

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ИЗОМОРФНЫЙ ТИП ПРОСТРАНСТВ
ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ
КОНЕЧНЫМ СЕМЕЙСТВОМ
НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ.

С. В. Кисляков, Д. В. Максимов

*Санкт-Петербургское отделение
Математического института имени В. А. Стеклова
Российской академии наук,
skis@pDMI.ras.ru*

Санкт-Петербургский педагогический университет им. Герцена

ABSTRACT

*Рассматриваются пространство гладких функций на торе с суп-
нормой, порожденное конечным набором дифференциальных операторов с по-
стоянными коэффициентами и одного порядка, но не обязательно однородных. Доказывается, что если среди этих операторов есть два, старшие однородные компоненты которых непропорциональны, то такое пространство не будет изоморфно дополняемому подпространству пространства $C(K)$ ни для какого компакта K . В предыдущей работе авторов аналогичное утверждение было доказано в частном случае, когда все дифференциальные операторы из порождающего набора однородны.*

Ключевые слова: пространства гладких функций, изоморфизмы, теорема вложения, теорема Гротендика. (Spaces of smooth functions, isomorphism, embedding theorem, Grothendieck theorem.)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов,
Л. Ю. Колотилина, В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина,
П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецевтаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

§1. ВВЕДЕНИЕ.

В этой заметке будет усилен главный результат работы [1]. Введем сначала необходимые определения.

Мы будем рассматривать только пространства функций, заданных на торе \mathbb{T}^2 . Основная теорема этой заметки (теорема 1 параграфа 4) распространяется и на торы высших размерностей, но доказывается это так же, как и аналогичное утверждение в [1], и мы не будем на этом останавливаться. Пусть T — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то есть

$$T = L_n + L_{n-1} + \dots + L_1,$$

где все L_k — однородные дифференциальные операторы, причем k обозначает порядок оператора L_k . Иными словами, в свою очередь

$$L_k = \sum_{i=0}^k a_{ki} \partial_1^i \partial_2^{k-i}.$$

Пусть $A = \{T_j\}_{j=1}^N$ — набор дифференциальных операторов такого вида. Мы будем предполагать, что наивысший порядок n однородных слагаемых у них одинаков. Для бесконечно дифференцируемой функции f на торе \mathbb{T}^2 положим

$$\|f\|_{(A)} = \max_{1 \leq j \leq N} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^2)}$$

и обозначим, как и в [1], через $C^A(\mathbb{T}^2)$ банаово пространство, соответствующее этой норме (имеется в виду то, что получится после пополнения и факторизации по ядру). Мы будем интересоваться условиями, при которых такое пространство не изоморфно пространству $C(K)$ для некоторого компакта K (более общим образом — дополняемому подпространству в нем).

Мы несколько продвинемся в доказательстве сформулированной в [1] гипотезы: чтобы такое пространство вкладывалось в $C(K)$ дополняемо, надо, чтобы в множестве A был оператор, которому в некотором смысле (вероятно, в смысле делимости) подчинены все остальные. В [1] было показано, что изоморфизма нет, если все операторы набора A однородны одного порядка и среди них есть два непропорциональных.

Теперь мы докажем то же самое в предположении, что среди главных частей операторов T_j , то есть однородных слагаемых $L_n^{(j)}$, есть два непропорциональных.

План рассуждений, как и в работе [1], будет такой: сперва мы перенесем на наш случай теорему вложения (§2 упомянутой работы) с небольшими изменениями, а затем приведем предположение об изоморфизме к противоречию с теоремой Гrotендика. Однако прежде нам потребуется небольшая техническая подготовка.

