ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 27/2008

Функциональный интеграл и осциллятор Лагерра

В. В. БОРЗОВ

Кафедра Математики
С.-Петербургский
университет
телекоммуникаций

Е. В. ДАМАСКИНСКИЙ

Кафедра Математики
Военный Инженерный
Технический Университет

Построен функциональный интеграл, который отвечает случайному процессу, связанному с полиномами Лагерра. Получено интегральное уравнение для вспомогательной функции интеграл от которой равен статсумме, вычисленной по построенному функциональному интегралу. [1]

[1]Работа выполнялась при поддержке РФФИ, грант 06-01-00451

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения

Математического института им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

Известно, что описание квантовых систем с помощью функциональных интегралов столь же удобно, как и с помощью векторов гильбертова пространства и действующих в этом пространстве линейных операторов. Появление понятия "функциональный интеграл", повидимому, надо отнести к работам Н.Винера [1] двадцатых годов прошлого века, а первые физические применения к работам Фейнмана [2] в сороковых годах прошлого столетия (см. также монографию [3]). Математическое обрамление и развитие идей Фейнмана было осуществлено М.Кацем в конце сороковых начале пятидесятых годов (см. [4, 5]). В дальнейшем многие физики и математики внесли свой вклад в развитие и приложения метода функционального интегрирования. Историю вопроса и библиографию можно найти в обзоре И.М.Гельфанда и А.М.Яглома [6], а также И.М. Ковальчика [7]. Укажем также на работы Л.Д.Фаддеева [8, 9], Ф.А. Березина [10], В.Н. Попова [11] и А.Н. Васильева [12] по применению функционального интеграла в квантовой теории поля и статистической физике.

Отметим, что обычный винеровский интеграл является интегралом по траекториям гауссовского случайного процесса, описывающего броуновское движение частицы. Этот гауссовский процесс порождается гауссовской мерой (нормальное распределение в теории вероятностей) являющейся мерой ортогональности классических полиномов Эрмита, через которые выражаются волновые функции простейшей квантовой системы – гармонического осциллятора. Это позволяет предположить существование связи между понятиями "обобщенного осциллятора", порождаемого системой ортогональных полиномов на вещественной оси, случайного прцесса, порождаемого мерой ортогональности этих полиномов и, наконец, функциональным интегралом по траекториям этого случайного процесса.

В настоящей работе мы проиллюстрируем эту связь на сравнительно простом (но не тривиальном) примере обобщенного осциллятора, связанного с классическими полиномами Лагерра, ортогональными по мере, определяющей так называемое показательное распределение в теории вероятностей. Существование меры для соответствующего (не марковского) случайного процесса следует из теоремы Колмогорова. Поэтому рассматриваемый в настоящей работе континуальный интеграл является интегралом Лебега по этой мере, которую мы в дальнейшем будем называть мерой Лагерра. Так же как и для интеграла Винера возможно другое определение этого интеграла. Именно, его можно понимать как предел конечнократных интегралов, получающихся при замене пространства функций конечномерным пространством ступенчатых функций с фиксированными абсциссами узлов. Из результатов работы С.В.Фомина [13] следует, что, как и для винеровского интеграла, оба определения совпадают во всяком случае для непрерывных и ограниченных функционалов.

В качестве достаточно представительного примера вычисления построенного функционального интеграла мы рассмотрим в данной работе интегралы от функционалов вида

$$\exp\left(\int_0^t V(x(\tau))d\tau\right), \tag{1}$$

где $V(x)$ – некоторая ограниченная непрерывная неотрицательная функция на промежутке $[0;\infty)$. Заметим, что функционалы (1) играют важную роль как в теории вероятностей, так и в квантовой механике. Действительно, вычисляя среднее значение такого функционала можно найти характеристическую функцию, а значит и распределение вероятностей случайной величины $\int_0^t V(x(\tau))d\tau$. Среднее значение функционалов вида (1) часто оказывается связанным с некоторым дифференциальным уравнением (или системой дифференциальных уравнений см. [14]). Для среднего значения функционала (1) в случае винеровского интеграла наиболее яркий пример – это связь с уравнением Шредингера в квантовой механике (см. вывод в книге М. Каца [5]). При рассмотрении этого важного и содержательного класса функционалов достаточно ясно проявляются различия между интегралом по мере Винера и построенным нами интегралом по мере Лагерра. Действительно, винеровский интеграл связан с обычным параболическим уравнением

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \tag{2}$$

т.е. с уравнением диффузии с постоянным коэффициентом, в то время как рассматриваемый в работе континуальный интеграл является интегралом в пространстве траекторий по мере соответствующей уравнению диффузии

