, а у вершины b_s нет запрета на цвет $c(s+1)$. Тогда существует такая раскраска ρ' вершин графа G, что $\rho' <_G \rho$.*

Доказательство. Рассмотрим раскраску ρ', полученную из ρ следующей перекраской вершин: для всех i от 1 до s перекрасим вершину b_i в цвет $c(i+1)$.

Предположим, что в раскраске ρ' появилась пара смежных одноцветных вершин. По лемме 4, одна из них — это b_s, изменившая свой цвет на $c(s+1)$, а вторая — вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_s)$, причем $\rho'(v) = \rho(v) = c(s+1)$, то есть, вершина v накладывала в раскраске ρ запрет типа 1 на цвет $c(s+1)$ для вершины b_s, что противоречит предположению.

Предположим, что в раскраске ρ' появилась плохая вершина v. По лемме 4, тогда $v \in \mathrm{N}_G(b_s)$, причем v является в раскраске ρ базовой для запрета типа 2 на цвет $c(s+1)$, что противоречит предположению.

В силу леммы 4 теперь можно утверждать, что $\rho' <_G \rho$. $\square$

Лемма 6. *Пусть $b_1, \dots, b_s$ — цепь запретов для раскраски ρ, удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$. Пусть раскраска $\rho' \leq_G \rho$ такова, что все вершины из $\mathrm{N}_G(a) \setminus \{b_1\}$ в раскраске ρ' имеют такой же цвета, как и в ρ — цвет 1, а для любой вершины $v \in V(G)$ из $\rho'(v) \in \{1, 2\}$ следует $\rho'(v) = \rho(v)$. Тогда выполняется одно из двух утверждений.*

1° *Последовательность $b_1, \dots, b_s$ — цепь запретов для раскраски ρ', удовлетворяющая условиям $(C1(s-1))$ и $(C2(s-1))$.*

2° *Существует раскраска $\rho'' <_G \rho$.*

Доказательство. Так как любая вершина v цвета 1 или 2 в раскраске ρ' имеет такой же цвет в раскраске ρ, то любой запрет на цвет $c(i+1) \in \{1,2\}$ для вершины b_i накладывается теми же вершинами цвета $c(k+1)$, что и в раскраске ρ. Отсюда же следует, что последовательность $b_1, \dots, b_s$ удовлетворяет условию $(C2(s-1))$.

Пусть условие $(C1(s-1))$ выполнено для раскраски ρ'. Тогда из сказанного выше следует, что все вершины $b_1, \dots, b_s$ сохранили свой цвет и эта последовательность является цепью запретов для раскраски ρ'.

Пусть условие $(C1(s-1))$ не выполнено для раскраски ρ'. Тогда существует такое $t \in \{1, \dots, s\}$, что в раскраске ρ' у вершины b_t нет запрета на цвет $c(t+1)$. Пусть t — наименьшее такое число. Докажем, что тогда все вершины $b_1, \dots, b_t$ покрашены в ρ и ρ' одинаково. Если $\rho'(b_1) \neq \rho(b_1)$, то вершина a не является плохой в раскраске ρ', следовательно $\rho' < \rho$ и утверждение леммы доказано. Если же $\rho'(b_\ell) \neq \rho(b_\ell) = c(\ell)$, где $1 < \ell \leq t$, то по построению у вершины $b_{\ell-1}$ нет запрета на цвет $c(\ell)$, что противоречит минимальности t.) Тогда для раскраски ρ' выполняются условия $(C1(t-1))$ и $(C2(t-1))$. По лемме 5 для $s = t$ существует раскраска ρ'' такая, что $\rho'' <_G \rho' \leq_G \rho$. □

3.3 Шаг алгоритма: выбор вершины b_k

Итак, пусть уже выбраны вершины $b_1, \dots, b_{k-1}$ (где $k \geq 2$), причем все эти вершины различны, $\rho(b_i) = c(i)$ для всех $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Цепь запретов будет строиться так, что перед началом k-го шага алгоритма (то есть, шага выбора вершины b_k) выполнены условия $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$.

По условию $(C1(k-1))$, у вершины b_{k-1} ровно один запрет на цвет $c(k)$. Рассмотрим этот запрет. Если это запрет типа 1, то существует единственная вершина $u \in \mathrm{N}'_G(b_{k-1})$, покрашенная в цвет $c(k)$. В этом случае положим $b_k = u$, $\mathrm{asc}(b_k) = b_{k-1}$.

Пусть у вершины b_{k-1} есть запрет типа 2 на цвет $c(k)$, а v — базовая вершина этого запрета. Тогда все отличные от b_{k-1} вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ покрашены в цвет $c(k)$, возьмем в качестве b_k любую из этих вершин и положим $\mathrm{asc}(b_k) = a_{k-1} = v$.

