

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

# Корреляционные функции $XX$ магнетика Гейзенберга как производящие функции случайных блужданий недружественных пешеходов

Н. М. Боголюбов, К. Малышев

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,  
Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 191023, РОССИЯ

## Аннотация

Исследуется связь между корреляционными функциями спиновой  $XX$  цепочки Гейзенберга и случайными блужданиями, так называемых, “недружественных” пешеходов по одномерной периодической решетке. При встрече в любом из узлов решетки недружественные пешеходы уничтожают друг друга. Операторные средние над ферромагнитным состоянием играют роль производящих функций для числа путей случайных блужданий недружественных пешеходов. Показано, что двухточечную корреляционную функцию спинов, вычисленную по всем собственным состояниям  $XX$  магнетика, можно проинтерпретировать как производящую функцию блужданий одиночного пешехода в среде с переменным числом недружественных соседей. Получены ответы для числа путей указанного пешехода, перемещающегося из некоторого фиксированного узла в другой достаточно удаленный узел решетки. Представлен подход к асимптотической оценке числа путей в пределе, когда количество выполняемых шагов и, соответственно, число случайных поворотов возрастают.

# ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения

Математического института им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
А.А.Иванов, Л.Ю.Колотилина, В.Н.Кублановская, Г.В.Кузьмина, П.П.Кулиш, Б.Б.Лурье,  
Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин, В.Н.Судаков, О.М.Фоменко

# 1 Введение

Случайные блуждания являются классической проблемой как для комбинаторики, так и для статистической физики. Задача о перечислении путей, проделываемых, так называемыми, *недружественными* пешеходами в результате блужданий по одномерной решетке, была сформулирована и подробно рассмотрена Фишером [1]. Предполагается, что при встрече в одном из узлов решетки любая пара недружественных пешеходов уничтожает не только друг друга, но и всех остальных пешеходов. Указанная задача продолжает привлекать значительное внимание как физиков, так и математиков [2]–[9]. Близкие проблемы возникают также при изучении самоорганизующейся критичности [10], доменных стенок [11], и полимеров [12]. В работе [13] рассматривается подход к описанию случайного блуждания аннигилирующих частиц по кольцу. В работе [14] изучаются блуждания со случайными поворотами на полуоси, в начале которой могут рождаться частицы.

В работах [15, 16] было показано, что корреляционные функции  $XX$  цепочки Гейзенберга над ферромагнитным состоянием могут быть использованы для перечисления путей блуждания недружественных пешеходов. В предлагаемой статье рассмотрены средние специального вида как над ферромагнитным, так и над суперпозицией собственных состояний  $XX$  магнетика в нулевом магнитном поле. Рассмотренные средние играют роль производящих функций числа путей недружественных пешеходов. Вычисление корреляционных функций производится с помощью функционального интегрирования [17, 18]. Получены ответы для числа путей одиночного пешехода, перемещающегося из фиксированного узла в другой достаточно удаленный узел решетки. Представлены асимптотические оценки числа путей в пределе, когда количество выполняемых шагов (и, соответственно, число случайных поворотов) возрастает.

Работа организована следующим образом. Раздел 1 имеет вводный характер. Гамильтониан модели и вычисление корреляционных функций обсуждаются в разделе 2. Раздел 3 посвящен конкретным вычислениям и соответствующим асимптотическим оценкам. Обсуждение в разделе 4 завершает статью.

## 2 Модель и корреляционные функции

Интересующий нас  $XX$  магнетик является частным случаем более общей спиновой модели —  $XY$  цепочки Гейзенберга, гамильтониан которой в поперечном магнитном поле  $h > 0$  имеет вид [19, 20]:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \gamma H_1 - h S^z, & H_0 &\equiv - \sum_{n,m=1}^M \Delta_{nm}^{(+)} \sigma_n^+ \sigma_m^-, \\ H_1 &\equiv - \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^M \Delta_{nm}^{(+)} (\sigma_n^+ \sigma_m^+ + \sigma_n^- \sigma_m^-), & S^z &\equiv \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \sigma_n^z, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $S^z$  означает  $z$ -компоненту оператора полного спина, и  $\gamma$  — параметр анизотропии. Локальные спиновые операторы  $\sigma_n^\pm = \frac{1}{2}(\sigma_n^x \pm i\sigma_n^y)$  и  $\sigma_n^z$  являются матрицами Паули, зависящими от решеточного аргумента  $n \in \mathcal{M} \equiv \{1, \dots, M\}$ , где  $M = 0(\bmod 2)$ . Соответствующие перестановочные соотношения имеют вид:

$$[\sigma_k^+, \sigma_l^-] = \delta_{k,l} \sigma_l^z, \quad [\sigma_k^z, \sigma_l^\pm] = \pm 2 \delta_{k,l} \sigma_l^\pm.$$

Кроме того, введена *матрица перескоков*  $\Delta_{nm}^{(s)}$ , имеющая следующие матричные элементы:

$$\Delta_{nm}^{(s)} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{|n-m|,1} + s\delta_{|n-m|,M-1}), \quad (2)$$

где  $\delta_{n,l}$  – символ Кронекера, и  $s$  может принимать два значения:  $s = \pm$ . Предполагается, что наложены периодические граничные условия:  $\sigma_{n+M}^\alpha = \sigma_n^\alpha$ ,  $\forall n \in \mathcal{M}$ . При нулевом значении параметра  $\gamma$ , гамильтониан  $H$  (1) сводится к гамильтониану  $XX$  магнетика.

Общее определение зависящих от времени  $t$  и температуры  $T \equiv 1/\beta$  корреляционных функций рассматриваемой модели имеет вид:

$$G_{j;l}^{ab}(t) \equiv \frac{1}{Z} \text{Tr} (\sigma_j^a(0) \sigma_l^b(t) e^{-\beta H}), \quad Z \equiv \text{Tr} (e^{-\beta H}), \quad (3)$$

где  $\sigma_l^b(t) \equiv e^{itH} \sigma_l^b e^{-itH}$ , и  $\text{Tr}$  означает усреднение по всем собственным состояниям гамильтониана  $H$ . Кроме того, в нормировке используется статистическая сумма  $Z$ . В работе [21] обсуждалось вычисление корреляторов (3) в базисе собственных функций гамильтониана  $XX$  магнетика. Основное внимание при этом уделялось связи корреляционных функций с определителями Фредгольма в термодинамическом пределе. В нашей статье мы будем рассматривать только  $XX$  цепочку и через  $H$  будем обозначать ее гамильтониан.

