

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КЛИКОВЫМ
ЧИСЛОМ, ХРОМАТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ И
СТЕПЕНЬЮ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ГРАФОВ

С. Л. Берлов
e-mail: sberlov@rambler.ru

Декабрь 2008 г.

Аннотация

Для графа с кликовым числом n и максимальной степенью вершины не более $\frac{3n-3}{2}$ доказывается существование независимой *трансверсали* (т.е. независимого множества вершин, пересекающего все n -клики этого графа). Показано, что для графа с кликовым числом n и большей максимальной степенью это утверждение неверно.

Во второй части работы выводятся новые соотношения между хроматическим числом и степенью для графов, разбивающихся на n -клики.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: *хроматическое число, клика, трансверсаль*

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

PREPRINTS
of the St.Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина,
В. Н. Кублановская, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецевтаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

Введение

Нахождение верхних оценок на хроматические числа графов с ограниченными размерами максимальной клики и степени является классической задачей.

Наиболее классический результат — теорема Брукса, утверждающая, что в графе степени $n \geq 3$, не содержащем клик на $n + 1$ вершинах, хроматическое число не превосходит n (см. [6]).

Позднее Б. Ридом было получено усиление этого результата: для достаточно большого n в графе максимальной степени $n+1$, не содержащем клик на $n + 1$ вершинах, хроматическое число не превосходит n (см. [7]).

Прямое дальнейшее усиление этих результатов невозможно, что показывает пример клики на $n + 3$ вершинах, из которой удалены все ребра антицикла на пяти вершинах. В этом графе максимальная клика имеет мощность n , степень равна $n + 2$ а хроматическое число равно $n + 1$.

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующие обозначения:

если $G = (V, E)$ — граф, то будем обозначать через:

$n(G) = |V|$ — число вершин G , а $m(G) = |E|$ — число ребер;

если $M \subset V$, то $G(M)$ — индуцированный подграф G , определяемый множеством M ;

$d_G(x)$ — степень вершины x в графе G ;

$d(G)$ (степень графа) — максимальная из степеней вершин графа G ;

$\omega(G)$ (кликовое число графа) — число вершин в наибольшей клике;

$\chi(G)$ — хроматическое число G , то есть минимально возможное число цветов по всем правильным раскраскам G ;

$\chi_{max}(d, \omega)$ — максимальное возможное хроматическое число графа степени d с кликовым числом ω ;

\overline{G} — дополнительный граф к графу $G = (V, E)$;

$L(G)$ — индуцированный подграф G , множество вершин которого совпадает с пересечением всех максимальных по мощности клик графа G ;

$T(G)$ — индуцированный подграф G , множество вершин которого совпадает с объединением всех максимальных по мощности клик графа G .

Также было получено множество результатов, связывающих степень графа и его хроматическое число с размером максимальной клики. В частности, хотелось бы отметить статью [11], в которой доказано, что существует раскраска графа G степени n с $\omega(G) < n+1$ в n цветов, в которой максимальная антиклика монохроматична, и результат А. В. Косточки [8] установившего, что если $d(G) - \omega(G) \geq \min\{O(r d(G)^{1/4}), O(r^2)\}$, то $\chi(G) \leq d(G) - r$.

Для установления дальнейших связей между степенью графа, его хроматическим числом и размером максимальной клики оказывается важным нахождение независимого множества вершин, пересекающего все максимальные клики — *независимой трансверсали* всех максимальных по размеру клик.

Статья состоит из введения и двух частей. Основным результатом первой части является теорема 2, в которой доказывается существование независимой трансверсали для максимальных клик графа, степень которого не более, чем в полтора раза превышает размер максимальной клики.

Из него следует неравенство, связывающее хроматическое число графа с его степенью и кликовым числом (см следствие 2).

Также доказана точность полученной в теореме 2 оценки.

Во второй части статьи будет доказана оценка хроматического числа графа, называемого в статье *слоистым*, который представляется в виде объединения непересекающихся n -клик, называемых *слоями*.

Задача такой оценки в несколько иных терминах была поставлена Н. Алоном (см [2]). Им была получена некоторая оценка степени такого графа, при которой он допускает правильную раскраску в n цветов.

В дальнейшем оценка была существенно улучшена в статье Хакселла [3].

Позднее, в статье [4] была получена точная оценка но только для случая, когда слоев не более, чем три.

В настоящей статье получено неравенство, которое, в частности, включает в себя результат Хакселла и улучшает его для случая небольшого числа слоев.

Основным результатом второй части является неравенство из теоремы 3.

Для небольших значений n получен результат, улучшающий эти оценки в некоторых специальных случаях (см 6).

1 Независимые трансверсали.

Напомним, что *трансверсалью* системы множеств называется множество, пересекающее все множества системы.

В данной статье будут рассматриваться трансверсали для подмножеств множества $V(G)$, образующих n -клики.

