ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Санкт-Петербургское отделение Математического института

им. В. А. Стеклова Российской академии наук

ПРЕПРИНТ ПОМИ – 01/2009

Об одном обращении теоремы Вейля для некоторого класса конечнозонных операторов Якоби

А. А. Кононова[1]

Нижегородский Государственный Технический Университет, anya.kononova@gmail.com

В работе исследуется вопрос о компактности возмущения ограниченного оператора Якоби (дискретного аналога оператора Штурма-Лиувилля на полуоси), при этом возмущение порождается изменением спектральной меры оператора при сохранении существенного спектра.

[1]Работа поддержана грантом НШ 3906.2008.1

1 Введение

В работе исследуется вопрос о компактности возмущения ограниченного оператора Якоби (дискретного аналога оператора Штурма-Лиувилля на полуоси), при этом возмущение порождается изменением спектральной меры оператора при сохранении существенного спектра (точные формулировки см. ниже).

Рассмотрим последовательности чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ такие, что $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$. Оператор Якоби - это оператор в пространстве $l^2(\mathbb{Z}_+)$, действие которого на векторах стандартного ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется следующим образом (см. [NS]):

$$Ae_0 = b_0 e_0 + a_0 e_1, \qquad Ae_n = a_{n-1} e_{n-1} + b_n e_n + a_n e_{n+1}, \qquad n \geq 1.$$

Соответствующая бесконечная трехдиагональная матрица называется матрицей Якоби:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $\sup_n\{a_n\} < \infty$, $\sup_n\{|b_n|\} < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, тогда оператор A ограничен и является самосопряженным, вектор e_0 является циклическим вектором оператора A. И наоборот, каждый ограниченный самосопряженный оператор с циклическим вектором имеет матрицу Якоби в подходящем ортонормированном базисе, т.е. унитарно эквивалентен некоторому оператору Якоби.

Изучение различных спектральных свойств операторов Якоби привлекает к себе постоянный интерес (см. [PY], [DKS], [R], [De], [B]). При этом во многих работах используется хорошо известная связь теории операторов Якоби с теорией многочленов, ортогональных по мере на действительной оси. В настоящей работе асимптотические свойства ортогональных многочленов применяются для изучения спектральных свойств операторов Якоби.

Рассмотрим вероятностную борелевскую меру μ с ограниченным бесконечным носителем на действительной оси. Пусть многочлены $Q_n(z)$ степени n со старшим коэффициентом единица ортогональны по этой мере: $\int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x)x^k d\mu = 0,\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$. Для них выполняется трехчленное рекуррентное соотношение

$$Q_{n+1}(z) = (z - b_n)Q_n(z) - a_{n-1}^2 Q_{n-1}(z),\ n \geq 0, \tag{2}$$

с начальными условиями $Q_{-1}(z) = 0,\ Q_0(z) = 1$, причем $a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R}$. Рассмотрим матрицу Якоби, элементами которой являются коэффициенты рекуррентного соотношения (2), и обозначим через A_μ оператор Якоби, соответствующий этой матрице. Известно, что мера μ является спетральной мерой оператора A_μ (см. [Ah]). И наоборот, каждому оператору Якоби A однозначно ставится в соответствие последовательность многочленов, определенная рекуррентными соотношениями (2). Это многочлены с единичным старшим коэффициентом, ортогональные по спектральной мере оператора A. Таким образом, имеется взаимно-однозначное соответствие между операторами Якоби и вероятностными мерами на действительной оси (подробнее о связи ортогональных многочленов и операторов Якоби см. [NS]).

Обозначим через $\mathcal{K}$ идеал компактных операторов в $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Говорят, что оператор A является компактным возмущением оператора A^0, если $A - A^0 \in \mathcal{K}$. Хорошо известно, что если A и A^0 - операторы Якоби, то $A - A^0 \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} |a_n^0 - a_n| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} |b_n^0 - b_n| = 0$.

Для ограниченного самосопряженного оператора A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A, а через $\sigma_{ess}(A)$ его существенный спектр (напомним, что существенный спектр получается удалением из $\sigma(A)$ множества изолированных собственных чисел конечной кратности).

Следующий классический результат утверждает, что существенный спектр оператора устойчив относительно компактных возмущений:

Теорема 1.1 *[Вейль [K, RS]] Если A и A^0 - ограниченные самосопряженные операторы и $(A - A^0) \in \mathcal{K}$, то $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A^0)$.*

Теорема Вейля-фон Неймана, являющаяся в некотором смысле обращением теоремы Вейля, утверждает, что если A и A^0 - самосопряженные операторы, то $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A^0)$ тогда и только тогда, когда $(A - UA^0U^*) \in \mathcal{K}$ для некоторого унитарного оператора U.

В настоящей статье рассматривается следующая задача. Пусть μ - спектральная мера некоторого оператора Якоби A_μ, μ^* - спектральная мера оператора Якоби A_{μ^*}. Предположим, что существенные спектры операторов A_μ и A_{μ^*} совпадают. По теореме Вейля-фон Неймана оператор A_{μ^*} унитарно эквивалентен некоторому компактному возмущению оператора A_μ, но сам оператор A_{μ^*} может не является компактным возмущением A_μ (даже в том случае, когда мера μ^* получена из меры μ добавлением одной массы). Нас будут интересовать условия на меры μ и μ^*, необходимые и достаточные для того, чтобы оператор $A_{\mu^*} - A_\mu$ был компактным.

