ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 4/2009

Неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$ при $0 < p \leq 2$ [*]

Н. Н. Осипов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института имени В. А. Стеклова
Российской академии наук,
nicknick@pdmi.ras.ru

Аннотация

В работе доказывается одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли в $L^p(\mathbb{R}^n)$-метрике при $0 < p \leq 2$ для параллелепипедов в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат. Тем самым результат С. В. Кислякова и Д. В. Парилова, относившийся к случаю $n = 1$, обобщается на произвольную размерность. Для доказательства вводится специальный оператор S и проверяется его ограниченность на многомерных классах Харди. Структура оператора S позволяет для получения нужной оценки использовать технику, сходную с той, которая применяется к операторам Кальдерона–Зигмунда, хотя рассматриваемый оператор таковым не является.

[*]Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00358

1 Формулировка теоремы и история вопроса.

Пусть Δ_m — попарно непересекающиеся интервалы на прямой $\mathbb{R}$. В 1983 году Рубио де Франсиа (см. [1]) доказал, что при $2 \le p < \infty$ выполняется оценка

$$\Big\| \Big(\sum_m |M_{\Delta_m} f|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{1}$$

где $M_\Delta f = (\widehat{f}\chi_\Delta)^\vee$ — мультипликатор Фурье, соответствующий множеству Δ, а C_p зависит только от p. Вскоре после этого Журне (см. [2]) обобщил этот результат на $\mathbb{R}^n$, то есть доказал, что оценка, аналогичная неравенству (1), верна в случае, когда функция f задана на $\mathbb{R}^n$, а Δ_m — параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат. Заметим, что n-мерный вариант неравенства (1) нельзя доказать просто n-кратным применением одномерного. В [2] Журне для этой цели описывает, а затем использует теорию сингулярных интегральных операторов на прямых произведениях евклидовых пространств. Позже Фернандо Сория опубликовал (см. [3]) более простое доказательство в случае $\mathbb{R}^2$.

Теперь заметим, что двойственный вариант оценки (1) выглядит так:

$$\Big\| \sum_m f_m \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \Big\| \{f_m\} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}, l^2)}, \quad 1 < p \le 2, \tag{2}$$

где $\{f_m\}$ — набор функций, таких, что $\operatorname{supp} \widehat{f}_m \subset \Delta_m$. В 1984 году Бургейн (см. [4]) доказал, что неравенство (2) остается верным и при $p = 1$, при этом его доказательство было значительно сложнее, чем у Рубио де Франсиа. В 2005 году Кисляков и Парилов установили (см. [5]), что оценка (2) выполняется при всех $0 < p \le 2$, причем это было доказано методом, сходным с методом Рубио де Франсиа (в [5] рассматривается случай окружности, а не прямой, но существенной роли это не играет). В данной работе мы распространим этот результат (то есть неравенство (2) при $0 < p \le 2$) на $\mathbb{R}^n$, а именно, докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть задана последовательность функций $\{f_m\}$ такая, что $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} \widehat{f}_m \subset \Delta_m$, где Δ_m — непересекающиеся параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельными осям координат. Тогда при $0 < p \le 2$ выполняется оценка*

$$\Big\| \sum_m f_m \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_{p,n} \Big\| \{f_m\} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n, l^2)}, \tag{3}$$

причем константа $C_{p,n}$ не зависит ни от функций, ни от прямоугольников.

Здесь индекс m пробегает счетное или конечное множество. Если m пробегает конечное множество, мы намеренно не отражаем в обозначениях, что норма в правой части вычисляется не в $L^p(\mathbb{R}^n, l^2)$, а в $L^p(\mathbb{R}^n, l^2_N)$ при некотором $N \in \mathbb{N}$ (формально можно считать, что конечные последовательности функций дополнены до бесконечных нулями). Мы будем поступать подобным образом и в дальнейшем, не оговаривая этого. Также необходимо заметить, что всюду в этой статье мы пользуемся следующим определением преобразования Фурье:

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{-2\pi i \langle t, \xi \rangle} d\xi, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Чтобы избежать слишком громоздких выкладок, мы проведем полное доказательство сформулированной теоремы для случая $\mathbb{R}^2$, однако методы, которые мы будем использовать, без труда переносятся на случай n измерений. В конце работы мы сделаем дополнительные замечания по поводу n-мерной ситуации. Таким образом, далее везде, кроме последнего параграфа, мы считаем, что $n = 2$.

Наше доказательство будет основано на идеях, изложенных в [5], однако нам будет удобнее ссылаться на более позднюю работу [6], так как в [6] рассматривается случай прямой и некоторые моменты изложены более аккуратно. Также мы неявно будем использовать идеи работы [3], однако в ней автор использует пространство BMO($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) и меры Карлесона на произведениях евклидовых пространств. А так как у нас ситуация двойственная, то вместо этого нам понадобятся классы Харди на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и атомное разложение в них. Вся необходимая теория (то есть атомное разложение в пространствах $H^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и действие на них сингулярных интегральных операторов) была изложена Р. Фефферманом в работе [7].

2 Предварительные сведения: аналитические и “вещественные” классы Харди на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Все сведения, изложенные в этом параграфе (кроме леммы в конце), содержатся в работе [8]. Хотя в ней все рассуждения проводятся для бидиска и скалярно-значных функций, в конце приводится переформулировка результатов для $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. В то же время ясно, что все определения и результаты сохраняют силу и для l^2-значных функций. В этом параграфе, везде, где явно не указано, куда действует функция, подразумевается, что она может быть как скалярно-значной, так и l^2-значной. Также подразумевается, что $0 < p \leq 2$.

Определение 1. Рассмотрим область $D = D_1 \times D_2$, где $D_j = \{z_j = x_j + iy_j \mid x_j, y_j \in \mathbb{R};\ y_j > 0\}$. Будем говорить, что функция f, определенная и аналитическая в этой области, принадлежит классу $H^p_A(\mathbb{R}^2)$, если

$$\|f\|^p_{H^p_A} = \sup_{y_1,y_2>0} \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x_1+iy_1, x_2+iy_2)|^p dx_1 dx_2 < \infty.$$

Мы пишем $H^p_A(\mathbb{R}^2)$ вместо $H^p_A(D)$, отождествляя функцию f с ее предельными значениями при $y=(y_1,y_2)\to 0$, при этом предел понимается в смысле медленно растущих распределений.