В случае, когда вершина b_k совпала с одной из ранее выбранных вершин, алгоритм завершит работу. Если же вершины $b_1, \dots, b_k$ различны, то либо мы добьемся выполнения условий $(C1(k))$ и $(C2(k))$, либо алгоритм завершит работу, изменив исходную раскраску ρ на такую раскраску ρ', что $\rho' <_G \rho$.

3.3.1 Повтор вершины

Предположим, что $b_k = b_t$ где $t < k$. Напомним, что все вершины $b_1, \dots, b_{k-1}$ различны. Рассмотрим следующую раскраску ρ': для всех i от 1 до $k-1$ положим $\rho'(b_i) = c(i+1)$, на остальных вершинах v положим $\rho'(v) = \rho(v)$. Отметим, что для раскраски ρ выполнены условия $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$, следовательно, раскраска ρ' удовлетворяет условиям леммы 4 для $s = k-1$. Мы покажем, что раскраска ρ' — правильная и $\rho' <_G \rho$.

Предположим, что в раскраске ρ' появилась пара смежных одноцветных вершин. По лемме 4, одна из них — это b_{k-1}, изменившая свой цвет на $c(k)$, а вторая вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_{k-1})$, причем $\rho'(v) = \rho(v) = c(k)$, то есть, вершина v накладывала в раскраске ρ запрет типа 1 на цвет $c(k)$ для вершины b_{k-1}. По построению это означает, что $v = b_k = b_t$, но эта вершина перекрашена в цвет $c(t+1) = c(k+1)$. По лемме 4 получаем, что раскраска ρ' — правильная.

Предположим, что в раскраске ρ' появилась плохая вершина v. По лемме 4, $v = a_{k-1}$ и все вершины из $\mathrm{N}_G(a_{k-1}) \setminus \{b_{k-1}\}$ имеют в раскраске ρ' цвет $c(k)$. Однако, по построению a_{k-1} смежна с $b_k = b_t$, а $\rho'(b_t) = c(t+1) = c(k+1) \neq c(k)$. Тогда $b_t, b_{k-1} \in \mathrm{N}_G(v)$ имеют разный цвет в раскраске ρ', противоречие.

В силу леммы 4 теперь можно утверждать, что $\rho' <_G \rho$. Алгоритм останавливается.

Итак, теперь можно считать, что все вершины $b_1, \dots, b_{k-1}, b_k$ различны, что мы и будем использовать на следующих этапах алгоритма.

3.3.2 Приведение в порядок окрестности вершины b_k

Мы хотим добиться того, чтобы выполнялсь одно из двух условий:

$(R1)$ у вершины b_k ровно один запрет на цвет $c(k+1)$;

$(R2)$ у вершины b_k нет запрета на какой-то цвет $i \neq c(k)$.

Если выполнится условие $(R1)$, то, очевидно, выполнится и $(C1(k))$. В этом случае мы проверим выполнение условия $(C2(k))$. Если это условие выполняется, то алгоритм перейдет к следующему шагу (выбору вершины b_{k+1}), а в противном случае завершит работу.

В случае, когда выполнится условие $(R2)$, алгоритм перейдет к разделу 3.3.3, в котором обязательно завершит работу. С помощью алгоритма DN мы будем изменять раскраску так, чтобы выполнилось одно из условий $(R1)$ и $(R2)$. Перейдем к детальному описанию наших действий.

Положим $B = \mathrm{N}'_G(b_k)$. Каждая вершина $u \in B$, являющаяся базовой для какого-либо запрета типа 2, дает два запрета на цвет для b_k: это цвет $\rho(u)$ и цвет запрета типа 2, поэтому общее количество запретов может быть более $d-1$.

3.3.2.1. Плохие вершины в $\mathrm{N}'_G(b_k)$.

Пусть $x \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ — плохая вершина, причем $\rho(x) = c(k+1)$. Тогда, так как $b_k \in \mathrm{N}_G(x)$, все вершины из $\mathrm{N}_G(x)$ имеют цвет $\rho(b_k) = c(k)$. Отметим, что $\{c(k), c(k+1)\} = \{1, 2\}$. Рассмотрим любое множество цветов $J = \{j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$, не содержащее цветов 1 и 2, и изменим раскраску ρ с помощью алгоритма $DN(G, \rho, x, J)$. В результате получится раскраска $\rho' \leq_G \rho$, причем либо $\rho(x) = j_2 \notin \{1, 2\}$, либо вершина x не является плохой в раскраске ρ'. Во втором случае мы имеем $\rho' <_G \rho$ и алгоритм останавливается, в первом случае мы продолжим с другими плохими вершинами из $\mathrm{N}'_G(b_k)$, если такие есть. В результате либо алгоритм остановится, либо получится раскраска $\rho^* \leq_G \rho$, удовлетворяющая следующим условиям:

— любая плохая в раскраске ρ^* вершина $u \in \mathrm{N}'_G(b_k)$ будет иметь цвет $\rho^*(u) \neq c(k+1)$;

— если $\rho^*(x) \in \{1, 2\}$, то $\rho^*(x) = \rho(x)$.