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi, \tag{3}$$

с переменным коэффициентом, которое является вырожденным параболическим уравнением. Более того, уравнение (2) рассматривается на всей вещественной оси, тогда как уравнение (3) задано на полуоси $[0;\infty)$. Отметим также, что в рассматриваемом нами случае не применимы результаты работы [14] (так как правая часть уравнения (3) не является отрицательно определенным оператором) и среднее значение функционала (1) по мере Лагерра связано не с параболическим дифференциальным уравнением 2-го порядка, а только с некоторым интегральным уравнением типа Вольтерра

$$f(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, \xi)\psi(x, \xi) d\xi, \tag{4}$$

где $K(x, x) = \infty$. Возможно, это последнее обстоятельство обусловлено тем, что рассматриваемый нами случайный процесс не является марковским (хотя переходные вероятности и удовлетворяют некоторому обобщенному уравнению Смолуховского - Маркова - Чэпмена - Колмогорова [?]).

В заключение отметим, что данная работа носит предварительный характер. Многие важные вопросы связанные с изучением функционального интеграла по мере Лагерра (исследование носителя меры Лагерра, описание класса функционалов интегрируемых по этой мере, возможные физические приложения, а также возможность записи с помощью таких интегралов решений некоторых вырожденных параболических дифференциальных уравнений) требует дополнительных исследовний.

2 Обобщенный осциллятор

Опишем вкратце некоторые основные этапы построения осцилляторо-подобной системы по заданному семейству полиномов $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, ортогональных по положительной борелевской мере μ на вещественной оси R^1, для которой конечны все моменты

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mu(dx), \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

Детальное рассмотрение этой конструкции и доказательства приведены в работах [16, 17] и мы не будем воспроизводить их здесь. Пусть полиномы $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ определяются с помощью рекуррентного соотношения

$$x\psi_n(x) = b_n\psi_{n+1}(x) + b_{n-1}\psi_{n-1}(x), \tag{6}$$

$$n \geq 0; \qquad \psi_0(x) = 1.$$

которому соответствует матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & \ldots \\ b_0 & 0 & b_1 & \ldots \\ 0 & b_1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а соотношение ортогональности имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_k(x)\mu(dx) = \delta_{n,k}. \tag{8}$$

Эта система образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}_\mu = \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}; \mu(dx)\right).$$

Определим в $\mathcal{H}_\mu$ аналоги операторов координаты X_μ, P_μ, импульса P_μ и гамильтониана

$$\mathrm{H}_\mu = \mathrm{X}_\mu^{\,2} + \mathrm{P}_\mu^{\,2} \tag{9}$$

задав их действие на векторах базиса стандартными формулами

$$\begin{cases} \mathrm{X}_\mu\psi_n(x) = b_{n-1}\psi_{n-1}(x) + b_n\psi_{n+1}(x), \\ \mathrm{P}_\mu\psi_n(x) = i\left(b_{n-1}\psi_{n-1}(x) - b_n\psi_{n+1}(x)\right), \\ \mathrm{H}_\mu\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x) \end{cases} \tag{10}$$

где $\quad \lambda_n = 2(b_{n-1}^2 + b_n^2)$.

Пространство $\mathcal{H}_\mu$ можно рассматривать как реализацию пространства Фока $\mathcal{F}_\mu$ с лестничными операторами рождения a_μ^+ и уничтожения a_μ^-

$$\begin{aligned} a_\mu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{X}_\mu + i\mathrm{P}_\mu\right), \\ a_\mu^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{X}_\mu - i\mathrm{P}_\mu\right), \end{aligned} \tag{11}$$

действие которых на элементы базиса имеет вид

$$\begin{aligned} a_\mu^+\psi_n(x) &= \sqrt{2}b_n\psi_{n+1}(x), \\ a_\mu^-\psi_n(x) &= \sqrt{2}b_{n-1}\psi_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Определим в пространстве $\mathcal{F}_\mu$ оператор числа N_μ, нумерующий элементы базиса (аналог оператора числа частиц)

$$\mathrm{N}_\mu\psi_n(x) = n\,\psi_n(x) \tag{13}$$

и операторную функцию $\mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu)$ оператора N_μ положив

$$\mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu)\psi_n(x) = b_{n-1}^{\,2}\,\psi_n(x). \tag{14}$$

Операторы a_μ^+, a_μ^-, и N_μ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned}
\left[a_\mu^-, a_\mu^+\right] &= 2\left(\mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu + \mathrm{I}_\mu) - \mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu)\right), \\
\left[\mathrm{N}_\mu, a_\mu^\pm\right] &= \pm a_\mu^\pm.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ассоциативную алгебру $\mathcal{A}_\mu$, порождаемую генераторами $a_\mu^\pm$, N_μ, удовлетворяющими указанным перестановочным соотношениям, будем называть **обобщенным осциллятором, соответствующим семейству ортогональных полиномов** $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$.