Определение 2. Рассмотрим функцию φ из класса Шварца на $\mathbb{R}^2$ такую, что $\int\varphi = 1$. Пусть f — медленно растущее распределение на $\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что f принадлежит классу $H^p(\mathbb{R}^2)$, если

$$M_\varphi f(x_1,x_2) = \sup_{\epsilon_1,\epsilon_2>0} |f * \varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(x_1,x_2)| \in L^p(\mathbb{R}^2),$$

где $\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2}(x_1,x_2) = \epsilon_1^{-1}\epsilon_2^{-1}\varphi(x_1/\epsilon_1, x_2/\epsilon_2)$. При этом положим $\|f\|_{H^p} = \|M_\varphi f\|_{L^p}$.

Как и в одномерном случае, выполняются соотношения $H^p_A(\mathbb{R}^2)\subset H^p(\mathbb{R}^2)$ и $\|f\|_{H^p_A} \asymp \|f\|_{H^p}$ для $f\in H^p_A(\mathbb{R}^2)$. По аналогии с H^p_A, можно рассматривать пространство функций, аналитических по одной переменной и антианалитических по другой, или пространство функций, антианалитических по двум переменным. Вообще, H^p будет совпадать с прямой суммой всех таких пространств. Подробности можно посмотреть в [8].

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть Δ_m — прямоугольники в первой координатной четверти плоскости $\mathbb{R}^2$ (возможно, пересекающиеся), а g_m — функции из $L^1(\mathbb{R}^2)$, для которых $\operatorname{supp}\widehat{g}_m \subset \Delta_m$, причем функций, не равных тождественно нулю, среди них конечное число. Тогда функция $G=\{g_m\}$ лежит в $H^p_A(\mathbb{R}^2, l^2)$ и при этом $\|G\|_{H^p_A(l^2)} \le \|G\|_{L^p(l^2)}$.*

Это утверждение элементарно с точки зрения классической теории аналитических классов Харди, но для полноты мы приведем здесь набросок доказательства.

Доказательство. Для простоты будем считать, что функция G состоит из одной компоненты, носитель преобразования Фурье которой лежит в прямоугольнике $\Delta = I\times J$. Продолжим функцию G в область D:

$$G(z_1,z_2) = g(x_1+iy_1, x_2+iy_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} P_{y_1}(x_1-t_1)P_{y_2}(x_2-t_2)G(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

где $(z_1,z_2)\in D$ и $P_y(x)$ — ядро Пуассона. Нам нужно проверить, что функция G аналитическая в области D, что она сходится к своим граничным значениям при $y=(y_1,y_2)\to 0$ в смысле медленно растущих распределений и что для нормы $\|G\|_{H^p_A}$ выполняется требуемая оценка. Пользуясь тем, что ядро Пуассона $P_y(x)$ является преобразованием Фурье функции $e^{-2\pi y|\xi|}$, нетрудно получить равенство

$$G(z_1, z_2) = \iint_\Delta \widehat{G}(\xi_1, \xi_2) e^{2\pi i\, \xi_1 z_1} e^{2\pi i\, \xi_2 z_2} d\xi_1 d\xi_2.$$

Так как $\widehat{G}$ — непрерывная функция с компактным носителем, а $e^{2\pi i \langle \xi, z\rangle}$ — функция, аналитическая по переменной z в $\mathbb{C}^2$, то функция G — аналитическая в D и сходится к своим граничным значениям. Осталось проверить оценку нормы. Для этого рассмотрим две функции $G_1 = G(\cdot, x_2 + iy_2)$ и $G_2 = G(x_1, \cdot)$ заданные на $\mathbb{R}$. Первая функция — это продолжение Пуассона граничной функции G по второй переменной, причем вторая переменная (уже комплексная) зафиксирована. Вторая функция — просто граничная функция G с зафиксированной первой переменной. Нетрудно проверить, что $\operatorname{supp} \widehat{G}_1 \subset I$ и $\operatorname{supp} \widehat{G}_2 \subset J$. Отсюда сразу следует, что $G_k \in H^1$, $k = 1, 2$. Здесь H^1 — обычное пространство Харди на прямой $\mathbb{R}$. Далее, пользуясь либо внешне-внутренней факторизацией функций G_k и неравенством Йенсена, либо субгармоничностью функций $|G_k(x + iy)|^p$, нетрудно получить неравенства

$$|G_k(x + iy)|^p \leq (P_y * |G_k|^p)(x), \quad k = 1, 2.$$

Отсюда вытекает, что $\|G_k\|_{H^p} \leq \|G_k\|_{L^p}$, $k = 1, 2$. Применив последовательно эти две оценки к исходной функции G, получим искомое неравенство. $\square$

Заметим, что эту лемму можно формулировать для любой координатной четверти, нужно только заменить пространство H^p_A на пространство функций, аналитических или антианалитических по соответствующим переменным.

3 Предварительные сведения: атомное разложение и непрерывные операторы на пространстве $H^p(\mathbb{R}^2)$.

В этом параграфе изложены (с небольшими отличиями) основные результаты работы [7]. Отличия заключаются в том, что теорема об атомном разложении сформулирована нами так, что мы можем увеличивать по своему усмотрению число обнуляющихся моментов у предатомов (число N в определении 3 ниже), чего не было в [7] (подробности см. ниже). Далее $0 < p \leq 1$, а все функции можно, опять же, считать как скалярно-значными, так и l^2-значными.

Определение 3. Рассмотрим функцию α из $L^2(\mathbb{R}^2)$ (скалярно-значную или l^2-значную) и целое неотрицательное число N. Будем говорить, что α — (N,p)-предатом, если верно, что

(i) $\operatorname{supp}\alpha \subset \Delta$, где $\Delta = I \times J$ — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат,

(ii) $\|\alpha\|_{L^2} \leq |\Delta|^{1/2-1/p}$ и

(iii) $\int_I \alpha(x_1, x_2^0)x_1^s dx_1 = \int_J \alpha(x_1^0, x_2)x_2^s dx_2 = 0$ при $0 \leq s \leq N$ и при любых $x_1^0 \in I$ и $x_2^0 \in J$.

Определение 4. Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^2$ конечной меры и $\mathcal{M}(\Omega)$ — множество максимальных диадических прямоугольников, содержащихся в Ω. Будем называть функцию a из $L^2(\mathbb{R}^2)$, сосредоточенную на множестве Ω, (N,p)-атомом, если

(i) $a = \sum_{\Delta\in\mathcal{M}(\Omega)} \alpha_\Delta$, где α_Δ — (N,p)-предатом, сосредоточенный на прямоугольнике Δ,

(ii) $\|a\|_{L^2} \leq |\Omega|^{1/2-1/p}$ и

(iii) $\sum_{\Delta\in\mathcal{M}(\Omega)} \|\alpha_\Delta\|_{L^2}^2 \leq |\Omega|^{1-2/p}$.