3.3.2.2. Множество допустимых раскрасок.

3.3.2.2.1. Склеивание цветов 1 и 2.

Построим по раскраске ρ^* новую раскраску ρ^*_I, объединив цвета 1 и 2 в один цвет I. Раскраска ρ^*_I вполне может оказаться неправильной, но для любых двух одноцветных в ρ^*_I смежных вершин одна из них имеет в раскраске ρ^* цвет 1, а другая — цвет 2. Любая плохая в ρ^*_I вершина v в исходной раскраске ρ^* либо является плохой, либо все вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ имеют в раскраске ρ^* цвета 1 и 2.

3.3.2.2.2. Множество раскрасок $\mathcal{D}_I$. Изначально положим $\mathcal{D} = \{rho^*\}$, $\mathcal{D}_I = \{\rho^*_I\}$. Пусть G' — граф, полученный из G удалением всех ребер, соединяющих b_k с вершинами из B.

Рассмотрим произвольную раскраску $\rho^1_I \in \mathcal{D}_I$. Пусть $U(\rho^1_I)$ — множество, состоящее из плохих в раскраске ρ^1_I графа G' вершин множества B, а $T(\rho^1_I) = B \setminus U(\rho^1_I)$. Пусть $u \in U(\rho^1_I)$. Отметим, что $d_G(u) \geq 3$ для любой вершины $u \in U(\rho^1_I)$, следовательно, $d_{G'}(u) \geq 2$. Это обстоятельство дает применить к вершине u алгоритм DN. Пусть $J = \{j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$ — произвольный набор цветов, не содержащий I и удовлетворяющий условиям (1), $(J1)$ и $(J2)$ для вершины u, графа G' и раскраски ρ^1_I. Рассмотрим раскраску ρ^2_I, полученную из ρ^1_I в результате применения алгоритма $DN(G', \rho^1_I, u, J)$. Отметим, что $\rho^2_I \leq_{G'} \rho^1_I$, следовательно, $U(\rho^2_I) \subseteq U(\rho^1_I)$. По лемме 3 мы имеем $\rho^2_I \leq_G \rho^1_I$. Поместим раскраску ρ^2_I в множество $\mathcal{D}_I$.

В несколько шагов построим множество допустимых раскрасок $\mathcal{D}_I$, применяя всевозможные указанные процедуры к раскраскам, уже находящимся в $\mathcal{D}_I$. Из конечности множества раскрасок следует конечность построения. Отметим, что для любой раскраски $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$ по построению выполняются свойства

$$\rho'_I \leq_G \rho^*_I, \quad ,U(\rho'_I) \subseteq U(\rho^*_I).$$

Кроме того, в процессе перекрашиваний не добавлялись новые вершины цвета I, поэтому из $\rho'_I(v) = I$ следует $\rho^*_I(v) = I$.

3.3.2.2.3. Расклеивание цвета I. Множество раскрасок $\mathcal{D}$. Рассмотрим произвольную раскраску $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$. Построим новую раскраску ρ' следующим образом. Для любой вершины v такой, что $\rho'_I(v) = I$ нам известно, что $\rho^*_I(v) = I$. Тогда положим $\rho'(v) = \rho^*(v)$. Таким образом, мы "расклеили" цвет I обратно в цвета 1 и 2.

Нам известно, что $\rho'_I \leq_G \rho^*_I$. Так как новых вершин цвета I не добавилось, а при расклеивании цветов мы покрасили вершины цвета I в цвета 1 и 2 в раскраске ρ' так же, как и в ρ, то $\rho' \leq_G \rho^* \leq_G \rho$, следовательно, ρ' — правильная раскраска вершин графа G.

Поместим раскраску ρ' в *множество допустимых раскрасок* $\mathcal{D}$. Раскраски множества $\mathcal{D}$ будем называть *допустимыми*. Далее мы всегда будем считать, что раскраски $\rho' \in \mathcal{D}$ и $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$ соответствуют друг другу, то есть, переходят друг в друга при склеивании цветов 1 и 2 в цвет I и описанной выше обратной операции.

Пусть $\rho' \in \mathcal{D}$. Отметим, что для любой вершины v из $\rho'(v) \in \{1, 2\}$ следует $\rho'(v) = \rho^*(v) = \rho(v)$. Следовательно, раскраска ρ' удовлетворяет условию $(C2(k-1))$.

3.3.2.2.4. Свойства допустимых раскрасок.

Мы докажем, что в случае, когда не выполняются два следующих свойства алгоритм останавливается, предъявляя раскраску $\rho'' <_G \rho$.