Перейдем к описанию классов операторов, в которых мы будем рассматривать эту задачу. Пусть E - конечный набор попарно непересекающихся отрезков действительной оси: $E = \cup_{k=1}^p E_k$, $E_k = [\alpha_k; \beta_k]$, $k = 1, ..., p$. Пусть $\rho(x) \geq 0$ - интегрируемая функция на E. Говорят, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет условию Сеге на E, если

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\log \rho(x) dx}{\sqrt{(\beta_k - x)(x - \alpha_k)}} > -\infty, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, p. \tag{3}$$

Рассмотрим операторы Якоби, существенный спектр которых совпадает с множеством E, абсолютно непрерывная составляющая спектральной меры имеет вес, удовлетворяющий условию Сеге на E, а дискретный спектр состоит из конечного набора дискретных масс, расположенных на действительной оси вне E,. Обозначим этот класс операторов через $\mathcal{S}(E)$. Соответствующий класс мер обозначим через $\mathcal{M}(E)$. Для доказательства основных теорем нам понадобится также класс $\mathcal{S}'(E) \subset \mathcal{S}(E)$, к которому мы отнесем операторы, спектральная мера которых не имеет сингулярной составляющей на множестве E, соответствующий класс мер обозначим $\mathcal{M}'(E)$. Все основные утверждения будут доказаны сначала для класса $\mathcal{S}'(E)$, а потом распространены на класс $\mathcal{S}(E)$.

Пусть мера $\mu \in \mathcal{M}'(E)$ имеет вес $\rho(x)$ и массы m_j, расположенные в точках $z_j \in \mathbb{R} \setminus E$, $j = 1, \ldots, l$. Как было замечено выше, по этой мере однозначно восстанавливается оператор Якоби $A_\mu \in \mathcal{S}$. Рассмотрим также меру $\mu^* \in \mathcal{M}'(E)$ с весом $\rho^*(x)$ и массами m_j^* в точках $z_j^* \in \mathbb{R} \setminus E$, $j = 1, \ldots, l^*$. Соответствующий оператор Якоби обозначим A_{μ^*}.

В случае, когда множество E состоит из единственного отрезка, оператор $A_{\mu^*} - A_\mu$ всегда будет компактным. Это следует из результатов Рахманова и Денисова (см. [R, De]) и верно для более широкого класса операторов: если спектральная мера μ оператора Якоби такова, что

$\mu' > 0$ почти всюду на отрезке $[-1,1]$, и μ имеет не более чем счетное число точечных масс на $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$, предельными точками которых могут быть только концы отрезка $[-1,1]$, то $a_n \to 1/2,\ b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Ситуация меняется, если множество E состоит более чем из одного отрезка. Например, если E является объединением двух непересекающихся отрезков действительной оси, то возмущение оператора Якоби добавлением одной массы в точке, не принадлежащей множеству E, никогда не является компактным. В качестве иллюстрации рассмотрим операторы Якоби A_1 и A_2, действие которых определяется следующим образом:

$$A_1 e_0 = 3e_1,\ A_1 e_{2n+1} = 3e_{2n} + e_{2n+2},\ A_1 e_{2n} = e_{2n-1} + 3e_{2n+1};$$

$$A_2 e_0 = e_1,\ A_2 e_{2n+1} = e_{2n} + 3e_{2n+2},\ A_2 e_{2n} = 3e_{2n-1} + e_{2n+1}.$$

Оператор A_2 получается из оператора A_1 при возмущении меры добавлением точечной массы в начале координат (существенный спектр и весовая функция не меняются). В то же время $(A_1 - A_2) \notin \mathcal{K}$.

Работа построена следующим образом. В следующем параграфе приведены предварительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Третий параграф посвящен случаю, когда существенный спектр оператора A состоит не более чем из трех отрезков; для этого случая найдено необходимое и достаточное условие компактности возмущения оператора A, соответствующего изменению его спектральной меры. В четвертом параграфе рассматривается случай, когда число отрезков, составляющих существенный спектр A, больше трех. В пятом параграфе результаты предыдущих частей статьи переносятся на более широкий класс операторов $\mathcal{S}(E)$.

Автор благодарен В.А.Калягину за полезные обсуждения и советы.

2 Предварительные сведения и определения

Следующая теорема описывает связь компактности возмущения операторов Якоби с асимптотикой ортогональных многочленов.

Теорема 2.1 *[Б.Беккерман [B]] Пусть A и A^0 - операторы Якоби, а Q_n и Q_n^0 соответствующие им последовательности ортогональных многочленов. $(A - A^0) \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{Q_n^0(z)}{Q_{n+1}^0(z)}\right) = 0$$

равномерно в замкнутой окрестности бесконечности.

Напомним определения некоторых стандартных понятий геометрической теории функций, которые понадобятся нам в дальнейшем (см. [W, A]).