Теорема об атомном разложении. *Зафиксируем показатель $0 < p \leq 1$. Тогда можно выбрать такое число ν_p, что при $N \geq \nu_p$ верно следующее: функция f лежит в $H^p(\mathbb{R}^2)$ тогда и только тогда, когда $f = \sum \lambda_k a_k$, где a_k — (N,p)-атомы и числа λ_k таковы, что $\sum |\lambda_k|^p \leq C_{p,N}\|f\|_{H^p}^p$.*

В работе [7] эта теорема сформулирована и доказана для случая $N = \nu_p$ (если говорить точно, то подробно там рассматривается только случай $p = 1$ и $N = \nu_p = 0$). Но для того, чтобы избежать этого ограничения, достаточно для интеграла Лузина S_ψ выбрать функцию ψ с нужным количеством обнуляющихся моментов (см. соответствующее доказательство в [7]). С помощью такого атомного разложения, а также леммы Журне о покрытиях, в [7] доказывается (опять же для случая $N = \nu_p$) следующий результат.

Теорема (Р. Фефферман)**.** *Рассмотрим оператор T, действующий ограниченно из $L^2(\mathbb{R}^2)$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ (напомним, что в соответствии со сказанным в начале параграфа, каждое из пространств $L^2(\mathbb{R}^2)$ может состоять как из скалярно-значных функций, так и из l^2-значных). Пусть при достаточно большом N ($N \geq \nu_p$) верно, что для любого (N,p)-предатома α, сосредоточенного на прямоугольнике Δ, выполняется оценка*

$$\iint_{(\gamma\cdot\Delta)^c} |(T\alpha)(x_1,x_2)|^p dx_1 dx_2 \leq C\gamma^{-\delta} \tag{4}$$

при фиксированном $\delta > 0$ и при любом $\gamma \geq 2$. Тогда оператор T действует ограниченно из $H^p(\mathbb{R}^2)$ в $L^p(\mathbb{R}^2)$.

Здесь и далее $\gamma \cdot \Delta$ обозначает прямоугольник с тем же центром, что и у прямоугольника Δ, и со сторонами, в γ раз большими, чем у Δ.

4 Доказательство основной теоремы: вспомогательные операторы S и R.

Перейдем теперь к доказательству сформулированной нами теоремы. Так как все наши оценки не будут зависеть от числа прямоугольников Δ_m, то мы можем считать, что их множество конечно.

Вначале рассмотрим частный случай, когда все прямоугольники Δ_m могут быть получены из некоторых диадических путем увеличения длин сторон в 8 раз с сохранением координат левой нижней вершины. То есть каждому прямоугольнику Δ_m мы можем сопоставить мультииндекс $(k,j) = (k_1,k_2,j_1,j_2) \in \mathbb{Z}^4$ такой, что

$$\Delta_m = \left[j_1 2^{k_1}, (j_1+8)2^{k_1}\right] \times \left[j_2 2^{k_2}, (j_2+8)2^{k_2}\right].$$

Также предположим, что $\operatorname{supp} \widehat{f_m} \subset \frac{3}{4} \cdot \Delta_m$. Сделаем следующее техническое замечание.

Замечание. Любой прямоугольник $R = [a,b] \times [c,d]$ можно поместить в прямоугольник $\Delta = I \times J$, имеющий такой вид, как мы описали, причем так, что длины соответствующих отрезков будут сравнимы (то есть $|I| \asymp \big|[a,b]\big|$ и $|J| \asymp \big|[c,d]\big|$) и $R \subset \frac{3}{4} \cdot \Delta$.

Действительно, пусть $I = [j2^k, (j+8)2^k]$, где степень k такая, что $2^k \leq \big|[a,b]\big| < 2^{k+1}$ и $j = \sup\{j \in \mathbb{Z} \mid (j+1)2^k < a\}$. Нетрудно видеть, что $|I| \asymp \big|[a,b]\big|$ и $[a,b] \subset \frac{3}{4} \cdot I$. Аналогично выбрав J, получим искомый прямоугольник.

Теперь докажем теорему для описанного частного случая. Пусть $\mathcal{A}$ — множество мультииндексов, соответствующих прямоугольникам Δ_m. Пусть $h = \{h_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4} \in L^2(\mathbb{R}^2, l^2)$. Нам потребуется оператор S, который задаётся формулой

$$S(h)(x_1,x_2) = \sum_{(k,j)\in\mathcal{A}} e^{2\pi i\, j_1 2^{k_1} x_1} e^{2\pi i\, j_2 2^{k_2} x_2} (\Phi_k * h_{k,j})(x_1,x_2),$$

где $\Phi_k(x_1,x_2) = \varphi_{k_1}(x_1)\varphi_{k_2}(x_2)$, а функции φ_n, в свою очередь, определяются так: пусть φ — функция из класса Шварца на $\mathbb{R}$ такая, что ее преобразование Фурье неотрицательно и равно нулю вне отрезка $[0,8]$ и единице на отрезке $[1,7]$, тогда $\varphi_n(t) = 2^n \varphi(2^n t)$.

Лемма 2. *Оператор S действует ограниченно из $H^p(\mathbb{R}^2, l^2)$ в $L^p(\mathbb{R}^2)$ при $0 < p \le 2$, причем оценочная постоянная зависит только от p.*

Доказательство этой леммы мы временно отложим. Покажем, что если она верна, то наша теорема доказана для описанного частного случая. Пусть $g_{k,j} \equiv 0$, если $(k, j) \notin \mathcal{A}$, и

$$g_{k,j}(x_1, x_2) = e^{-2\pi i\, j_1 2^{k_1}\, x_1} e^{-2\pi i\, j_2 2^{k_2}\, x_2} f_m(x_1, x_2),$$

если мультииндекс $(k, j) \in \mathcal{A}$ соответствует прямоугольнику Δ_m. Заметим, что носители преобразований Фурье ненулевых функций $g_{k,j}$ лежат в прямоугольниках

$$\tfrac{3}{4} \cdot \Delta_m - (j_1 2^{k_1}, j_2 2^{k_2}) = \left[2^{k_1}, 7 \cdot 2^{k_1}\right] \times \left[2^{k_2}, 7 \cdot 2^{k_2}\right].$$

Отсюда, по теореме Планшереля, следует, что $g_{k,j} = \Phi_k * g_{k,j}$. Обозначим $g = \{g_{k,j}\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^4}$. Учитывая только что сказанное и пользуясь леммой 1 и леммой 2, получаем

$$\Big\| \sum_m f_m \Big\|_{L^p} = \big\| S(g) \big\|_{L^p} \le \\ C_p \|g\|_{H^p(l^2)} \le C'_p \|g\|_{L^p(l^2)} = C'_p \big\| \{f_m\} \big\|_{L^p(l^2)}.$$

Таким образом, выполняется нужная оценка.