1) *В любой допустимой раскраске все вершины множества* $\mathrm{N}_G(a)$ *покрашены так же, как и в* ρ *— в цвет* 1.

Доказательство. Предположим, что существуют такие вершина $v \in \mathrm{N}_G(a)$ и раскраска $\rho' \in \mathcal{D}$, что $\rho'(v) \neq \rho(v) = \rho^*(v) = 1$.

Отметим, что тогда $\rho'_I(v) \neq \rho^*_I(v) = I$. Мы изменили раскраску вершин ρ^*_I на раскраску ρ'_I в несколько шагов, каждый шаг состоял в применении одного алгоритма DN с множеством цветов $J \not\ni I$. По пункту 3 замечания 6 за каждое применение алгоритма DN максимум одна вершина цвета I могла изменить цвет. Все вершины из $\mathrm{N}_G(a)$ имеют в раскраске ρ^*_I цвет I. Рассмотрим первый шаг перекраски, после которого изменился цвет одной из вершин множества $\mathrm{N}_G(a)$, пусть это вершина x. Пусть в результате этого шага получена раскраска $\rho^1_I \in \mathcal{D}_I$. Тогда $\rho^1 \leq_G \rho^* \leq_G \rho$.

Вершина a не является плохой в раскраске ρ^1 (у нее в ρ^1 ровно один сосед цвета, отличного от 1 — вершина x), следовательно, $\rho^1 <_G \rho$. Алгоритм останавливается. $\square$

2) *Для любой раскраски $\rho' \in \mathcal{D}$ цвета вершин $b_1, \ldots, b_{k-1}$ в раскрасках ρ' и ρ одинаковы, последовательность $b_1, \ldots, b_k$ —цепь запретов в раскраске ρ', удовлетворяющая условиям $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$.*

Доказательство. По доказанному выше, для раскраски ρ' и $s = k$ выполняются все требования леммы 6. Тогда либо выполняется доказываемое свойство, либо существует раскраска $\rho'' <_G \rho$. В последнем случае алгоритм останавливается. $\square$

3) *Пусть $\rho'_I \in \mathcal{D}_I$, $u \in U(\rho'_I)$, причем $\rho'_I(u) = I$. Тогда вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$ имеют в раскраске ρ'_I цвет, отличный от I.*

Доказательство. Все вершины множества $\mathrm{N}_{G'}(u)$ имеют в раскраске ρ'_I один и тот же цвет i_1. Предположим, что $i_1 = I$. Так как цвет I образован при склеивании цветов множества $\{1, 2\} = \{c(k), c(k+1)\}$, в силу правильности раскраски ρ' и смежности u с вершиной b_k цвета $\rho'(b_k) = c(k)$ мы имеем $\rho'(u) = c(k+1)$. Тогда цвет всех вершин из $\mathrm{N}_G(u)$ в раскраске ρ' — это $c(k+1)$. Однако, после выполнения пункта 3.3.2.1 таких вершин не было и не появилось в процессе последующих перекрашиваний, так как не добавлялись новые вершины цветов 1 и 2. $\square$

3.3.2.3. Минимальная допустимая раскраска.
В множестве раскрасок $\mathcal{D}_I$ выберем раскраску ρ'_I, для которой $|U(\rho'_I)|$ минимально. Определим набор цветов $C(\rho'_I)$ следующим образом: для каждой вершины $u \in U(\rho'_I)$ поместим в $C(\rho'_I)$ цвет, в который покрашены все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$, а для каждой вершины $t \in T(\rho'_I)$ поместим в C ее цвет $\rho'_I(t)$. Таким образом, получился набор не более чем из $d-1$ цвета. Рассмотрим два случая.

3.3.2.3.1. В наборе $C(\rho'_I)$ не менее двух раз встречается цвет I.
Так как $|C(\rho'_I)| \leq d-1$, а количество цветов равно $d-1$, то в этом наборе не встречается один из цветов $i \neq I$. Постараемся избавить от цвета i вершины множества $U(\rho'_I)$. Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — все вершины множества $U(\rho'_I)$, имеющие в раскраске ρ'_I цвет i. Рассмотрим очередную вершину u_s, пусть $i_0 = \rho_I(u_s) = i$, а i_1 — цвет всех вершин из $\mathrm{N}_{G'}(u_s)$. Положим $K = \{I, i\}$.

Подбор цветов для алгоритма DN.

Выберем набор $J = \{j_2, j_3, j_4, j_5, j_6\}$ из не входящих в K цветов так, чтобы соблюдались условия (1), $(J1)$ и $(J2)$.

Сначала подберем цвет j_2. Он должен отличаться от i_1, и, возможно, еще двух цветов (если среди вершин множества $B \setminus \{u_s\}$ встречается не более, чем два цвета, то по условиям $(J1)$ и $(J2)$ цвет j_2 не может быть одним из них). Итого мы имеем не более трех запретов на цвета, не входящие в K. Отметим, что в любом случае мы получим $j_2 \neq i_0$, так как $i_0 = i \in K$.