§2. МОДИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА

В этом коротком параграфе мы несколько модифицируем пространство $C^A(\mathbb{T}^2)$, не меняя его изоморфного типа. Это будет сделано в предположении, что среди операторов набора A есть два, у которых непропорциональны главные части. Будем считать, что это операторы операторы T_1 и T_2 . Сначала мы сделаем замену переменных так, чтобы непропорциональность стала ясно видимой. А именно, новыми переменными (в аддитивной записи) будут $u = ax + by$ и $v = cx + dy$, где a, b, c и d — целые числа, причем матрица, составленная из них — неособая. Чтобы понять, что существенно при этом ничего не меняется, посмотрим на функции на торе \mathbb{T}^2 как на 2π -периодические по обеим переменным функции на \mathbb{R}^2 . Наша замена переводит стандартную ячейку, т.е. квадрат $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, в параллелограмм с вершинами на решетке $2\pi\mathbb{Z} \times 2\pi\mathbb{Z}$. Объединение нескольких непересекающихся копий этого параллелограмма, полученных из него сдвигами, накрывает стандартную ячейку; в тоже время, и сам параллелограмм накрывается объединением нескольких ячеек. Это означает, что пространство, полученное после сделанной замены, изоморфно исходному. (На самом деле параллелограмм с вершинами на решетке равносоставлен с объединением нескольких соседних ячеек. Это — хорошо известный факт из комбинаторной геометрии, но нам он не понадобится.)

На числа a, b, c и d мы наложим дополнительные ограничения. Пусть $T_1 = L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} + \dots + L_1^{(1)}$ — разложение оператора T_1 на однородные слагаемые, так что $L_n^{(1)} = \sum_{i=0}^n a_{ni}^{(1)} \partial_1^{n-i} \partial_2^i$ — его главная часть. Нас интересует коэффициент перед ∂_1^n , возникающий после замены переменных. Этот коэффициент записывается как некий (ненулевой!) полином от a, b, c и d , поэтому мы можем выбрать эти числа так, чтобы коэффициент стал ненулевым. Тогда мы можем сделать его равным единице, не меняя пространства. Теперь вычтем из оператора T_2 домноженный на нужное число оператор T_1 так, чтобы в главной части оператора T_2 коэффициент перед ∂_1^n

стал равным нулю. Проще говоря, мы делаем первый шаг в приведении матрицы коэффициентов операторов T_1 и T_2 к диагональному виду. Для определения пространства $C^A(\mathbb{T}^2)$ важен не сам набор A , а его линейная оболочка, так что и это вычитанье не меняет рассматриваемого пространства. Полученные операторы мы снова обозначим через T_1 и T_2 . Пусть в главной части оператора T_2 первое ненулевое слагаемое — это $a_{nk}^{(2)} \partial_1^{n-k} \partial_2^k$. Без потери общности можно считать, что также $a_{nk} = 1$.

Везде дальше мы предполагаем описанную модификацию уже выполненной, хотя понадобится нам это только в параграфе 4.

§3. ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы приспособим теорему вложения из [1] к случаю неоднородных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Для этого, как и в [1], рассмотрим вложение пространства $C^A(\mathbb{T}^2)$ в прямую сумму N копий пространства $C(\mathbb{T}^2)$, которую мы обозначим через X . А именно, любой функции $f \in C^A(\mathbb{T}^2)$ поставим в соответствие элемент пространства X по следующему правилу:

$$f \mapsto (T_1 f, T_2 f, \dots, T_N f).$$

Пусть Y — это образ пространства $C^A(\mathbb{T}^2)$ при таком вложении. Мы рассмотрим аннулятор пространства Y в пространстве X^* . Он состоит из наборов $\{\gamma_j\}_{j=1}^N$ борелеских мер таких, что

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{T}^2} T_j f d\gamma_j = 0$$

для любого тригонометрического полинома f на \mathbb{T}^2 . Последнее условие равносильно тому, что меры γ_j (как обобщенные функции) удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^N T_j^* \gamma_j = 0. \quad (1)$$

Полученное выражение нам предстоит немного изменить так, чтобы стало возможным применить теорему 2 из §2 работы [1].

Прежде всего, мы заменим все меры γ_i *правильными*. Меру μ на торе назовем правильной, если ее коэффициенты Фурье удовлетворяют соотношению $\widehat{\mu}(k, l) = 0$ при $k = 0$ или $l = 0$. Каждой мере μ можно сопоставить ее *правильную часть*: $\mu_1 =$

$\mu - \nu_1 \times \lambda - \nu_2 \times \lambda + \widehat{\mu}(0,0)\lambda \times \lambda$; здесь ν_1 и ν_2 — маргинальные меры для μ ($\nu_1(e) = \mu(e \times \mathbb{T})$, $\nu_2(e) = \mu(\mathbb{T} \times e)$, $e \subset \mathbb{T}$), а λ — нормированная мера Лебега на окружности \mathbb{T} . Легко понять, что мера μ_1 правильна, $\widehat{\mu}_1(k,l) = \widehat{\mu}(k,l)$ при $k \neq 0$ и $l \neq 0$ и $\|\mu_1\| \leq 4\|\mu\|$. Далее, если выполнено соотношение (1), то ему удовлетворяют и правильные части мер γ_i (это легко проверяется на коэффициентах Фурье). Таким образом, в дальнейшем будем считать все меры γ_i правильными.