Для вычисления средних (3) можно воспользоваться переходом от спиновых переменных к каноническим ферми-переменным  $c_j, c_j^\dagger$ ,  $j \in \mathcal{M}$  [19, 20]. Соответствующее преобразование Йордана-Вигнера имеет вид:

$$\sigma_n^+ = \left( \prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j^z \right) c_n, \quad \sigma_n^- = c_n^\dagger \left( \prod_{j=1}^{n-1} \sigma_j^z \right), \quad n \in \mathcal{M}, \quad (4)$$

где  $\sigma_j^z = 1 - 2c_j^\dagger c_j$ . Периодические граничные условия для спиновых операторов приводят к следующим граничным условиям для фермиевских переменных:

$$c_{M+1} = (-1)^{\mathcal{N}} c_1, \quad c_{M+1}^\dagger = c_1^\dagger (-1)^{\mathcal{N}}, \quad (5)$$

где  $\mathcal{N} = \sum_{n=1}^M c_n^\dagger c_n$  – оператор полного числа частиц. Введем в рассмотрение операторы  $P^\pm$ , осуществляющие проектирование на состояния с четным/нечетным числом фермионов:

$$P^+ + P^- = \mathbb{I}, \quad P^+ - P^- = (-1)^{\mathcal{N}}.$$

Тогда гамильтониан  $H$  (1) в фермионном представлении принимает вид [19, 20]:

$$H = H^+ P^+ + H^- P^-. \quad (6)$$

При этом, операторы  $H^\pm$  (6) формально идентичны, хотя верхний индекс  $s = \pm$  указывает на соответствующую конкретизацию граничных условий (5). А именно, для подпространств с четным/нечетным числом фермионов получаем соответствие:

$$c_{M+1} = -s c_1, \quad c_{M+1}^\dagger = -s c_1^\dagger \quad \sim \quad H^s, \quad s = \pm.$$

Иными словами, квадратичные по фермионным переменным операторы  $H^\pm$  имеют следующее представление:

$$H^\pm = c^\dagger \hat{H}^\pm c - \frac{Mh}{2}, \quad \hat{H}^\pm = -\hat{\Delta}^{(\mp)} + h\hat{I}, \quad (7)$$

где матрицы  $\hat{H}^\pm$  выражены через матрицы перескоков (2), и  $\hat{I}$  – единичная матрица:

$$\hat{H}^\pm = \begin{pmatrix} h & -1/2 & & & \pm 1/2 \\ -1/2 & h & -1/2 & & \\ & -1/2 & h & -1/2 & \\ & & \dots & h & -1/2 \\ \pm 1/2 & & & -1/2 & h \end{pmatrix}$$

(указаны только ненулевые элементы). Кроме того, в (7) использованы сокращенные обозначения  $c^\dagger$  и  $c$  для  $M$ -компонентных строки и столбца, построенных из  $c_n^\dagger, c_n$  ( $n \in \mathcal{M}$ ).

В частности, коррелятор (3) для  $a = b = z$  в представлении (4) принимает вид [18, 22, 23]:

$$G_{j;l}^{zz}(t) = 1 - \frac{2}{Z} \text{Tr} (c_j^\dagger c_j e^{-\beta H}) - \frac{2}{Z} \text{Tr} (c_l^\dagger c_l e^{-\beta H}) + \frac{4}{Z} \text{Tr} (c_j^\dagger c_j e^{itH} c_l^\dagger c_l e^{-(\beta+it)H}). \quad (8)$$

Для вычисления (8) удобно вести производящий функционал [18]:

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}(S, T | \lambda, \nu) = \frac{1}{Z} \text{Tr} (e^S e^{-\lambda H} e^T e^{-\nu H}), \quad (9)$$

где  $\lambda, \nu$  – комплексные параметры,  $\lambda + \nu = \beta$ . В записи (9) использованы квадратичные операторы  $S \equiv c^\dagger \hat{S} c$  и  $T \equiv c^\dagger \hat{T} c$ , задаваемые с помощью матриц  $\hat{S} = \text{diag} \{S_k\}_{1 \leq k \leq M}$  и  $\hat{T} = \text{diag} \{T_k\}_{1 \leq k \leq M}$ . Например, последнее слагаемое в правой части (8) получается из (9) следующим образом:

$$\left. \frac{\partial}{\partial S_j} \frac{\partial}{\partial T_l} \mathcal{G}(S, T | \lambda, \nu) \right|_{\substack{S_n, T_n, \forall n \mapsto 0 \\ \lambda, \nu \mapsto -it, \beta + it}}. \quad (10)$$

С учетом (6), след в правой части (9) переписывается следующим образом [18]:

$$\text{Tr} (e^S e^{-\lambda H} e^T e^{-\nu H}) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}_F^+ Z_F^+ + \mathcal{G}_F^- Z_F^- + \mathcal{G}_B^+ Z_B^+ - \mathcal{G}_B^- Z_B^-), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm &\equiv \text{Tr} (e^S e^{-\lambda H^\pm} e^T e^{-\nu H^\pm}), \\ \mathcal{G}_B^\pm Z_B^\pm &\equiv \text{Tr} (e^S e^{-\lambda H^\pm} e^T (-1)^\mathcal{N} e^{-\nu H^\pm}), \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$Z_F^\pm = \text{Tr} (e^{-\beta H^\pm}), \quad Z_B^\pm = \text{Tr} ((-1)^\mathcal{N} e^{-\beta H^\pm}).$$

При этом для статистической суммы  $Z$  получаем:

$$Z = \frac{1}{2} (Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-).$$

В термодинамическом пределе слагаемые с индексом B взаимно компенсируются в (11), и для вычисления  $\mathcal{G}$  (9) достаточно вычислить  $\mathcal{G}_F^\pm$  (12).

Рассматриваемое фермиевское представление характеризуется фоковским состоянием  $|0\rangle$ , одинаковым для  $H^\pm$  и таким, что  $c_k|0\rangle = 0$ ,  $\forall k \in \mathcal{M}$ . Воспользуемся когерентными состояниями над  $|0\rangle$ ,

$$\begin{aligned} |z\rangle &\equiv \exp\left\{\sum_{k=1}^M c_k^\dagger z_k\right\} |0\rangle \equiv \exp(c^\dagger z) |0\rangle, \\ \langle z^*| &\equiv \langle 0| \exp\left\{\sum_{k=1}^M z_k^* c_k\right\} \equiv \langle 0| \exp(z^* c), \end{aligned} \quad (13)$$

которые оказываются различными для  $H^+$  и  $H^-$ . Здесь используем сокращенные обозначения  $z^* \equiv (z_1^*, \dots, z_M^*)$  и  $z \equiv (z_1, \dots, z_M)$  для наборов независимых грассмановых параметров  $z_k, z_k^*$  ( $k \in \mathcal{M}$ ) (дополнительный индекс  $\pm$  для  $z^*$ ,  $z$  уместно опустить). Кроме того,  $\sum_{k=1}^M c_k^\dagger z_k \equiv c^\dagger z$ ,  $\prod_{k=1}^M dz_k \equiv dz$ . Будем вычислять  $\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm$  (12), пользуясь представлением следа в подходе грассманова интегрирования по состояниям (13) [18]:

$$\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm = \int dz dz^* e^{z^* z} \langle z^*| e^S e^{-\lambda H^\pm} e^T e^{-\nu H^\pm} |z\rangle. \quad (14)$$

Чтобы представить (14) в виде функционального интеграла, введем, по аналогии с (13),  $L$  новых когерентных состояний  $|x(I)\rangle$ ,  $\langle x^*(I)|$ , где  $I \in \{1, \dots, L\}$ . В качестве индексов здесь выступают  $2L$  наборов  $x^*(I)$ ,  $x(I)$ , каждый из которых образован  $M$  независимыми грассмановыми параметрами. Использование разложений единицы

$$\int dx^*(I) dx(I) \exp(-x^*(I)x(I)) |x(I)\rangle \langle x^*(I)|$$

( $I$  меняется от 1 до  $L$ ) позволяет представить правую часть (14) в виде  $(L+1)$ -кратного интеграла. Следуя [18], необходимо ввести добавочные переменные, выражающие условие квазипериодичности:

$$-\hat{E} x(0) = x(L+1) \equiv z, \quad -x^*(L+1) = x^*(0) \hat{E}^{-1} \equiv z^*, \quad (15)$$