Следующим мы выберем цвет j_5. По условию (1) он должен отличаться от цветов i_1 и j_2. Если все вершины множества $B \setminus \{u_s\}$ покрашены в один цвет, то j_5 по условию $(J1)$ не может совпадать с этим цветом. Итого мы имеем не более трех запретов на цвета, не входящие в K.

Цвет j_3 должен быть отличен от i_1, j_2 и j_5, цвет j_4 должен быть отличен от i_1, j_2, j_3 и j_5 и, наконец, цвет j_6 должен быть отличен от j_2, j_3, j_4 и j_5. Очевидно, для такого подбора цветов достаточно, чтобы количество цветов, не входящих в K, было не менее 5. Таким образом, нам достаточно 8 цветов в исходном наборе (до "склеивания" цветов 1 и 2).

Теперь граф G', вершина u_s, раскраска ρ'_I и наборы цветов J и K удовлетворяют условиям леммы 3.

Уничтожение цвета i среди вершин множества B.
Выполним алгоритм $DN(G', \rho'_I, u_s, J)$, пусть в результате получится раскраска $\rho''_I \in \mathcal{D}_I$, по лемме 3 мы имеем $\rho''_I \leq_G \rho'_I$.

Отметим, что $\rho''_I(u_s) \neq \rho'_I(u_s) = i$ и $U(\rho''_I) = U(\rho'_I)$. В самом деле, как доказано в разделе 3.3.2.2.2, $U(\rho''_I) \subseteq U(\rho'_I)$, но строгое включение невозможно ввиду минимальности $U(\rho'_I)$. Если же $\rho''_I(u_s) = \rho'_I(u_s) = i$ то по замечанию 3 вершина u_s не является плохой в полученной раскраске ρ'' графа G', следовательно, $U(\rho''_I) \subset U(\rho'_I) \setminus \{u_s\}$, противоречие.

Так как новых вершин цвета i не добавилось, то количество вершин цвета i в $U(\rho''_I)$ меньше, чем в $U(\rho'_I)$ и ни одна из вершин множества $T(\rho''_I)$ не покрашена в цвет I. Таким образом мы за несколько шагов найдём такую раскраску $\rho^1_I \in \mathcal{D}_I$, что в множестве $U(\rho^1_I)$ нет вершин цвета I и в наборе $C(\rho^1_I)$ нет цвета I. Тогда в раскраске ρ^1 у вершины b_k нет запретов на цвет i. В этом случае алгоритм переходит к разделу с раскраской ρ^1 к разделу 3.3.3, где обязательно завершит работу.

3.3.2.3.2. В наборе $C(\rho'_I)$ не более одного раза встречается цвет I.
Пусть $u \in U(\rho'_I)$, $\rho'_I(u) = I$. Все вершины множества $\mathrm{N}_{G'}(u)$ имеют в раскраске ρ'_I цвет i_1, причем выше мы доказали, что $i_1 \neq I$. Аналогично пункту 3.3.2.3.1 мы с помощью применения серии алгоритмов DN изменим раскраску ρ'_I на $\rho^1_I \in \mathcal{D}_I$ так, чтобы никакая вершина множества $U(\rho^1_I)$ не была покрашена в цвет I и в наборе $C(\rho^1_I)$ было ровно одно

вхождение цвета I. (Единственное отличие состоит в отсутствии необходимости запрещать для набора цветов J цвет i, поэтому теперь хватит семи цветов.)

Проверка условий $(C1(k))$ **и** $(C2(k))$**.**
Напомним, что для раскраски $\rho^1 \in \mathcal{D}$ выполнены условия $(C1(k-1)$ и $(C2(k-1))$. Остается доказать лишь выполнение условий для вершины b_k.

Каждый запрет типа 1 на цвет $c(k+1)$ для вершины b_k в раскраске ρ^1 соответствует вершине $x \in T(\rho^1_I)$ цвета $\rho^1_I(x) = I$. Каждый запрет типа 2 на цвет $c(k+1)$ имеет базовую вершину $u \in U(\rho^1_I)$, для которой все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(u)$ покрашены в ρ^1_I в цвет I. Таким образом, каждый запрет на цвет $c(k+1)$ для вершины b_k в раскраске ρ^1 соответствует вхождению в набор $C(\rho^1_I)$ цвета I. Поскольку такое вхождение единственно, то и запрет не более чем один.

Если запрет на цвет $c(k+1)$ для вершины b_k в раскраске ρ^1 существует, то выполнено условие $C1(k)$. Если же у вершины b_k нет запретов на цвет $c(k+1)$, то применив для $s = k$ и раскраски ρ^1 лемму 5 мы получим, что существует такая раскраска ρ^2, что $\rho^2 <_G \rho^1 \leq_G \rho$. В этом случае алгоритм останавливается.

