ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Препринт ПОМИ — 26/2008

К вопросу о точном квантовом L–операторе для двумеризованной A_n модели Тода

А.Г. Быцко,[1,*] И.Ю. Давыденкова[2]

1. Санкт–Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, Санкт–Петербург, 191023, Россия

2. Физический факультет
Санкт–Петербургского Государственного Университета
Ульяновская 3, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504 ,Россия

Аннотация

Для двумеризованной A_n квантовой модели Тода на решетке найдена поправка второго порядка по $\varepsilon = m\Delta$ (Δ — шаг решетки) к L–оператору Джимбо с учетом которой RLL соотношения выполняются с точностью до $o(\varepsilon^2)$. Также рассмотрен вопрос о поправке третьего порядка.

Декабрь 2008

* Работа поддержана грантами РФФИ 07–02–92166 и 08–01–00638

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение и основные результаты

В классической (1+1)–мерной модели Тода для аффинной алгебры $A^{(1)}_{N-1}$ динамика скалярных полей φ_a, $a=1,\ldots,N$, ассоциированных с узлами диаграммы Дынкина, задается следующими уравнениями движения:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big)\,\varphi_a=\tfrac{2m^2}{\beta}\,\big(e^{2\beta(\varphi_{a+1}-\varphi_a)}-e^{2\beta(\varphi_a-\varphi_{a-1})}\big)\,. \tag{1}$$

Здесь и далее значения индексов, нумерующих узлы диаграммы Дынкина, берутся по модулю N, в частности $\varphi_{N+a}\equiv\varphi_a$. Соответствующие гамильтониан и пуассонова структура имеют вид

$$H=\sum_{a=1}^{N}\int dx\Big(\tfrac{1}{2}\pi_a^2+\tfrac{1}{2}\big(\partial_x\varphi_a\big)^2+\tfrac{m^2}{\beta^2}\,e^{2\beta(\varphi_{a+1}-\varphi_a)}\Big)\,, \tag{2}$$

$$\{\pi_a(x),\varphi_b(y)\}=\delta_{ab}\,\delta(x-y)\,. \tag{3}$$

Эта модель является интегрируемой и допускает представление нулевой кривизны с U–V парой вида [1, 2, 3]

$$U(\lambda)=\sum_{a=1}^{N}\beta\,\pi_a\,e_{aa}+m\sum_{a=1}^{N}e^{\beta(\varphi_{a+1}-\varphi_a)}\big(\lambda^{\delta_{a,N}}e_{a,a+1}+\lambda^{-\delta_{a,N}}e_{a+1,a}\big)\,, \tag{4}$$

$$V(\lambda)=\sum_{a=1}^{N}\beta\,\partial_x\varphi_a\,e_{aa}+m\sum_{a=1}^{N}e^{\beta(\varphi_{a+1}-\varphi_a)}\big(\lambda^{\delta_{a,N}}e_{a,a+1}-\lambda^{-\delta_{a,N}}e_{a+1,a}\big)\,, \tag{5}$$

где $\{e_{ab}\}$ — базисные матрицы, т.е., $(e_{ab})_{ij}=\delta_{ai}\delta_{bj}$.

Для матрицы U выполняются соотношения, называемые фундаментальной скобкой Пуассона:

$$\big\{U(\lambda)\otimes\mathbb{I},\mathbb{I}\otimes U(\mu)\big\}=\big[r\big(\tfrac{\lambda}{\mu}\big),U(\lambda)\otimes\mathbb{I}+\mathbb{I}\otimes U(\mu)\big]\,. \tag{6}$$

Здесь $r(\lambda)$ — классическая тригонометрическая r–матрица алгебры A_{N-1}, имеющая следующий вид [5]

$$r(\lambda)=\frac{\beta^2}{\lambda-1}\Big((\lambda+1)\sum_{a=1}^{N}e_{aa}\otimes e_{aa}+2\big(\sum_{a<b}^{N}+\lambda\sum_{a>b}^{N}\big)e_{ab}\otimes e_{ba}\Big)\,. \tag{7}$$

Одним из способов регуляризации модели при квантовании, сохраняющих важное свойство интегрируемости, является построение ее решеточного аналога [3, 4]. При этом канонические переменные, относящиеся к разным узлам решетки, коммутируют, а для переменных в одном узле выполнются коммутационные соотношения

$$[\pi_a,\varphi_b]=-i\,\hbar\,\delta_{ab}\,. \tag{8}$$

В классическом непрерывном пределе соотношения (8) воспроизводят пуассонову структуру (3), если считать, что

$$\pi_a^n=\Delta\,\pi_a(x)\qquad\varphi_a^n=\varphi_a(x)\,,\qquad x=n\Delta\,, \tag{9}$$

где Δ — шаг решетки и n — номер узла (который мы в дальнейшем не будем указывать явно).

