

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Санкт-Петербургское отделение Математического института

им. В. А. Стеклова Российской академии наук

ПРЕПРИНТ ПОМИ – 05/2009

Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений

А. М. Вершик

Российская Академия Наук

Математический институт им. В. А. Стеклова

Санкт-Петербургское отделение

Россия, 191011, Санкт-Петербург, набережная реки Фонтанки, 27

vershik@pdmi.ras.ru

Д. А. Павлов

Физико-механический факультет

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая улица, 29

dmitry.pavlov@gmail.com

В статье приводятся результаты экспериментов по вычислению некоторых статистических характеристик, связанных с диаграммами Юнга. В частности, приводятся оценки максимальной и средней (по мере Планшереля) размерности неприводимого представления симметрической группы S_n . Также приводятся результаты вычислений предельной формы двумерных и трёхмерных диаграмм для статистики Ричардсона.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемиров, А.И.Генералов,
И.А.Ибрагимов, А.А.Иванов, Л.Ю.Колотилина, В.Н.Кублановская,
П.П.Кулиш, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин,
Г.А.Серегин, В.Н.Судаков, О.М.Фоменко

1 Введение

Классическая диаграмма Юнга [1] размера n — это конечный нижний идеал в решётке $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, то есть множество, содержащее вместе с каждой клеткой все меньшие её в смысле частичного порядка.

Стандартной таблицей Юнга размера n называется диаграмма Юнга, клетки которой заполнены числами от 1 до n , с условием возрастания чисел в каждой строки и каждом столбце; иначе говоря, таблица Юнга есть путь в решётке диаграмм Юнга, начинающийся с пустой диаграммы и кончающийся в данной диаграмме. Диаграммы Юнга соответствуют неприводимым представлениям S_n (например см. [1, 2]), а количество таблиц диаграммы равно размерности соответствующего представления. Для краткости мы называем это число размерностью самой диаграммы Λ , и обозначаем — $\dim(\Lambda)$. Не следует путать размерность диаграммы с n — размером диаграммы, т.е. числом клеток в ней.

Многомерной (d -мерной) диаграммой Юнга называется конечный нижний идеал в решётке $(\mathbb{Z}_+)^d$. Если не оговорено противное, то под диаграммами Юнга мы будем понимать классические двумерные диаграммы Юнга.

Дальнейший материал организован следующим образом: в разделе 2 мы приведём результаты экспериментов по вычислению асимптотики типичной размерности неприводимых представлений симметрической группы (т.е. размерности диаграмм) по мере Планшереля. Эта мера впервые была введена в работе [3], подробнее см. [4].

Раздел 3 посвящён аналогичным экспериментам по максимальной размерности неприводимых представлений симметрической группы. Результаты экспериментов следует рассматривать как подтверждение гипотезы [4] о существовании предельной нормализованной размерности представления типичного по мере Планшереля — константы c , названной в [4] «удельной энтропией представления». В то же время определённых выводов об асимптотическом поведении максимальной размерности представления пока на основании экспериментов сделать нельзя. Точнее говоря, нельзя утверждать, что имеет место стабилизация нормализованной константы c_n при доступных вычислению значениях n .

В разделе 4 мы рассматриваем другую статистику на диаграммах — статистику Ричардсона, которая изучалась в [5], и экспериментально подтверждаем доказанный там строгий результат о предельной форме двумерных диаграмм. Затем приводятся результаты эксперимента для аналогичной статистики трёхмерных диаграмм и формулируется гипотеза о предельной форме.

2 Асимптотика типичной по мере Планшереля размерности неприводимых представлений S_n

Пусть \hat{S}_n — множество всех классов эквивалентности комплексных неприводимых представлений симметрической группы S_n . Пусть $\Lambda_n \in \hat{S}_n$. Обозначим $\dim \Lambda_n$ размерность представления Λ_n , а

$$\mu_n(\Lambda_n) = \frac{\dim^2 \Lambda_n}{n!} \quad (1)$$

— меру Планшереля [3]. Это вероятностная мера на \hat{S}_n , что следует из формулы Бернсайда:

$$\sum_{\Lambda_n \in \hat{S}_n} \dim^2 \Lambda_n = n!$$

Множество \hat{S}_n и размерность $\dim \Lambda_n$ имеют следующую интерпретацию [1]: \hat{S}_n есть совокупность всех диаграмм Юнга с n клетками, а $\dim \Lambda_n$ равно количеству стандарт-

ных таблиц Юнга, которые соответствуют диаграмме Λ_n . Мы отождествляем диаграмму Λ_n и соответствующее представление.