Предположим, что не выполняется условие $C2(k)$. Тогда существует такая вершина $v \in \mathrm{N}'_G(b_k)$, что все вершины из $\mathrm{N}_G(v)$ покрашены в ρ^1_I в цвета 1 и 2, но v не является базовой вершиной запрета типа 2 для вершины b_k. Понятно, что $v \in U(\rho^1_I)$ и все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(v)$ имеют в раскраске ρ^1_I цвет I, то есть, вершине v соответствует вхождение цвета I в набор $C(\rho^1_I)$, не соответствующее запрету на цвет $c(k+1)$ для вершины b_k. В этом случае запретов на цвет $c(k+1)$ для вершины b_k в раскраске ρ^1 нет и алгоритм, как объяснено выше, закончит свою работу.

3.3.3 Отсутствие запрета на цвет $i \neq c(k+1)$

Итак, переходим к последнему оставшемуся случаю, когда у вершины b_k нет запрета на цвет $i \notin \{1, 2\}$. Однако, это вовсе не означает, что b_k можно перекрасить в цвет i: этому может помешать предок вершины b_k. Имеющуюся на данный момент раскраску будем обозначать через ρ. Мы знаем, что $\rho^1 \leq_G \rho$. Нашей целью будет завершение работы алгоритма. Рассмотрим два случая.

3.3.3.1. $\mathrm{asc}(b_k) = b_{k-1}$.
В этом случае $\rho(b_{k-1}) = c(k-1) \neq i$, так что раскраска останется правильной и после перекрашивания b_k в цвет i, однако, вершина b_{k-1} может стать плохой: в том случае, если b_{k-1} — опасный сосед b_k и все вершины

из $\mathrm{N}_G(b_{k-1}) \setminus \{b_k\}$ имеют цвет i. В этом случае рассмотрим граф G', полученный из G удалением всех ребер от b_k к ее соседям. В этом графе b_{k-1} — плохая вершина. Положим $i_0 = \rho(b_{k-1}) = c(k-1)$, $i_1 = i$ — цвет всех вершин из $\mathrm{N}_{G'}(b_{k-1})$. Положим $K = \{1, 2, i\}$. Построим подходящий для применения леммы 3 набор цветов J. Как и в пункте 3.3.2.3.1, для построения достаточно восьми цветов. Пусть ρ' — раскраска, полученная в результате применения алгоритма $DN(G', \rho, b_{k-1}, J)$. По лемме 3 мы имеем $\rho' \leq_G \rho$. Отметим, что новых запретов на цвета 1,2, i в раскраске ρ' не добавилось. Единственной вершиной цвета 1 и 2, которая в процессе могла изменить свой цвет, является вершина b_{k-1}. Тогда для раскраски ρ' и $s = k$ выполнены все требования леммы 6 и либо существует раскраска $\rho'' <_G \rho$ (в этом случае алгоритм останавливается), либо для раскраски ρ' последовательность $b_1, \ldots, b_k$ — цепь запретов, удовлетворяющая условиям $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$.

Рассмотрим второй случай. Так как $\rho'(b_{k-1}) = \rho(b_{k-1})$, ввиду замечания 3 вершина b_{k-1} перестала быть плохой в графе G', то есть, вершина b_k перестала быть опасным соседом b_{k-1} в графе G. Запретов на цвет i для вершины b_k не добавилось и мы теперь можем перекрасить вершину b_k в цвет i. В результате у вершины b_{k-1} в полученной раскраске ρ'' нет запрета на цвет $c(k)$ (изменив цвет b_k, мы убрали существоваший ранее единственный запрет, а новых не появилось) и $\rho'' \leq_G \rho' \leq_G \rho$. Отметим, что для раскраски ρ'' последовательность $b_1, \ldots, b_{k-1}$ — цепь запретов, удовлетворяющая условиям $(C1(k-2)$ и $(C2(k-2))$, поэтому применив лемму 5 для $s = k-1$ и раскраски ρ'', мы получим, что существует раскраска ρ_1 такая, что $\rho_1 <_G \rho'' \leq_G \rho$. Алгоритм останавливается.

3.3.3.2. $\mathrm{asc}(b_k) = a_{k-1} \neq b_{k-1}$.