Квантовым решеточным аналогом фундаментальной скобки Пуассона (6) является квадратичное перестановочное соотношение:

$$R(\tfrac{\lambda}{\mu})\ L_1(\lambda)\, L_2(\mu) = L_2(\mu)\, L_1(\lambda)\ R(\tfrac{\lambda}{\mu})\,, \tag{10}$$

где R–матрица должна удовлетворять уравнению Янга–Бакстера:

$$R_{12}(\tfrac{\lambda}{\mu})\, R_{13}(\lambda)\, R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)\, R_{13}(\lambda)\, R_{12}(\tfrac{\lambda}{\mu}) \tag{11}$$

и в классическом пределе переходить в r–матрицу (7):

$$R(\lambda) = \mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + i\hbar\ r(\lambda) + o(\hbar)\,. \tag{12}$$

Квантовый L–оператор в классическом непрерывном пределе должен переходить в матрицу $U(\lambda)$:

$$L(\lambda) = \mathbb{I} + \Delta\, U(\lambda) + o(\Delta)\,. \tag{13}$$

Квантовая R–матрица, удовлетворяющая свойствам (11)–(12) имеет вид [6, 5]

$$R(\lambda) = \frac{q\lambda - q^{-1}}{\lambda - 1}\sum_{a=1}^{N} e_{aa}\otimes e_{aa} + \sum_{a\neq b}^{N} e_{aa}\otimes e_{bb} + \frac{q-q^{-1}}{\lambda-1}\Big(\sum_{a<b}^{N} + \lambda\sum_{a>b}^{N}\Big) e_{ab}\otimes e_{ba}\,, \tag{14}$$

где $q = e^{i\beta^2\hbar}$.
Обозначим $\Pi = \mathrm{diag}(\pi_1,\ldots,\pi_N)$, $\Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$, $\hat{E} = \sum_{a=1}^{N}\lambda^{\delta_{a,N}} e_{a,a+1}$, $\hat{F} = \sum_{a=1}^{N}\lambda^{\delta_{a,N}} e_{a+1,a}$. Джимбо показал в работе [5], что квантовый L–оператор вида

$$\begin{aligned} L^J(\lambda) &\equiv L^{(0)}(\lambda) + \varepsilon\, L^{(1)}(\lambda) = e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\left(1 + \varepsilon(e^{-\beta\mathrm{ad}_\Phi}\hat{E} + e^{\beta\mathrm{ad}_\Phi}\hat{F}\right) e^{\frac{\beta}{2}\Pi} \\ &= \sum_{a=1}^{N} e_{aa}e^{\beta\pi_a} + \varepsilon\, e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\left(\sum_{a=1}^{N} e^{\beta(\varphi_{a+1}-\varphi_a)}\big(\lambda^{\delta_{a,N}}e_{a,a+1} + \lambda^{-\delta_{a,N}}e_{a+1,a}\big)\right) e^{\frac{\beta}{2}\Pi} \end{aligned} \tag{15}$$

удовлетворяет RLL–соотношению (10) с точностью до $o(\varepsilon)$. Легко видеть также, что (15) удовлетворяет условию (13), если положить $\varepsilon = m\Delta$ и учесть “перенормировку" импульсов в непрерывном пределе (9).

Отметим, что, хотя L–оператор (15) не является точным, его сплетающая R–матрица (14) точна и, с точностью до скалярного множителя, задает S–матрицу в интегрируемой квантовой теории поля (quantum affine Toda field theory). Однако для полноценного применения варианта квантового метода обратной задачи, использующего решеточную регуляризацию, требуется найти точный L–оператор, который удовлетворял бы RLL–соотношению во всех порядках по ε и для которого выполнялось бы условие соответствия (13). В настоящей работе мы покажем, что, не меняя первый порядок в L–операторе (15) по ε, можно найти к нему поправку второго порядка, обеспечивающую выполнение RLL–соотношения с R–матрицей (14) с точностью до $o(\varepsilon^2)$. Мы также обсудим вопрос о (не)возможности найти по той же схеме поправку третьего порядка.