Основной задачей этой части будет установление структуры графа n -клик для графа G , в котором $d(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}n - 2 \rfloor$, а $\omega(G) = n$ и вывод из

этого теоремы о существовании в таком графе независимой трансверсали, пересекающей все n -клики.

Нам потребуются несколько результатов из статьи [1], которые мы здесь приведем для полноты изложения.

Теорема 1. *Пусть $\omega(G) = n$, степени всех вершин G меньше $\lceil \frac{5}{3}n \rceil - 1$. Пусть набор T , состоящий из некоторых n -кликов графа G таков, что любые две n -клики этого набора имеют общую вершину. Тогда и все n -клики набора T имеют общую вершину.*

Следствие 1. *Пусть граф G такой, что $\omega(G) = n$, $d(G) \leq n + k$, где $k < \lceil \frac{2}{3}n \rceil - 1$. Пусть набор T , состоящий из некоторых n -кликов графа G таков, что любые две n -клики этого набора имеют общую вершину. Тогда пересечение L всех n -кликов этого набора содержит не менее $n - k - 1$ вершин.*

Лемма 1. *Пусть в графе G существует набор попарно пересекающихся n -кликов, не имеющих общей вершины, и $\omega(G) = n$. Тогда $n(G) \geq 2n$.*

Для доказательства основного результата этой части нам потребуется несколько предварительных лемм.

Лемма 2. *Пусть граф G такой, что $\omega(G) = n$, $d(G) \leq n + k$, где $k < \lceil \frac{2}{3}n \rceil - 1$, и пересечение любых двух n -кликов непусто. Тогда $n(T(G) \setminus L(G)) \geq 2(n - |n(L(G))|)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1, $|n(L(G))| > 0$. Тогда $|n(T(G))| \leq n + k + 1$, поскольку любая вершина из $L(G)$ смежна с любой вершиной из $T(G)$. Ясно, что любая n -клика, содержащая $L(G)$, имеет $n - |n(L(G))|$ вершин в $T(G) \setminus L(G)$ (если $|n(L(G))| = n$, то утверждение леммы очевидно). Заметим, что при удалении любой вершины из $T(G) \setminus L(G)$ найдется n -клика, содержащая $L(G)$, но не содержащая выкинутой вершины (иначе эта вершина по определению входила бы в $L(G)$). Но в $T(G) \setminus L(G)$ нет клика, содержащих более $n - |n(L(G))|$ вершин (иначе объединение такой клики с $L(G)$ будет кликой G , содержащей более n вершин). Если любые две $n - |n(L(G))|$ -клики из $T(G) \setminus L(G)$ пересекаются, то в силу леммы 1, граф $T(G) \setminus L(G)$ содержит не менее $2(n - |n(L(G))|)$ вершин. Если же какие-то две $n - |n(L(G))|$ -клики из $T(G) \setminus L(G)$ не имеют общих вершин, то в их объединении содержится уже $2(n - |n(L(G))|)$ вершин, принадлежащих $T(G) \setminus L(G)$.

□

Определим граф n -клик графа G . Вершины этого графа соответствуют n -кликам графа G , причем две вершины графа клик смежны тогда и только тогда, когда соответствующие n -клики пересекаются.

Рассмотрим случай графа G , в котором $\omega(G) = n$ и $d(G) \leq n + k$, где $n > 2(k + 1)$.

Определение 1. Назовем *ядром* некоторой клики пересечение всех n -кликов, пересекающихся с данной кликой. В частности, если данную n -клику не пересекает ни одна другая n -клика, то ядро будет совпадать с самой кликой.

Лемма 3. Пусть G — такой граф, что $\omega(G) = n$, $d(G) \leq n + k$, и $n > 2(k + 1)$. Тогда все ядра будут содержать не менее $n - k - 1$ вершин.

Доказательство. Поскольку $d(G) \leq n + k$, то в силу следствия 1, любой набор попарно пересекающихся n -кликов имеет не менее $n - k - 1$ общих вершин. Поскольку $n > 2(k + 1)$, то это составит более половины мощности всей n -клики. Следовательно, любая клика, пересекающаяся с какой-нибудь из клик набора, также содержит какую-нибудь из этих $n - k - 1$ вершин. Тогда любые две n -клики, пересекающиеся с данной, пересекаются между собой. Тогда, в силу следствия 1, все эти клики имеют не менее $n - k - 1$ общих вершин, откуда, в частности следует, что все ядра содержат не менее, чем $n - k - 1$ вершин. \square

Заметим, что так как $2(n - k - 1) > n$, то каждое ядро содержит более половины вершин клики. Следовательно, любые две пересекающиеся клики имеют общее ядро.

Таким образом, граф n -клик для рассматриваемого графа выглядит как объединение нескольких компонент, каждая из которых является кликой. Все n -клики, соответствующие каждой компоненте, имеют общее ядро.