Теперь сведем теорему к рассмотренному частному случаю. Наше рассуждение будет примерно такое же, как соответствующее рассуждение в [6], однако выкладки будут более громоздкими, так как мы рассматриваем ситуацию двух измерений. Нам потребуется еще один вспомогательный оператор. Пусть ψ — функция из класса Шварца на $\mathbb{R}$ такая, что $\widehat{\psi} \ge 0$ и $\operatorname{supp} \widehat{\psi} \subset [A^{-1}, A]$, где $A > 1$. Положим $\psi_n(t) = A^n \psi(A^n t)$, $n \ge 0$. Заметим, что $\operatorname{supp} \widehat{\psi_n} \subset [A^{n-1}, A^{n+1}]$. Пусть $\Psi_{k_1,k_2}(x_1, x_2) = \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)$ и $\{h_m\} \in H^p(\mathbb{R}^2, l^2)$, тогда нужный нам оператор R будет задаваться формулой

$$R(h_1, h_2, \dots) = (r(h_1), r(h_2), \dots),$$

где

$$r(h_m) = \big\{ h_m * \Psi_{k_1,k_2} \big\}_{k_1,k_2=0}^{L}.$$

Лемма 3. *Оператор R действует ограниченно из $H^p(\mathbb{R}^2, l^2)$ в $L^p(\mathbb{R}^2, l^2)$ при $0 < p \le 2$, причем оценочная постоянная не зависит от L.*

Доказательство этой леммы мы также отложим. Покажем, как, используя оператор R, перейти к частному случаю, рассмотренному ранее. Для начала заметим, что растяжением можно добиться (без потери общности) того, чтобы длины отрезков, произведениями которых являются прямоугольники Δ_m, были не меньше 1. Зафиксируем число A, достаточно близкое к единице, а функцию ψ выберем так, чтобы $\sum_{n\geq 0}\widehat{\psi}_n(t) = 1$, при $t \geq 1$. Обозначив $\theta = (1,1)$, введем функции $g_m(x) = e^{-2\pi i\langle a_m-\theta,x\rangle}f_m(x)$, где a_m — левые нижние вершины прямоугольников Δ_m. "Измельчив" носители функций g_m с помощью оператора R и сместив их обратно, получим функции $f_{m,k_1,k_2}(x) = e^{2\pi i\langle a_m-\theta,x\rangle}(g_m * \Psi_{k_1,k_2})(x)$, причем $f_m = \sum_{k_1,k_2} f_{m,k_1,k_2}$ (при каждом m суммирование обрывается на конечном числе слагаемых — когда носитель функции $\widehat{\Psi}_{k_1,k_2}$ покидает прямоугольник Δ_m). Рассматривая тройную последовательность $\{f_{m,k_1,k_2}\}$ как функцию из пространства $L^p(\mathbb{R}^2, l^2)$ и пользуясь леммами 1 и 3, получаем:

$$\big\|\{f_{m,k_1,k_2}\}\big\|_{L^p(l^2)} = \big\|R(\{g_m\})\big\|_{L^p(l^2)} \leq C_{p,A}\big\|\{g_m\}\big\|_{H^p(l^2)} \leq C'_{p,A}\big\|\{g_m\}\big\|_{L^p(l^2)} = C'_{p,A}\big\|\{f_m\}\big\|_{L^p(l^2)}.$$

Далее, пусть N — фиксированное достаточно большое натуральное число (например, $N = 100$). Разобьем последовательность $\{f_{m,k_1,k_2}\}$ на N^2 подпоследовательностей — в соответствии с остатками от деления индексов k_1 и k_2 на N в каждой группе (то есть при одном значении m). Учитывая сказанное выше, теорему достаточно доказать отдельно для каждой подпоследовательности. Если в такой подпоследовательности из каждой группы исключить функции, у которых максимален один из индексов k_1 или k_2, то носители оставшихся функций можно поместить в непересекающиеся прямоугольники, соответствующие частному случаю, описанному выше. Для этого нужно выбрать число A достаточно близким к единице и воспользоваться техническим *замечанием*, которое мы сделали в начале параграфа. Для того, чтобы разобраться с оставшимися функциями, разобьем их носители еще раз, сместив правые верхние вершины соответствующих прямоугольников в точку $(-1,-1)$. Далее применим технику, описанную выше (но работая с функциями, антианалитическими по двум переменным).

5 Доказательство основной теоремы: ограниченность операторов S и R.

Теперь проверим леммы 2 и 3. Если мы докажем их при $p = 2$ и $0 < p \leq 1$, то для остальных p они последуют из интерполяционных соображений (об интерполяции в пространствах Харди на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ можно прочитать, например, в обзорной статье [9]). Пользуясь теоремой Планшереля, сразу получаем, что операторы S и R действуют ограниченно на пространстве L^2. Чтобы доказать ограниченность при $0 < p \leq 1$, достаточно проверить (согласно теореме

Фефермана), что для операторов S и R и любого (N,p)-предатома (при достаточно большом N) выполняется оценка (4).

Начнем с оператора S. Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 4. *Зададим последовательность функций $\kappa(x,y)=\{\kappa_{k,j}(x,y)\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2}$, где $\kappa_{k,j}(x,y)=e^{2\pi i\,2^k j\,x}\varphi_k(x-y)$ (напомним, что функции φ_k были введены нами при определении оператора S). Пусть $N\geq 0$ — целое число. Тогда для всякого отрезка $I\subset\mathbb{R}$ найдется такая l^2-значная функция $p_I(x,y)$, являющаяся полиномом степени не выше N по y, что при всех $\xi=\{\xi_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2}\in l^2$, всех $y\in I$, всех $\gamma\geq 2$ и всех целых $s\geq 1$ выполняется оценка*

$$\left(\int_{I_s}\left|\langle\kappa(x,y)-p_I(x,y),\xi\rangle_{l^2}\right|^2 dx\right)^{1/2}\leq C_N\,\gamma^{-sB_N}\,|I|^{-1/2}\,|\xi|_{l^2},$$

причем $B_N>1$ и $B_N\to\infty$ при $N\to\infty$. Здесь $I^s=\gamma^{s+1}I\setminus\gamma^s I$.

Подобные оценки встречались в работах, посвященных одномерному случаю (см., например, [1]), однако в них пары (k,j) пробегали не все множество $\mathbb{Z}^2$, а только некоторое его подмножество $\mathcal{B}\in\mathbb{Z}^2$ такое, что $\sum_{(k,j)\in\mathcal{B}}|\widehat{\varphi}_k(x-2^k j)|^2\leq C$. В такой ситуации последовательность $\{\kappa_{k,j}(x,y)\}_{(k,j)\in\mathcal{B}}$ оказывалась ядром некоторого оператора типа Кальдерона–Зигмунда (одномерного аналога оператора S), причем его L^2-ограниченность следовала (по теореме Планшереля) из упомянутого ограничения на множество пар (k,j). Однако, лемма 4 верна и без подобных ограничений, и именно это обстоятельство позволит нам оценить оператор S (то есть рассмотреть случай двух измерений).