Обозначим через Ω область, являющуюся дополнением E: $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$. *Действительная функция Грина* $g(z, z_0)$ для области Ω с особенностью в точке $z_0 \in \Omega$ - это функция, гармоническая в $\Omega \setminus \{z_0\}$ и такая, что функция $[g(z, z_0) - \log(1/|z - z_0|]$ гармонична в окрестности z_0 (если $z_0 = \infty$, то $[g(z) - \log|z|]$ гармонична в окрестности ∞) и $\lim_{z\to\zeta} g(z, z_0) = 0$, $\zeta \in \partial\Omega$.

Рассмотрим функцию $\Phi(z, z_0) = \exp[g(z, z_0) + i\tilde{g}(z, z_0)]$. Если $p > 1$ (область Ω не является односвязной), то функция $\Phi(z)$ будет многозначна в Ω. Эта функция локально аналитично отображает область Ω на внешность единичной окружности.

Гармонические меры $\omega_k(z)$, $k = 1, ..., p$ - это функции, гармонические в области Ω включая ∞, определенные граничными условиями $\omega_k(\zeta)|_{\zeta\in E_j} = \delta(j, k)$. Нам также понадобятся аналитические функции $\Omega_k(z) := (1/2)[\omega_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z)]$.

Если условие Сеге (3) выполнено для весовой функции $\rho(\zeta)$, то (см. [W]) существует действительная функция $h(z)$, гармоническая в области Ω и удовлетворяющая на E следующему граничному условию: $h(\zeta)|_{\zeta\in\partial\Omega} = \log(\rho(\zeta))$. Комплексная функция $R_\rho(z) = \exp[h(z) + i\tilde{h}(z)]$ локально аналитична в области Ω, имеет некасательные предельные значения на ее границе $\partial\Omega$ и $|R_\rho(\zeta)|_{\zeta\in\partial\Omega} = \rho(\zeta)$.

Если область Ω не является односвязной (при $p > 1$), то функции $\Phi(z)$ и $R_\rho(z)$, определенные выше, будут в общем случае многозначны. Точнее, их абсолютные значения будут однозначными функциями, а аргументы - многозначными в Ω. Для данной многозначной функции $f(z)$ выражение $\Delta_{E_k} f$ обозначает приращение функции при обходе вокруг отрезка E_k. Например, $\Delta_{E_k}\arg(\Phi^{-n}) = -n\omega_k(\infty)$.

Для удобства дальнейшего изложения каждой мере $\mu \in \mathcal{M}(E)$, абсолютно непрерывная составляющая которой имеет вес $\rho(x)$ а дискретные массы расположены в точках $z_j \in \mathbb{R} \setminus E$, сопоставим набор чисел

$$\mathcal{J}_\nu(\mu) = \frac{1}{4\pi}\Delta_{E_\nu} \arg R(z) + \sum_{j=1}^{l} \omega_\nu(z_j), \quad \nu = 1, ..., p. \tag{4}$$

Перейдем к определению римановых тэта-функций, которые будут использоваться для описания асимптотических свойств ортогональных многочленов. Более подробно об этих фукциях можно прочитать в соответствующей литературе (см. [D, Ch]).

Разрежем поверхность Ω по границе E и склеим вдоль границы с симметричной ей областью $\overline{\Omega}$, определенной как Ω, у которой все локальные параметры заменены комплексно сопряженными. Мы получим замкнутую ориентированную двулистную поверхность Римана рода $(p-1)$. Обозначим ее $\Re$. Эта поверхность может быть описана как гиперэллиптическая кривая, задаваемая уравнением $\omega^2 = \prod_{j=1}^{p}(z-\alpha_j)(z-\beta_j)$. Концы отрезков E_k являются точками ветвления поверхности $\Re$. Функция Грина и гармонические меры могут быть продолжены на всю поверхность $\Re$ (см. [A]).

Для данной симметричной матрицы $C = (C_{i,j})$ с положительно определенной мнимой частью тэта-функция от h переменных определяется формулой:

$$\theta(u_1, u_2, ..., u_h) = \sum_{n_1, n_2, ..., n_h \in Z} \exp(-\pi i \sum_{\mu=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{h} C_{\mu,\nu} n_\mu n_\nu + 2\pi i \sum_{\nu=1}^{h} n_\nu u_\nu). \tag{5}$$

Для построения стандартной *тэта-функции Римана поверхности* $\Re$ мы вычислим периоды дифференциалов $d\Omega_k(z) : \oint_{E_j} d\Omega_k(\zeta) = iB_{k,j}, \quad B_{k,j} \in \mathbb{R}$ и выберем произвольный комплексный вектор $(b_1, b_2, ..., b_{p-1})$. Тогда соответствующая тэта-функция Римана на $\Re$ определяется следующим образом:

$$\Theta(z) = \theta(\int_{z_0}^{z} d\Omega_1(\zeta) - b_1, ..., \int_{z_0}^{z} d\Omega_{p-1}(\zeta) - b_{p-1}),$$

где функция θ имеет матрицу параметров $C = (iB_{k,j})$.