По построению, b_{k-1} является единственной вершиной отличного от $c(k)$ цвета в $\mathrm{N}_G(a_{k-1})$ и $d_G(a_{k-1}) \geq 3$, следовательно, a_{k-1} не может быть опасным соседом b_k. Однако, вершина a_{k-1} может иметь цвет i, тогда перекрашивание b_k в цвет i нарушит правильность раскраски. Пусть граф G' получен из G удалением всех ребер от b_{k-1} к ее соседям, в этом графе a_{k-1} — плохая вершина. Как и в предыдущем пункте, положим $K = \{1, 2, i\}$, аналогично определим набор цветов J и изменим раскраску на ρ' с помощью алгоритма $DN(G', \rho, a_{k-1}, J)$. По лемме 3 мы имеем $\rho' \leq_G \rho$. Отметим, что новых запретов на цвета 1,2, i не добавилось. Аналогично, останется рассмотреть случай, когда $b_1, \ldots, b_k$ — цепь запретов в раскраске ρ', удовлетворяющая условиям $(C1(k-1))$ и $(C2(k-1))$.

Тогда, в частности, сохранили свой цвет все вершины из $\mathrm{N}_{G'}(a_{k-1}) = \mathrm{N}_G(a_{k-1}) \setminus \{b_{k-1}\}$: иначе у вершины b_{k-1} исчез запрет типа 2 на цвет $c(k)$. Следовательно, $\rho'(a_{k-1}) \neq \rho(a_{k-1}) = i$ ввиду замечания 3. Так как у вершины b_k не добавилось запретов на цвет i, мы можем перекрасить b_k в цвет i, не нарушив правильности раскраски и не создавая новых плохих вершин. Мы получили новую раскраску $\rho'' \le_G \rho$, в которой у вершины b_{k-1} нет запрета на цвет $c(k)$. Отметим, что для раскраски ρ'' последовательность $b_1, \dots, b_{k-1}$ — цепь запретов, удовлетворяющая условиям ($C1(k-2)$ и ($C2(k-2)$)), поэтому применив лемму 5 для $s = k-1$ и раскраски ρ'', мы получим, что существует раскраска ρ_1 такая, что $\rho_1 <_G \rho'' \le_G \rho$. Алгоритм останавливается.

3.4 Выводы

Доказательство теоремы 1. Итак, рассмотрим правильную раскраску ρ с минимальным количеством плохих вершин, и предположим, что a — плохая в ρ вершина. Тогда запустим алгоритм построения цепи запретов с началом в плохой вершине a. Доказано, что вершины в цепи не могут повторяться. Это в силу конечности графа означает, что в некоторый момент алгоритм остановится и мы получим раскраску $\rho' <_G \rho$, что противоречит выбору ρ. Единственная остающаяся возможно заключается в отсутствии плохих вершин в раскраске ρ. Но тогда эта раскраска является динамической. □

4 Доказательство основной теоремы

Напомним, что при $n \ge 4$ *подразбиением* полного графа K_n мы называем любой граф H, полученный из полного графа K_n следующей операцией: заменой нескольких ребер графа K_n на цепочки длины 2 (с каждой такой цепочкой добавляется одна новая вершина степени 2). Вершины графа H, являющиеся вершинами исходного полного графа, назовем *главными*, а добавленные вершины степени 2 — *реберными*.

Пусть класс графов $\mathcal{K}_n$ состоит из полного графа K_n и всех его подразбиений.

Лемма 7. *Для графа $H \in \mathcal{K}_{d+1}$ выполняются следующие утверждения.*

1) $\chi_2(H) = d + 1$.

2) *Пусть $H \ne K_{d+1}$, $t \in V(H)$ — реберная вершина. Тогда можно построить правильную раскраску вершин графа H в d цветов, в которой условие о наличии хотя бы двух разных цветов в окрестности вершины будет соблюдаться для всех вершин, кроме t.*

Доказательство. 1) Отметим, что в динамической раскраске любые две главные вершины u и v графа H должны быть разноцветными: если они смежны, то это очевидно. Если u и v несмежны, то их соединяет путь длины два utv, где t — реберная вершина. Тогда $\mathrm{N}_H(t) = \{a, b\}$, следовательно, вершины u и v имеют разный цвет. Таким образом, $\chi_2(H) \geq d+1$.

Несложно построить динамическую раскраску вершин графа H в $d+1$ цвет: покрасим все главные вершины в разные цвета, после чего приступим к последовательной покраске реберных вершин. Рассмотрим очередную реберную вершину t, смежную с главными вершинами u и v. Вершину t нельзя красить в цвета вершин u и v. Кроме того, если вершина t — последняя непокрашенная вершина из $\mathrm{N}_H(u)$, а все остальные вершины множества $\mathrm{N}_H(u)$ покрашены в один цвет, то нельзя красить t в этот цвет. Аналогичный запрет на цвет для t может быть наложен из-за цветов соседей вершины v. Мы получаем не более четырех запретов на цвет t. Ввиду того, что количество цветов не менее 8, мы легко можем покрасить вершину t. Нетрудно видеть, что в итоге получится динамическая раскраска: цвета всех главных вершин изначально различные, поэтому вершины из окрестности любой реберной вершины будут разноцветными. О соблюдении условий для главных вершин мы заботились при покраске реберных вершин.