Алгебра $\mathcal{A}_\mu$ имеет нетривиальный центр, порождаемый элементом

$$\mathcal{C} = 2\mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu) - a_\mu^+ a_\mu^-, \tag{16}$$

так что она, в отличии от алгебры стандартного бозонного осциллятора, имеет и нефоковские представления. Фактор-алгебру алгебры $\mathcal{A}_\mu$ по ее центру будем называть обобщенной алгеброй Гейзенберга.

Имеется два случая когда алгебра обобщенного осциллятора определяется корректно (и без дополнительных усилий).

1. $\mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu)$ - многочлен от N_μ (этот случай включает все обобщенные осцилляторы связанные с классическими ортогональными многочленами непрерывного аргумента);

2. $\mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu)$ не является многочленом от N_μ но удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\alpha \mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu + \mathrm{I}_\mu) + \mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu) + \gamma \mathrm{B}(\mathrm{N}_\mu - \mathrm{I}_\mu) = 0 \tag{17}$$

для некоторых чисел α и γ. Соответствующий осциллятор естественно назвать обобщенным осциллятором Фибоначчи. (Определяемый такими соотношениями класс обобщенных осцилляторов включает практически все варианты деформированных осцилляторов, исследованных к настоящему времени).

3 Полиномы Лагерра и осциллятор Лагерра

Полиномы Лагерра определяются соотношением

$$\mathrm{L}_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_1F_1\left(\left.{}^{-n}_{\alpha+1}\right| x\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}, \tag{18}$$

где символ Похгаммера определяется соотношениями

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1); \qquad (a)_0 = 1;$$

а обобщенные биномиальные коэффициенты вычисяются по формуле

$$\binom{n+\alpha}{n-\nu} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-\nu+1)\Gamma(\alpha+\nu+1)}$$

В гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H}_\mu^L = \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}_+^1; x^\alpha e^{-x} dx\right) \tag{19}$$

функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}}\,\mathrm{L}_n^\alpha(x) \tag{20}$$

образуют ортонормированный базис.

Рекуррентные соотношения для этих функций имеют вид

$$x\psi_n(x) = b_n\psi_{n+1}(x) + (2n+\alpha+1)\psi_n(x) + b_{n-1}\psi_{n-1}(x), \quad n \geq 0; \tag{21}$$

с начальным условием

$$\psi_0(x) = 1,$$

где

$$b_n = -\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}. \tag{22}$$

Здесь матрица Якоби имеет ненулевую диагональ и для построения обобщенного осциллятора следует перейти к другим операторам координаты и импульса

$$\widetilde{\mathrm{X}}_\mu = \mathrm{Re}(\mathrm{X}_\mu - \mathrm{P}_\mu), \qquad \widetilde{\mathrm{P}}_\mu = -i\mathrm{Im}(\mathrm{X}_\mu - \mathrm{P}_\mu) \tag{23}$$

и гамильтониану

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\mu = \widetilde{\mathrm{X}}_\mu^{\,2} + \widetilde{\mathrm{P}}_\mu^{\,2}, \tag{24}$$

которые на элементах базиса $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ действуют по тем же формулам (10).

Используя дифференциальный оператор

$$\mathrm{K} = x\frac{d}{dx},$$

такой что

$$\mathrm{K}\psi_n(x) = b_{n-1}\psi_{n-1}(x) + n\psi_n(x) \tag{25}$$

для операторов $\widetilde{\mathrm{X}}_\mu$, $\widetilde{\mathrm{P}}_\mu$ и $\widetilde{\mathrm{H}}_\mu$ получаем выражения

$$\begin{cases} \widetilde{\mathrm{X}}_\mu = 2(\mathrm{K} - \mathrm{N}_\mu) + [\mathrm{N}_\mu, \mathrm{X}_\mu], \\ \widetilde{\mathrm{P}}_\mu = -i[\mathrm{N}_\mu, \mathrm{X}_\mu], \\ \widetilde{\mathrm{H}}_\mu = 4(\mathrm{N}_\mu^{\,2} - \mathrm{K}^2) + 2((\mathrm{K} - \mathrm{N}_\mu)\mathrm{X}_\mu + \\ \qquad\quad + \mathrm{X}_\mu(\mathrm{K} - \mathrm{N}_\mu)) + 4(\alpha+1)(\mathrm{N}_\mu - \mathrm{K}). \end{cases} \tag{26}$$