Доказательство леммы 4 будет проведено в последнем параграфе. Используя ее, проверим ограниченность оператора S. Пусть $\alpha=\{\alpha_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4}$ — произвольный l^2-значный (N,p)-предатом (N — достаточно большое), сосредоточенный на прямоугольнике $\Delta=I\times J$ (как и ранее $(k,j)=(k_1,k_2,j_1,j_2)$). Разобьем множество $(\gamma\cdot\Delta)^c$, фигурирующее в оценке (4), на три части:

$$\begin{aligned}
A_1&=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\in\gamma\cdot I;\ x_2\notin\gamma\cdot J\},\\
A_2&=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\notin\gamma\cdot I;\ x_2\in\gamma\cdot J\}\quad\text{и}\\
A_3&=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_1\notin\gamma\cdot I;\ x_2\notin\gamma\cdot J\}.
\end{aligned}$$

Будем интегрировать отдельно по каждому множеству. Для множеств A_1 и A_2 воспользуемся последовательно леммой 4 по одной переменной и L^2-ограниченностью по другой, а для множества A_3 воспользуемся леммой 4 по каждой переменной. Идея достаточно простая, но строгие выкладки будут довольно громоздкими.

Вначале рассмотрим множество A_1. Введем некоторые обозначения. Ядром оператора S является следующий набор функций

$$K(x_1,x_2,y_1,y_2)=\left\{e^{2\pi i\,2^{k_1}j_1\,x_1}\,e^{2\pi i\,2^{k_2}j_2\,x_2}\,\Phi_k(x_1-y_1,x_2-y_2)\right\}_{(k,j)\in\mathcal{A}}.$$

Пусть $h = \{h_{k_1,j_1}\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} \in L^2(\mathbb{R}, l^2)$. Определим вспомогательные операторы S_{k_2,j_2} формулой

$$S_{k_2,j_2}(h)(x_1) = \sum_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} \chi_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,j_1,j_2)\, e^{2\pi i\, 2^{k_1} j_1\, x_1}\, (\varphi_{k_1} * h_{k_1,j_1})(x_1).$$

Заметим, что при фиксированных индексах k_2 и j_2 у прямоугольников $\Delta_m = I_m \times J_m$, соответствующих мультииндексам $(k_1,k_2,j_1,j_2) \in \mathcal{A}$, будут совпадать отрезки $J_m = [j_2 2^{k_2}, (j_2+8)2^{k_2}]$, а значит отрезки $I_m = [j_1 2^{k_1}, (j_1+8)2^{k_1}]$ будут попарно непересекающимися (так как Δ_m — попарно непересекающиеся прямоугольники). Отсюда по теореме Планшереля получаем, что операторы S_{k_2,j_2} ограничены на пространстве L^2. Также для удобства временно будем обозначать

$$\xi(y_2,x_1) = \Big\{ S_{k_2,j_2}\Big(\big\{\alpha_{k_1,k_2,j_1,j_2}(\cdot,y_2)\big\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\Big)(x_1)\Big\}_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}.$$

Здесь мы для каждого индекса (k_2,j_2) взяли набор компонент предатома α, соответствующих этому индексу, и, зафиксировав вторую переменную, применили оператор S_{k_2,j_2} к этому набору. Далее функции κ и p_J — такие, как в лемме 4, причем их компоненты проиндексированы парами $(k_2,j_2) \in \mathbb{Z}^2$. В этих обозначениях получаем, что

$$\begin{gathered} S(\alpha)(x_1,x_2) = \iint_{\Delta} \big\langle K(x_1,x_2,y_1,y_2), \alpha(y_1,y_2)\big\rangle_{l^2}\, dy_1 dy_2 = \\ \int_J \sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2} e^{2\pi i\, 2^{k_1} j_2\, x_2}\, \varphi_{k_2}(x_2-y_2)\, S_{k_2,j_2}\Big(\big\{\alpha_{k_1,k_2,j_1,j_2}(\cdot,y_2)\big\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\Big)(x_1)\, dy_2 = \\ \int_J \big\langle \kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(y_2,x_1)\big\rangle_{l^2}\, dy_2. \quad (5) \end{gathered}$$

Последнее равенство выполняется, так как у предатома α равны нулю первые N моментов по каждой переменной. Далее, пользуясь неравенством Гёльдера, получаем, что

$$\begin{gathered} \iint_{A_1} \big|(S\alpha)(x_1,x_2)\big|^p dx_1 dx_2 = \sum_{s\geq 1} \int_{\gamma\cdot I} \int_{J_s} \big|(S\alpha)(x_1,x_2)\big|^p dx_2 dx_1 \leq \\ \sum_{s\geq 1} \int_{\gamma\cdot I} |J_s|^{1-p/2} \bigg(\int_{J_s} \big|(S\alpha)(x_1,x_2)\big|^2 dx_2 \bigg)^{p/2} dx_1. \end{gathered}$$

Рассмотрим внутренний интеграл в степени $1/2$, то есть норму от $(S\alpha)(x_1,\cdot)$ в пространстве $L^2(J_s)$. Воспользуемся формулой (5) для $S(\alpha)$ и занесем эту

L^2-норму под знак интеграла по отрезку J, а затем применим лемму 4:

$$\left(\int_{J_s}\bigl|(S\alpha)(x_1,x_2)\bigr|^2 dx_2\right)^{1/2} =$$
$$\left(\int_{J_s}\left|\int_J \bigl\langle\kappa(x_2,y_2)-p_J(x_2,y_2),\xi(y_2,x_1)\bigr\rangle\,dy_2\right|^2 dx_2\right)^{1/2} \leq$$
$$\int_J\left(\int_{J_s}\Bigl|\bigl\langle\kappa(x_2,y_2)-p_J(x_2,y_2),\xi(y_2,x_1)\bigr\rangle\Bigr|^2 dx_2\right)^{1/2} dy_2 \leq$$
$$C_N\,\gamma^{-sB_N}\,|J|^{-1/2}\int_J|\xi(y_2,x_1)|_{l^2}\,dy_2.$$