Асимптотические формулы для ортогональных многочленов. В 1969 году Видом (см. [W]) вывел формулы сильной асимптотики для многочленов, ортогональных на наборе дуг с весом, удовлетворяющим условию Сеге. В явном виде с использованием тэта-функций Римана эти формулы получил А.И. Аптекарев (см. [A]). В [A, KK1] были получены асимптотические формулы для многочленов, к абсолютно непрерывной мере которых добавлена дискретная часть. Следствием асимптотических формул является приведенное ниже утверждение, описывающее асимптотику отношения многочленов.

Утверждение 2.2 *Для многочленов $Q_n(z)$, ортогональных относительно меры $\mu \in \mathcal{M}'(E)$ с весом $\rho(x)$, имеющей не более чем конечное число дискретных масс в точках $z_k \in \mathbb{R} \setminus E$, $k = 1, \ldots, l$, верны следующие соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} = \frac{1}{C(E)\Phi(z)} \lim_{n\to\infty} \frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)} \tag{6}$$

равномерно на замкнутых подмножествах $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$, где $\Theta_n(z) = \dfrac{\Theta(n,z)}{\Theta(n,\infty)}$, а $\Theta(n,z)$ - тэта-функция Римана с матрицей параметров $(iB_{k,j})$ и вектором параметров

$$b_\nu(n) = d_\nu - n\omega_\nu(\infty) + \mathcal{J}_\nu(\mu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, p-1,$$

где $\mathcal{J}_\nu(\mu)$ определены выше (4), $C(E)$ - логарифмическая емкость множества E, константы d_ν зависят только от геометрии области E (и не зависят от n и μ).

В работе Ф.Пехерсторфера и П.Юдицкого [PY] методами, отличными от методов Видома и Аптекарева, получены формулы сильной асимптотики для ортогональных многочленов, а также асимптотические формулы для элементов соответствующей матрицы Якоби для класса мер, более широкого, чем класс $\mathcal{M}(E)$ (более точные формулировки см. в [PY]). Мы не будем использовать здесь асимптотические формулы, полученные в [PY]. Из результатов Пехерсторфера и Юдицкого для нас будет важно только то, что асимптотика элементов матрицы Якоби для оператора из класса $\mathcal{S}(E)$ не зависит от расположенной на E сингулярной составляющей спектральной меры (см. [PY], следствие 6.1, а также замечание после леммы 2.2).

3 Необходимое и достаточное условие компактности возмущения, $p \le 3$

В этом и следующем параграфах мы будем рассматривать только операторы из класса $\mathcal{S}'(E)$, т.е. без сингулярной составляющей на множестве E. В последнем параграфе результат будет обобщен на случай операторов класса $\mathcal{S}(E)$

Теорема 3.1 *Пусть множество E является объединением не более чем трех отрезков действительной оси. Пусть A_μ и A_{μ^*} - операторы Якоби из класса $\mathcal{S}'(E)$ со спектральными мерами μ и μ^* соответственно. $(A_\mu - A_{\mu^*}) \in \mathcal{K}$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) (\operatorname{mod} 1), \quad \nu = 1, 2, \ldots, p, \tag{7}$$

где $\mathcal{J}_\nu(\mu)$ определены равенством (4).

Доказательство:

Достаточность условия (7) для компактности возмущения автоматически следует из асимптотической формулы (6) и теоремы 2.1.

Докажем необходимость. Пусть возмущение является компактным. Тогда по теореме 2.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} - \dfrac{Q_n^*(z)}{Q_{n+1}^*(z)}\right) = 0$ равномерно в замкнутой окрестности бесконечности.

Используя асимптотические формулы (6), получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{Q_n^*(z)}{Q_{n+1}^*(z)}\right) = \frac{1}{C(E)\Phi(z)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)} - \frac{\Theta_n^*(z)}{\Theta_{n+1}^*(z)}\right) = 0,$$

где $\Theta_n^*(z) = \dfrac{\Theta^*(n,z)}{\Theta^*(n,\infty)}$, а $\Theta^*(n,z)$ - тэта-функция Римана с матрицей параметров $(iB_{k,j})$ и вектором параметров

$$b_\nu^*(n) = d_\nu - n\omega_\nu(\infty) + \mathcal{J}_\nu(\mu^*), \quad \nu = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Так как $\dfrac{1}{C(E)\Phi(z)} \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)} - \frac{\Theta_n^*(z)}{\Theta_{n+1}^*(z)}\right) = 0.$$

Тэта-функция нескольких переменных, как видно из определения, имеет период 1 по каждому аргументу, поэтому мы будем рассматривать числа $n\omega_\nu(\infty)$, участвующие в выражениях для векторов параметров тэта-функций Римана, по модулю 1. Тогда последовательность $\{n\omega_\nu(\infty)\,(\operatorname{mod}1)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, и мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\Lambda\subset\mathbb{N}$ такая подпоследовательность, что $n\omega_\nu(\infty)\overset{n\to\infty,\,n\in\Lambda}{\longrightarrow}\lambda_\nu$

Тогда для произвольного $z\in\mathfrak{R}$ получим:

$$\Theta_n(z)\overset{n\to\infty,\,n\in\Lambda}{\longrightarrow}\Theta_\Lambda(z),$$