Поэтому чтобы найти независимую трансверсаль, пересекающую все n -клики, достаточно найти независимую трансверсаль, пересекающую все ядра.

Определение 2. Для вершины a ядра *внешней степенью* этой вершины будем называть количество вершин графа G , смежных с a и не входящих в объединение n -кликов, содержащих a . Ребра, соединяющие вершину a с вершинами, не входящими с a в одну n -клику, будем называть *внешними*.

Лемма 4. Пусть G — такой граф, что $\omega(G) = n$, $d(G) \leq n + k$, и $n > 2(k + 1)$. Рассмотрим ядро J , содержащее $n - t$ вершин. Тогда внешняя степень любой вершины этого ядра будет не более $k - t + 1$.

Доказательство. В силу леммы 2, объединение клик, содержащих ядро J , имеет не менее $2(n-(n-t))+(n-t) = n+t$ вершин. Так как вершины J будут смежны со всеми вершинами, входящими в объединение клик, содержащих J , то из общего количества исходящих ребер для данной вершины из J , не превосходящего $n+k$, не менее, чем $n+t-1$ будет соединять эту вершину с вершинами из объединения клик, т. е. не будут внешними. Следовательно, внешними могут быть только оставшиеся не более, чем $k-t+1$ ребер. \square

Сформулируем и докажем теорему, которая является основным результатом этой части статьи.

Теорема 2. Пусть G — такой граф, что $\omega(G) = n$, $d(G) \leq n+k$, и $n > 2(k+1)$. Тогда существует независимое подмножество $M \subset V$ такое, что при удалении из G всех вершин множества M кликовое число графа уменьшится.

Доказательство. 1. Сначала определим множества M и N_1 а также класс эквивалентности T_1 .

Пусть M — такое множество, что $|J \cap M| = 1$ для любого ядра J и $|E(G(M))|$ — минимально (такие множества будем называть *отмеченными*). Вершину $x \notin M$, содержащуюся в каком-то ядре J и не смежную ни с одной вершиной из M , кроме вершины того же ядра, будем называть *свободной*. Множество всех свободных вершин назовем $S(M)$ (это множество зависит от M). Если в J есть свободная вершина $x \in J$, то для вершины $t \in J \cap M$ (ясно, что такая вершина t существует и единственна), множество

$$M' = M \cup \{x\} \setminus \{t\} \quad (1)$$

будет отмеченным и $|G(M')| = |G(M)|$ в силу минимальности. Будем такие операции называть операцией 1. Рассмотрим класс T_1 таких множеств M относительно серии всех возможных последовательных операций 1. Поскольку операции 1 обратимы, то T_1 будет классом эквивалентности.

Далее рассмотрим множество вершин N_1 , которые принадлежат пересечению всех множеств, входящих в T_1 .

Докажем, что $N_1 = \emptyset$.

Предположим противное. Пусть $|N_1| = s$, а ядра J_1, J_2, \dots, J_s , в которые входят вершины из N_1 , содержат $n - k_1, n - k_2, \dots, n - k_s$ вершин. Тогда внешние степени вершин из J_1, J_2, \dots, J_s будут не более $k - k_1 + 1, k - k_2 + 1, \dots, k - k_s + 1$ соответственно, в силу леммы 4.

2. Опишем первый шаг процесса.

Всего с вершинами из N_1 будет соединено внешними ребрами не более $\sum_{i=1}^s (k - k_i + 1)$ вершин, входящих в $J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_s$. В то же время, $|J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_s| = \sum_{i=1}^s (n - k_i - 1)$. Рассмотрим те вершины, которые не входят в N_1 и смежны только с теми вершинами из N_1 , которые лежат в одной клике с ними. Таких вершин в ядрах, содержащих вершины из N_1 , будет не менее

$$\sum_{i=1}^s (n - k_i - 1) - \sum_{i=1}^s (k - k_i + 1) = (n - k - 2)s > 0.$$

Выберем из них одну вершину a_1 . Обозначим через P_1 множество вершин, соединенных с a_1 внешними ребрами.

Выберем множество $M_1 \in T_1$ таким образом, чтобы количество вершин из множества $P_1 \cap M_1$ было минимальным по всем множествам из T_1 . Отметим, что множество $P_1 \cap M_1$ не может быть пустым, поскольку иначе вершина a_1 была бы свободной для M_1 и тогда ее можно было обменять с вершиной v из M_1 , входящей в то же ядро, но это противоречит тому, что $v \in N_1$.

Рассмотрим множество Z'_1 всех таких вершин u , соединенных внешними ребрами с a_1 , что $u \notin M_1$. Положим $Z_1 = Z'_1$.

3. Опишем второй шаг процесса.