Следующая естественная нормировка размерности диаграмм с n клетками (см. [4]) позволяет изучать асимптотику размерности при n стремящемся к бесконечности:

$$c(\Lambda_n) = \frac{-2}{\sqrt{n}} \ln \frac{\dim \Lambda_n}{\sqrt{n!}} \quad (2)$$

Будем называть коэффициент $c(\Lambda_n)$ нормализованной размерностью. В [4] приведены асимптотические двусторонние оценки нормализованной размерности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \{ \Lambda_n : c_0 < c(\Lambda_n) < c_1 \} = 1.$$

$$(c_0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \approx 0.2313, \quad c_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \approx 2.5651.)$$

Иными словами, асимптотически почти все диаграммы имеют размерность, лежащую в диапазоне

$$\sqrt{n!}e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{n}} < \dim \Lambda_n < \sqrt{n!}e^{-\frac{c_0}{2}\sqrt{n}}.$$

В [4] высказана гипотеза о существовании предела $\lim_{n \rightarrow \infty} c(\Lambda_n)$ почти всюду по мере Планшереля на множестве бесконечных таблиц (т.е. для последовательностей диаграмм $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots$).

Мы будем изучать поведение коэффициента $c(\Lambda_n)$ относительно n . Отдельные эксперименты проводились ранее: в статье [6] описываются эксперименты по проверке сформулированной гипотезы и указываются математическое ожидание и дисперсия величины $c(\Lambda_n)$ для пяти значений n , максимальное из которых равно 1600. (При этом выборка состояла всего из 14 диаграмм.) Мы реализовали аналогичные вычисления с помощью современной техники, которая существенно превышает возможности двадцатипятилетней давности.

Замечание. После того, как приводимые в этой статье эксперименты были проведены, стало известно о ещё неопубликованной работе А. Буфетова, в которой доказывается существование такой константы C , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (c(\Lambda_n) - C)^2 d(\mu_n(\Lambda_n)) = 0$$

то есть, последовательность нормализованных размерностей $c(\Lambda_n)$ сходится в пространстве $L^2(Y)$ по мере Планшереля. Значение константы C методами этой работы, по-видимому, получить, нельзя, но следует думать, что это утверждение о существовании предела согласуется с нашими вычислениями. Заметим при этом, что гипотеза [4] о сходимости почти всюду коэффициента $c(\Lambda)$ остается недоказанной.

Далее пойдёт речь о вспомогательных общеизвестных процедурах: порождении случайных (по мере Планшереля) диаграмм с помощью RSK и о подсчёте размерностей.

2.1 Формула крюков

«Формула крюков» (см. например [1, 7]) позволяет быстро подсчитать $\dim \Lambda$, не осуществляя дорогостоящую процедуру перебора всех стандартных таблиц Юнга, которые соответствуют диаграмме Λ :

$$\dim \Lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \Lambda} h_Y(i,j)}, \quad (3)$$

где (i,j) — клетка диаграммы Юнга, а $h_Y(i,j)$ — длина «крюка» в диаграмме, который состоит из клетки (i,j) и всех клеток в i -м столбце выше её и всех клеток в j -й строке правее её (рис. 1).

1				
5	3	2	1	
7	5	4	3	1

Рис. 1: Длины крюков диаграммы Юнга

2.2 RSK-случайные диаграммы

Даже при наличии формулы крюков, осуществлять порождение случайных диаграмм непосредственно по Планшерелевой мере было бы довольно затруднительно. Сравнительно легко преодолеть это затруднение поможет соответствие Робинсона-Шенстеда-Кнута (RSK) и алгоритм строчной вставки.

Этот известный алгоритм [1] строит по произвольной перестановке $s \in S_n$ пару стандартных таблиц Юнга (P, Q) с одинаковыми диаграммами, при этом построение задает взаимно-однозначное соответствие, называемое (RSK), между множеством всех таких пар таблиц (P, Q) и симметрической группой S_n . При этом равномерная мера (мера Хаара) на группе S_n переходит в меру Планшереля на множестве правых (или левых) таблиц. Таким образом, применив алгоритм RSK к случайной (равномерно распределенной) перестановке и взяв диаграмму Юнга $Y(P)$, соответствующую таблице P , мы получим случайную по (мере Планшереля) диаграмму Юнга.

2.3 Результаты

Для $n \leq 120$ значения математического ожидания $c(\Lambda_n)$ диаграммы, относительно меры Планшереля, были посчитаны прямым вычислением по формуле

$$c_n = \sum_{\Lambda_n \in \hat{S}_n} c(\Lambda_n) \frac{\dim^2 \Lambda_n}{n!}.$$

Результаты находятся в следующем разделе в таблице 3 и на графике 5.