где $\Theta_\Lambda(z)=\Theta(\Lambda,z)/\Theta(\Lambda,\infty)$ и

$$\Theta(\Lambda,z)=\theta\left(\int_{z_0}^{z}d\Omega_1-b_1(\Lambda),...,\int_{z_0}^{z}d\Omega_{p-1}-b_{p-1}(\Lambda)\right),$$

где $b_\nu(\Lambda)=d_\nu+\mathcal{J}_\nu(\mu)-\lambda_\nu$ (путь интегрирования во всех интегралах $\int_{z_0}^{z}d\Omega_\nu$ выбирается одинаковый). Введем также обозначение $\Lambda+k$ для последовательности чисел $\{n:n-k\in\Lambda\}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty,\,n\in\Lambda}\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}=\frac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}. \tag{8}$$

То же самое верно и для функций Θ_n^*. Получаем:

$$\lim_{n\to\infty,\,n\in\Lambda}\left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)}-\frac{\Theta_n^*(z)}{\Theta_{n+1}^*(z)}\right)=\frac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}-\frac{\Theta_\Lambda^*(z)}{\Theta_{\Lambda+1}^*(z)}=0$$

Из теории тэта-функций Римана известно, что каждая из тэта-функций имеет ровно $p-1$ ноль на поверхности $\mathfrak{R}$. Если нули тэта-функций в дробях $\dfrac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}$ и $\dfrac{\Theta_\Lambda^*(z)}{\Theta_{\Lambda+1}^*(z)}$ не сокращаются, то нули и полюса этих дробей должны совпадать. Обозначим нули этих дробей $\{z_k'\}_{k=1}^{p-1}$. Так как функции Θ_Λ и Θ_Λ^* связаны с одной и той же поверхностью $\mathfrak{R}$, то мы получаем два выражения для римановых констант (эти константы определяются геометрией римановой поверхности, см. [D]):

$$-k_\nu\equiv\sum_{n=1}^{p-1}\int_{z_0}^{z_n'}d\Omega_\nu(\zeta)-b_\nu(\Lambda)\equiv\sum_{n=1}^{p-1}\int_{z_0}^{z_n'}d\Omega_\nu(\zeta)-b_\nu^*(\Lambda)(\mathrm{mod}1).$$

Таким образом $b_\nu(\Lambda) \equiv b^*_\nu(\Lambda) \pmod 1$, откуда следует $\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) \pmod 1$

Осталось показать, что нули тэта-функций хотя бы в одной дроби не сокращаются. Для случая двух отрезков это тривиально. Пусть $p = 3$.

В предельно-периодическом случае (когда все $\omega_\nu(\infty)$ рациональны) отсутствие сокращения нулей доказывается при помощи асимптотических формул для ортогональных многочленов, полученных из рекуррентных соотношений для соответствующего периодического случая (см. [KK2], [BKK]). Рассмотрим случай, когда одно из чисел $\omega_\nu(\infty)$ не является рациональным. Каждая из функций $\Theta_\Lambda(z)$ и $\Theta_{\Lambda+1}(z)$ имеет на римановой поверхности $\Re$ по два нуля. Предположим, что среди них есть совпадающий: пусть функция $\Theta_\Lambda(z)$ обращается в ноль в точках a и a_Λ, а фукция $\Theta_{\Lambda+1}(z)$ в точках a и $a_{\Lambda+1}$. Заметим, что для доказательства теоремы достаточно отсутствия сокращающихся нулей хотя бы для одной подпоследовательности $\Lambda + k$. Предположим, что это не так, и для любого $k \in \mathbb{N}$ точка a является нулем $\Theta_{\Lambda+k}(z)$ (нас интересуют только такие "сквозные" нули, т.к. если в каком-то месте этот ноль не сокращается, то мы сразу получим совпадение его с соответствующим нулем $\Theta^*_{\Lambda+k}(z)$, что нам и требуется).

Рассмотрим асимптотическую формулу для следующего выражения:

$$\lim_{n\to\infty,\, n\in\Lambda} \left(\frac{Q_n(z)}{Q_{n+1}(z)} \frac{Q_{n+2}(z)}{Q_{n+1}(z)} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty,\, n\in\Lambda} \left(\frac{\Theta_n(z)}{\Theta_{n+1}(z)} \frac{\Theta_{n+2}(z)}{\Theta_{n+1}(z)} \right) = \frac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)} \frac{\Theta_{\Lambda+2}(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}.$$

Функция, стоящая справа, является *однозначной* мероморфной функцией на римановой поверхности $\Re$. Известно (см., например, [D]), что отличных от констант мероморфных функций с единственным полюсом кратности g на компактной римановой поверхности рода g, вообще говоря, не существует. Те точки, для которых такие функции есть, называются *точками Вейерштрасса.* Для нашей поверхности такими точками будут являться концы отрезков E_k. Таким образом, возможны два случая:

а)Если функция $\dfrac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)} \dfrac{\Theta_{\Lambda+2}(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}$ постоянна, то $\Theta_\Lambda(z) = \Theta_{\Lambda+1}(z) = \Theta_{\Lambda+2}(z)$, так как все их нули совпадают. Тогда, используя выражение для римановых констант, получаем:

$$-k_\nu \equiv \sum_{n=1}^{p-1} \int_{z_0}^{z_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) \equiv \sum_{n=1}^{p-1} \int_{z_0}^{z_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) + \omega_\nu(\infty), \ (\mathrm{mod}\, 1),$$

что противоречит условию о том, что хотя бы одно из чисел $\omega_\nu(\infty)$ является иррациональным.