Далее по тексту для удобства работы с вычислениями мы переобозначим $q \to q^{-1}$ и домножим R-матрицу (14) на постоянный коэффициент $q(\lambda - 1)$, тогда она примет вид:

$$R(\lambda)=(\lambda-q^2)\sum_{a=1}^{N}e_{aa}\otimes e_{aa}+q(\lambda-1)\sum_{a\neq b}^{N}e_{aa}\otimes e_{bb}+(1-q^2)\Big(\sum_{a<b}^{N}+\lambda\sum_{a>b}^{N}\Big)e_{ab}\otimes e_{ba}. \quad (16)$$

План изложения в работе следующий. В разделе 2 выведены необходимые условия на матричные элементы поправки второго порядка $\varepsilon^2L^{(2)}(\lambda)$ к L–оператору Джимбо $L^J(\lambda)$. В разделе 3 показано, что поправка третьего порядка $\varepsilon^3L^{(3)}(\lambda)$ не может компенсировать в RLL–соотношении вклад порядка ε^3 от $L^J(\lambda)+\varepsilon^2L^{(2)}(\lambda)$.

Основным результатом настоящей работы является следующий вид L–оператора, удовлетворяющего RLL–соотношению (10) с точностью до $o(\varepsilon^2)$:

$$L(\lambda)=L^J(\lambda)+\varepsilon^2L^{(2)}(\lambda)\,, \quad (17)$$

где

$$L^{(2)}(\lambda)=\tfrac{1}{q+1}e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\big(e^{-\beta\mathrm{ad}_\Phi}\hat{E}^2+qe^{\beta\mathrm{ad}_\Phi}\hat{F}^2\big)e^{\frac{\beta}{2}\Pi}+\tfrac{1}{q}e^{\frac{\beta}{2}\Pi}(e^{-\beta\mathrm{ad}_\Phi}\hat{E})(e^{\beta\mathrm{ad}_\Phi}\hat{F})e^{\frac{\beta}{2}\Pi}= \quad (18)$$

$$=\sum_{a=1}^{N}e^{\beta\pi_a}e^{2\beta(\varphi_{a+1}-\varphi_a)}e_{aa}+\tfrac{1}{q+1}\sum_{a=2}^{N-1}e^{\frac{\beta}{2}\pi_{a-1}}e^{\beta(\varphi_{a+1}-\varphi_{a-1})}e^{\frac{\beta}{2}\pi_{a+1}}(q^2e_{a+1,a-1}+e_{a-1,a+1})+$$
$$+\tfrac{1}{q+1}\Big\{e^{\frac{\beta}{2}\pi_{N-1}}e^{\beta(\varphi_1-\varphi_{N-1})}e^{\frac{\beta}{2}\pi_1}(\lambda e_{N-1,1}+q^2\lambda^{-1}e_{1,N-1})+e^{\frac{\beta}{2}\pi_N}e^{\beta(\varphi_2-\varphi_N)}e^{\frac{\beta}{2}\pi_2}(\lambda e_{N,2}+q^2\lambda^{-1}e_{2,N})\Big\} \quad (19)$$

Отметим, что все вычисления ниже приводятся в предположении $N>2$, для $N=2$ члены, пропорциональные $\frac{1}{q+1}$ в формулах (17)–(19) отсутствуют, но остальные дают точный L–оператор,

$$L(\lambda)=\begin{pmatrix} e^{\frac{\beta}{2}\pi_1}\big(1+\varepsilon^2e^{2\beta(\varphi_2-\varphi_1)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} & \varepsilon e^{\frac{\beta}{2}\pi_1}\big(e^{\beta(\varphi_2-\varphi_1)}+\lambda^{-1}e^{\beta(\varphi_1-\varphi_2)}\big)e^{-\frac{\beta}{2}\pi_2} \\ \varepsilon e^{-\frac{\beta}{2}\pi_1}\big(e^{\beta(\varphi_2-\varphi_1)}+\lambda e^{\beta(\varphi_1-\varphi_2)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_2} & e^{\frac{\beta}{2}\pi_2}\big(1+\varepsilon^2e^{2\beta(\varphi_1-\varphi_2)}\big)e^{\frac{\beta}{2}\pi_2}\end{pmatrix}, \quad (20)$$

совпадающий, при редукции $\varphi_2=-\varphi_1$, с известным точным L–оператором модели sinh–Gordon [7, 4].