Сворачивая меру γ_i с ядром Фейера по каждой переменной, мы придем к набору абсолютно непрерывных правильных мер, удовлетворяющих уравнению (1). В конечном итоге нас будет интересовать некая оценка в терминах мер γ_i , которая выдерживает предельный переход от сверток с ядрами Фейера. Поэтому всюду ниже мы можем считать, что γ_i — (правильные) тригонометрические полиномы. Мы будем, однако, говорить про них то “меры”, то “функции” — в зависимости от удобства.

Рассмотрим теперь отдельно выражение $T^*\gamma$, где T — такой же дифференциальный оператор, как было в §1. Имеем:

$$T^*\gamma = \sum_{k=1}^n L_k^* \gamma = \sum_{k=1}^n (-1)^n L_k \gamma. \quad (2)$$

Преобразуем “моменты” $\partial_1^i \partial_2^{k-i} \gamma$. Если $k = n$, то есть это слагаемое старшего порядка, то мы не будем его менять, в противном случае мы формально проинтегрируем меру (на самом деле — тригонометрический полином) γ по одной из переменных. А именно, в разложении Фурье меры γ мы слагаемое $c_{pq}(\gamma) e^{ip\theta_1} e^{iq\theta_2}$ домножим на $\frac{1}{ip}$ или $\frac{1}{iq}$ в зависимости от того, по какой переменной мы хотим “интегрировать”. При $p = 0$ или $q = 0$ проблем не возникнет, поскольку тогда $c_{pq}(\gamma) = 0$ из-за правильности. Полученную меру мы будем обозначать через $I_1(\gamma)$ или $I_2(\gamma)$ соответственно. В [1] (лемма 3) приведена простая формула, показывающая, что норма любой из этих мер не превзойдет величины $100\|\gamma\|_{M(\mathbb{T}^2)}$ (постоянная, разумеется, завышена). Это будет полезно в дальнейшем.

Таким образом, выполняется соотношение $\partial_l I_l(\gamma) = \gamma$ при $l = 1, 2$. Применяя нужное количество раз к мере γ оператор I_1 или I_2 , мы превратим любой дифференциальный моном в моном порядка n от некоторой меры γ' . Прийти к такому результату, разумеется, можно несколькими способами (а именно, их число равно $n - k + 1$). Пока мы считаем, что выбрали (и зафиксировали) любой из них, однако в §4 нам потребуется наложить дополнительные условия.

Итак, подняв порядок всех мономов до n , мы приведем (2) к следующему виду:

$$T^* \gamma = \sum_{i=1}^n \partial_1^i \partial_2^{n-i} \gamma^{(i)},$$

где $\gamma^{(i)}$ есть сумма меры $a_{ni}\gamma$ и линейной комбинации кратных первообразных от γ .

Теперь вернемся к равенству (1). В нем мы проделаем описанную операцию с каждым слагаемым $T_j^* \gamma_j$ и получим выражение вида

$$\sum_{i=0}^n \partial_1^i \partial_2^{n-i} \mu_i = 0, \quad (3)$$

в котором μ_i — это линейные комбинации мер γ_j и их первообразных с коэффициентами, зависящими только от набора A . Теперь к равенству (3) мы применим теорему 2 из §2 статьи [1] и получим набор функций $\{h_i\}_{i=1}^n$, лежащих в $L^2(\mathbb{T}^2)$ и удовлетворяющих уравнениям $\partial_2 h_1 = \mu_0$, $-\partial_1 h_{i-1} + \partial_2 h_i = \mu_{i-1}$, $(1 < i \leq n)$, $-\partial_1 h_n = \mu_n$, при этом L^2 -нормы функций h_i оцениваются через нормы мер μ_i . Последние, в свою очередь оцениваются через нормы мер γ_i . Таким образом, как и в [1], мы получаем оператор из аннулятора пространства Y , определенного выше, в L^2 : от набора мер $\{\gamma_i\}$ из аннулятора мы переходим к набору их правильных частей, от них — к мерам μ_i , а затем — к функциям h_i .