где  $\hat{E} \equiv e^{\hat{S}} e^{-\lambda \hat{H}^\pm} e^{\hat{T}}$ . После этого допустимо устремить  $L$  к бесконечности и придти к функциональному интегралу на пространстве траекторий  $x^*(\tau)$ ,  $x(\tau)$ , где  $\tau \in \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{G}_F^\pm Z_F^\pm = \int e^S d\lambda^* d\lambda \prod_\tau dx^*(\tau) dx(\tau). \quad (16)$$

Здесь функционал действия  $S \equiv \int L(\tau) d\tau$  выражается через лагранжиан  $L(\tau)$ :

$$\begin{aligned} L(\tau) &\equiv x^*(\tau) \left( \frac{d}{d\tau} - \hat{H}^\pm \right) x(\tau) + J^*(\tau) x(\tau) + x^*(\tau) J(\tau), \\ J^*(\tau) &\equiv \lambda^* (\delta(\tau) \hat{I} + \delta(\tau - \nu) \hat{E}^{-1}), \quad J(\tau) \equiv (\delta(\tau) \hat{I} + \delta(\tau - \nu) \hat{E}) \lambda. \end{aligned}$$

Интегрирование в (16) по вспомогательным грассмановым переменным  $\lambda^*$ ,  $\lambda$  гарантирует соблюдение наложенной связи (15), и  $\delta$ -функции в  $J^*(\tau)$ ,  $J(\tau)$  редуцируют  $\tau$  к отрезку  $[0, \beta]$ . Уравнения для экстремалей действия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x^*} &= \frac{d}{d\tau} x - \hat{H}^\pm x + J = 0, \\ \frac{\delta S}{\delta x} &= -\frac{d}{d\tau} x^* - x^* \hat{H}^\pm + J^* = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

(предполагается, что вариации траекторий  $\delta x^*(\tau)$ ,  $\delta x(\tau)$  исчезают при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ ). Решение уравнений (17) позволяет получить регуляризованный ответ [18]:

$$\mathcal{G}_F^\pm = \det\left(\hat{I} + \frac{e^{(\beta-\nu)\hat{H}^\pm} e^{\hat{S}} e^{-\lambda\hat{H}^\pm} e^{\hat{T}} - \hat{I}}{\hat{I} + e^{\beta\hat{H}^\pm}}\right). \quad (18)$$

Далее, (18) подставляем в (10) и переходим в импульсное представление. Изложенная процедура применима и к поперечным корреляторам  $G_{j;l}^{ab}(t)$  (3), где  $a, b \in \{+, -\}$ .

### 3 Случайные блуждания

Как показано в [15, 16], перевороты спинов на одномерной решетке можно ассоциировать со случайными перемещениями пешеходов. Действительно, рассмотрим состояние  $XX$  цепочки Гейзенберга, соответствующее ферромагнитному упорядочению  $M$  спинов:  $|\uparrow\rangle \equiv \otimes_{n=1}^M |\uparrow\rangle_n$  (то есть, все спины направлены “вверх”). Рассмотрим среднее следующего вида:

$$F_{j;l}(\lambda) \equiv \langle \uparrow | \sigma_j^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_l^- | \uparrow \rangle, \quad (19)$$

где  $H_0$  соответствует нулевому магнитному полю  $h = 0$  в гамильтониане (6), (7) (для соответствующих матриц  $\hat{H}^\pm$  (7) нижний индекс вводить не будем), и  $\lambda \in \mathbb{C}$  – “эволюционный” параметр. Направление спина “вверх” (или “вниз”) соответствует пустым (или заполненным) узлам. Дифференцируя  $F_{j;l}(\lambda)$  (19) и раскрывая коммутатор  $[H_0, \sigma_j^\pm]$ , мы получаем разностно-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{d\lambda} F_{j;l}(\lambda) = \frac{1}{2} (F_{j+1;l}(\lambda) + F_{j-1;l}(\lambda)) \quad (20)$$

(аналогичное уравнение можно получить и для зафиксированного индекса  $j$ ). Решение данного уравнения определяется накладываемыми граничными условиями по решеточному аргументу, а также условием при  $\lambda = 0$ .

Среднее  $F_{j;l}(\lambda)$  можно рассматривать как производящую функцию траекторий со случайными поворотами, начинающихся в  $l$ -ом узле и оканчивающихся в  $j$ -ом узле. Действительно, введем обозначение  $\mathcal{D}_\lambda^K$  для оператора  $K$ -кратного дифференцирования по  $\lambda$  в точке  $\lambda = 0$ . Применение  $\mathcal{D}_\lambda^K$  к среднему (19) приводит к ответу:

$$\mathcal{D}_\lambda^K [F_{j;l}(\lambda)] = \langle \uparrow | \sigma_j^+ (-H_0)^K \sigma_l^- | \uparrow \rangle = \sum_{n_1, \dots, n_{K-1}} \Delta_{jn_{K-1}}^{(+)} \dots \Delta_{n_2 n_1}^{(+)} \Delta_{n_1 l}^{(+)} \quad (21)$$

Правая часть (21) совпадает с матричным элементом  $j$ -ой строки и  $l$ -ого столбца, отвечающим произведению  $K$  матриц перескоков (2). Каждая матрица соответствует переходу между двумя ближайшими узлами решетки. Будучи умноженной на  $2^K$  (что связано с принятой нормировкой матрицы (2)), правая часть (21) дает число траекторий из  $K$  шагов между  $l$ -ым и  $j$ -ым узлами. Будем обозначать это число  $|P_K(l \rightarrow j)|$ .

Пусть  $|P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)|$  обозначает число путей из  $K$  звеньев, проделываемых  $N$  недружественными пешеходами в модели блужданий со случайными поворотами. Здесь начальные и конечные положения пешеходов на узлах заданы, соответственно, последовательностями  $l_1 > l_2 > \dots > l_N$  и  $j_1 > j_2 > \dots > j_N$ . Рассмотрим  $N$ -точечную корреляционную функцию ( $N \leq M$ ):

$$F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda) = \langle \uparrow | \sigma_{j_1}^+ \sigma_{j_2}^+ \dots \sigma_{j_N}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- \dots \sigma_{l_N}^- | \uparrow \rangle. \quad (22)$$

Коррелятор (22) связан с перечислением допустимых траекторий, проделываемых  $N$  недружественными пешеходами. Действительно, применение к (22) оператора  $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$  приводит к среднему виду

$$\langle \uparrow | \sigma_{j_1}^+ \sigma_{j_2}^+ \dots \sigma_{j_N}^+ (-2H_0)^K \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- \dots \sigma_{l_N}^- | \uparrow \rangle.$$

Указанное же среднее дает числа  $|P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)|$ , что можно установить с использованием коммутатора

$$[H_0, \sigma_{l_1}^- \sigma_{l_2}^- \dots \sigma_{l_K}^-] = \sum_{k=1}^K \sigma_{l_1}^- \dots \sigma_{l_{k-1}}^- [H_0, \sigma_{l_k}^-] \sigma_{l_{k+1}}^- \dots \sigma_{l_K}^- \quad (23)$$

(при этом, дифференцирование по  $\lambda/2$ , а не по  $\lambda$ , позволило учесть нормировку матрицы перескоков (2)). Условие того, что пути пешеходов не пересекаются, выражается в занулении (22) для любой пары совпадающих индексов  $l_k$  или  $j_p$ .