Приведем также явный вид формул (17)–(19) для $N=3$:

$$L(\lambda)=e^{\frac{\beta}{2}\Pi}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2e^{2\beta(\varphi_2-\varphi_1)} & \varepsilon e^{\beta(\varphi_2-\varphi_1)}+\frac{\varepsilon^2q^2\lambda^{-1}}{q+1}e^{\beta(\varphi_1-\varphi_2)} & \lambda^{-1}\varepsilon e^{\beta(\varphi_1-\varphi_3)}+\frac{\varepsilon^2}{q+1}e^{\beta(\varphi_3-\varphi_1)} \\ \varepsilon e^{\beta(\varphi_2-\varphi_1)}+\frac{\varepsilon^2\lambda}{q+1}e^{\beta(\varphi_1-\varphi_2)} & 1+\varepsilon^2e^{2\beta(\varphi_3-\varphi_2)} & \varepsilon e^{\beta(\varphi_3-\varphi_2)}+\frac{\varepsilon^2q^2\lambda^{-1}}{q+1}e^{\beta(\varphi_2-\varphi_3)} \\ \varepsilon\lambda e^{\beta(\varphi_1-\varphi_3)}+\frac{\varepsilon^2q^2}{q+1}e^{\beta(\varphi_3-\varphi_1)} & \varepsilon e^{\beta(\varphi_3-\varphi_2)}+\frac{\varepsilon^2\lambda}{q+1}e^{\beta(\varphi_2-\varphi_3)} & 1+\varepsilon^2e^{2\beta(\varphi_1-\varphi_3)}\big)\end{pmatrix}e^{\frac{\beta}{2}\Pi}. \quad (21)$$

2 Вычисление L–оператора, удовлетворяющего RLL–соотношениям с точностью до ε^2

Подставим в RLL–соотношения (10) явные выражения для L–оператора (15) и R–матрицы (16) и распишем их с точностью до второго порядка по ε. Далее все вычисления в этом разделе проводятся для элементов, содержащих ε^2. Для удобства записи последующих вычислений введем следующее обозначение:

$$\xi_{a,b}\equiv e^{\frac{\beta}{2}\pi_a}e^{\beta(\varphi_b-\varphi_a)}e^{\frac{\beta}{2}\pi_b} \quad (22)$$

Вначале выпишем члены, которые получаются при взаимодействии произведения L–операторов с первым членом R–матрицы:

$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a,a+1}\xi_{a-1,a}e_{a,a+1}\otimes e_{a,a-1} \tag{23}$$
$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a-1,a}\xi_{a,a+1}e_{a,a-1}\otimes e_{a,a+1} \tag{24}$$
$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\mu^{-1}\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{1,2}\otimes e_{1,N} \tag{25}$$
$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\mu\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{N,N-1}\otimes e_{N,1} \tag{26}$$
$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\lambda\xi_{N,1}\xi_{N-1,N}e_{N,1}\otimes e_{N,N-1} \tag{27}$$
$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\lambda^{-1}\xi_{N,1}\xi_{1,2}e_{1,N}\otimes e_{1,2} \tag{28}$$
$$-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a,a+1}\xi_{a-1,a}e_{a-1,a}\otimes e_{a+1,a} \tag{29}$$
$$-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a-1,a}\xi_{a,a+1}e_{a+1,a}\otimes e_{a-1,a} \tag{30}$$
$$-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\mu\xi_{N,1}\xi_{1,2}e_{2,1}\otimes e_{N,1} \tag{31}$$
$$-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\mu^{-1}\xi_{N,1}\xi_{N-1,N}e_{N-1,N}\otimes e_{1,N} \tag{32}$$
$$-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\lambda\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{N,1}\otimes e_{2,1} \tag{33}$$
$$-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\lambda^{-1}\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{1,N}\otimes e_{N-1,N} \tag{34}$$

Проделывая все то же самое для второго члена R–матицы, получаем следующие ненулевые члены:

$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\left\{(1-q^{-1})\textstyle\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a,a+1}\xi_{a-1,a}e_{a,a+1}\otimes e_{a-1,a}+(1-q)\sum_{a=1}^{N-2}\xi_{a,a+1}\xi_{a+1,a+2}e_{a,a+1}\otimes e_{a+1,a+2}\right\} \tag{35}$$
$$q^3(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\left\{(1-q^{-1})\textstyle\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a,a+1}\xi_{a-1,a}e_{a+1,a}\otimes e_{a,a-1}+(1-q)\sum_{a=1}^{N-2}\xi_{a,a+1}\xi_{a+1,a+2}e_{a+1,a}\otimes e_{a+2,a+1}\right\} \tag{36}$$