Рассмотрим теперь класс эквивалентности T_2 такой, что $M_1 \in T_2$ и все множества этого класса получаются из M_1 последовательным применением операции 1, в которых в качестве свободных вершин x берутся только вершины из множества $S(M) \setminus Z_1$.

Построим аналогично первому шагу множество N_2 как пересечение всех множеств из T_2 . Заметим, что поскольку $P_1 \cap M_1$ было минимально, то $Z_1 = Z'_1 = P_1 \setminus M_1$ максимально по всем множествам, входящим в T_1 (в том смысле, что множества, аналогичные Z'_1 и P_1 , можно определить для любого $M \in T_1$ и для уже выбранной вершины a_1). Тогда, в силу максимальности Z_1 , все вершины из $P_1 \cap M_1$ войдут в N_2 , иначе при помощи операции 1 можно будет увеличить множество Z_1 . Действительно, в противном случае можно будет провести операцию 1 с некоторой свободной вершиной x , не входящей в Z_1 и вершиной y из $M' \in T_2$, соединенной внешним ребром с a_1 . Поскольку вершины из Z_1 не могли входить в M' , так как по определению класса T_2 они никогда не участвовали в операции 1, то после проведения этой операции множество Z_1 возрастет, так как к нему добавится вершина y .

Тогда $N_1 \in N_2$.

Выберем теперь вершину $a_2 \notin N_2$ из некоторого ядра, содержащего вершину из N_2 , не соединенную внешними ребрами с вершинами из N_2 . Возможность выбора такой вершины a_2 будет обоснована далее. Выберем множество $M_2 \in T_2$ таким образом, чтобы количество вершин из M_2 , смежных с a_2 , было минимальным по всем множествам из T_2 , множество P_2 вершин, соединенных с a_2 внешними ребрами, наконец множество $Z_2 = Z_1 \cup Z'_2$, где Z'_2 — множество всех вершин, соединенных с a_2 внешними ребрами и не входящих в M_2 .

4. Докажем, что всегда можно сделать следующий шаг процесса.

Будем аналогично строить классы $T_3, T_4 \dots$ и аналогичным образом определять множества N_3, N_4, \dots , вершины a_3, a_4, \dots , множества P_3, P_4, \dots , классы M_3, M_4, \dots , множества Z'_3, Z'_4, \dots и неубывающую последовательность множеств Z_3, Z_4, \dots

Заметим, что $P_i \cap M_i \subset N_{i+1}$, в силу максимальности Z'_i (аналогично первому шагу процесса). Кроме того, множество $P_i \cap M_i$ непусто, так как иначе вершина a_i будет свободной для множества M_i , что противоречит тому, что она находится в одном ядре с вершиной из N_i . Поэтому $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$

Лемма 5. *Докажем, что для любого натурального q всегда можно выбрать вершину a_q , обладающую следующими свойствами:*

1. a_q принадлежит ядру J , содержащему вершину из N_q .
2. a_q не смежна с вершинами из N_q кроме той, которая лежит в J .
3. $a_q \notin Z_{q-1}$.

Доказательство. В силу выбора вершин a_i ($i < q$), множество P_i не пересекается с N_i , поэтому и $P_i \cap M_i \cap N_i = \emptyset$. Следовательно, $N_i \subset N_{i+1}$ и $|N_q| \geq q$. Заметим, что $|Z'_i| \leq k$, поскольку любая вершина имеет внешнюю степень не более $k+1$, а хотя бы одна вершина входит в $P_i \cap M_i$, следовательно, не входит в Z'_i . Поэтому $|Z_{q-1}| = |Z'_1 \cup Z'_2 \cup Z'_3 \cup \dots \cup Z'_{q-1}| \leq (q-1)k$.

Обозначим ядра, содержащие вершины из N_q через $J_1, J_2 \dots J_{|N_q|}$. Будем считать, что в ядре J_i , будет $n - k_i$ вершин. В ядрах, содержащих вершины из N_q , будет

$$\sum_{i=1}^{|N_q|} (n - k_i)$$

вершин.

Поскольку внешняя степень вершины из $N_q \cap J_i$ не более $k - k_i + 1$, то найдется не менее

$$\sum_{i=1}^{|N_q|} (n - k_i) - \sum_{i=1}^{|N_q|} (k - k_i + 1) - |N_q| = (n - k - 2)|N_q|$$

вершин из J_i , которые будут несмежны с вершинами из N_q и не входят в N_q . Заметим наконец, что

$$(n - k - 2)|N_q| - |Z_q| \geq (n - k - 2)q - (q - 1)k > kq - k(q - 1) > 0.$$

Поэтому останется хотя бы одна вершина, подходящая для a_{q+1} .