б) Если функция $\dfrac{\Theta_\Lambda(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)} \dfrac{\Theta_{\Lambda+2}(z)}{\Theta_{\Lambda+1}(z)}$ постоянной не является, то $a_{\Lambda+1}$ - точка Вейерштрасса. Аналогично можно показать, что $a_{\Lambda+k}$ также являются точками Вейерштрасса. Поскольку таких точек лишь конечное число, то при некотором значении k_0 функции $\Theta_{\Lambda+1}(z)$ и $\Theta_{\Lambda+k_0}(z)$ совпадут. Но тогда, еще раз используя выражение для римановых констант, получаем:

$$-k_\nu \equiv \sum_{n=1}^{p-1} \int_{z_0}^{z_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) + \omega_\nu(\infty) \equiv \sum_{n=1}^{p-1} \int_{z_0}^{z_n} d\Omega_\nu(\zeta) - b_\nu(\Lambda) + k_0 \omega_\nu(\infty).$$

Таким образом, мы опять получаем противоречие с исходным предположением об иррациональности $\omega_\nu(\infty)$. Возникшие противоречия завершают доказательство теоремы.

4 Условия компактности возмущения, $p > 3$

Перейдем теперь к случаю, когда множество E состоит более чем из трех отрезков (напомним,что мы по-прежнему будем рассматривать только операторы из класса $\mathcal{S}'(E)$). В случае $p > 3$ условие (7) остается достаточным для того, чтобы возмущение было компактным.

Необходимое условие доказано в более слабой форме.

Теорема 4.1 *Пусть множество E является объединением более чем трех отрезков действительной оси. Пусть A_μ и A_{μ^*} - операторы Якоби из класса $\mathcal{S}'(E)$ со спектральными мерами μ и μ^* соответственно. Тогда*

1) *если $\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) (\mathrm{mod}\, 1)$, то $A_\mu - A_{\mu^*} \in \mathcal{K}$;*

2) *если $A_\mu - A_{\mu^*} \in \mathcal{K}$, то $\mathcal{J}_\nu(\mu) \equiv \mathcal{J}_\nu(\mu^*) (\mathrm{mod}\, 1/2), \quad i = 1, 2, \ldots, p$;*

где $\mathcal{J}_\nu(\mu)$ определены равенством (4).

Доказательство:

1) Как и в случае $p \leq 3$, достаточность условия (7) для компактности возмущения следует из формулы (6) и теоремы 2.1. Приведем некоторые следствия, которые будут полезны при доказательстве второго утверждения теоремы.

Предположим, что оператор $A_{\mu^*} - A_\mu$ не является компактным. Как следует из теоремы Вейля-фон Неймана, эту некомпактность можно "исправить" некоторым унитарным преобразованием одного из операторов. Унитарно эквивалентным операторам соответствуют эквивалентные спектральные меры. Покажем, как "исправить" спектральную меру оператора A_{μ^*}, чтобы полученный оператор стал компактным возмущением исходного. Для этого рассмотрим следующую функцию:

$$V(z) = exp(\sum_{k=1}^{p} \tau_k(\omega_k(z) + i\tilde{\omega}_k(z))),$$

где τ_k однозначно (см. [W]) определяются из системы

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{p} \tau_k \Delta_{E_\nu}\tilde{\omega}_k(z) = I_\nu(\mu) - I_\nu(\mu^*); \;\; \sum_{k=1}^{p} \tau_k = 0, \;\; \nu = 1, ..., p.$$

Эта функция локально аналитична в области Ω и не имеет на ней нулей и полюсов. Рассмотрим функцию $\chi(x) = |V(x)| = exp(\tau_k),\ x \in E_k$. На каждом отрезке E_k модуль этой функции постоянен и равен некоторому положительному числу, причем произведение всех этих чисел равно единице. Очевидно, что если некоторая функция $f(x)$ удовлетворяла условию Сеге на E, то и функция $\chi(z)f(z)$ также будет ему удовлетворять. Функция $R_\chi(z)$ совпадает с функцией $V_\Gamma(z)$, причем $\frac{1}{4\pi}\Delta_{E_\nu} \arg R_\chi(z) = I_\nu(\mu) - I_\nu(\mu^*)$

Следующие утверждения верны для произвольного числа отрезков.

Следствие 4.2 *Пусть A_μ и A_{μ^*} - операторы Якоби из класса $\mathcal{S}'(E)$ Пусть A_{μ^0} - оператор, соответствующий мере $\mu^0 = \chi\mu^*$, где функция $\chi(x) = exp(\tau_k),\ x \in E_k$, а τ_k однозначно определяются из системы*

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{p} \tau_k \Delta_{E_\nu}\tilde{\omega}_k(z) = I_\nu(\mu) - I_\nu(\mu^*); \;\; \sum_{k=1}^{p} \tau_k = 0, \;\; \nu = 1, ..., p.$$

Тогда $(A - A_{\mu^0}) \in \mathcal{K}$.