$$q^2(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\left\{\textstyle\sum_{a=1}^{N-2}\xi_{a,a+1}\xi_{a+1,a+2}e_{a,a+1}\otimes e_{a+2,a+1}-\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a-1,a}\xi_{a,a+1}e_{a,a+1}\otimes e_{a,a-1}\right\} \tag{37}$$
$$q^2(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\left\{\textstyle\sum_{a=2}^{N-1}\xi_{a,a+1}\xi_{a-1,a}e_{a+1,a}\otimes e_{a-1,a}-\sum_{a=1}^{N-2}\xi_{a+1,a+2}\xi_{a,a+1}e_{a+1,a}\otimes e_{a+1,a+2}\right\} \tag{38}$$
$$q^2(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\mu^{-1}\{\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{N-1,N}\otimes e_{1,N}-\xi_{N,1}\xi_{1,2}e_{1,2}\otimes e_{1,N}\} \tag{39}$$
$$q^2(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\mu\{\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{2,1}\otimes e_{N,1}-\xi_{N,1}\xi_{N-1,N}e_{N,N-1}\otimes e_{N,1}\} \tag{40}$$
$$q^2(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\lambda\{\xi_{N,1}\xi_{1,2}e_{N,1}\otimes e_{2,1}-\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{N,1}\otimes e_{N,N-1}\} \tag{41}$$
$$q^2(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\lambda^{-1}\{\xi_{N,1}\xi_{N-1,N}e_{1,N}\otimes e_{N-1,N}-\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{1,N}\otimes e_{1,2}\} \tag{42}$$
$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\mu\{(1-q)\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{N-1,N}\otimes e_{N,1}+(1-q^{-1})\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{1,2}\otimes e_{N,1}\} \tag{43}$$
$$q^3(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\mu^{-1}\{(1-q)\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{N,N-1}\otimes e_{1,N}+(1-q^{-1})\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{2,1}\otimes e_{1,N}\} \tag{44}$$
$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\lambda\{(1-q^{-1})\xi_{N,1}\xi_{N-1,N}e_{N,1}\otimes e_{N-1,N}+(1-q)\xi_{N,1}\xi_{1,2}e_{N,1}\otimes e_{1,2}\} \tag{45}$$
$$q^3(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\lambda^{-1}\{(1-q^{-1})\xi_{N,1}\xi_{N-1,N}e_{1,N}\otimes e_{N,N-1}+(1-q)\xi_{N,1}\xi_{1,2}e_{1,N}\otimes e_{2,1}\} \tag{46}$$

Для третьего члена R–матрицы:

$$\begin{aligned}(1-q^2)q(&\sum_{a,b=1,a<b}^{N}+\tfrac{\lambda}{\mu}\sum_{a,b=1,a>b}^{N})\{\xi_{k,k+1}\xi_{l,l+1}e_{a,b+1}\otimes e_{b,a-1}\delta_{b,k}\delta_{a,l+1}-\xi_{l,l+1}\xi_{k,k+1}e_{a+1,b}\otimes e_{b-1,a}\delta_{a,k}\delta_{b,l+1}\}=\\
&=(1-q^2)q\left\{\frac{\lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{N-2}\xi_{k,k+1}\xi_{k+1,k+2}e_{k+2,k+1}\otimes e_{k,k+1}-\sum_{l=1}^{N-2}\xi_{l+1,l+2}\xi_{l,l+1}e_{l+1,l+2}\otimes e_{l+1,l}-\right.\\
&\left.-(1-\tfrac{\lambda}{\mu})\sum_{l=1}^{N-1}\xi_{l,l+1}\xi_{l,l+1}e_{l+1,l+1}\otimes e_{l,l}\right\}\end{aligned} \tag{47}$$

$$(1-q^2)q\left\{\sum_{l=1}^{N-2}\xi_{l+1,l+2}\xi_{l,l+1}e_{l,l+1}\otimes e_{l+2,l+1}-\tfrac{\lambda}{\mu}\sum_{k=1}^{N-2}\xi_{k,k+1}\xi_{k+1,k+2}e_{k+1,k}\otimes e_{k+1,k+2}+\right.$$
$$\left.+(1-\tfrac{\lambda}{\mu})\sum_{l=1}^{N-1}\xi_{l,l+1}\xi_{l,l+1}e_{l,l}\otimes e_{l+1,l+1}\right\} \quad (48)$$

$$(1-q^2)q\mu^{-1}\{\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{1,N}\otimes e_{N-1,N}-\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{1,2}\otimes e_{1,N}\} \quad (49)$$
$$(1-q^2)q\lambda\{\xi_{1,2}\xi_{N,1}e_{N,1}\otimes e_{2,1}-\xi_{N-1,N}\xi_{N,1}e_{N,N-1}\otimes e_{N,1}\} \quad (50)$$
$$(1-q^2)q\lambda\{\xi_{N,1}\xi_{1,2}e_{2,1}\otimes e_{N,1}-\xi_{N,1}\xi_{N,N-1}e_{N,1}\otimes e_{N,N-1}\} \quad (51)$$
$$(1-q^2)q\mu^{-1}\{\xi_{1,N}\xi_{N-1,N}e_{N-1,N}\otimes e_{1,N}-\xi_{1,N}\xi_{1,2}e_{1,N}\otimes e_{1,2}\} \quad (52)$$
$$q(q^2-1)\xi_{N,1}\xi_{N,1}(1-\tfrac{\lambda}{\mu})e_{1,1}\otimes e_{N,N} \quad (53)$$
$$q(q^2-1)\xi_{N,1}\xi_{N,1}(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)e_{N,N}\otimes e_{1,1} \quad (54)$$