□

Теперь, аналогично второму шагу, выберем множества $M_q \in T_q$ таким образом, чтобы количество вершин из M_q , смежных с a_q , было минимальным по всем множествам из T_q , множество P_q вершин, соединенных с a_q внешними ребрами, наконец множество $Z_q = Z_{q-1} \cup Z'_q$, где Z'_q — множество всех вершин, соединенных с a_q внешними ребрами и не входящих в M_q . После выбора вершины a_q все эти множества выбираются автоматически.

Но поскольку число $|N_i|$ монотонно возрастает, то этот процесс должен когда-нибудь закончиться. Получилось противоречие с тем, что N_1 непусто.

Но если N_1 пусто, то в любом ядре была свободная вершина, а тогда исходное множество M — независимое, поскольку в противном случае можно было бы уменьшить количество внутренних ребер в M , что и доказывает утверждение теоремы.

□

Следствие 2. *Если $d \leq \lfloor \frac{3}{2}\omega - 2 \rfloor$, то выполняется неравенство $\chi_{\max}(d, \omega) - 1 \leq \chi_{\max}(d - 1, \omega - 1)$.*

Доказательство. Предположим, что для каких-то параметров d и ω , удовлетворяющих условию следствия, неравенство не выполняется. Обозначим через k число $d - \omega \leq \lfloor \frac{1}{2}\omega - 2 \rfloor$. Рассмотрим граф G такой, что $d(G) = d, \omega(G) = \omega$ и для которого хроматическое число в точности равно $\chi_{\max}(d, \omega)$. Заметим, что $2(k + 1) \leq 2\lfloor \frac{1}{2}\omega \rfloor - 2 < \omega$, поэтому можно применить утверждение предыдущей леммы. Будем добавлять к выбранному независимому множеству M вершины по одной с сохранением независимости, пока это возможно. Полученное множество M' будет независимым, доминирующим и будет пересекать все n -клики. Окрасим все вершины M' в некоторый цвет 1. Заметим, что после удаления

из графа G всех вершин множества M' , его степень и кликовое число уменьшатся хотя бы на 1. Следовательно, по предположению его хроматическое число должно уменьшится хотя бы на 2. Но это противоречит тому, что из него удалили независимое множество. \square

Следствие 3. *Пусть G — некоторый такой граф, в котором выделено несколько непересекающихся подмножеств вершин A_1, A_2, \dots, A_s , мощности которых равны $n - k_1, n - k_2, \dots, n - k_s$ а внешние степени вершин подмножества A_i , $1 \leq i \leq s$ не превосходят $k - k_i + 1$. Тогда существует независимое подмножество $M \subset V$ такое, что $M \cup A_i \neq \emptyset$ $1 \leq i \leq s$.*

Доказательство. В доказательстве теоремы 2 нигде не использовалось, что ядра являются полными подграфами, а использовалось лишь ограничение на внешнюю степень вершин этих ядер. \square

Замечание 1. Заметим, что оценка на степень графа $d(G) \leq \frac{3n-3}{2}$, полученная в теореме 2 — точная, что иллюстрирует следующий пример для четных n .

Рассмотрим нечетный цикл длины больше трех. Заменим каждую его вершину на клику мощности $\frac{n}{2}$. Теперь соединим ребрами вершины любых двух клик, соответствующих смежным вершинам исходного цикла (такие $\frac{n}{2}$ -клики будем называть *соседними*). Заметим, что в полученном графе степени $\frac{3}{2}n - 1$ максимальная клика будет иметь мощность n . Ясно, что никакое независимое подмножество вершин полученного графа не может содержать одновременно две вершины соседних $\frac{n}{2}$ -клик, поэтому найдутся две соседние $\frac{n}{2}$ -клики, ни одна из вершин которых не входит в выбранное независимое множество. Но тогда объединение этих $\frac{n}{2}$ -клик будет n -кликой, не пересекающейся с выбранным независимым множеством.

2 Хроматические числа слоистых графов с ограниченной степенью вершин.

Определение 3. Граф будем называть *n-слоистым*, если его вершины можно разбить на непересекающиеся n -клики (такие клики будем называть *слоями*).

Для таких графов выполняется следующая теорема, связывающая максимальную внешнюю степень вершин n -слоистых графов с числом слоев при условии, что хроматическое число графа также равно n .

Теорема 3. Пусть G — такой n -слоистый граф, что $|V(G)| = nq$, $d(G) \leq n + k$, причем $(3(k + 1) - n)q < 2k + 4$. Тогда $\chi(G) = n$.

Доказательство. Аналогично доказательству основной теоремы предыдущей части, доказательство будет основано на построении процесса, при котором множество вершин одного из цветов, остающихся неподвижными при этом процессе, будет неограниченно расти, что приведет в противоречие с исходной посылкой о том, что искомой раскраски не существует.

1. Сначала определим множества M и N_1 а также класс эквивалентности T_1 .