Существует 1,844,349,560 диаграмм размера 120. Для больших n вычисление математического ожидания $c(\Lambda_n)$ делалось методом Монте-Карло, по выборке RSK-случайных диаграмм. Нормализованная размерность каждой диаграммы из выборки считалась по формуле (2), с использованием формулы крюков (3) для подсчёта $\dim \Lambda$. Описанная процедура была проведена для различных n в диапазоне от 1000 до 18000. Математическое ожидание $c_n = M[c(\Lambda_n)]$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma_n = \sigma(c(\Lambda_n))$ величины $c(\Lambda_n)$ приведены в таблице 1 и на рис. 2. Из этих данных видно, что математическое ожидание $c(\Lambda_n)$ растёт с n и, по-видимому, имеет предел. Заметим, что монотонности в выбранном диапазоне n всё же нет: например, при переходе от $n = 15000$ к $n = 16000$ математическое ожидание $c(\Lambda_n)$ уменьшается, что было подтверждено при увеличении размера выборки до 40000. При этом, третий знак после запятой оставался постоянным после того, как размер выборки достигал 20000.

2.4 Индивидуальная эволюция типичных размерностей

Мера Планшереля на бесконечных таблицах определяется как марковская мера, обладающая тем свойством, что соответствующие ей распределения диаграмм на всех уровнях есть меры Планшереля на диаграммах (1). Легко написать переходные меры этой марковской меры. Если учесть, что условные меры на всех таблицах имеющих данную диаграмму λ равны между собой, то мера одной таблицы равна $\frac{\dim \lambda}{n!}$. Поэтому условная мера перехода от диаграммы λ к диаграмме Λ есть отношение

$$P(\Lambda|\lambda) = \frac{\dim(\Lambda)}{(n+1) \dim(\lambda)}.$$

n	размер выборки	$\approx c_n$	$\approx \sigma_n$
1000	2000	1.6984314	0.10431497
2000	2000	1.746588	0.091339454
3000	2000	1.7644972	0.08351989
4000	2000	1.7750576	0.07747431
5000	2000	1.7873781	0.07282907
6000	2000	1.7917556	0.07022077
7000	2000	1.7969893	0.06630529
8000	2000	1.8000197	0.06586118
9000	2000	1.8070668	0.06243244
10000	10000	1.8102994	0.061589677
11000	10000	1.8118591	0.059796795
12000	10000	1.8147597	0.057941828
13000	10000	1.8162445	0.05743194
14000	10000	1.8187699	0.056453623
15000	20000	1.820125	0.05504108
16000	20000	1.8181555	0.054255717
17000	20000	1.8197316	0.053651392
18000	20000	1.8249108	0.052745327

Таблица 1: Математическое ожидание величины $c(\Lambda)$ при различных n

(см. напр. [8]). Таким образом, гипотеза [4] о поведении индивидуальных размерностей типичных таблиц по мере Планшереля на таблицах состоит в том, что для почти всякой бесконечной таблицы $\{\lambda_n, n = 1, 2, \dots\}$ по этой марковской мере последовательность нормализованных размерностей будет сходиться к одному и тому же конечному пределу, совпадающему, конечно, с пределом средних (математических ожиданий) нормализованных размерностей. Используя формулу для переходных вероятностей легко, строить реализации этой марковской цепи, т.е. строить случайную по мере Планшереля таблицу.

Наши эксперименты показывают крайне хаотическое поведение последовательностей размерностей, что указывает, по-видимому на сложности в доказательстве или опровержении гипотезы о индивидуальном поведении таблиц. Нерегулярность поведения нормализованной размерности видна на рис. 3, где приведены значения $c(\Lambda_n)$ для двух таких последовательностей. Значения вычислялись для n , кратных 100, в диапазоне от 100 до 7000.

3 Асимптотика максимальной размерности неприводимых представлений S_n

В этом разделе мы будем изучать поведение *максимальной размерности* диаграммы с n клетками.

$$m_n = \max_{\Lambda_n \in \tilde{S}_n} \dim \Lambda_n$$

и коэффициента $c(\Lambda)$ для нее

$$\overline{c}_n = c(\overline{\Lambda}_n),$$

где $\overline{\Lambda}_n$ — диаграмма с n клетками, имеющая максимальную размерность. Задача вычисления максимальной размерности ставилась давно (см. [9]).