Таким образом мы полностью расписали RLL–соотношения (10) во втором порядке по ε. Выясним теперь, какие из выписанных членов сократятся между собой, а какие приведут к необходимости модифицирования L–оператора. Оказывается, что все недиагональные элементы в выражениях (23-34), (37-42) и (47-52) сокращаются. Например, посчитаем коэффициент при элементе $e_{2,1}\otimes e_{N,1}$ (из выражений (31), (40), (51)):

$$-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\mu\xi_{N,1}\xi_{1,2}+q^2(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\mu\xi_{1,2}\xi_{N,1}+(1-q^2)q\lambda\xi_{N,1}\xi_{1,2}=$$
$$=(-q(\tfrac{\lambda}{\mu}-q^2)\mu+q^3(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)\mu+(1-q^2)q\lambda)\xi_{N,1}\xi_{1,2}=0 \quad (55)$$

Для решения поставленной задачи необходимо найти способ сократить недиагональные члены, представляемые выражениями (35),(36), (43)-(46), а так же диагональные части из (47),(48) и выражения (53),(54). Рассмотрим вначале недиагональную часть задачи.

Попробуем сократить первую часть выражения (35). Нам необходимо найти такой элемент e_{xy}, который бы после умножения на на e_{ii}, (поскольку мы ищем член, пропорциональный ε^2, то умножаться он может только на ту часть L–оператора, которая не содержит в себе ε^2) и взаимодействия с R–матрицей давал бы элемент $e_{a,a+1}\otimes e_{a-1,a}$, т.е. решить следующие уравнения:

$$e_{ii}\otimes e_{xy}\cdot e_{aa}\otimes e_{aa}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (56) \qquad e_{aa}\otimes e_{aa}\cdot e_{ii}\otimes e_{xy}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (62)$$
$$e_{ii}\otimes e_{xy}\cdot e_{aa}\otimes e_{bb}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (57) \qquad e_{aa}\otimes e_{bb}\cdot e_{ii}\otimes e_{xy}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (63)$$
$$e_{ii}\otimes e_{xy}\cdot e_{ab}\otimes e_{ba}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (58) \qquad e_{ab}\otimes e_{ba}\cdot e_{ii}\otimes e_{xy}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (64)$$
$$e_{xy}\otimes e_{ii}\cdot e_{aa}\otimes e_{aa}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (59) \qquad e_{aa}\otimes e_{aa}\cdot e_{xy}\otimes e_{ii}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (65)$$
$$e_{xy}\otimes e_{ii}\cdot e_{aa}\otimes e_{bb}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (60) \qquad e_{aa}\otimes e_{bb}\cdot e_{xy}\otimes e_{ii}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (66)$$
$$e_{xy}\otimes e_{ii}\cdot e_{ab}\otimes e_{ba}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (61) \qquad e_{ab}\otimes e_{ba}\cdot e_{xy}\otimes e_{ii}=e_{k,k+1}\otimes e_{k-1,k} \quad (67)$$

Несложно видеть, что только уравнения (58) и (67) имеют решение и это решение — $x = k-1$, $y = k+1$. Таким образом, мы должны добавить к L–оператору часть, пропорциональную $e_{k-1,k+1}$. Аналогичными вычислениями находится, что тот же член приводит к сокращению второй части выражения (35), а для сокращения выражения (36) понадобится член, пропорциональный $e_{k+1,k-1}$. Вычислим теперь коэффициенты при этих членах. Пусть добавка к оператору Лакса имеет вид $\varepsilon^2 F_1 e_{k-1,k+1} + \varepsilon^2 F_2 e_{k+1,k-1}$. Тогда мы получаем следующее уравнение на F_1:

$$q(\tfrac{\lambda}{\mu}-1)(1-q^{-1})\xi_{a,a+1}\xi_{a-1,a}e_{a,a+1}\otimes e_{a-1,a} - (q^2-1)F_1 e^{\beta\pi_a}(1-\tfrac{\lambda}{\mu})e_{a,a+1}\otimes e_{a-1,a} = 0$$