Подставляя эту оценку в предыдущую, снова пользуясь неравенством Гёльдера и занося L^2-норму под знак интеграла, получаем:

$$\iint_{A_1}\bigl|(S\alpha)(x_1,x_2)\bigr|^p dx_2 dx_1 \leq$$
$$\sum_{s\geq 1} C_{N,p}\,\gamma^{-spB_N}\,|J_s|^{1-p/2}\,|J|^{-p/2}\int_{\gamma\cdot I}\left(\int_J|\xi(y_2,x_1)|_{l^2}\,dy_2\right)^p dx_1 \leq$$
$$\sum_{s\geq 1} C_{N,p}\gamma^{-spB_N}|J_s|^{1-p/2}|J|^{-p/2}|\gamma\cdot I|^{1-p/2}\left(\int_J\left(\int_{\gamma\cdot I}|\xi(y_2,x_1)|^2_{l^2}\,dx_1\right)^{1/2} dy_2\right)^p.$$

Вспомнив определение последовательности $\xi(y_2,x_1)$ и воспользовавшись L^2-ограниченностью операторов S_{k_2,j_2}, видим, что

$$\int_J\left(\int_{\gamma\cdot I}|\xi(y_2,x_1)|^2_{l^2}dx_1\right)^{1/2} dy_2 \leq$$
$$\int_J\left(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}\int_{\mathbb{R}}\Bigl|\bigl\{\alpha_{k_1,k_2,j_1,j_2}(x_1,y_2)\bigr\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\Bigr|^2_{l^2}dx_1\right)^{1/2} dy_2 \leq$$
$$|J|^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^2}|\alpha(x_1,y_2)|^2_{l^2}\,dx_1 dy_2\right)^{1/2} \leq |J|^{1/2}\,(|I|\,|J|)^{1/2-1/p}.$$

Собирая все вместе, получаем:

$$\iint_{A_1} \big|(S\alpha)(x_1,x_2)\big|^p dx_2 dx_1 \leq$$
$$C_{N,p} \sum_{s\geq 1} \gamma^{-spB_N} \left|J_s\right|^{1-p/2} \left|J\right|^{-p/2} \left|\gamma\cdot I\right|^{1-p/2} \left|J\right|^{p-1} \left|I\right|^{p/2-1} \leq$$
$$C_{N,p} \sum_{s\geq 1} \gamma^{-spB_N} \big(\gamma^s(\gamma-1)\big)^{1-p/2} \left|J\right|^{1-p} \gamma^{1-p/2} \left|I\right|^{1-p/2} \left|J\right|^{p-1} \left|I\right|^{p/2-1} \leq$$
$$C_{N,p}\gamma^{2-p} \sum_{s\geq 1} \gamma^{s(1-p(1/2+B_N))} \leq C_p \gamma^{-\delta}.$$

Последнее неравенство мы получили, выбрав N так, чтобы число B_N было достаточно велико (напомним, что $B_N \to \infty$ при $N \to \infty$), при этом наш выбор будет зависить только от показателя p.

Множество A_2 рассматривается аналогично. Осталось разобраться с множеством A_3. Снова введем несколько обозначений. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — такой l^2-значный (N,p)-предатом, что те его компоненты, индекс которых принадлежит множеству $\mathcal{A}$, совпадают с соответствущими компонентами предатома α, а остальные компоненты тождественно равны нулю. Введем последовательность функций ξ формулой:

$$\xi(x_1,y_1,y_2) = \Big\{ \big\langle \kappa(x_1,y_1) - p_I(x_1,y_1), \big\{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\big\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} \big\rangle \Big\}_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}.$$

Здесь мы для каждого индекса (k_2,j_2) выбрали набор компонент предатома $\widetilde{\alpha}$, соответствующих этому индексу, и вычислили скалярное произведение этого набора и разности $\kappa - p_I$, где функции κ и p_I — такие, как в лемме 4, причем их компоненты проиндексированы парами $(k_1,j_1) \in \mathbb{Z}^2$. Пользуясь тем, что у предатома $\widetilde{\alpha}$ первые N моментов по каждой переменной равны нулю, получаем:

$$S(\alpha)(x_1,x_2) = \int_J \int_I \big\langle \kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(x_1,y_1,y_2) \big\rangle dy_1 dy_2.$$

На этот раз компоненты функций κ и p_J проиндексированы парами $(k_2,j_2) \in \mathbb{Z}^2$. Далее, пользуясь неравенством Гёльдера и занося L^2-норму под знак интеграла, получаем, что

$$\begin{aligned}\iint_{A_3} \big|(S\alpha)(x_1,x_2)\big|^p dx_2 dx_1 = \\ \sum_{s_1,s_2\geq 1} \int_{J_{s_2}} \int_{I_{s_1}} \bigg| \int_J \int_I \big\langle \kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(x_1,y_1,y_2)\big\rangle dy_1 dy_2 \bigg|^p dx_1 dx_2 \leq \\ \sum_{s_1,s_2\geq 1} |I_{s_1}|^{1-p/2} |J_{s_2}|^{1-p/2} \bigg(\int_J \int_I \bigg(\int_{I_{s_1}} \int_{J_{s_2}} \Big|\big\langle \cdots \big\rangle\Big|^2 dx_2 dx_1 \bigg)^{1/2} dy_1 dy_2 \bigg)^p .\end{aligned}$$

Два раза воспользовавшись леммой 4, видим, что

$$\begin{aligned}\bigg(\int_{I_{s_1}} \int_{J_{s_2}} \Big|\big\langle \kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(x_1,y_1,y_2)\big\rangle\Big|^2 dx_2 dx_1 \bigg)^{1/2} \leq \\ C_N\, \gamma^{-s_2 B_N}\, |J|^{-1/2} \bigg(\int_{I_{s_1}} |\xi(x_1,y_1,y_2)|_{l^2}^2\, dx_1 \bigg)^{1/2} \leq \\ C_N'\, \gamma^{-s_1 B_N}\, |I|^{-1/2}\, \gamma^{-s_2 B_N}\, |J|^{-1/2}\, |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|_{l^2}.\end{aligned}$$

Снова используя неравенство Гёльдера, получаем:

$$\int_J \int_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|_{l^2} dy_1 dy_2 \leq |I|^{1/2}\, |J|^{1/2}\, \|\widetilde{\alpha}\|_{L^2} \leq |I|^{1-1/p}\, |J|^{1-1/p}.$$

Собрав все вместе, видим, что

$$\begin{aligned}\iint_{A_3} \big|(S\alpha)(x_1,x_2)\big|^p dx_2 dx_1 \leq \\ C_{N,p} \sum_{s_1,s_2\geq 1} |I_{s_1}|^{1-p/2}\, |J_{s_2}|^{1-p/2}\, \gamma^{-ps_1 B_N}\, \gamma^{-ps_2 B_N}\, |I|^{p/2-1}\, |J|^{p/2-1} \leq \\ C_{N,p} \gamma^{2-p} \sum_{s_1,s_2\geq 1} \gamma^{(s_1+s_2)(1-p(1/2+B_N))} \leq C_p \gamma^{-\delta}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство обсуждалось при рассмотрении множества A_1. Таким образом, лемма 2 доказана (точнее, сведена к лемме 4).