Уравнение на собственные значения для гамильтониана

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\mu\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x), \quad \lambda_n = 4\left(n^2 + (\alpha+1)n + \frac{\alpha+1}{2}\right), \quad n \geq 0, \tag{27}$$

эквивалентно дифференциальному уравнению для полиномов Лагерра

$$x\left(\mathrm{L}_n^\alpha(x)\right)'' + (\alpha + 1 - x)\left(\mathrm{L}_n^\alpha(x)\right)' + n\left(\mathrm{L}_n^\alpha(x)\right) = 0, \tag{28}$$

Наконец перестановочные соотношения операторов рождения и уничтожения осциллятора Лагерра имеют вид

$$[\widetilde{a}_\mu^-, \widetilde{a}_\mu^+] = 2\mathrm{N}_\mu + (\alpha+1)\mathrm{I}_\mu. \tag{29}$$

4 Функциональный интеграл для осциллятора Лагерра

4.1 Построение случайного процесса $X^L(t)$ связанного с полиномами Лагерра

Приведем некоторые обозначения и результаты относящиеся к случайным процессам. Обозначим

$$f_n(x_n, t_n; \ldots x_2, t_2; x_1, t_1), \qquad n \geq 1, \tag{30}$$

n-точечную плотность случайного процесса $x(t)$, где $x_k = x(t_k)$. Тогда

$$f_n(x_n, t_n; \ldots x_2, t_2; x_1, t_1) = p_n(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \ldots x_2, t_2; x_1, t_1) f_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}; \ldots x_2, t_2; x_1, t_1), \tag{31}$$

где $p_n(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \ldots x_2, t_2; x_1, t_1)$ обозначает условную плотность вероятности. Заметим, что в случае марковского процесса

$$p_n(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \ldots x_2, t_2; x_1, t_1) = p_2(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \qquad n \geq 3. \tag{32}$$

В работе [15] показано, что

$$p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_3(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1) p_2(x_2, t_2; x_1, t_1) f_1(x_1, t_1) dx_1}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_2, t_2; x_1, t_1) f_1(x_1, t_1) dx_1}. \tag{33}$$

Уравнение Смолуховского - Маркова - Чэпмена - Колмогорова имеет вид

$$p_2(x_3, t_3 | x_1, t_1; u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2; u) p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1; u) dx_2, \tag{34}$$

при условии

$$p_2(x, t | y, t) = \delta(x - y). \tag{35}$$

Перейдем к построению случайного процесса связанного с полиномами Лагерра. Мы будем рассматривать случай полиномов Лагерра с $\alpha = 0$, $\mathrm{L}_n(x) = \mathrm{L}_n^0(x)$. Система $\{\mathrm{L}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортонормирована по мере

$$d\mu_L(x) = f_L(x) dx \tag{36}$$

с плотностью

$$f_L(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

соответствующей показательному закону распределения в теории вероятностей.

Случайный процесс $X^L(t)$, отвечающий $d\mu_L$, определяется последовательностью n-точечных плотностей распределения вероятностей

$$\left\{ f_n^L(x_n, t_n; \ldots x_2, t_2; x_1, t_1) \right\}_{n=1}^{\infty}, \tag{37}$$

где

$$f_1^L(x_1, t_1) = \begin{cases} \frac{1}{t_1} e^{-\frac{x_1}{t_1}} & x_1 \geq 0, \\ 0 & x_1 < 0. \end{cases} . \tag{38}$$

Для $n \geq 2$ при

$$t = t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 \geq 0$$

и

$$x = x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1 \geq 0, \quad (x(0) = 0)$$

имеем

$$f_n^L(x_n,t_n;\dots x_2,t_2;x_1,t_1)=\\ \frac{e^{-x_1/t_1}}{t_1}\cdot\frac{e^{-(x_2-x_1)/(t_2-t_1)}}{t_2-t_1}\cdot\ldots\cdot\frac{e^{-(x_n-x_{n-1})/(t_n-t_{n-1})}}{t_n-t_{n-1}}. \tag{39}$$

Обозначив $\beta_k=(t_k-t_{k-1})^{-1}$ и считая $t_0=0$, $x_0=0$ имеем

$$f_n^L(x_n,t_n;\dots x_1,t_1)=\left(\prod_{i=1}^n\beta_i\right)\cdot\exp\left(-\sum_{k=1}^n\beta_k(x_k-x_{k-1})\right). \tag{40}$$

где $t_n>t_{n-1}>\ldots>t_1\ge 0$ и $x_n>x_{n-1}>\ldots>x_1\ge 0$.

Помимо обычных свойств плотностей вероятности, для того что бы последовательность $\left\{f_n^L\right\}_{n=1}^\infty$ однозначно определяла случайный процесс $X^L(t)$ достаточно проверить выполнение следующих свойств.