Дифференцируя определение (22) по  $\lambda$  и применяя (23), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (F_{j_1, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_k+1, \dots, l_N}(\lambda) + F_{j_1, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_k-1, \dots, l_N}(\lambda)). \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение (24) рассматривается в [16] для случая периодичности по решеточному аргументу и при начальном условии:

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(0) = \prod_{m=1}^N \delta_{j_m, l_m}.$$

Функция  $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$  может быть выражена в виде определителя матрицы, составленной из средних вида (19) [16]:

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) = \det(F_{j_r; l_s}(\lambda))_{1 \leq r, s \leq N}. \quad (25)$$

### 3.1 Случайные блуждания на оси

Рассмотрим бесконечную цепочку ( $M \rightarrow \infty$ ). Тогда решением уравнения (20), удовлетворяющим условию  $F_{j;l}(0) = \delta_{j,l}$ , оказывается [15] модифицированная функция Бесселя  $I_{j-l}(\lambda)$ :

$$F_{j;l}(\lambda) = I_{j-l}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda \cos \theta} e^{i(j-l)\theta} d\theta. \quad (26)$$

Для  $I_{j-l}(\lambda)$  имеется следующее разложение в степенной ряд:

$$I_{j-l}(\lambda) = \sum_{Q \geq |l-j|}^{\infty} \frac{1}{(\frac{Q-j+l}{2})! (\frac{Q+j-l}{2})!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^Q, \quad (27)$$

где индекс суммирования  $Q$  подчиняется требованию:  $Q + |j-l| = 0 \pmod{2}$ . В пределе больших “времен” ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) и при умеренных  $m \equiv |l-j|$ , для производящей функции возникает известная асимптотика:

$$F_{j;l}(\lambda) \simeq \frac{e^\lambda}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left(1 - \frac{4m^2 - 1}{8\lambda} + \dots\right),$$

где убывание определяется критическим показателем  $\xi = -\frac{1}{2}$ .

Пусть число  $K$  удовлетворяет соотношениям  $K \geq |l-j|$  и  $K+|j-l| = 0 \pmod{2}$ . Тогда дифференцирование ряда (27) приводит к биномиальной формуле  $|P_K(l \rightarrow j)| = C_K^L$  для числа всех решеточных путей “длины”  $K$  между двумя узлами на бесконечной оси:

$$|P_K(l \rightarrow j)| \equiv \mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j;l}(\lambda)] = \frac{(m+2L)!}{L!(m+L)!}. \quad (28)$$

Здесь  $L$  означает половину числа поворотов:  $L \equiv (K-m)/2$ .

Перейдем к многоточечной корреляционной функции  $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$ . Как показано выше, величина  $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda)]$  имеет смысл числа траекторий  $N$  недружественных пешеходов, каждый из которых совершает  $K$  шагов. Однако можно дать несколько иную комбинаторную интерпретацию указанной величины. Для этого рассмотрим представление многоточечного коррелятора в виде определителя (25). Для бесконечной цепочки его матричные элементы  $F_{j_r; l_s}(\lambda)$  являются функциями Бесселя  $I_{j_r - l_s}(\lambda)$  (26). Действие  $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$  на определитель будем рассматривать как дифференцирование произведения  $N$  функций:

$$(f_1(x) f_2(x) \dots f_N(x))^{(K)} = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_N = K} P(n_1, n_2, \dots, n_N) f_1^{(n_1)} f_2^{(n_2)} \dots f_N^{(n_N)}. \quad (29)$$

В (29) использовано обозначение  $f^{(n)} \equiv d^n f(x)/dx^n$ , и коэффициентами являются числа перестановок с повторениями  $P(n_1, n_2, \dots, n_N)$ :

$$P(n_1, n_2, \dots, n_N) \equiv \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_N)!}{n_1! n_2! \dots n_N!}. \quad (30)$$

Суммирование в (29) распространяется на все неотрицательные значения  $n_1, n_2, \dots, n_N$ , сумма которых равна  $K$ .

Далее, пусть задана бесконечная (гипер-)кубическая решетка размерности  $N$ , каждый узел которой пронумерован набором из  $N$  чисел. Пусть некоторый пешеход, расположенный в “начальной” точке  $\mathbf{O} \equiv (0, 0, \dots, 0)$ , перемещается в другую точку  $(q_1, q_2, \dots, q_N)$ , делая  $K$  шагов. При этом за один шаг он может сместиться только в какой-то из ближайших узлов. Введем обозначение  $\mathcal{T}_K(q_1, q_2, \dots, q_N)$  для числа всех решеточных траекторий указанного пешехода. Пусть также все числа  $q_k$  неотрицательны, и пусть выполняется неравенство:  $K \geq q_1 + q_2 + \dots + q_N$ . Иными словами, возможны шаги, компенсирующие друг друга. Обозначим их количество  $2L$ :

$$L \equiv \frac{K - q_1 - q_2 - \dots - q_N}{2}. \quad (31)$$

С учетом (31), имеет место формула для числа путей:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_K(q_1, q_2, \dots, q_N) &= \\ &= \sum_{L_1 + L_2 + \dots + L_N = L} P(q_1 + L_1, q_2 + L_2, \dots, q_N + L_N, L_1, L_2, \dots, L_N), \end{aligned} \quad (32)$$

где суммирование распространяется на все неотрицательные значения  $L_1, L_2, \dots, L_N$ , сумма которых равна  $L$ , и используется формула для числа перестановок с повторениями (30).

Вернемся к функции  $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$ , и с помощью ее индексов определим матрицу  $(n_{rs})_{1 \leq r, s \leq N}$  с матричными элементами  $n_{rs} \equiv j_r - l_s$ . Пусть  $K$  удовлетворяет неравенству:

$$K \geq \left| \sum_{r=1}^N j_r - \sum_{s=1}^N l_s \right|.$$

Тогда имеет место следующее

**Утверждение:** Число траекторий из  $K$  звеньев, описываемых  $N$  недружественными пешеходами на оси, выражается через число траекторий такой же “длины”  $K$  одиночного пешехода, перемещающегося по узлам  $N$ -мерной бесконечной решетки:

$$\begin{aligned} |P_K(l_1, \dots, l_N \rightarrow j_1, \dots, j_N)| &\equiv \mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda)] \\ &= \sum_{S_{a_1, a_2, \dots, a_N}} (-1)^{\mathcal{P}_S} \mathcal{T}_K(n_{a_1 1}, n_{a_2 2}, \dots, n_{a_N N}) \end{aligned} \quad (33)$$

где суммирование идет по всем перестановкам  $S_{a_1, a_2, \dots, a_N} \equiv S \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & N \\ a_1, & a_2, & \dots, & a_N \end{pmatrix}$  чисел от 1 до  $N$ , и  $\mathcal{P}_S$  есть четность конкретной перестановки.

**Доказательство.** Соотношение (33) можно получить прямым вычислением с использованием (25), (28)–(32). Чтобы доказать (33), следует разложить определитель (25) по строке или по столбцу и применить индукцию, опираясь при этом на формулы (28)–(32). База индукции задается цепочкой равенств:

$$\mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j; l}(\lambda)] = C_K^L = \sum_{S_1} (-1)^{(\mathcal{P}_{S_1}=0)} \mathcal{T}_K(n) = \mathcal{T}_K(n) = P(n+L, L), \quad (34)$$

где  $L \equiv (K - n)/2$  и  $n \equiv j - l$ . Предположим, что соотношение (33) верно для  $(N - 1)$ -точечного коррелятора, то есть для  $N - 1$  недружественных пешеходов. Пусть теперь матрица под знаком определителя в (25) имеет размер  $N \times N$ . Разложим для определенности определитель (25) по первому столбцу и воспользуемся правилом (29):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda)] &= \sum_{p=1}^N \mathcal{D}_{\lambda/2}^K[F_{j_p; l_1}(\lambda) A_{p1}] = \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{k_p + k = K} P(k_p, k) \mathcal{D}_{\lambda/2}^{k_p}[F_{j_p; l_1}(\lambda)] \mathcal{D}_{\lambda/2}^k[A_{p1}], \end{aligned} \quad (35)$$

где  $A_{p1}$  – алгебраическое дополнение соответствующего матричного элемента на пересечении  $p$ -ой строки и первого столбца.