Рассмотрим какую-нибудь раскраску вершин G в n цветов, при которой минимально количество ребер, соединяющих одноцветные вершины (такие ребра будем называть *плохими*) и при этом вершины каждого цвета лежат в разных слоях по одной. Обозначим через A_i множество всех вершин цвета $i > 1$, а через M — множество всех вершин цвета 1.

Предположим, что существует ребро, соединяющее две вершины из M . Вершину x цвета i , отличного от 1, будем называть *свободной*, если она не соединена внешними ребрами с вершинами цвета 1 и вершина y цвета 1, лежащая в ее слое, не соединена внешними ребрами с вершинами цвета i . Множество всех свободных вершин назовем $S(M)$. Отметим, что множество $S(M)$ зависит от раскраски.

Заметим, что если поменять цвета вершин x и y (назовем эту операцию *обменом*), то количество плохих ребер не увеличится. Рассмотрим класс эквивалентности T_1 таких множеств M относительно серии всех возможных последовательных операций обмена со свободными вершинами всевозможных цветов i , отличных от цвета 1. Рассмотрим множество вершин N_1 , которые принадлежат пересечению всех множеств, входящих в T_1 .

Нашей целью будет доказательство того, что $N_1 = \emptyset$.

2. Опишем первый шаг процесса.

Предположим противное. Пусть $|N_1| = s$. Ясно, что $s \geq 2$, поскольку в N_1 входят две вершины, изначально соединенные ребром (иначе операцией обмена с одной из этих вершин можно было бы уменьшить количество плохих ребер). Заметим, что с вершинами из N_1 внешними ребрами соединено не более $s(k + 1) - 2$ вершин из слоев, содержащих вершины из N_1 . Следовательно, найдется такой слой W_1 , в котором этих вершин не более $k + 1$. Вершина этого слоя t_1 , входящая в N_1 , будет смежна не более, чем с $k + 1$ вершинами других слоев. Поскольку из условия следует, что $2k + 2 < n - 1$, то в W найдется вершина $a_1 \neq t_1$, не

соединенная внешними ребрами с вершинами из N_1 и не совпадающая по цвету с вершинами других слоев, смежных с t_1 . Свойства вершины a_1 сохраняются при операциях обмена, поскольку эти операции производятся только со свободными вершинами, а вершина t_1 всегда будет цвета 1, следовательно вершины, соединенные с ней внешними ребрами, никогда не будут свободными. Кроме того, вершина a_1 ни в какой момент не была свободной, так как $t_1 \in N_1$. Выберем множество $M_1 \in T_1$ таким образом, чтобы количество вершин из M_1 , смежных с a_1 и не входящих в один слой с a_1 (множество таких вершин обозначим через P_1), было минимальным по всем множествам из T_1 . Отметим, что множество P_1 не может быть пустым, поскольку иначе вершина a_1 была бы свободной. Рассмотрим множество Z_1 всех таких вершин $u \in P_1 \setminus M_1$, что u не входит в слой, содержащий a_1 .

3. Опишем второй шаг процесса.

Рассмотрим теперь класс эквивалентности T_2 такой, что $M_1 \in T_2$ и все множества этого класса получаются из M_1 последовательным применением операции обмена, в которых в качестве вершин x берутся только вершины из множества $S(M) \setminus Z_1$. Построим аналогично первому шагу множество N_2 как пересечение всех множеств из T_2 , слой W_2 , в который входит минимальное количество вершин, смежных с вершинами из N_2 , не входящими в W_2 , и не входящими в Z_1 , вершину $a_2 \in W_2$, не смежную с вершинами из N_2 и не совпадающую по цвету с вершинами, смежными с вершиной $t = W_2 \cap N_2$, выберем далее множество $M_2 \in T_2$ таким образом, чтобы количество вершин из M_2 , смежных с a_2 , было минимальным по всем множествам из T_2 , множество P_2 , наконец, множество $Z_2 = Z_1 \cup Z'_2$, где Z'_2 — множество всех вершин, смежных с A_2 и не входящих ни в M_2 , ни в слой, содержащий a_2 .

Будем аналогично строить классы $T_3, T_4 \dots$ и аналогичным образом определять множества N_3, N_4, \dots , вершины a_3, a_4, \dots , множества P_3, P_4, \dots , классы M_3, M_4, \dots , множества Z'_3, Z'_4, \dots и неубывающую последовательность множеств Z_3, Z_4, \dots

4. Докажем, что всегда можно сделать следующий шаг процесса.

Заметим, что $P_i \subset N_{i+1}$, в силу минимальности множества M_i и $N_i \subset N_{i+1}$, поэтому все P_i попарно непересекающиеся и $|N_q| \geq q + 1$. Кроме того, $|Z'_i| \leq k$, поскольку любая вершина имеет не более $k + 1$ смежной с ней вершины в других слоях. Кроме того, хотя бы одна из них входит в P_i , а, следовательно, не входит в Z'_i . Поэтому

$$|Z_{q-1}| = |\cup_{i=1}^{q-1} Z'_i| \leq (q-1)k.$$

Докажем, что для любого q всегда можно выбрать вершину a_{q+1} .