В статье Дж. МакКея [10] приведены значения $\max \dim \Lambda_n$ для n до 75. На основании своих вычислений он предположил, что

$$\max \frac{\dim \lambda_n}{\sqrt{n!}} \leq \frac{1}{n}.$$

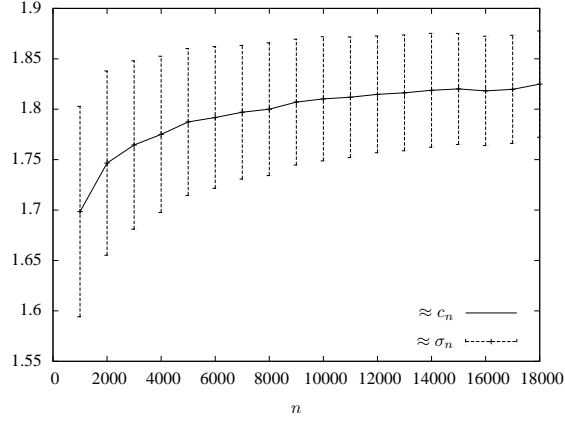


Рис. 2: Математическое ожидание величины $c(\Lambda)$ при различных n . Длины вертикальных отрезков равны удвоенному среднеквадратичному отклонению.

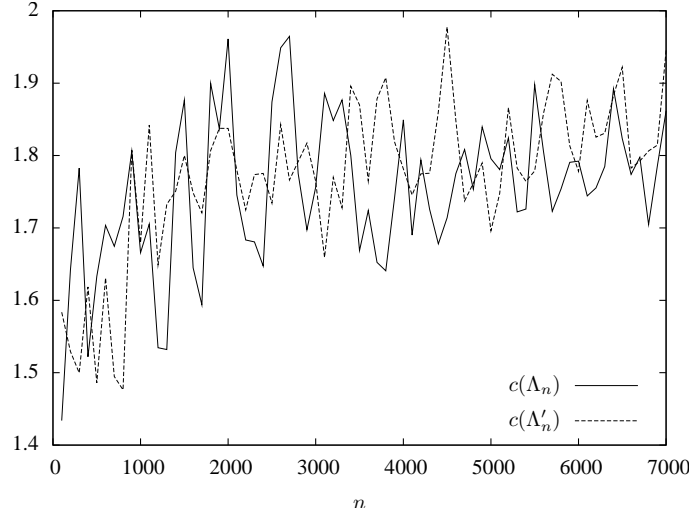


Рис. 3: $c(\Lambda_n)$ двух случайных по Планшерелю последовательностей диаграмм Юнга

Это предположение было связано с тем, что существовало альтернативное мнение о существовании неприводимых представлений сколь угодно большой размерности, для которых выполнено противоположное неравенство. Более того, как показало последующее вычисление, упомянутое в той же работе [10] при корректуре, это неравенство неверно уже для $n = 81$. Тем не менее, как показано в [4], асимптотически верно гораздо более сильное утверждение: отношение максимальной размерности к $\sqrt{n!}$ убывает при $n \rightarrow \infty$ со скоростью $e^{-c\sqrt{n}}$, т.е. быстрее не только $1/n$, но и любой полиномиальной дроби. Оценки констант, данные в [4] совпадали для типичной (по мере Планшереля) размерности и для максимальной размерности, и хотя логарифмический порядок для них действительно одинаков, однако как показывает эксперимент, константы отличаются.

В диапазоне до $n = 130$ нахождение диаграммы максимальной размерности производилось путём перебора всех диаграмм данного размера. В действительности, перебирались не диаграммы, а разбиения числа n , с использованием тривиального взаимно-однозначного соответствия между диаграммами Юнга и разбиениями натуральных чисел [1]. Для подсчёта размерности диаграммы использовалась формула крюков (3).

Существует 5,371,315,400 диаграмм размера $n = 130$. Для больших n ввиду ограниченности вычислительных ресурсов было сделано ограничение: перебирать только симметричные диаграммы, *либо такие, которые получены добавлением одной клетки к симметричной диаграмме*. Такой способ перебора часто даёт точное значение $\max \dim \Lambda$, но не всегда: например, для $n = 14$ максимальная размерность оказывается у диаграммы, которая не удовлетворяет указанному ограничению. Однако, это расхождение несущественно влияет на окончательный результат. В таблице 2 приведены полученные значения \overline{c}_n . При $n = 310$ было перебрано 151,982,627 диаграмм.

n	\overline{c}_n	n	$\approx \overline{c}_n$
10	0.57453286	140	1.05010306
20	0.8198125	150	1.0839802
30	0.7912792	160	1.05304872
40	0.86301332	170	1.0784368
50	0.90097636	180	1.0775954
60	0.94780416	190	1.0940416
70	0.98343194	200	1.0953336
80	0.96466594	210	1.1026434
90	0.9749938	220	1.11596048
100	1.035376	230	1.1106038
110	1.02168428	240	1.1273114
120	1.02246392	250	1.11251032
130	1.0514124	260	1.11878812
		270	1.1175388
		280	1.1173389
		290	1.13589692
		300	1.12641788
		310	1.148327

Таблица 2: Значения $c(\Lambda_n)$ для диаграмм максимальной размерности. В первой колонке даны точные значения, во второй — приблизительные, с частичным перебором диаграмм.