Производная  $k_p$ -ого порядка записывается с помощью (28) следующим образом:

$$\mathcal{D}_{\lambda/2}^{k_p}[F_{j_p; l_1}(\lambda)] = \frac{k_p!}{\left(\frac{k_p - n_{p1}}{2}\right)! \left(\frac{k_p + n_{p1}}{2}\right)!}. \quad (36)$$

Производную  $k$ -ого порядка  $\mathcal{D}_{\lambda/2}^k[A_{p1}]$  запишем, пользуясь индукционным предположением:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\lambda/2}^k[A_{p1}] &= \sum_{S_p \equiv S_{b_1, \dots, b_{p-1}, b_{p+1}, \dots, b_N}} (-1)^{p-1+\mathcal{P}_{S_p}} \times \\ &\times \mathcal{T}_k(n_{b_1 2}, n_{b_2 3}, \dots, n_{b_{p-1} p}, n_{b_{p+1} p+1}, \dots, n_{b_N N}), \end{aligned} \quad (37)$$

где суммирование при  $1 < p < N$  идет по перестановкам

$$S_{b_1, \dots, b_{p-1}, b_{p+1}, \dots, b_N} \equiv S \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & p-1, & p+1, & \dots, & N \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_{p-1}, & b_{p+1}, & \dots, & b_N \end{pmatrix}. \quad (38)$$

При  $p = 1$  исходная последовательность в (38) суть  $(2, 3, \dots, N)$ , а при  $p = N$  исходная последовательность имеет вид:  $(1, 2, \dots, N-1)$ . Соответствующая модификация в (37) и (38) для  $p = 1$  или  $p = N$  непосредственна.

Далее, нужно учесть, что суммирование по всем перестановкам  $S_{a_1, a_2, \dots, a_N}$  в (33) можно эквивалентно рассматривать как совокупность независимых суммирований по перестановкам с  $a_1 = 1$ ,  $a_1 = 2$ , и так далее до  $a_1 = N$ . При этом соответствующая четность  $\mathcal{P}_S$  сводится к  $p-1 + \mathcal{P}_{S_p}$ , где  $\mathcal{P}_{S_p}$  – четность перестановки  $S_p$  (38). Дальнейшее вычисление с использованием (32) (для явного вида  $\mathcal{T}_k$ ) показывает, что применение (36) и (37) в (35) как раз и приводит к (33). Что и требовалось доказать.  $\square$

Вычислим (32), например, для  $N = 2$ :

$$\mathcal{T}_K(q_1, q_2) = C_{q_1+q_2+2L}^{q_1+L} \sum_{k=0}^L C_{q_1+L}^{L-k} C_{q_2+L}^k = C_K^{q_1+L} C_K^L, \quad (39)$$

где  $L = (K - q_1 - q_2)/2$  – половина числа поворотов. Тогда, пользуясь (33), получаем:

$$\mathcal{D}_{\lambda/2}^K [F_{j_1, j_2; l_1, l_2}(\lambda)] = \mathcal{T}_K(n_{11}, n_{22}) - \mathcal{T}_K(n_{21}, n_{12}) = \begin{vmatrix} C_K^L & C_K^{L+n_{21}} \\ C_K^L & C_K^{L+n_{11}} \end{vmatrix}, \quad (40)$$

где  $L = (K - n_{11} - n_{22})/2$ , и используется равенство  $n_{11} + n_{22} = n_{12} + n_{21}$ .

### 3.2 Случайные блуждания на оси. Интегральные представления $N$ -точечного коррелятора

Можно получить интегральные соотношения для  $F_{j_1, j_2, \dots, j_N; l_1, l_2, \dots, l_N}(\lambda)$  (25), представляя матричные элементы под знаком определителя в виде интеграла (26). Соответствующее вычисление происходит следующим образом [15]. Подстановка (26) в (25) приводит к выражению:

$$\begin{aligned} F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) &= \prod_{i=1}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) e^{\lambda \sum_{k=1}^N \cos \theta_k} \det(e^{i(l_s - j_p)\theta_p})_{1 \leq p, s \leq N} \\ &= \prod_{i=1}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) e^{\lambda \sum_{k=1}^N \cos \theta_k} \det(e^{i(l_s + K)\theta_l})_{1 \leq l, s \leq N} \prod_{p=1}^N e^{-i(j_p + K)\theta_p}. \end{aligned} \quad (41)$$

Определитель в подынтегральном выражении можно выразить через функцию Шура  $S_\pi(x_1, x_2, \dots, x_N)$  [24]:

$$\begin{aligned} S_\pi(x_1, x_2, \dots, x_N) &\equiv \frac{\det(x_j^{\pi_k + N - k})_{1 \leq j, k \leq N}}{\det(x_j^{N - k})_{1 \leq j, k \leq N}} \\ &= \det(x_j^{\pi_k + N - k})_{1 \leq j, k \leq N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j - x_k)^{-1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Функция Шура (42) связана с разбиением  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ , определяемым последовательностью целых неотрицательных чисел, которые расположены в порядке нестрогого убывания:  $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_N \geq 0$ . Благодаря трансляционной инвариантности, всегда можно положить  $l_1 > l_2 > \dots > l_N \geq -N$  для начального положения пешеходов, и задать элементы разбиения равенствами  $\pi_k = l_k + k$ . Тогда

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) = \prod_{i=1}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) e^{\lambda \sum_{k=1}^N \cos \theta_k} \times S_{\boldsymbol{\pi}}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N}) \prod_{1 \leq j < k \leq N} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k})^{-1} \prod_{l=1}^N e^{-i(j_l + K)\theta_l}, \quad (43)$$

где  $S_{\boldsymbol{\pi}}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N})$  – функции Шура (42). Точками завершения путей выберем  $j_l = -l$ . Просуммировав по перестановкам всех  $\theta_k$  и принимая во внимание тот факт, что произведение разностей в подинтегральном выражении является антисимметричной функцией, мы можем представить произведение  $N! \prod_{l=1}^N e^{-i(N-l)\theta_l}$  через определитель Вандермонда. Это дает

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) = \frac{e^{\lambda N}}{N!} \prod_{i=1}^N \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \right) e^{-\lambda \sum_{k=1}^N (1 - \cos \theta_k)} \times S_{\boldsymbol{\pi}}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_N}) \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2. \quad (44)$$

Для вычисления ведущей асимптотики производящей функции в пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ , сведем интеграл (44) к следующему интегралу [7, 25]:

$$\prod_{i=1}^N \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_i \right) \prod_{1 \leq j < k \leq N} |\theta_j - \theta_k|^2 e^{-\lambda/2 \sum_{k=1}^N \theta_k^2} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\lambda^{N^2/2}} \left( \prod_{p=1}^N p! \right). \quad (45)$$

Соотношение (45) – специальный случай *интеграла Мехты*, возникающего в теории *гауссовых матричных ансамблей*. В результате, получаем асимптотику для производящей функции блужданий  $N$  пешеходов:

$$F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda) \simeq \mathcal{A} \frac{e^{\lambda N}}{\lambda^{N^2/2}}, \quad \mathcal{A} = \frac{\prod_{p=1}^{N-1} p!}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{l_j - l_k}{k - j},$$

где в выражении для амплитуды  $\mathcal{A}$  учтена известная формула для  $S_{\boldsymbol{\pi}}(1, 1, \dots, 1)$  [9, 25]:

$$S_{\boldsymbol{\pi}}(1, 1, \dots, 1) = \prod_{1 \leq j < k \leq N} \frac{\pi_j - j - \pi_k + k}{k - j}$$

Таким образом, степенной вклад в поведение  $F_{j_1, \dots, j_N; l_1, \dots, l_N}(\lambda)$  определяется критическим показателем  $\xi = -N^2/2$ .