Откуда

$$F_1 = \tfrac{1}{q+1}\xi_{k-1,k+1} \tag{68}$$

Аналогичным образом получаем

$$F_2 = \tfrac{q^2}{q+1}\xi_{k-1,k+1} \tag{69}$$

Теперь необходимо подобрать следующую часть добавки к L–оператору, которая сократит выражения (43)-(46). Проведя вычисления, полностью аналогичные приведенным выше, получим, что искомая добавка имеет вид

$$\varepsilon^2 \tfrac{1}{q+1}\left\{\xi_{N-1,1}(q^2\lambda^{-1}e_{1,N-1} + \lambda e_{N-1,1}) + \xi_{N,2}(q^2\lambda^{-1}e_{2,N} + \lambda e_{N,2})\right\}. \tag{70}$$

Остается выяснить, как можно сократить диагональные члены во втором порядке по ε. Рассмотрим диагональную часть выражения (47). Видно, что входящий в неё базисный элемент можно получить только с помощью диагональной же добавки и только после взаимодействия со вторым членом R–матрицы (16). Пусть добавка имеет вид $\varepsilon^2 \sum_{l=1}^{N-1} Q_l e_{ll}$. Тогда на функции Q_l мы получаем следующие уравнения:

$$-\sum_{l=2}^{N} e^{\beta\pi_{l-1}}Q_l e_{ll}\otimes e_{l-1,l-1} - \sum_{l=1}^{N-1} Q_l e^{\beta\pi_{l+1}} e_{l+1,l+1}\otimes e_{ll} + \sum_{l=2}^{N} Q_l e^{\beta\pi_{l-1}} e_{ll}\otimes e_{l-1,l-1} + \\ + \sum_{l=1}^{N-1} e^{\beta\pi_{l+1}} Q_l e_{l+1,l+1}\otimes e_{ll} = (1-q^2)\sum_{l=1}^{N-1} \xi_{l,l+1}\xi_{l,l+1} e_{l+1,l+1}\otimes e_{ll} \tag{71}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных элементах, получаем:

$$-e^{\beta\pi_l}Q_{l+1} - Q_l e^{\beta\pi_{l+1}} + Q_{l+1}e^{\beta\pi_l} + e^{\beta\pi_{l+1}}Q_l = (1-q^2)\xi_{l,l+1}\xi_{l,l+1} \tag{72}$$

Откуда

$$Q_l = e^{\beta\pi_l} e^{2\beta(\varphi_{l+1}-\varphi_l)}. \tag{73}$$

Оказывается, что диагональная часть уравнения (48) при добавлении такого члена так же сокращается. Аналогично выражения (53), (54) сокращаются при помощи добавки

$$\varepsilon^2 Q_N e_{NN} = \varepsilon^2 e^{\beta\pi_N} e^{2\beta(\varphi_1-\varphi_N)} e_{NN}. \tag{74}$$

Необходимо проверить, что все найденные нами добавки не создают новых несокращающхся членов во втором порядке по ε при подстановке в RLL–соотношения. Такая проверка представляет из себя объемное техническое вычисление и выходит за рамки данной заметки.

Таким образом мы получили следующий вид для L–оператора, удовлетворяющего RLL–соотношениям (10) с точностью до ε^2:

$$\begin{aligned} L(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} e^{\beta\pi_i} e_{ii} + \varepsilon \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} e^{\frac{\beta}{2}\pi_k} e^{\beta(\varphi_{k+1}-\varphi_k)} e^{\frac{\beta}{2}\pi_{k+1}} (e_{k,k+1} + q e_{k+1,k}) \right\} + \\ + \varepsilon \left\{ e^{\frac{\beta}{2}\pi_N} e^{\beta(\varphi_1-\varphi_N)} e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} (\lambda e_{N,1} + q\lambda^{-1} e_{1,N}) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \tfrac{1}{q+1} \left\{ \sum_{k=2}^{N-1} e^{\frac{\beta}{2}\pi_{k-1}} e^{\beta(\varphi_{k+1}-\varphi_{k-1})} e^{\frac{\beta}{2}\pi_{k+1}} (q^2 e_{k+1,k-1} + e_{k-1,k+1}) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \tfrac{1}{q+1} \left\{ e^{\frac{\beta}{2}\pi_{N-1}} e^{\beta(\varphi_1-\varphi_{N-1})} e^{\frac{\beta}{2}\pi_1} (q^2\lambda^{-1} e_{1,N-1} + \lambda e_{N-1,1}) + e^{\frac{\beta}{2}\pi_N} e^{\beta(\varphi_2-\varphi_N)} e^{\frac{\beta}{2}\pi_2} (q^2\lambda^{-1} e_{2,N} + \lambda e_{N,2}) \right\} + \\ + \varepsilon^2 \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} e^{\beta\pi_k} e^{2\beta(\varphi_{k+1}-\varphi_k)} e_{kk} + e^{\beta\pi_N} e^{2\beta(\varphi_1-\varphi_N)} e_{NN} \right\} \end{aligned} \tag{75}$$

Используя базис Шевалле, данное выражение можно переписать в более компактном виде (18).