Хотя двусторонние оценки, данные в [4] для максимальной размерности, совпадают с оценками для типичной размерности, эти две величины ведут себя по-разному и, скорее всего, предела последовательности \overline{c}_n не существует (см. график 4). Подчеркнём, что значение максимальной размерности существенно выше типичного (следует помнить о знаке «минус» в показателе экспоненты в оценках, поэтому «выше» означает, что константа c меньше).

В таблице 3 и на графике 5 приведены результаты сравнения точных значений \overline{c}_n и c_n . Следует отметить, что обе функции ведут себя немонотонно.

4 Случайные диаграммы по Ричардсону

В статье Роста [5] рассматривается марковский процесс поведения частицы в пространстве $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, который может быть интерпретирован как постепенное наращивание диаграммы Юнга, начиная с пустой диаграммы. Переход к следующему состоянию, т.е. увеличение размера диаграммы на единицу, осуществляется следующим образом:

Среди диаграмм размера $n+1$, содержащих данную, случайно выбирается одна; при этом все возможные продолжения равновероятны. Иначе говоря, среди внешних «уголков» диаграммы размера n случайно выбирается один, и он образует новую диаграмму размера $n+1$. Эта естественная статистика предложена Ричардсоном [11]. В статье [5] найдена предельная форма диаграмм относительно этой статистики, задаваемая в

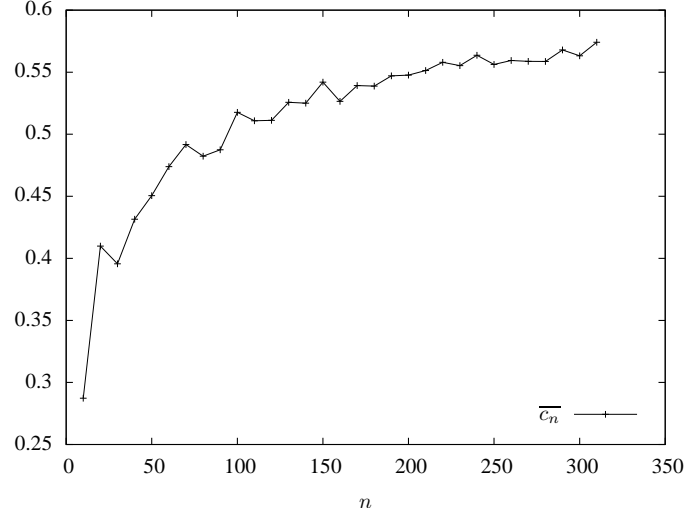


Рис. 4: Значения $c(\Lambda)$ для диаграмм максимальной размерности. Начиная с $n = 140$ значения приближительные, из-за ограничения перебора.

n	$\overline{c_n}$	c_n
10	0.57453287	0.9348365
20	0.81981254	1.1238908
30	0.7912792	1.2205664
40	0.8630133	1.283057
50	0.90097636	1.3281072
60	0.94780415	1.3622344
70	0.98343194	1.3878295
80	0.96466595	1.4042087
90	0.9749938	1.4061089
100	1.035376	1.3848866
110	1.0216843	1.3299882
120	1.0224639	1.2363929

Таблица 3: Значения коэффициентов c для максимальной и типичной размерностей.

надлежащей системе координат, как график функции $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \text{const}$ (см. ниже).

Нами были вычислены значения нормализованной размерности $c(\Lambda_n)$ для последовательности вложенных диаграмм Юнга, порождённых по статистике Ричардсона (график 7). По тому, насколько высоки эти значения по сравнению с аналогичными значениями для статистики Планшереля, можно судить, насколько разными являются эти две статистики.