### 3.3 Случайные блуждания над суперпозицией собственных состояний

Собственные функции  $XX$  гамильтониана, задаваемого соотношениями (6), (7), строятся как комбинации состояний, возникающих при опрокидывании  $N$  спинов в состоянии  $|\uparrow\rangle$  [21]. Действительно, рассмотрим всевозможные строгие разбиения  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$ , где  $M \geq \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N \geq 1$ . Каждому такому разбиению поставим в соответствие последовательность нулей и единиц вида  $\{e_k \equiv e_k(\boldsymbol{\mu})\}_{k \in \mathcal{M}}$ , где  $e_k = \delta_{k, \mu_n}$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Требуемую собственную функцию определим следующим образом:

$$|\Psi_N(u_1, \dots, u_N)\rangle = \sum_{\{e_k(\boldsymbol{\mu})\}_{k \in \mathcal{M}}} \Upsilon_N(\{u_k\}|\boldsymbol{\mu}) (\sigma_M^-)^{e_M} (\sigma_{M-1}^-)^{e_{M-1}} \dots (\sigma_1^-)^{e_1} |\uparrow\rangle, \quad (46)$$

где в суммировании участвуют все строгие разбиения  $\boldsymbol{\mu}$  указанного вида. Количество таких разбиений выражается числом перестановок с повторениями (30):  $P(N, M-N) = C_M^N$ . Для периодических граничных условий волновые функции

$$\Upsilon_N(\{u_k\}|\boldsymbol{\mu}) \equiv \det(u_k^{2\mu_l})_{1 \leq k, l \leq N} \quad (47)$$

параметризуются разбиениями  $\boldsymbol{\mu}$  и различными, с точностью до перестановки, наборами  $\{u_1, \dots, u_N\}$  решений уравнений Бете:

$$u_k^{2M} = (-1)^{N-1}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (48)$$

Решения (48) имеют вид:  $u_k^2 = \exp(i \frac{2\pi}{M} I_k)$ , где  $I_k$  это целые или полуцелые числа (в зависимости от четности  $N$ ). В силу антисимметричности (46) по отношению к перестановкам параметров  $u_k$ , для однозначности достаточно ограничиться строгими разбиениями:  $M \geq I_1 > I_2 > \dots > I_N \geq 1$ . С учетом (46) оказывается, что соответствующее нормированное среднее вида

$$\langle \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^- \rangle_N \equiv \frac{\langle \Psi_N | \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^- | \Psi_N \rangle}{\langle \Psi_N | \Psi_N \rangle} \quad (49)$$

может быть представлено как линейная комбинация  $(N+1)$ -точечных производящих функций (22) и, таким образом, связано с блужданиями  $N+1$  пешехода. Начальное и конечные положения одного из них зафиксированы при  $l_1 = 1$  и  $j_1 = m+1$ , соответственно, в то время как для остальных (*виртуальных*) выбор положений случаен.

Представляет интерес вычисление (49) в термодинамическом пределе, когда  $M$  и  $N$  растут (их отношение остается конечным), то есть число виртуальных пешеходов возрастает. В данном пределе [26]:

$$\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) \equiv \langle \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^- \rangle_N \Big|_{M, N \gg 1} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\text{Tr}}(\sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-), \quad (50)$$

где  $\widetilde{\text{Tr}}$  означает, что для вычисления нормированного среднего используется процедура, указанная в разделе 2. Для  $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$  (50) имеет место разностно-дифференциальное соотношение, аналогичное уравнению (20):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) &= \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{F}_{m;1}(\lambda) + \tilde{F}_{m+2;1}(\lambda)) - \widetilde{\text{Tr}}(H_0 \sigma_{m+1}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-) \\ &- \widetilde{\text{Tr}}\left(\left(\frac{1 - \sigma_{m+1}^z}{2}\right) \sigma_m^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-\right) - \widetilde{\text{Tr}}\left(\left(\frac{1 - \sigma_{m+1}^z}{2}\right) \sigma_{m+2}^+ e^{-\lambda H_0} \sigma_1^-\right). \end{aligned} \quad (51)$$

Вид уравнения (51) заставляет предположить, что среднее  $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$  тоже может представлять интерес как производящая функция случайных блужданий.

Займемся вычислением  $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$  (50) в фермионном представлении (4). Удобно свести задачу к вычислению производящей функции следующего вида:

$$\tilde{\mathcal{G}} \equiv \widetilde{\text{Tr}} \left( e^S c_{m+1} e^{-\lambda H_0} c_1^\dagger e^{-\nu H_0} \right), \quad (52)$$

где оператор  $S$  определен так же, как и в (9) (то есть с помощью матрицы  $\hat{S} = \text{diag} \{S_k\}$ ). Действительно,  $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$  соответствует выбору  $\nu = 0$  и  $S_k = -i\pi\theta(m-k)$ ,  $1 \leq k \leq M$  где  $\theta(m-k)$  – функция Хэвисайда,  $\theta(0) = 1$ . Второе слагаемое в правой части (51) соответствует дифференцированию по  $\nu$  в точке  $\nu = 0$ , в третьем слагаемом считаем  $\nu = 0$  и дифференцируем по  $S_{m+1}$ . При этом, в обоих случаях выбираем  $S_k = -i\pi\theta(m-k)$ . Учитывая, что вклад слагаемых с индексом ‘В’ пренебрежим в (11) при достаточно больших  $M$  и  $N$ , приближенно получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}} &\approx \left[ \text{tr} \left( e^{-\lambda \hat{H}^0} \hat{e}_{1,m+1} \right) - \frac{d}{d\alpha} \right] \det(\hat{I} + \hat{\mathcal{M}}_1 + \alpha \hat{\mathcal{M}}_2) \Big|_{\alpha=0}, \\ \hat{\mathcal{M}}_1 + \alpha \hat{\mathcal{M}}_2 &\equiv e^{-\nu \hat{H}^0} e^{\hat{S}} e^{-\lambda \hat{H}^0} (\hat{I} + \alpha \hat{e}_{1,m+1} e^{-\lambda \hat{H}^0}), \end{aligned} \quad (53)$$

где  $\hat{e}_{1,m+1} \equiv (\delta_{1,n} \delta_{m+1,l})_{1 \leq n, l \leq M}$ . Матрица  $\hat{H}^0$  используется вместо  $\hat{H}^\pm$ , так как  $s$  можно заменить нулем при достаточно больших  $M$ .