2) Пусть $\mathrm{N}_G(t) = \{a, b\}$, тогда a и b — две главные вершины графа H. Покрасим $d + 1$ главную вершину графа H в d цветов: вершины a и b будут покрашены в цвет 1, остальные вершины покрасим по одной в цвета $2, \ldots, d$. Способ покраски реберных вершин не изменится. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $d \geq 8$. Ввиду леммы 7 нам достаточно для любого граф G, ни одна из компонент связности которого не принадлежит классу $\mathcal{K}_{d+1}$ и $\Delta(G) \leq d$, доказать оценку $\chi_2(G) \leq d$. Мы докажем индукцией по количеству вершин в графе G существование динамической раскраски его вершин в d цветов. Очевидно, можно считать граф G связным, так как компоненты связности графа можно покрасить независимо.

Базу индукции составят случай графа без вершин степени 2, который проверен в теореме 1 и тривиальный случай графа, в котором все вершины имеют степень не более 2, который мы сейчас рассмотрим.

Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = 2$. Тогда G — это простой цикл C_n или простой путь P_n. При $n \leq 3$, очевидно, $\chi_2(C_n) = \chi_2(P_n) = n$. Легко видеть, что $\chi_2(P_n) = 3$ при $n > 3$ и $\chi_2(C_n) = 3$ при n кратном 3. Остается заметить, что $\chi_2(C_5) = 5$ и $\chi_2(C_n) = 4$ для всех $n > 3$, не кратных 3 и отличных от 5.

Индукционный переход.

Пусть $u \in V(G)$, $d_G(u) = 2$, $\mathrm{N}_G(u) = \{v, w\}$. Положим $G' = G - u$, если v и w смежны и $G' = G - u + vw$ в противном случае. Очевидно,

$\Delta(G') \le \Delta(G) \le d$, граф G' связен. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $G' \notin \mathcal{K}_{d+1}$. Тогда существует динамическая раскраска вершин графа G' в d цветов, причем $\rho(v) \ne \rho(w)$. Таким образом, две вершины из $\mathrm{N}_G(u)$ в раскраске ρ разноцветны.

Дополним раскраску до динамической раскраски графа G. Посмотрим, в какие цвета нельзя красить вершину u. Во-первых, это цвета $\rho(v)$ и $\rho(w)$. Во-вторых, все вершины из $\mathrm{N}_G(v) \setminus \{u\}$ могут быть покрашены в один цвет i — тогда должно вылняться условие $\rho(u) \ne i$. Еще один запрет может добавиться, если все вершины из $\mathrm{N}_G(w) \setminus \{u\}$ могут быть покрашены в один цвет. Итого мы имеем максимум четыре запрета. Поскольку количество цветов $d \ge 8$, мы можем покрасить вершину u, сделав раскраску вершин графа G динамической.

2. Предположим, что $G' \in \mathcal{K}_{d+1}$. Так как v и w — две смежные вершины графа G', то хотя бы одна из них является главной (пусть это v). Тогда $d_{G'}(v) = d \ge d_G(v)$, откуда немедленно следует, что $G' = G - u + vw$ (в случае $G' = G - u$ мы имеем $d_{G'}(v) = d_G(v) - 1$).

Пусть вершина w — главная. Тогда $G \in \mathcal{K}_{d+1}$, что по условию теоремы не так. Противоречие.

Следовательно, вершина w — рёберная. По пункту 2 леммы 7 существует “почти динамическая” раскраска ρ вершин графа G', в которой единственное нарушение условия динамичности будет в одноцветности соседей вершины w. Рассмотрим эту раскраску. Пусть $\mathrm{N}_{G'}(w) = \{a, v\}$ и $\rho(v) = \rho(a) = 1$, $\rho(w) = 2$. В графе G две главные вершины v и a оказываются соединены цепочкой из трех ребер $vuwa$. Перенесем цвета раскраски ρ на вершины графа G и дополним ее, положив $\rho(u) = 3$. Очевидно, получится динамическая раскраска вершин графа G. $\square$

Автор благодарен Н. В. Гравину за помощь в работе над статьей.

Список литературы

[1] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, “Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[2] О. Оре. *Теория графов.* Москва, “Наука", 1968. (Перевод с английского. O. Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[3] H. Hind, M. Molloy, B. Reed, *Colouring a graph frugally.*, Combinatorica 17(4) (1997) 469-482.

[4] B. Reed, *A strengthening of Brooks' theorem.*, J. Combin. Theory Ser. B 76 (1999), no. 2, 136–149.

[5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976.

[6] H.-J. Lui, B. Montgomery, H. Poon. *Upper bounds of dynamic chromatic number.* Ars Combinatoria 68 (2003), 193–201.

[7] N. V. Gravin. *Non-degenerate colorings in the Brooks' theorem.* PDMI Preprint 11'2007.