1) **Свойство инвариантности** Пусть
$\sigma_n=(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ — некоторая перестановка набора $\sigma_0=(1,2,\ldots,n)$. Обозначим

$$f_n^L(\sigma_n)=f_n^L(x_{i_n},t_{i_n};x_{i_{n-1}},t_{i_{n-1}}\dots x_{i_1},t_{i_1}), \tag{41}$$

При $t_{i_n}>t_{i_{n-1}}>\ldots>t_{i_1}\ge 0$ имеем

$$f_n^L(x_{i_n},t_{i_n};x_{i_{n-1}},t_{i_{n-1}}\dots x_{i_1},t_{i_1})=\left(\prod_{k=1}^n\beta_{i_k}\right)\cdot\exp\left(-\sum_{k=1}^n\beta_{i_k}(x_{i_k}-x_{i_{k-1}})\right), \tag{42}$$

и $f_n^L(\sigma_n)=0$ в остальных случаях. Тогда для любой перестановки σ имеем

$$f_n^L(\sigma_n)=f_n^L(\sigma_0). \tag{43}$$

2) **Условия согласования** Для любого $m\quad(1\le m\le n-1)$ справедливы условия

$$\int_{x_m}^\infty \mathrm{d}\,x_{m+1}\int_{x_{m+1}}^\infty \mathrm{d}\,x_{m+2}\ldots\ldots\int_{x_{n-1}}^\infty \mathrm{d}\,x_n f_n^L(x_n,t_n;\dots x_1,t_1)=f_m^L(x_m,t_m;\dots x_1,t_1). \tag{44}$$

Тогда по теореме Колмогорова предельный процесс $X^L(t)$ однозначно определен и существует мера, являющаяся пределом последовательности мер

$$\mu_n^L=f_n^L\,\mathrm{d}\,x_1\ldots\mathrm{d}\,x_n. \tag{45}$$

Повидимому. носителем меры μ^L является класс ограниченных функций монотонно возрастающих на отрезке $[0,t]$ и таких, что $X(0)=0$.

Несмотря на то, что процесс $X^L(t)$ не является марковским, для него выполняется уравнение Смолуховского - Маркова - Чэпмена - Колмогорова которое в этом случае имеет вид

$$p_2(y,t|x,0)=\int_x^y p_2(y,t|z,\tau)p_2(z,\tau|x,0)dz, \tag{46}$$

где

$$p_2(z,\tau|x,0)=\frac{1}{\tau}e^{-(z-x)/\tau}, \quad (0<x<z,\ \tau>0) \tag{47}$$

$$p_2(y,t|z,\tau)=\frac{t-2\tau}{t(t-\tau)}\cdot\frac{e^{-(y-x)/t}}{e^{-(y-x)/(t-\tau)}-e^{-(y-x)/(\tau)}}\cdot\cdot e^{-(y-z)/(t-\tau)}. \tag{48}$$

при $0<z<y,\ 0<\tau<t.$

4.2 Построение функционального интеграла

Так как для вероятностей случайного процесса $x^L(t)$, такого что $x(t=0)=0$ при $t_n>t_{n-1}>\ldots>t_1>0$ и $x_n>x_{n-1}>\ldots>x_1>0$ справедливо соотношение

$$P(a_1<x(t_1)<b_1;\ldots a_n<x(t_n)<b_n)= \\ \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f_n^L(x_n,t_n;\ldots x_2,t_2;x_1,t_1)\mathrm{d}\,x_1\ldots\mathrm{d}\,x_n, \tag{49}$$

то при $(x_0=0)$ имеем

$$P(a_1<x(t_1)<b_1;\ldots a_n<x(t_n)<b_n)= \\ \int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}\beta_1\ldots\beta_n\cdot\exp\left(-\sum_{k=1}^n\beta_k(x_k-x_{k-1})\right)\mathrm{d}\,x_1\ldots\mathrm{d}\,x_n, \tag{50}$$

Определим соответствующий процессу $X^L(t)$ функциональный интеграл от функционала $F(x(\tau))$ по мере μ^L формулой $(x_0=0)$

$$\int_M F(x(\tau))\mathrm{d}_L x= \\ \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\mathrm{d}\,x_1\int_{x_1}^\infty\mathrm{d}\,x_2\ldots\int_{x_{n-1}}^\infty\mathrm{d}\,x_n F(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \left(\prod_{i=1}^n\beta_i\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^n\beta_k(x_k-x_{k-1})\right). \tag{51}$$

(конечно, подразумевается, что при этом $\max_{1\le k\le n}(x_k - x_{k-1}) \to 0$, при $n\to\infty$)