Рассмотрим те вершины, которые нельзя брать в качестве a_{q+1} . Во-первых, это не более $|N_q|(k + 1) - 2$ вершин, смежных с вершинами из N_q . Во-вторых, это $|N_q|$ вершин из N_q . В-третьих, в каждом слое не более $k + 1$ вершин имеют цвет, совпадающий с цветами вершин, смежных с вершиной этого слоя, входящей в N_q , причем хотя бы в двух слоях таких вершин не более, чем по k , а именно в тех слоях, которые содержат смежные вершины цвета 1 из множества N_q . Наконец, в качестве a_{q+1} нельзя брать вершины из Z_{q-1} . Таким образом в силу того, что в слоях, содержащих вершины из N_q , будет $n|N_q|$ вершин, то не менее

$$n|N_q| - (2k + 3)|N_q| + 4 - |Z_{q-1}|$$

можно выбрать в качестве a_{q+1} . Докажем, что это число больше нуля. Для этого вспомним, что $|Z_{q-1}| \leq (q - 1)k$, следовательно

$$n|N_q| - (2k + 3)|N_q| + 4 - |Z_{q-1}| \geq |N_q|(n - 2k - 3) - (q - 1)k + 4.$$

Но $q \leq |N_q| - 1$, поскольку на каждом шаге $|N_q|$ возрастает, поэтому

$$|N_q|(n - 2k - 3) + 4 - (q - 1)k \geq |N_q|(n - 3(k + 1)) + 2k + 4.$$

Правая часть этого неравенства положительна в силу того, что $|N_q| \leq q$ и по условию $(3(k + 1) - n)q < 2k + 4$.

Но поскольку число $|N_i|$ монотонно возрастает, то этот процесс должен когда-нибудь закончиться. Получилось противоречие с тем, что N_1 непусто. Но если N_1 пусто, то никакие вершины из M не смежны, иначе операция обмена, проведенная с одной из таких вершин уменьшит количество плохих ребер, что противоречит выбору исходной раскраски. Аналогично, никакие вершины каждого из остальных цветов несмежны, поэтому исходная раскраска — правильная. □

Следствие 4. Пусть G — некоторый такой граф, вершины которого можно разбить на непересекающиеся не более, чем n -элементные множества A_1, A_2, \dots, A_s таким образом, что внешние степени всех вершин не превосходят $\frac{n}{3}$. Тогда этот граф n -хроматичен.

Доказательство. Заметим, что в доказательстве теоремы 3 нигде не использовалось, что слои являются кликами, а использовалось лишь ограничение на внешнюю степень вершин. Тогда добавим "фиктивные" вершины степени 0 в каждое из A_i ; $1 \leq i \leq s$, сделав все эти множества

n -элементными. Теперь добавим в каждое из них все внутренние ребра, превратив эти множества в n -клики. Заметим, что тогда степень каждой вершины будет не более $n + \frac{n}{3} - 1$. Поскольку $3(\frac{n}{3} - 1 + 1) = n$, то можно применить результат теоремы 3 при любом количестве слоев, откуда и получается требуемое.

□

Заметим, что теорема 3 дает результат, не следующий напрямую из теоремы Брукса, только начиная с $n = 6$. А что же при меньших n ? Можно получить интересные результаты для меньших n , если использовать несколько иной подход. Начнем с определения:

Определение 4. Граф G будем называть *бипарным*, если его вершины можно разбить на множества, удовлетворяющие следующим свойствам:

1. Каждое множество состоит из одной или двух вершин.
2. Любая вершина G смежна с вершинами только одного множества кроме того, в котором она лежит.

Такое разбиение вершин бипарного графа будем называть *специальным*.

Лемма 6. *Дан граф G , обладающий следующим свойством: существует такой оставшийся подграф G_1 , который сам является бипарным и при удалении всех ребер G_1 оставшиеся ребра образуют бипарный граф G_2 . Тогда G 4-хроматичен.*

Доказательство. Пусть T_1 и T_2 — специальные разбиения графов G_1 и G_2 . Рассмотрим только те ребра, которые соединяют вершины из одного множества каждого из специальных разбиений. Заметим, что в оставном графе, образованном этими ребрами, все циклы будут четной длины, поскольку в них будут чередоваться ребра из специальных разбиений G_1 и G_2 . Следовательно, можно разбить вершины G на два множества A и B такие, что никакие две вершины, принадлежащие одному из этих множеств, не могут одновременно принадлежать одному множеству специального разбиения. Рассмотрим отдельно какое-то из этих множеств (например, A). В силу определения специального разбиения, никакая вершина t из A не может быть соединена ребром, принадлежащим G_1 , с двумя другими вершинами из A . Действительно, в противном случае вершина t была бы соединена с вершинами двух различных множеств специального разбиения G_1 , не содержащих t , что противоречит определению специального разбиения. Аналогичное утверждение выполняется и для G_2 . Тогда в A все циклы четны, поскольку в них ребра, принадлежащие G_1 и G_2 , чередуются. Поэтому вершины A можно правильным

образом окрасить в два цвета 1 и 2. По аналогичным причинам вершины G_2 можно правильным образом окрасить в два цвета 3 и 4, что дает правильную окраску вершин графа G в четыре цвета.