Рассмотрим процесс бесконечного роста диаграммы, с нормировкой на каждом шаге на $\frac{1}{\sqrt{n}}$ по каждой оси; площадь под диаграммой при этом остается постоянной. Как показано в [5], при $n \rightarrow \infty$ этот процесс сходится к предельной форме, заданной параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = h$. Значение константы h зависит от коэффициента нормализации; в статье Роста выбрана такая нормализация, что h оказывается равна единице: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Другая нормализация, имеющая смысл — по площади образованной фигуры, которая равна $1/6$ от площади описанного квадрата. Сторона квадрата будет равна h^2 :

$$S = \int_0^{h^2} (h - \sqrt{x})^2 dx = h^4/6$$

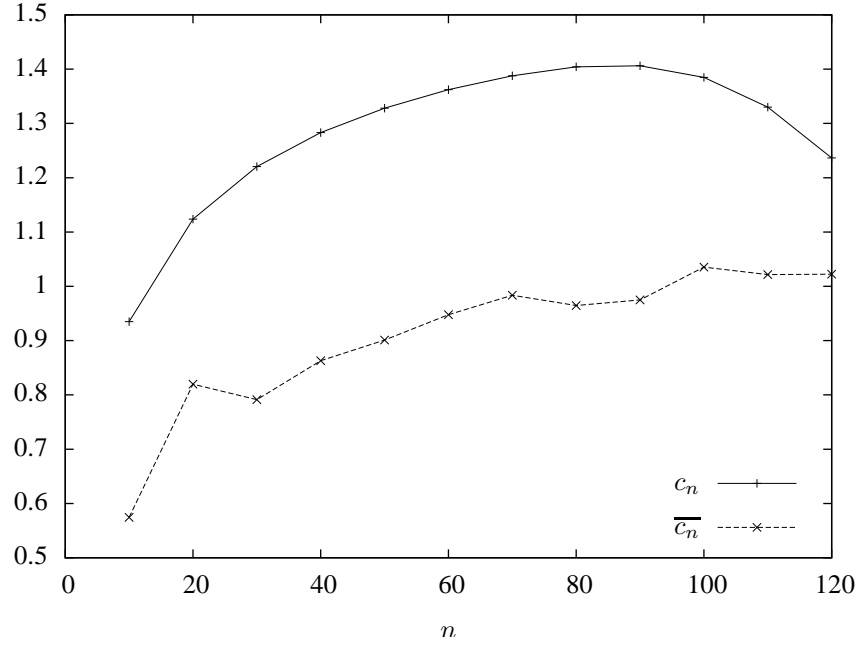


Рис. 5: Значения коэффициентов c для максимальной и типичной размерностей.

Если взять площадь фигуры за 1, то константа h будет равна $\sqrt[4]{6}$, а уравнение предельной формы будет таким:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt[4]{6} \quad (4)$$

4.1 Задание d -мерных диаграмм с помощью граничной функции и предельная форма

Начиная с работы [3] стала общепринятой система координат, в которой задается диаграмма, повернутая на 135° ; именно в ней уравнение для предельной формы планшерелевой диаграммы выглядит особенно просто. Аналогично этому для d -мерные диаграммы Юнга естественно задавать с помощью функции определенной на $d - 1$ -мерной гиперплоскости, проходящей через начало координат и ортогональной главной диаго-

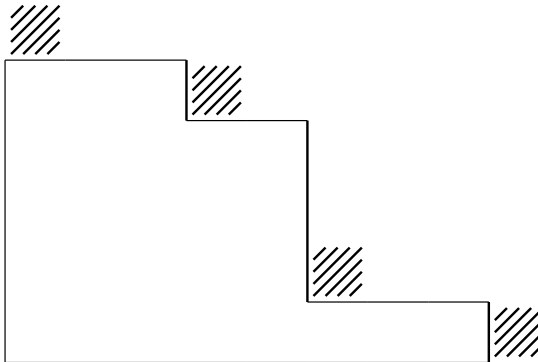


Рис. 6: Построение случайной диаграммы Юнга по Ричардсону. Из k заштрихованных клеток каждая выбирается с вероятностью $1/k$.

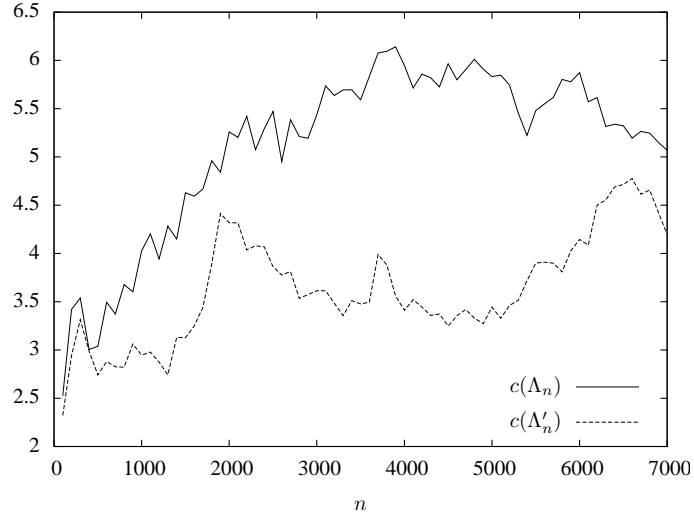


Рис. 7: $c(\Lambda_n)$ двух случайных по Ричардсону последовательностей диаграмм Юнга.