Найдем математическое ожидание случайного процесса $X^L(t)$. Имеем,

$$m_L(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x_1 \mathrm{d}\, x_1 \int_{x_1}^\infty \mathrm{d}\, x_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^\infty \mathrm{d}\, x_n \left(\prod_{i=1}^n \beta_i\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^n \beta_k (x_k - x_{k-1})\right). \tag{52}$$

Учитывая условие согласования, получим

$$m_L(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x_1}{t} e^{-\frac{x_1}{t}} \mathrm{d}\, x_1 = t \tag{53}$$

Аналогично для корреляционной функции

$$\begin{aligned} K_L(t_1,t_2) &= \int_M x(t_1)x(t_2)\mathrm{d}_L x = \\ &\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty x_1 \mathrm{d}\, x_1 \int_{x_1}^\infty x_2 \mathrm{d}\, x_2 \int_{x_2}^\infty \mathrm{d}\, x_3 \cdots \int_{x_{n-1}}^\infty \mathrm{d}\, x_n \left(\prod_{i=1}^n \beta_i\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^n \beta_k (x_k - x_{k-1})\right) = \\ &\int_0^\infty x_1 \mathrm{d}\, x_1 \int_{x_1}^\infty x_2\, f_2^L(x_2,t_2;x_1,t_1;0,0)\mathrm{d}\, x_2 = \\ &\int_0^\infty x_1 \mathrm{d}\, x_1 \int_{x_1}^\infty x_2 \beta_1\beta_2\, e^{-\beta_1 x_1 - \beta_2(x_2 - x_1)} \mathrm{d}\, x_2, \end{aligned} \tag{54}$$

так что окончательно получаем

$$K_L(t_1,t_2) = \frac{2}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_1\beta_2} = t_1(t_1+t_2), \quad 0 < t-2 < t_1. \tag{55}$$

Напомним, что при $t_1 > t_2 > 0$

$$K_L(t_1,t_2) = K_L(t_2,t_1).$$

Мы не будем выписывать довольно громоздкое выражение для момента произвольного порядка

$$\begin{aligned} \int_M x(t_1)x(t_2)\ldots x(t_n)\mathrm{d}_L x = \\ \int_0^\infty x_1 \mathrm{d}\, x_1 \int_{x_1}^\infty x_2 \mathrm{d}\, x_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^\infty x_n \\ \left(\prod_{i=1}^n \beta_i\right) \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^n \beta_k (x_k - x_{k-1})\right)\mathrm{d}x_n. \end{aligned} \tag{56}$$

5 Вычисление $E^L\left[\exp\left(-\int_0^t V(x(\tau))\mathbf{d}\tau\right)\right]$

В квантовой механике вычисление статсуммы $E\left(e^{-\int_0^t V d\tau}\right)$ (интеграл берется по мере Винера) можно свести к решению дифференциального уравнения Шредингера. Возникает естественный вопрос о возможности получения аналогичного результата для построенного выше функционального интеграла по мере μ^L. При обсуждении этой задачи мы будем следовать схеме предложенной в работе М.Каца (1954г.) изложение которой имеется в монографии [5].

Указанная схема состоит из трех этапов:

1. Статсумма представляется в виде интеграла от некоторой вспомогательной функции

$$E\left(e^{-\int_0^t V d\tau}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x,t)dx.$$

2. Находится основное интегральное уравнение для функции $Q(x,t)$.

3. Интегральному уравнению сопоставляется некоторое дифференциальное уравнение, которым, в стандартном случае винеровской меры, является уравнение Шредингера.

В случае рассматриваемого функционального интеграла, связанного с полиномами Лагерра удалось осуществить только первые два этапа.

Итак, пусть $V(x)$ непрерывная, ограниченная функция заданная на отрезке $[0,\infty)$

$$0 \le V(x) < B \quad \Rightarrow \quad 0 < \int_0^t V(x(\tau))\mathrm{d}\tau < Bt. \tag{57}$$

Записав

$$\exp\left(-\int_0^t V(x(\tau))\mathrm{d}\tau\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\int_0^t V(x(\tau))\mathrm{d}\tau\right)^k, \tag{58}$$

получим

$$E^L\left[\exp\left(-\int_0^t V(x(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\mu_k(t) \tag{59}$$

$$\text{где} \tag{60}$$

$$\mu_k(t) = E^L\left[\left(\int_0^t V(x(\tau))\mathrm{d}\tau\right)^k\right]. \tag{61}$$