Соотношение (53) записано в координатном представлении. Для перехода к импульсному представлению удобно воспользоваться некоторыми формулами, представленными в [22]. Ответ для  $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$  запишем, сохраняя матричную символику (в пределе  $M \rightarrow \infty$  соответствующие операции надо понимать в смысле действий над интегральными операторами [26]):

$$\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) = \det(\hat{I} + \hat{\mathcal{U}}_m) \left[ \text{tr} \left( e^{-\lambda \hat{\epsilon}_0} \hat{e}_{1,m+1} \right) - \text{tr} \left( \frac{\hat{\mathcal{V}}_m}{\hat{I} + \hat{\mathcal{U}}_m} \right) \right] \quad (54)$$

(например,  $\text{tr}$  соответствует следу  $M \times M$  матриц). Матрицы  $\hat{\mathcal{U}}_m$ ,  $\hat{\mathcal{V}}_m$ ,  $\hat{e}_{1,m+1}$  соответствуют импульсным представлениям матриц  $\hat{\mathcal{M}}_1$ ,  $\hat{\mathcal{M}}_2$ ,  $\hat{e}_{1,m+1}$  (53), но нам понадобятся только выражения для следов  $\text{tr} \hat{\mathcal{U}}_m$  и  $\text{tr} \hat{\mathcal{V}}_m$  (см. ниже). В импульсном представлении  $\hat{\epsilon}_0$  означает диагональную матрицу собственных значений энергии  $XX$  модели при  $h = 0$  [21]. Разложим формально  $\tilde{F}_{m+1;1}(\lambda)$  по степеням  $\hat{\mathcal{U}}_m$  и получим ответ в двух низших порядках:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{m+1;1}(\lambda) &\approx F_{m+1;1}(\lambda) + F_{m+1;1}(\lambda) \text{tr} \hat{\mathcal{U}}_m - \text{tr} \hat{\mathcal{V}}_m, \\ \text{tr} \hat{\mathcal{U}}_m &= (M - 2m) F_{1;1}(\lambda), \\ \text{tr} \hat{\mathcal{V}}_m &= F_{m+1;1}(2\lambda) - 2 \sum_{l=1}^m F_{m+1;l}(\lambda) F_{l;1}(\lambda), \end{aligned} \quad (55)$$

где обозначения  $F_{j;l}(\lambda)$  подразумевают интегралы типа (26). Хотя  $M$  и  $m$  выбраны достаточно большими, отношение  $m/M$  считается ограниченным. В каждом порядке уравнение (51) удовлетворяется представленными вкладами в  $\tilde{F}_{m+1;1}$  (55).

По аналогии со случаем ферромагнитного состояния, подействуем оператором  $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$  на  $\tilde{F}_{m+1,1}(\lambda)$  (55). Тогда в первом порядке придем к соотношению (28). Во втором порядке ответ возникает в следующем виде:

$$M C_K^L C_K^L - C_K^L \sum_{l=0}^K C_K^l + 2 \sum_{l=1}^m \left| \begin{array}{cc} C_K^{L+l-1} & C_K^L \\ C_K^L & C_K^L \end{array} \right|. \quad (56)$$

В силу (40), результат применения  $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$  к функции второго порядка  $F_{j_1, j_2; l_1, l_2}(\lambda)$  связан, как частный случай (33), с числом двумерных путей  $\mathcal{T}_K$  и выражается через соответствующий определитель. Это означает, что уместно также представить (56) в следующем эквивалентном виде:

$$(M - K) |P_K(l \rightarrow l + m)|^2 + \mathcal{D}_{\lambda/2}^K \left[ 2 \sum_{l=1}^m \left| \begin{array}{cc} F_{m+1, l}(\lambda) & F_{m+1, 1}(\lambda) \\ F_{l, l}(\lambda) & F_{l, 1}(\lambda) \end{array} \right| - \sum_{l=0}^K \left| \begin{array}{cc} F_{m+L, l}(\lambda) & F_{m+1, 1}(\lambda) \\ F_{l, l}(\lambda) & F_{l, L}(\lambda) \end{array} \right| \right]. \quad (57)$$

Другими словами, во втором порядке результат применения  $\mathcal{D}_{\lambda/2}^K$  к (55) можно переформулировать в терминах числа блужданий двух пешеходов (см. (25) и (40)), а также квадрата числа блужданий одиночного пешехода. Суммирование по индексу  $l$  в  $\text{tr } \hat{\mathcal{V}}_m$  (55) может быть проинтерпретировано как суммирование по положениям виртуального пешехода в (57).

Используя (40), можно представить (57) в терминах числа траекторий на двумерной решетке:

$$(M - 2(m + 1)) \mathcal{T}_K(m, 0) + \sum_{l=0}^m \mathcal{T}_K(m - l, l) - \sum_{l=1}^L \mathcal{T}_K(m + l, l) - \sum_{l=1}^L \mathcal{T}_K(l, m + l). \quad (58)$$

В соотношении (58) перечисляются решеточные траектории из  $K$  звеньев, начинающиеся в точке  $\mathbf{O} = (0, 0)$  и заканчивающиеся на отрезках пунктирной ломаной, которая соединяет точки  $(L, L + m)$ ,  $(0, m)$ ,  $(m, 0)$ , и  $(L + m, L)$  (см. Рис.1). Формально, сумма

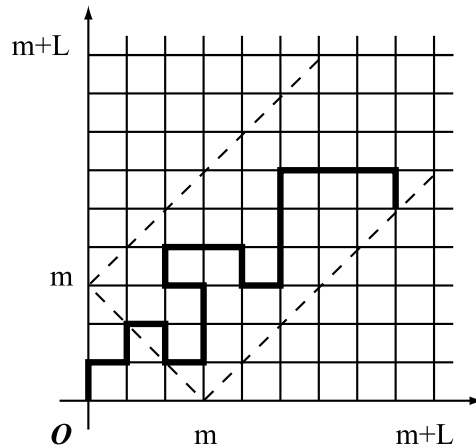


Рис. 1: Типичная конфигурация.

не является знакоопределенной, хотя ее асимптотика, в целом, положительна. Аналогичное описание ожидается и в более высоких порядках.

Оценим поведение числа путей, задаваемого представлением (56), в пределе, когда число звеньев  $K = m + 2L$  возрастает. Будем считать, что выполняется ограничение:  $1 \ll m \ll L$ . Иными словами, пусть  $m$  растет умеренно по сравнению с ростом числа поворотов  $L$ : например, пусть  $L$  растет как  $m^2$ . Пользуясь известным асимптотическим разложением логарифма гамма-функции<sup>1</sup> [27], можно например оценивать число сочетаний  $C_K^L$ . Ограничиваясь первым порядком малости, приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} C_K^L &\approx \frac{2^K}{\sqrt{\pi L}} e^{-m^2/(4L)} \left(1 - \frac{m}{2L} \left(1 - \frac{m^2}{4L}\right)\right) \\ &\approx \frac{2^K}{\sqrt{\pi L}} \left(1 - \frac{m^2}{4L}\right) \sim \frac{2^{2L}}{\sqrt{\pi L}}. \end{aligned} \quad (59)$$

Вторая строчка (59) имеет место, если  $L$  растет быстрее, чем  $m^2$ . Оценка (59) характеризует рост числа траекторий (28) для одиночного пешехода.