нали. При всех n с точностью до постоянного числа, зависящего только от точки на этой гиперплоскости, значения этой функции есть просто длина отрезка параллельного главной диагонали с концами на гиперплоскости и границе диаграммы.

Польза этой функции, задающей диаграмму Юнга, в том, что по ней можно без труда определить среднюю форму набора диаграмм, усредняя соответствующие функции. Это преобразование тривиально обобщается на случай 3-х и более измерений.

Поскольку визуализацию диаграмм (и их средних форм) мы делаем в положительном d -мерном октанте, то после вычисления средней формы требуется выполнить обратное преобразование — функции в набор точек октанта.

На рисунке 8 изображена средняя форма 2200 случайных диаграмм размера $n = 100000$. Визуальное подтверждение уравнения, найденного Ростом, легко получить, нарисовав среднюю форму в координатах (\sqrt{x}, \sqrt{y}) (рис. 9).

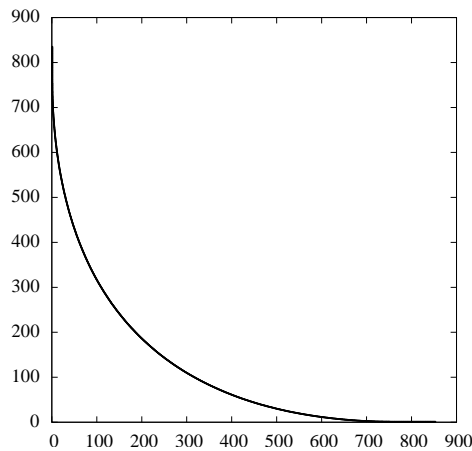


Рис. 8: Средняя форма 2200 диаграмм размера 100000

После масштабирования с коэффициентом $1/\sqrt{n}$ мы получили практически точную копию графика, определённого уравнением 4. Площадь фигуры, изображённой на рис. 10, равна 1.

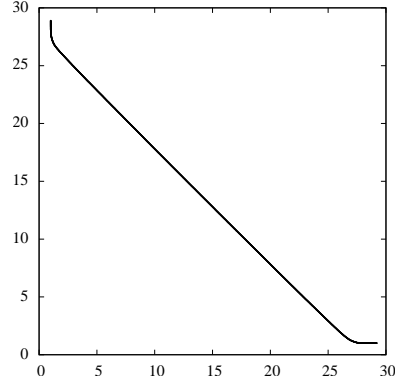


Рис. 9: Средняя форма 2200 диаграмм размера 100000 в координатах (\sqrt{x}, \sqrt{y})

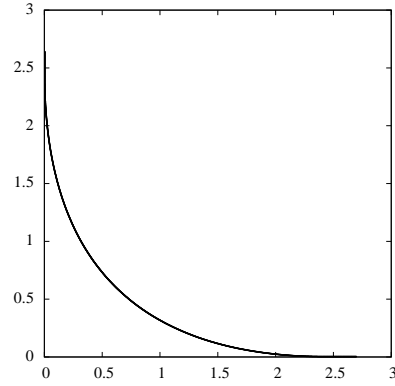


Рис. 10: Средняя форма 2200 диаграмм размера 100000, нормированная на $1/\sqrt{n}$

4.2 Дисперсия центрального сечения

В предыдущем разделе было продемонстрировано совпадение средней формы с уравнением 4. Для подтверждения того, что эта форма является предельной, была посчитана т.н. дисперсия центрального сечения диаграммы, т.е. дисперсия длины «главной диагонали» диаграммы. Математическое ожидание этой величины равняется длине отрезка, лежащего на прямой $y = x$ между началом координат и средней формой. В таблице 4 приведены полученные значения среднеквадратичного отклонения (т.е. квадратного корня из дисперсии) $d(n)$ для n от 10000 до 40000, а также нормализованные $d(n)/\sqrt{n}$. На рис. 11 хорошо видно убывание среднеквадратичного отклонения при $n \rightarrow \infty$.

n	размер выборки	$\approx d(n)$	$\approx d(n)/\sqrt{n}$
10000	2000	1.8262177	0.018262176
15000	2000	1.9742892	0.016120004
20000	3000	2.0621564	0.014581648
25000	4000	2.1949573	0.013882129
30000	5000	2.203268	0.012720575
35000	6000	2.3289392	0.012448704
40000	7000	2.3589768	0.011794884