Используя определение функционального интеграла имеем

$$\begin{aligned}\mu_k(t) = k!\int_0^t d\tau_n\int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1}\ldots\int_0^{\tau_2}\tau_1\int_0^{\infty} d\xi_1 V(\xi_1)f_1^L(\xi_1,\tau_1)\times \\ \times\int_0^{\infty} d\xi_2 V(\xi_2)f_1^L(\xi_2-\xi_1,\tau_2-\tau_1)\ldots \\ \ldots\int_0^{\infty} d\xi_n V(\xi_n)f_1^L(\xi_n-\xi_{n-1},\tau_n-\tau_{n-1}).\end{aligned} \tag{62}$$

Обозначим

$$Q_0(x,t) = \frac{1}{t}e^{-\frac{x}{t}}, \quad (x>0,\ t>0, \tag{63}$$

$$Q_{n+1}(x,t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\infty V(\xi)Q_n(\xi,\tau)f_1^L(x-\xi,t-\tau)\mathrm{d}\,\xi \tag{64}$$

Можно показать, что

$$\mu_n(t) = n!\int_0^\infty Q_n(x,t)\mathrm{d}\,x. \tag{65}$$

По индукции получаем

$$0 < Q_n(x,t) < \frac{(Bt)^n}{n!}Q_0(x,t). \tag{66}$$

Тогда ряд

$$Q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n Q_n(x,t) \tag{67}$$

сходится и

$$|Q(x,t)| < e^{Bt}Q_0(x,t).$$

Умножая (64) на $(-1)^{n+1}$, суммируя по n и добавляя $Q_0(x,t)$ получаем интегральное уравнение для функции $Q(x,t)$

$$Q(x,t) + \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_0^\infty V(\xi)Q(\xi,\tau)f_1^L(x-\xi,t-\tau)\mathrm{d}\,\xi = Q_0(x,t). \tag{68}$$

Для сравнения приведем аналогичное уравнение из работы М.Каца

$$Q^W(x,t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)Q^W(\xi,\tau)\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2(t-\tau)}\right)d\xi = Q_0^W(x,t), \tag{69}$$

где

$$Q_0^W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

$$Q_{n+1}^W(x,t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi)Q_n^W(\xi,\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{2(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\xi. \tag{70}$$

Вычисляя производные $\frac{\partial Q^W}{\partial t}$, $\frac{\partial Q^W}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Q^W}{\partial x^2}$, можно показать, что функция Q^W удовлетворяет уравнению Шредингера. В нашем случае этот прием не применим так как производная $\frac{\partial Q}{\partial x}$ не существует. Тем самым мы получили отрицательный ответ на на 3-ий вопрос поставленный в начале этого раздела. Именно, в нашем случае вычисление статсуммы нельзя свести к решению дифференциалього уравнения и следует использовать интегральное уравнение (68) или эквивалентное ему уравнение, которое получается из (68) применением преобразования Лапласа.

Применим к (68) преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ по переменной t. Обозначив $\mathcal{L}[Q(x,t)] = \Psi(x,\lambda)$ и используя формулу (3.471.9) из [18]

$$\mathcal{L}[Q_0(x,t)] = \int_0^\infty e^{\lambda t}\frac{e^{-x/t}}{t}\mathrm{d}\,t = 2K_0(2\sqrt{x\lambda}), \qquad \mathrm{Re}x > 0, \quad \mathrm{Re}\lambda > 0, \tag{71}$$

где K_0 - модифицированная функция Бесселя 3-го рода (функция Макдональда), получаем

$$\Psi(x,\lambda) + \int_0^\infty V(\xi)u(x-\xi)\Psi(x,\lambda)2K_0(2\sqrt{(x-\xi)\lambda})\mathrm{d}\,\xi = 2K_0(2\sqrt{x\lambda}), \tag{72}$$

где $u(x-\xi)$ - функция единичного скачка

$$u(x-\xi) = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad x \geq \xi \\ 0 \quad \text{при} \quad x < \xi \end{cases}. \tag{73}$$

Заметим, что как и уравнение (68), полученное уравнение (72) является уравнением Вольтерра.

В заключение работы получим одно утверждение относительно ядра интегрального уравнения (68).