Теперь рассмотрим оператор R. Его ядро $\mathcal{R}$ задается формулой

$$\mathcal{R}(x_1,x_2,y_1,y_2) = \big\{\Psi_{k_1,k_2}(x_1-y_1, x_2-y_2)\big\}_{k_1,k_2=0}^{L}$$

Значения этой функции суть линейные операторы из l^2 в $l^2_{\mathbb{N}^3}$, где элементы векторов из l^2 пронумерованы индексами m, а элементы векторов из $l^2_{\mathbb{N}^3}$ —

мультииндексами (m, k_1, k_2) (см. определение оператора R). Оператор R более "стандартен", чем оператор S, и является тензорным произведением своих одномерных аналогов, то есть операторов, ядро которых задается последовательностью

$$\rho(x,y) = \{\psi_k(x-y)\}_{k=0}^{L}.$$

Подробное описание оператора с таким ядром, действующего из $L^2(\mathbb{R}, l^2)$ в $L^2(\mathbb{R}, l^2_{\mathbb{N}^2})$, можно найти в работе [6], там же проведено вычисление, доказывающее, что такой оператор — сингулярный интеграл типа Кальдерона–Зигмунда (хотя это было известно и раньше), то есть для ядра ρ выполнено стандартное условие гладкости:

$$|\rho(x,y) - p_I(x,y)|_{l^2} \leq \frac{C_N |I|^{N+1}}{|x-y_0|^{N+2}}, \tag{6}$$

где $N \geq 0$, I — произвольный конечный интервал в $\mathbb{R}$, y_0 — его центр, $y \in I$, $x \notin 2 \cdot I$, а $p_I(x,y)$ — некоторая l^2-значная функция, являющаяся полиномом степени не выше N по y. Доказательство ограниченности оператора R (и вообще любого оператора, являющегося тензорным произведением сингулярных интегральных операторов) можно провести так же, как доказательство ограниченности оператора S, воспользовавшись вместо леммы 4 более сильной оценкой (6). То есть нужно разбить множество $(\gamma \cdot \Delta)^c$ на три подмножества A_1, A_2 и A_3 (см. выше), затем для множеств A_1 и A_2 воспользоваться последовательно условием (6) по одной переменной и L^2-ограниченностью по другой, а для множества A_3 воспользоваться условием (6) по каждой переменной. Используя соответствующее рассуждение для оператора S, читатель легко восстановит детали, причем выкладки будут проще.

Доказательство оценки (6), как уже было сказано, содержится в работе [6]. Здесь мы приведем его набросок, так как нам понадобятся некоторые промежуточные неравенства. Пусть I — отрезок, y_0 — его центр, $y \in I$, $x \notin 2 \cdot I$. Обозначим через $P_{u,k}(t)$ N-й полином Тейлора для ψ_k с центром в точке u. Положим $p_k(x,y) = P_{x-y_0,k}(x-y)$ и $p_I(x,y) = \{p_k(x,y)\}_{k=0}^{L}$. Вспомнив определение функций ψ_k и воспользовавшись тем, что функция ψ — из класса Шварца, легко получить, что

$$|\psi_k(x-y) - p_k(x,y)| \leq C_{N,l}\, A^{k(N+2)}\, |y-y_0|^{N+1}\, (1 + A^k |x-y_0|)^{-l}, \qquad l = 1, 2, \dots .$$

Полагая $l = 0$ и $l = N+3$, получаем две оценки:

$$|\psi_k(x-y) - p_k(x,y)| \leq C_N\, A^{k(N+2)}\, |I|^{N+1}, \tag{7}$$

$$|\psi_k(x-y) - p_k(x,y)| \leq C_N\, A^{-k} \frac{|I|^{N+1}}{|x-y_0|^{N+3}}. \tag{8}$$

Оценка (8) лучше оценки (7) в точности тогда, когда $A^k \geq \frac{1}{|x-y_0|}$. Далее разбиваем квадрат интересующей нас l^2-нормы из оценки (6) на две суммы: первая — по всем k, для которых $A^k \geq \frac{1}{|x-y_0|}$, вторая — по всем остальным k. Пользуясь неравенствами (7) и (8), получаем нужную оценку.

Заметим, что при доказательстве неравенств (7) и (8) использовалось только то, что функция ψ принадлежит классу Шварца. Таким образом, аналогичные оценки будут верны для функций φ_k из определения оператора S (для $A = 2$).

6 Завершение доказательства.

Для завершения доказательства осталось проверить лемму 4. Для $N = 0$ и $\gamma = 2$ похожее утверждение было проверено в работе [1], однако в его формулировке индекс (k, j) пробегал не все $\mathbb{Z}^2$ (но доказательство в [1] тем не менее подходит и для нашего случая). В работе [6] снова доказывается утверждение, сходное с леммой 4, на этот раз для всех $N \geq 0$ и $\gamma = 2$, но ситуация там несколько другая. Несмотря на эти отличия, наше доказательство леммы 4 будет почти таким же, как доказательство упомянутого утверждения в [6].

Определим полиномы $p_k(x, y)$ через полиномы Тейлора для функций φ_k — так же, как мы определяли их при доказательстве оценки (6). Как уже говорилось, оценки (7) и (8) будут верны для функций φ_k при $A = 2$. Функцию $p_I(x, y)$ определим формулой

$$p_I(x, y) = \left\{ e^{2\pi i\, 2^k j\, x} p_k(x, y) \right\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2}.$$

Также обозначим

$$r_{k,s} = \sup_{x\in I_s, y\in I} |\varphi_k(x-y) - p_k(x, y)|.$$

В этих обозначениях получаем:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{I_s} \left| \langle \kappa(x, y) - p_I(x, y), \xi \rangle \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\
&\left(\int_{I_s} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi_k(x-y) - p_k(x, y)| \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x} \Big| \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \\
&\sum_k r_{k,s} \left(\int_{I_s} \Big| \sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x} \Big|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\
&\left(\sum_k r_{k,s} \right)^{1/2} \left(\sum_k r_{k,s} \int_{I_s} \Big| \sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x} \Big|^2 dx \right)^{1/2}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством треугольника в L^2 и неравенством Коши для сумм. Далее, пользуясь оценками (7) и (8), получаем, что

$$r_{k,s} \leq C_N\, 2^{k(N+2)}\, |I|^{N+1}, \quad r_{k,s} \leq C_N\, 2^{-k}\, |I|^{-2}\, \gamma^{-(N+3)s}. \tag{10}$$