□

Теперь рассмотрим несколько примеров бипарных графов.

1. Четный цикл является бипарным графом. Действительно, специальным разбиением является полное паросочетание.

2. K_4 является бипарным графом. Любое его разбиение на пары является специальным.

3. K_3 тоже является бипарным графом как подграф K_4 .

4. Два треугольника, соединенных путем из нечетного количества ребер. Специальным разбиением будет: пары вершин треугольников степени 2, путь разбивается на пары смежных вершин.

Заметим, что нечетный цикл длины более 3 не является бипарным графом. Действительно, в силу нечетности цикла найдется множество, состоящее из единственной вершины A . Тогда обе соседние с A вершины должны входить в одно множество. Но тогда у каждой из этих вершин будет по два соседа из разных множеств (сама вершина A и второй сосед), что противоречит определению специального разбиения. Также заметим, что в бипарном графе все вершины должны быть степени не более 3.

Следствие 5. Рассмотрим 4-слоистый граф G степени 5. Пусть после удаления всех внутренних ребер всех слоев оставшийся граф не будет содержать нечетных циклов длины более 3. Тогда граф G 4-хроматичен.

Доказательство. Поскольку после удаления всех ребер G , соединяющих разные слои, граф станет бипарным и сами удаленные ребра образовывали бипарный граф, то в силу леммы 6 график G 4-хроматичен. □

Следствие 6. Рассмотрим n -слоистый график G степени $n+1$ ($n \geq 4$). Пусть после удаления всех ребер всех слоев оставшийся график не будет содержать нечетных циклов длины более 3. Тогда график G n -хроматичен.

Доказательство. Поскольку при ($n \geq 4$) выполняется условие на степень графа теоремы 2 из первой части, то после нескольких применений этой теоремы задача сводится к предыдущему следствию. □

Список литературы

- [1] Berlov S. L. Helly's property for n -cliques and the degree of a graph. / S. L. Berlov // Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI – 2006 – VOL. 340 – P. 5 – 9.
- [2] Alon N. The strong chromatic number of a graph./ N. Alon // Random Struct. Alg. – 1992 – V. 3 – P. 1 – 7.
- [3] Haxell P. E. On the Strong Chromatic Number / P. E. Haxell // Combinatorics, Probability and Computing, – 2004 – Vol. 13 – Issue 6 – P. 857 – 865.
- [4] Axenovich M., Martin R. On the Strong Chromatic Number of Graphs / M. Axenovich, R. Martin // SIAM Journal on Discrete Mathematics archive – 2006 – V. 20 – Issue 3 – P. 741 – 747.
- [5] Erdős P., Gallai T. On minimal number of vertices representing the edges of a graph. / P. Erdős, T. Gallai // Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci – 1961 – V 6 – 89-96.
- [6] Brooks R. L. On coloring the nodes of a network / R. L. Brooks // Proc. Cambrige Phil. – 1941 – Soc 37 – P. 194 – 197.
- [7] Reed B. A Strengthening of Brooks' Theorem /B. Reed // Journal of Combinatorial Theory, Series B – 1999 V. 76 – Issue 2 – P. 136 – 149.
- [8] Kostochka, A. V. Degree, density and chromatic number of graphs./ A. V. Kostochka // Metody Diskret. Analiz. – 1980 – No. 35 – P. 45–70, 104–105.
- [9] Jensen T., Toft B. Graph coloring problems. / Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization – 1995.
- [10] Catlin P. A. Survey of extensions of Brooks' graph coloring theorem. / P. A. Catlin //Annals of the New York Academy of Sciences – 1979 – V. 328 – P. 95
- [11] Catlin P. Brooks' graph-coloring theorem and the independence number. /P. Catlin // Journal of Combinatorial Theory, Series B – 1979 – V.27 – P. 42-48.
- [12] Beutelspacher A., Hering P. Minimal graphs for which the chromatic number equals the maximal degree. / A. Beutelspacher, P. Hering // Ars Combinatorica – 1984 – V. 18 – P. 201 – 216.

- [13] Borodin O., Kostochka A. On an upper bound on a graph's chromatic number, depending on the graphs's degree and density / O. Borodin, A. Kostochka // Journal of Combinatorial Theory – Series B – 1977 – V.23 – P.247 – 250.