Теорема 5.1. *Обозначим*

$$K(x,\xi;t) = V(\xi)\, u(x-\xi)\, \int_0^t d\tau Q_0(x-\xi, t-\tau) \tag{74}$$

ядро интегрального уравнения (68). Тогда при $p \geq 1$, $t > 0$, $V(\xi) \in L^p(\mathbb{R}^1_+)$, $V \geq 0$

$$K(x,\xi;t) \in L^p(\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+). \tag{75}$$

Доказательство. Имеем

$$||K||^p_p = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi |K(x,\xi;t)|^p = \int_0^\infty \mathrm{d}\xi V(\xi)^p \int_0^\infty \mathrm{d}x u(x-\xi)\left(\int_0^t \mathrm{d}\tau Q_0(x-\xi,t-\tau)\right)^p. \tag{76}$$

Так как

$$\int_0^t \mathrm{d}\tau Q_0(x-\xi,t-\tau) = \int_0^t \mathrm{d}\tau \frac{\exp\left(-\frac{x-\xi}{t-\tau}\right)}{t-\tau} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}e^{-\frac{x-\xi}{\sigma}},$$

то делая замену $y = x - \xi$ и учитывая (72) имеем

$$||K||^p_p == ||V||^p_p = \int_0^\infty \mathrm{d}y\left(\int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}e^{-\frac{y}{\sigma}}\right)^p.$$

При $\sigma = t\alpha$ и $y = zt$ получаем

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y \left(\int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} e^{-\frac{y}{\sigma}} \right)^p = \int_0^\infty \mathrm{d}z \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} e^{-z/\alpha} \right)^p .$$

или учитывая формулы (3.471.2) и (9.236) из [18]

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y \left(\int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} e^{-\frac{y}{\sigma}} \right)^p == t \int_0^\infty \mathrm{d}z \left(li(e^{-z}) \right)^p A_p, \tag{77}$$

где $li(z)$ — интегральный логарифм. Можно показать, что интеграл в правой части (77) сходится. Обозначив этот интеграл A_p имеем

$$||K||_p^p = t \, ||V||_p^p \, A_p \tag{78}$$

$\square$

Можно показать, что ядро $K(x, \xi; t)$ не принадлежит $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+)$.

Из доказанной теоремы и теории интегральных уравнений [19] следует, что интегральное уравнение (68) имеет единственное решение $Q(x, t)$ при

$$||V||_p < \frac{1}{t^{1/p}} \frac{1}{{A_p}^{1/p}}.$$

Заметим, что если рассматривать решения $Q(x, t)$ на $[0, \infty]$ при $x \in \mathbb{R}^1_+$, то вместо функционала $\exp\left(-\int_0^t \mathrm{d}\tau V(x(\tau)) \right)$ следует взять функционал

$$\exp \left(-\frac{1}{t^{1/p}} \int_0^t \mathrm{d}\tau V(x(\tau)) \right).$$

Литература

[1] N.Wiener, *Differential space*, J. Math. Phys., **2**, no.3, 131-174 (1923); *The average value of functional*, Proc. London Math. Soc., **22**, no.6, 454-467 (1924);

[2] R.P.Feynman, *Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys., **20**, no.2, 367-387 (1948) (см. русский перевод в сб. "Новейшее развитие квантовой электродинамике" ИЛ, М., 1954); *Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interactions*, Phys. Rev. **80**, no.3, 440-457 (1950) (см. русский перевод в сб. "Новейшее развитие квантовой электродинамике" ИЛ, М., 1954);

[3] Р.Фейнман, А.Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, МИР, М., 1968;

[4] М.Кац, *On distribution of certain Wiener functionals*, Trans. AMS, **65**, no.1, 1-13 (1949);

[5] М.Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, МИР, М., 1965;

[6] И.М.Гельфанд, А.М.Яглом, *Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике*, УМН, **11**, вып.1, 77-114 (1956);

[7] И.М.Ковальчик, *Интеграл Винера*, УМН, **18**, вып.1, 97-134 (1963);

[8] Л.Д.Фаддеев, *Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов*, ТМФ **1**, вып.1, 3-18 (1969);

[9] А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, 2-е изд., "Наука", ФМ, М., 1988;

[10] Ф.А.Березин, *Невинеровские континуальные интегралы*, ТМФ, **6**, вып.2, 194-212 (1971);

[11] В.Н.Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, М., "Атомиздат", 1976;

[12] А.Н.Васильев *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*, Изд-во ЛГУ, Л., 1976;

[13] С.В.Фомин, *О включении интеграла по мере Винера в общую теорию интеграла Лебега*, сб. Научные докл. высш. школы, физ.-матем. науки **2** 1958;

[14] Ю.Л.Далецкий, *Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями*, УМН, **17**, вып.5, 3-115 (1962);

[15] P.Hänggi, H.Thomas, Z. für Phys., **B26**, 85-97 (1977);

[16] V.V. Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras*, Integral Transforms and Special Functions., **12**, no.2, 115-138 (2001);

[17] В.В.Борзов, *Обобщенный осциллятор и его когерентные состояния*, ТМФ, **153**, no.3, 1656-1670 (2007);

[18] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик, *Таблицы интегралов сумм рядов и произведений*, ГИФМЛ, 1983.

[19] В.И.Смирнов, *Курс высшей математики*, том.4, часть 1, "Наука", М., 1974.