В частности, если в качестве оператора A_{μ^*} взять произвольный оператор с абсолютно непрерывной мерой, то получим

Следствие 4.3 *Каждый оператор $A_\mu \in \mathcal{S}'(E)$ является компактным возмущением некоторого оператора $A_{\mu^0} \in \mathcal{S}'(E)$, не имеющего изолированных собственных чисел.*

2) Принимая во внимание следствие (4.3), мы можем считать, что мера μ абсолютно непрерывна. Повторяя доказательство теоремы 3.1 видим, что нам остается показать отсутствие сокращения нулей в дроби $\dfrac{\Theta_n(z)\Theta_{n+1}(\infty)}{\Theta_n(\infty)\Theta_{n+1}(z)}$. Напомним, что тэта-функции определены на двулистной римановой поверхности, и каждая имеет на ней ровно $p-1$ ноль. Кроме того, наши тэта-функции возникли из асимптотики ортогональных многочленов, и известно (см. [W]), что все их нули лежат в выпуклой оболочке множества E. С помощью свойств ортогональных многочленов мы можем следить за нулями функций Θ_n и Θ_{n+1} на действительном листе Ω римановой поверхности. Так как мера μ не имеет дискретных масс, то из результатов С.Денисова и Б.Саймона [DS] следует, что нули Θ_n и Θ_{n+1} на множестве $\mathbb{R} \setminus E$ сокращаться не могут. Но совпадение нулей может происходить также и на втором листе $\overline{\Omega}$ римановой поверхности. Предположим, что $\Theta_n(\tilde{z}) = 0$ и $\Theta_{n+1}(\tilde{z}) = 0$, причем $\tilde{z} \in \overline{\Omega}$. Тэта-функции появляются в асимптотических формулах для ортогональных многочленов как метод решения обратной задачи Якоби, которая определяется некоторой системой уравнений (см. [W], теорема 6.2, или [A], теорема W2). Для того, чтобы следить за тем, на каком листе римановой поверхности сидят нули тэта-функции $\Theta_m(z)$ для некоторого m, удобно вернуться к системе в том виде, как она приведена у Видома (см. [W]):

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{p-1} \left(\tilde{\omega}_k(z_j) - \tilde{\omega}_k(z_j')\right) = \sum\limits_{l=1}^{p-1} m_l \Delta_{E_k} \tilde{\omega}_l(z) & \pmod 1 \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{p-1} \epsilon_j \omega_k(z_j) = \Delta_{k,\rho} - \frac{\omega_k(\infty)-1}{2} - m\omega_k(\infty) & \pmod 1 \end{array}, \tag{9}$$

где z_j' - конечные нули производной комплексной функции Грина $G'(z)$, m_l - произвольные натуральные числа. Параметры $\epsilon_j = \pm 1$ и точки z_j однозначно определяются из системы. Точки z_j соответствуют нулям тэта-функции Римана, причем если для некоторой точки z_{j_1} параметр

$\epsilon_{j_1} = +1$, то соответствующая точка принадлежит "физическому" листу римановой поверхности ($z_{j_1} \in \Omega$ или $z_{j_1} \in E$), а если $\epsilon_{j_1} = -1$, то $z_{j_1} \in \overline{\Omega}$.

Добавим к мере μ дискретную массу в точке $\tilde{z}^0 \in \mathbb{R} \setminus E$, являющейся проекцией точки $\tilde{z} \in \overline{\Omega}$, в которой, по нашему предположению, совпадают нули тэта-функций $\Theta_n(z)$ и $\Theta_{n+1}(z)$). Рассмотрим многочлены, ортогональные относительно этой новой меры и найдем их асимптотику. Что при этом изменится в системе (9)? При добавлении к мере ортогональности дискретной массы в точке $\tilde{z}^0$ к правым частям уравнений прибавляются числа $\omega_\kappa(\tilde{z}^0)$, причем в левых частях уравнений (в сумме) уже стоят такие же числа с коэффициентом -1. Перенося в каждом уравнении $\omega_\kappa(\tilde{z}^0)$ из правой части в левую (и учитывая, что перед суммой стоит множитель $1/2$), мы изменим соответствующий коэффициент перед $\omega_\kappa(\tilde{z}^0)$ на $+1$. Следовательно, соответствующие функции $\tilde{\Theta}_n$ и $\tilde{\Theta}_{n+1}$, возникающие из асимптотики многочленов, ортогональных по мере с дополнительной массой в точке $\tilde{z}^0$, будут иметь нули в той же точке, но уже сидящей на действительном листе римановой поверхности. В то же время эти функции получились из асимптотики ортогональных многочленов и, следовательно, не могут иметь совпадающих нулей на Ω. Таким образом мы показали, что совпадать могут только нули, лежащие на самом множестве E. А так как значения гармонических мер в точках, лежащих на E, равны 0 или 1, то, опять используя систему (9) для нулей функций Θ_Λ и Θ^*_Λ, получаем утверждение теоремы.