3 Несуществование L–оператора, точно удовлетворяющего RLL–соотношениям с рассматриваемой R–матрицей

Нам удалось изменить оператор (15) таким образом, что соотношения (10) стали выполняться с точностью до ε^2. Однако дальнейшие вычисления показывают, что данный результат нельзя улучшать, то есть для R–матрицы (16) не существует такого L–оператора, который бы совпадал с выражением (15) в первом порядке по ε и при этом обеспечивал бы точное выполнение RLL–соотношений (10). Для доказательства этого утверждения рассмотрим происходящее в третьем порядке по ε. Нам достаточно указать хотя бы один пропорциональный ε^3 член, который невозможно сократить, добавив что–либо к уже существующим частям L–оператора.

Рассмотрим член $e_{l-1,l} \otimes e_{l-1,l+1}$. Он получается из трех следующих соотношений (в последних двух требуется положить $k = l-1$):

$$e_{aa} \otimes e_{aa} \cdot e_{k,k+1} \otimes e_{l-1,l+1} = e_{l-1,l} \otimes e_{l-1,l+1} \delta_{k,l-1} \tag{76}$$

$$e_{k,k+1} \otimes e_{l-1,l+1} \cdot e_{aa} \otimes e_{bb} = e_{k,k+1} \otimes e_{l-1,l+1}, \;\; k \neq l \tag{77}$$

$$e_{l-1,l+1} \otimes e_{k,k+1} \cdot e_{ab} \otimes e_{ba} = e_{l-1,k+1} \otimes e_{k,l+1}, \;\; k \neq l \tag{78}$$

Выпишем коэффициент при данном члене. Он имеет следующий вид:

$$(\tfrac{\lambda}{\mu} - q^2)\xi_{l-1,l}\xi_{l-1,l+1} - q(\tfrac{\lambda}{\mu} - 1)\xi_{l-1,l+1}\xi_{l-1,l} + (q^2-1)\tfrac{\lambda}{\mu}\xi_{l-1,l}\xi_{l-1,l+1} \neq 0 \tag{79}$$

Сократить его можно пытаться двумя способами. Первый способ состоит в том, чтобы вновь добавить что–то, пропорциональное ε^2, второй способ — в том, чтобы добавить что-то, пропорциональное ε^3.

Во втором случае часть произведения двух L–операторов, пропорциональная ε^3, приобретает члены следующего вида:

$$e_{ii} \otimes e_{xy}, \quad e_{xy} \otimes e_{ii}. \tag{80}$$

Непосредственная проверка показывает, что ни при каких значениях x, y после умножения слева или справа на R–матрицу (то есть на $e_{aa} \otimes e_{aa}$, $e_{aa} \otimes e_{bb}$ и $e_{ab} \otimes e_{ba}$) они не превратятся в $e_{l-1,l} \otimes e_{l-1,l+1}$.

Далее очевидно, что, если при добавлении чего-либо, пропорционального ε^2, мы получаем (после умножения на R–матрицу) произведение $e_{l-1,l} \otimes e_{l-1,l+1}$, то это что-то содержит в себе те же базисные эменты, что и уже добавленные нами члены. При этом коэффициены перед ними обязаны иметь ту же зависимость от φ и π, если мы хотим сократить коэффициент (79). Но в таком случае мы можем получить только тот же коэффициент (79), умноженный на какую-то константу, что, очевидно, не поможет его сократить.

Список литературы

[1] Михайлов А.В.: *Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода.*— Письма в ЖЭТФ **30** (1979) 443–448.

[2] Leznov A.N., Saveliev M.A.: *Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations* $\chi_{\alpha z\bar{z}} = (\exp K\chi)_\alpha$ *and its integrability.*— Lett. Math. Phys. **3** (1979) 489–494.

[3] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.: *Гамильтонов подход в теории солитонов* (Наука, 1986).

[4] Боголюбов Н.М., Изергин А.Г., Корепин В.Е.: *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи* (Наука, 1992).

[5] Jimbo M.: *Quantum R–matrix for the generalized Toda system.*— Commun. Math. Phys. **102** (1986) 537–547.

[6] Babelon O., de Vega H.J., Viallet C.M.: *Solutions of the factorization equations from Toda field theory.*— Nucl. Phys. **B190** (1981) 542–552.

[7] Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю.: *Квантовая линейная задача для уравнения синус–Гордон и высшие представления.*— Записки научн. семин. ЛОМИ **101** (1981) 101–110.