§4. НЕИЗОМОРФНОСТЬ

Основным результатом этой заметки является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $A = \{T_j\}_{j=1}^N$ — набор дифференциальных оператор с постоянными коэффициентами одинакового порядка, причем среди этих операторов есть два, имеющих непропорциональные старшие части. Тогда пространство $C^A(\mathbb{T}^2)$ не изоморфно никакому дополняющему подпространству пространства $C(K)$.*

Как мы уже отмечали, это теорема уточняет основную теорему из [1], но и в таком виде она не окончательна.

Доказательство. Напомним, что в параграфе 2 мы модифицировали наше пространство, и теперь два оператора, имеющие непропорциональные старшие части (ниже, как и ранее, мы обозначаем их через T_1 и T_2) выглядят специальным образом: моном ∂_1^n присутствует ровно в одном из них.

Мы готовы приступить собственно к доказательству. Как и в §3, мы вложим наше пространство в прямую сумму N экземпляров пространства $C(\mathbb{T}^2)$ (мы обозначили эту прямую сумму символом X) и рассмотрим аннулятор этого пространства в X^* (аннулятор мы обозначили символом Y). Если бы пространство $C^A(\mathbb{T}^2)$ дополняемо вкладывалось в $C(K)$, то тогда Y было бы дополняемо в X^* (это — общий факт теории банаховых пространств), а тогда по теореме Гротендика любой оператор из Y в гильбертово пространства был бы абсолютно суммирующим, и, тем более, 2-абсолютно суммирующим. Мы покажем, что построенный в параграфе 3 оператор вложения не таков, и этим завершим доказательство.

Отметим, во-первых, что в §3 мы построили много операторов вложения из Y в гильбертово пространство — все зависит от выбора способа “интегрирования” мер и превращения, таким образом, всех дифференциальных мономов в мономы порядка n . Теперь мы будем считать, при таком повышении порядка каждого конкретного монома мы хоть раз брали первообразную от соответствующей меры по второй переменной. Важно, что тогда *новые* дифференциальные мономы, кратные ∂_1^n , возникнуть не могут.

Вспомним, что включение $\{\gamma_j\}_{j=1}^N \in Y$ означает, что $\sum_{j=1} T_j^* \gamma_j = 0$. Наша цель — построить некоторые специальные элементы пространства Y . Мы найдем их уже среди таких наборов мер, у которых $\gamma_3 = \gamma_4 = \dots = \gamma_N = 0$. Тогда написанное выше уравнение принимает вид $T_1^* \gamma_1 + T_2^* \gamma_2 = 0$. Это условие, в свою очередь, переписывается следующим образом:

$$\sum_{i=0}^n \partial_1^{n-i} \partial_2^i \mu_i = 0, \quad (4)$$

где $\mu_i = a_{ni}^{(1)} \gamma_1 + a_{ni}^{(2)} \gamma_2 + \alpha_i$. В слагаемое α_i включено все кратные первообразные от γ_1 и γ_2 , возникшие при описанной выше процедуре. Ясно, что при этом будет $\mu_0 = \gamma_1$.

Теперь мы готовы выбрать меры γ_1 и γ_2 . Они будут зависеть еще от двух параметров $p, q \in \mathbb{N}$, но пока мы не будем отражать это в обозначениях. А именно, положим $\gamma_1 = z_1^p z_2^q d\lambda$ и $\gamma_2 = c_{pq} z_1^p z_2^q d\lambda$. Здесь λ — нормированная мера Лебега на торе. Тогда мы получим:

$$\mu_j = z_1^p z_2^q (a_{nj}^{(1)} + (a_{nj}^{(2)} + O(\frac{1}{q}))c_{pq} + O(\frac{1}{q})). \quad (4)$$

Члены порядка $O(\frac{1}{q})$ опять возникают потому, что при повышении порядка дифференциальных мономов всегда было хотя бы одно

интегрирование по второй переменной, которое дает коэффициент $\frac{1}{iq}$.