Вторая оценка сильнее первой в точности тогда, когда $2^k \geq |I|^{-1}\gamma^{-s}$, поэтому

$$\sum_k r_{k,s} \leq$$

$$C_N \sum_{k:2^k<|I|^{-1}\gamma^{-s}} 2^{k(N+2)}\, |I|^{N+1} + C_N \sum_{k:2^k\geq|I|^{-1}\gamma^{-s}} 2^{-k}\, |I|^{-2}\, \gamma^{-(N+3)s} \leq$$

$$C_N'\, \gamma^{-s(N+2)}\, |I|^{-1}.$$

Осталось оценить второй множитель в последнем выражении в (9). Сделав замену переменной $t = 2^k x$ и воспользовавшись теоремой Рисса–Фишера, получим, что

$$\int_{\gamma^s\cdot I} \Big| \sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x} \Big|^2 dx \leq \begin{cases} C\, \gamma^s\, |I| \sum\limits_j |\xi_{k,j}|^2, & \text{если } \gamma^s|I| \geq 2^{-k} \\ 2^{-k} \sum\limits_j |\xi_{k,j}|^2, & \text{если } \gamma^s|I| < 2^{-k} \end{cases}$$

Пользуясь этими оценками, а также неравенствами (10), получаем:

$$\sum_k r_{k,s} \int_{I_s} \Big| \sum_j \xi_{k,j}\, e^{2\pi i\, 2^k j\, x} \Big|^2 dx \leq$$

$$C\, |\xi|_{l^2}^2 \Big(\sum_{k:2^k<|I|^{-1}\gamma^{-s}} r_{k,s}\, 2^{-k} + \sum_{k:2^k\geq|I|^{-1}\gamma^{-s}} r_{k,s}\, \gamma^s\, |I| \Big) \leq$$

$$C_N\, |\xi|_{l^2}^2 \Big(\sum_{k:2^k<|I|^{-1}\gamma^{-s}} 2^{k(N+1)}\, |I|^{N+1} + \sum_{k:2^k\geq|I|^{-1}\gamma^{-s}} 2^{-k}\, \gamma^{-(N+2)s}\, |I|^{-1} \Big) \leq$$

$$C_N'\, |\xi|_{l^2}^2\, \gamma^{-(N+1)s}.$$

Таким образом, лемма 4 доказана, причем $B_N = N + 3/2$.

7 Замечания по поводу n-мерного случая.

Прежде всего заметим, что предварительная теория, излагавшаяся в начале работы, может быть распространена на случай n измерений. В соответствующих статьях она формулировалась для $\mathbb{R}^2$ просто для того, чтобы избежать слишком громоздких выкладок. Таким образом, по аналогии с ситуацией

$n = 2$, определения пространств H_A^p и H^p, определения предатома и атома, а также лемма 1 и теорема Фефферманa переносятся на случай произвольного n.

Доказательство основной теоремы в случае произвольного n также можно провести аналогично доказательству для $n = 2$. Сделаем несколько замечаний, проясняющих суть дела (но без строгих выкладок). Мы будем использовать следующие обозначения: $(k, j) = (k_1, \ldots, k_n, j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$, $a_{k,j} = (j_1 2^{k_1}, \ldots, j_n 2^{k_n})$ и $\Phi_k(x) = \varphi_{k_1}(x_1) \cdots \varphi_{k_n}(x_n)$. Каждому мультииндексу (k, j) сопоставим параллелепипед

$$\Delta_{k,j} = \left[j_1 2^{k_1}, (j_1 + 8)2^{k_1}\right] \times \cdots \times \left[j_n 2^{k_n}, (j_n + 8)2^{k_n}\right].$$

Далее, пусть $h = \{h_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^{2n}} \in L^2(\mathbb{R}^n, l^2)$. Введем n-мерный аналог оператора S следующей формулой:

$$S(h)(x) = \sum_{(k,j)\in\mathcal{A}} e^{2\pi i \langle x,\, a_{k,j}\rangle} (\Phi_k * h_{k,j})(x),$$

где $\mathcal{A}$ — некоторое множество мультиндексов (k, j) таких, что параллелепипеды $\Delta_{k,j}$ попарно не пересекаются.

Способом, аналогичным уже описанному в этой работе, наша основная теорема сводится (с помощью n-мерного варианта оператора R) к утверждению о том, что n-мерный оператор S действует ограничено из $H^p(\mathbb{R}^n, l^2)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $0 < p \le 2$. Чтобы доказать его ограниченность, рассмотрим параллелепипед $\Delta = I_1 \times \cdots \times I_n$ и разобьем множество $(\gamma \cdot \Delta)^c$ из теоремы Феффермана (ее n-мерного варианта) на подмножества следующего вида:

$$\Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{i_1} \in \gamma \cdot I_{i_1}\ , \ldots ,\ x_{i_m} \in \gamma \cdot I_{i_m}, \\ x_{i_{m+1}} \notin \gamma \cdot I_{i_{m+1}}\ , \ldots ,\ x_{i_n} \notin \gamma \cdot I_{i_n}\Big\},$$

где $0 \le m < n$, а индексы $1 \le i_s \le n$ попарно различны. Будем интегрировать выражение $|(S\alpha)(x)|^p$ (здесь α — предатом на $\mathbb{R}^n$) отдельно по каждому такому подмножеству. Воспользовавшись леммой 4 для переменных с индексами $i_{m+1}, \ldots, i_n$ и L^2-ограниченностью для переменных с индексами $i_1, \ldots, i_m$ (по аналогии с тем, как мы это делали в ситуации $n = 2$), получим необходимую оценку.

Список литературы

[1] J. L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals*, Rev. Mat. Iberoamer., Vol. 1, No. 2 (1985), 1–14

[2] Jean-Lin Journé, *Calderón–Zygmund operators on product spaces*, Rev. Mat. Iberoamer., Vol. 1, No. 3 (1985), 55–91

[3] Fernando Soria, *A note on a Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals in* $\mathbb{R}^2$, J. of London Math. Soc. (2), Vol. 36, Pt. 1 (1987), 137–142

[4] J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system*, Bull. Soc. Math. Belg., Vol. 37, No. 1 (1985), 20–26

[5] С. В. Кисляков и Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов*, Зап. научн. сем. ПОМИ, Том 327 (2005), 98–114

[6] С. В. Кисляков, *Теорема Литлвуда-Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки*, Зап. научн. сем. ПОМИ, Том 355 (2008), 180–198

[7] R. Fefferman, *Calderón–Zygmund theory for product domains: H^p spaces*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 83 (1986), 840–843

[8] R. F. Gundy and E. M. Stein, *H^p theory for the poly-disc*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 76 (1979), 1026–1029

[9] S.-Y. A. Chang and R. Fefferman, *Some Recent Developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 12 (1985), 1–43