Таблица 4: Дисперсия центрального сечения

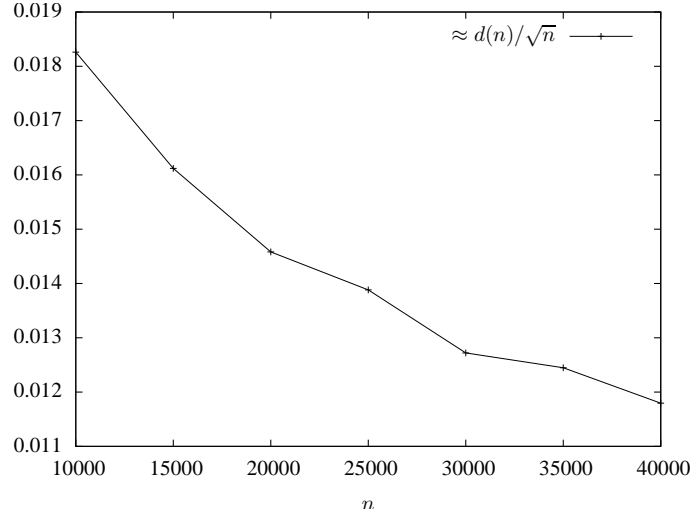


Рис. 11: Нормализованная дисперсия центрального сечения

4.3 Средняя форма в случае трёх измерений

Определение случайной диаграммы по Ричардсону тривиально обобщается на трёхмерный случай. Доказанных результатов о предельной форме для этого случая не имеется, но рис. 12 заставляет предположить, что и здесь имеет место аналогичное уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = h_3$:

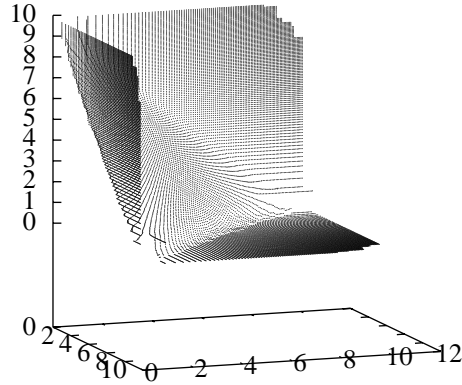


Рис. 12: Средняя форма 400 диаграмм размера 10000, нарисованная в $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$

Эти вычисления показывают, что предельная форма трехмерных диаграмм относительно статистики Ричардсона, по-видимому, отличаются от предельной формы для равномерной статистики, изучение которой начато первым автором — см. об этом в [12], — а предельная форма найдена в работах [13, 14].

Список литературы

- [1] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*. — МЦНМО, Москва (2006).
- [2] А. М. Вершик, А. Ю. Окуньков, *Индуктивный подход к построению теории представлений симметрических групп*. — Успехи математических наук **51**, вып. 2(308) (1996), 153–154.
- [3] А.М. Вершик, С.В. Керов, *Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга*. — ДАН СССР, **233**, вып. 6 (1977), 1024–1027.
- [4] А.М. Вершик, С.В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы*. — Функциональный анализ и его приложения **19**, вып. 1 (1985), 25–36.
- [5] H. Rost, *Non-equilibrium behaviour of a many particle process: Density profile and local equilibria*. — Probability Theory and Related Fields, **58**, No. 1 (1981), 41–53.
- [6] А. М. Вершик, А. Б. Грибов, С. В. Керов. *Эксперименты по вычислению размерности типичного представления симметрической группы*. — Записки научн. семин. ЛОМИ 123 (1983), 152–154.
- [7] Д. Э. Кнут, *Искусство программирования, том 3, второе издание*. — Вильямс, Москва (2000).
- [8] A. M. Vershik, N. V. Tsilevich. *Induced representations of the infinite symmetric group*. Pure Appl. Math. Quart. **3**, No. 4 (2007), 1005–1026.
- [9] R.M. Baer, P. Brock. *Natural Sorting over Permutation Spaces*. — Math. Comp. **22** (1968), 385–410.
- [10] J. McKay. *The Largest Degrees of Irreducible Characters of the Symmetric Group*. — Math. Comp **30**, no. 135 (1976), 624–631.
- [11] D. Richardson, *Random growth in a tessellation*. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **74** (1973), 515–528.
- [12] A. Vershik, Yu. Yakubovich, *Fluctuation of maximal particle energy of quantum ideal gas and random partitions*. — Comm. Math. Phys. **261**, no. 3 (2006), 759–769.
- [13] R. Cerf, R. Kenyon, *The Low-Temperature Expansion of the Wulff Crystal in the 3D Ising Model*. — Communications in Mathematical Physics, **222**, no. 1 (2001), 147–179.
- [14] A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram*. — J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 581–603.