Теперь мы вспомним, как именно в теореме вложения получаются функции $\{h_i\}_{i=1}^n$, лежащие в $L^2(\mathbb{T}^2)$. Должен быть выполнен следующий набор равенств: $\partial_2 h_1 = \mu_0$, $-\partial_1 h_j + \partial_2 h_{j+1} = \mu_j$, ($1 \leq j < n$) и $-\partial_1 h_n = \mu_n$. Так как $\mu_0 = \gamma_1 = z_1^p z_2^q$, мы положим по определению $h_1 = \frac{1}{iq} z_1^p z_2^q$, и тогда первое из данного набора равенств будет выполнено. Теперь выразим h_{j+1} через h_j . Будем иметь:

$$h_{j+1} = \frac{1}{iq} \mu_j + \frac{p}{q} h_j. \quad (5)$$

Понятно, что все μ_j и все последовательно получающиеся функции h_j окажутся кратными функции $z_1^p z_2^q$ (в силу выбора функций γ_1 и γ_2). Тогда h_{j+1} будет иметь вид:

$$h_{j+1} = \frac{1}{iq} \left(A_{j+1} \left(\frac{p}{q} \right) + B_{j+1} \left(\frac{p}{q} \right) c_{pq} + O \left(\frac{1}{q} \right) \right) z_1^p z_2^q. \quad (6)$$

Здесь A_{j+1} и B_{j+1} — это полиномы, определяемые следующими рекуррентными соотношениями:

$$A_1(t) = 1; \quad A_{j+1}(t) = t A_j(t) + a_{nj}^{(1)}.$$

и, аналогично,

$$B_1(t) = 0; \quad B_{j+1}(t) = t B_j(t) + a_{nj}^{(2)} + d_{nj},$$

где $d_{nj} = O(\frac{1}{q})$. Все это легко проверяется по индукции. Заметим, что старшие коэффициенты у всех многочленов $A_j(t)$ равны 1, а у многочленов $B_j(t)$ они равны $1 + O(1/q)$, начиная номера $j = k$. В конце концов, мы найдем h_n , и последнее уравнение примет вид (после сокращения на $z_1^p z_2^q$):

$$-\frac{p}{q} \left(A_n \left(\frac{p}{q} \right) + c_{pq} B_n \left(\frac{p}{q} \right) + O \left(\frac{1}{q} \right) \right) = a_{nn}^{(1)} + (a_{nn}^{(2)} + d_{nn}) c_{pq} + O \left(\frac{1}{q} \right).$$

Возникло уравнение, из которого находится c_{pq} :

$$c_{pq} = \frac{-t A_n(t) - a_{nn}^{(1)} + O(\frac{1}{q})}{t B_n(t) + a_{nn}^{(2)} + d_{nn}}, \quad (7)$$

где $t = \frac{p}{q}$. Пусть теперь $q > C$ и $\frac{\delta}{2} < t < \delta$, где C и δ — достаточно большие числа. Эти два числа можно выбрать так, чтобы знаменатель дроби (7) был отделен от нуля, а тогда коэффициенты c_{pq} будут ограничены сверху равномерно по p и q . При этом, однако,

$h_1 = \frac{1}{i_q} z_1^p z_2^q$. Окончание рассуждения совершенно аналогично статье [1]. Действительно, последовательность $\{\gamma_1^{pq}, \gamma_2^{pq}, 0, \dots, 0\}$ (пришло время отразить зависимость выбранных функций от индексов p и q) слабо 2-суммируема в Y в силу ортогональности системы $z_1^p z_2^q$ и равномерной ограниченности коэффициентов c_{pq} . По теореме Гrotендика, построенный оператор вложения должен быть 2-суммирующим и, значит, полученная последовательность наборов функций $\{h_j^{pq}\}_{j=1}^n$ должна была бы быть 2-суммируема (по норме). Однако ряд квадратов L^2 -норм полученных функций расходится, так как он больше или равен сумме

$$\sum_{p,q} q^{-2}$$

по $q > C$ и p таким, что $\delta/2 < p/q < \delta$, а этот ряд расходится. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Список литературы

- [1] Кисляков С. В., Максимов Д. В. Изоморфный тип пространств гладких функций, порожденных конечным семейством дифференциальных операторов. — Зап. научных семинаров ПОМИ (327) 2005, 78-97.