5 Формулировка основного результата

Напомним, что, как было сказано во введении, из результатов [PY] следует, что асимптотические формулы для элементов матрицы Якоби, соответствующей оператору из класса $\mathcal{S}(E)$, не зависят от сосредоточенной на множестве E сингулярной составляющей спектральной меры (см. [PY], следствие 6.1, а также замечание после леммы 2.2), и все результаты предыдущих параграфов остаются верными и для операторов из $\mathcal{S}(E)$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 5.1 *Пусть множество E является объединением коненого числа отрезков действительной оси. Пусть A_μ и A_{μ^*} - операторы Якоби из класса $\mathcal{S}(E)$ со спектральными мерами μ и μ^* соответственно. Тогда*

1) если $\mathcal{J}_\nu(\mu)\equiv\mathcal{J}_\nu(\mu^*)(\mathrm{mod}\,1)$, *то* $A_\mu - A_{\mu^*}\in\mathcal{K}$;

2) если множество E *является объединением не более чем трех отрезков действительной оси и* $A_\mu - A_{\mu^*}\in\mathcal{K}$, *то* $\mathcal{J}_\nu(\mu)\equiv\mathcal{J}_\nu(\mu^*)(\mathrm{mod}\,1)$, $i=1,2,\ldots,p$;

3) если множество E *является объединением не более чем трех отрезков действительной оси и* $A_\mu - A_{\mu^*}\in\mathcal{K}$, *то* $\mathcal{J}_\nu(\mu)\equiv\mathcal{J}_\nu(\mu^*)(\mathrm{mod}\,1/2)$, $i=1,2,\ldots,p$;

где $\mathcal{J}_\nu(\mu)$ *определены равенством (4).*

В заключение рассмотрим пример, поясняющий, как расположение дополнительных дискретных масс влияет на компактность соответствующего возмущения оператора Якоби. Пусть спектр оператора Якоби A является объединением двух симметрично расположенных отрезков действительной прямой: $\sigma(A)=[-\beta,-\alpha]\cup[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta<+\infty$, а спектральная мера абсолютно непрерывна, и вес ее удовлетворяет условию Сеге. Добавим к мере конечный набор дискретных масс, сосредоточенных в симметрично расположенных точках $\pm z_j^*$ на действительной оси вне $\sigma(A)$. Если число добавленных масс четно, то соответствующее возмущение оператора A будет компактным, т.к. из условия симметричности отрезков следует, что $\omega_k(z_j^*)+\omega_k(-z_j^*)\equiv 0(\mathrm{mod}\,1)$. В случае, когда добавляется нечетное количество масс, из условия симметричности их расположения следует, что одна из масс будет расположена в начале координат, для нее $\omega_1(0)=\omega_2(0)=1/2$, а для остальных точек по-прежнему $\omega_k(z_j^*)+\omega_k(-z_j^*)\equiv 0(\mathrm{mod}\,1)$, и, следовательно, соответствующее возмущение оператора A не будет являться компактным. Кроме того, нетрудно показать, что в последнем случае возмущенный оператор оказывается компактным возмущением оператора $A^{(1)}$, где оператор $A^{(1)}$ соответствует матрице Якоби, которая получается из матрицы Якоби оператора A вычеркиванием первой строки и первого столбца.

References

[A] А.И. Аптекарев, *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода*, Матем. сб., **125(167)**(1984), 231-258.

[Ah] А.И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, 1961.

[D] Б.А. Дубровин, *Тэта-функции и нелинейные уравнения*, УМН, **36**(1981), 11 -80.

[KK1] В.А. Калягин, А.А. Кононова, *Об асимптотике многочленов, ортогональных на системе дуг, по мере, имеющей дискретную часть*, Алгебра и Анализ, принято к публикации, 2008.

[KK2] В.А. Калягин, А.А. Кононова, *О компактных возмущениях предельно-периодического оператора Якоби*, представлено к публикации, 2008.

[NS] Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, М., Наука, 1988.

[R] Е.А. Рахманов, *Об асимптотике отношения ортогональных многочленов*, Матем.сб. **103(145)**(1977), 237-252.

[RS] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т.4: Анализ операторов*, М., Мир, 1977.

[Ch] Н.Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций*, М., Гостехиздат, 1948

[B] B. Beckermann, *Complex Jacobi matrices*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 17-65.

[BKK] B. Beckermann, V.A. Kaliagin, A.A. Kononova, *Mass points and compact perturbation of finite zone Jacobi operator*, preprint.

[DKS] D. Damanik, R. Killip, B. Simon, *Perturbations of orthogonal polynomials with periodic recursion coefficients*, preprint, http://arxiv.org/abs/math/0702388.

[De] S. Denisov, *On Rakhmanov's theorem for Jacobi matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., **132** (2004), 847-852.

[DS] S. Denisov, B. Simon, *Zeros of orthogonal polynomials on the real line*, J. Approx. Theory **121** (2003), 357-364.

[K] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[PY] F. Peherstorfer, P. Yuditskii *Asymptotic behavior of polynomials orthonormal on a homogeneous set* , J. d'Analyse Mathe'matique, **89** (2003), no 1, 113-154.

[R] C. Remling, *The absolutely continuous spectrum of Jacobi matrices*, preprint, (arXiv:0706.1101).

[W] H. Widom, *Extremal Polynomials Associated with a System of Curves and Arcs in the Complex Plane*, Adv. in Mathem., v.3 (1969), n.2, pp.127-232.