Далее, третье слагаемое в (56) можно записать как  $2 A(m, L) C_K^L C_K^L$ , где

$$A(m, L) \equiv -m + \sum_{l=1}^m \frac{(L + m + 2 - l)_{l-1}}{(L + 1)_{l-1}} \equiv -m + \sum_{l=1}^m \tilde{A}(m, L). \quad (60)$$

В (60) используется стандартное обозначение для символа Похгаммера  $(\alpha)_n$  [27]. Вновь воспользуемся разложением для логарифма гамма-функции (П1). Заметим, что при больших значениях  $z$  и  $\alpha$  допустима оценка:

$$\frac{B_{p+1}(\alpha)}{z^p} \sim \frac{\alpha^{p+1}}{z^p} \sim \frac{m^2}{L} \left(\frac{m}{L}\right)^{p-1},$$

где учтено, что (П1) применяется для  $\alpha \sim m$ ,  $z \sim L$ . Пропорциональность  $L \sim m^2$  означает, что для учета поправки первого порядка малости нужно выбрать  $n = 2$  в (П1). В этом случае удобно прийти к соответствующему приближенному соотношению:

$$\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \approx z^{\alpha-\beta} \exp\left(\frac{B_2(\alpha) - B_2(\beta)}{2z}\right) \left(1 - \frac{B_3(\alpha) - B_3(\beta)}{6z^2}\right). \quad (61)$$

Далее, использование (61) позволяет получить следующую оценку для  $\tilde{A}(m, L)$  (60):

$$\tilde{A}(m, L) \approx \exp\left(\frac{(l-1)(m-l+1)}{L}\right) \left(1 - \frac{(l-1)(m+1)(m-l+1)}{2L^2}\right). \quad (62)$$

Подставляем (62) в (60) и после ряда преобразований оцениваем  $A(m, L)$ :

$$A(m, L) \simeq m Z_1(m, L) - Z_0(m, L) + \mathcal{O}(m^{-1}), \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} Z_0(m, L) &\equiv e^{m^2/(4L)} \left(1 + \frac{m}{L^2} \sum_{l=0}^{m/2} e^{-l^2/L} \left(\frac{m^2}{4} - l^2\right)\right), \\ Z_1(m, L) &\equiv -1 + e^{m^2/(4L)} \frac{2}{m} \sum_{l=0}^{m/2} e^{-l^2/L}. \end{aligned} \quad (64)$$

---

<sup>1</sup>См. Приложение

Значения параметров  $m$  и  $L$  возрастают, но их отношение  $L/m^2$  остается ограниченным. Тогда можно показать (включая численную проверку), что коэффициентные функции  $Z_0(m, L)$  и  $Z_1(m, L)$  остаются ограниченными, и вклад  $Z_0(m, L)$  пренебрежим в (63) по сравнению с  $mZ_1(m, L)$ . Используем (59) и (63) для оценки (56) в ведущем приближении:

$$\frac{2^{4L}}{\pi L} e^{-m^2/(2L)} \left( M + 2mZ_1(m, L) - (\pi L)^{1/2} e^{m^2/(4L)} \right). \quad (65)$$

Благодаря поведению коэффициента  $Z_1(m, L)$ , соответствующий вклад в (65) может оказаться сопоставимым с  $M$ . Соотношение (65) свидетельствует о том, что картина блужданий в представлении суперпозиции собственных состояний сложнее, чем для ферромагнитного случая. Эта картина может рассматриваться как совместное блуждание исходного (основного) и виртуального пешеходов. Точки окончания траекторий, принадлежащие всем трем участкам пунктирной ломаной на Рис.1 (см. представление двумерных блужданий (58)), соответствуют сравнимым вкладам в оценку (65). В некоторых случаях, определяемых предельным поведением отношения  $m^2/L$ , доминирующим может оказаться вклад, который отвечает отрезку между точками  $(m, 0)$  и  $(0, m)$ .

## 4 Заключение

Показано, что корреляционные функции  $XX$  магнетика Гейзенберга, вычисляемые как над суперпозицией собственных состояний, так и для чисто ферромагнитного случая, связаны с перечислением траекторий пешеходов, блуждающих по решетке. Установлена связь между числом траекторий нескольких недружественных пешеходов и числом путей единичного пешехода, перемещающегося со случайными поворотами по решетке, размерность которой совпадает с количеством недружественных пешеходов. Дифференцирование производящей функции, вычисленной для суперпозиции собственных состояний, демонстрирует более сложную комбинаторную картину, чем для ферромагнитного случая. В частности, к траекториям одиночного пешехода добавляются траектории, соответствующие совместному блужданию исходного и виртуального (недружественных) пешеходов. Получена оценка числа траекторий совместного блуждания основного и виртуального пешеходов.

## Благодарности

Работа частично поддержана РФФИ, No. 07-01-00358, и программой РАН „Математические методы в нелинейной динамике”.

## Приложение

Разложение логарифма гамма-функции при больших  $|z|$  и  $|\arg z| < \pi$  имеет вид [27]:

$$\begin{aligned} \log \Gamma(z + \alpha) &= \left( z + \alpha - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) \\ &+ \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \frac{B_{p+1}(\alpha)}{p(p+1)} z^{-p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В разложении (П1) используются многочлены Бернулли, определяемые следующим образом:

$$B_n(\alpha) = \sum_{l=0}^n C_n^l B_l \alpha^{n-l},$$

где  $C_n^l$  – биномиальные коэффициенты,  $B_l$  – числа Бернулли. Представим несколько первых чисел Бернулли:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

и многочленов Бернулли:

$$B_0(\alpha) = 1, \quad B_1(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}, \quad B_2(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6},$$

$$B_3(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha, \quad B_4(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 - \frac{1}{30}.$$

## Список литературы

- [1] M. E. Fisher, *J. Stat. Phys.* **34**, 667–729 (1984).
- [2] P. J. Forrester, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, 1259–1273 (1990).
- [3] T. Nagao, P. J. Forrester, *Nucl. Phys. B* **620**, 551–565 (2002).
- [4] A. J. Guttmann, A. L. Owczarek, X. G. Viennot, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 8123–8135 (1998).
- [5] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 8835–8866 (2000).
- [6] C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot, *J. Stat. Phys.*, **110**, 1069–1086 (2003).
- [7] M. Katori, H. Tanemura, *Phys. Rev. E* **66**, 011105 (2002) [12 pages].
- [8] M. Katori, H. Tanemura, T. Nagao, N. Komatsuda, *Phys. Rev. E* **68**, 021112 (2003) [16 pages].
- [9] M. Katori, H. Tanemura, *RIMS Kokyuroku* **1438**, 83–102 (2005).
- [10] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **38**, 364–374 (1988).
- [11] D. Huse, M. Fisher, *Phys. Rev. B* **29**, 239–270 (1984).
- [12] J. W. Essam, A. J. Guttmann, *Phys. Rev. E* **52**, 5849–5862 (1995).
- [13] С. Ю. Григорьев, В. Б. Приезжев, *Теор. Мат. Физ.* **146**, 488–498 (2006).
- [14] J. W. van de Leur, A. Yu. Orlov, *Random turn walk on a half line with creation of particles at the origin*, arXiv:0801.0066 (2008).
- [15] Н. М. Боголюбов, *Зап. Научн. Семин. ПОМИ* **325**, 13–27 (2005); English transl.: *J. Math. Sci.* **138**, 5636–5643 (2006).
- [16] Н. М. Боголюбов, *Зап. Научн. Семин. ПОМИ* **335**, 59–74 (2006); English transl.: *J. Math. Sci.* **143**, 2729–2737 (2007).
- [17] С. Malyshev, *Functional integration with “automorphic” boundary conditions and correlators of z-components of spins in the XY and XX Heisenberg chains*, in *New Developments in Mathematical Physics Research*, ed. Charles V. Benton (Nova Science Publishers, New York, 2004), pp. 85–116.
- [18] К. Мальшев, *Зап. Научн. Семин. ПОМИ* **317**, 142–173 (2004); English transl.: *J. Math. Sci.* **136**, 3607–3624 (2006).
- [19] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Ann. Phys. (NY)* **16**, 407–466 (1961).
- [20] Th. Niemeijer, *Physica* **36**, 377–419 (1967); **39**, 313–326 (1968).
- [21] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti, *Теор. Мат. Физ.* **94**, 19–51 (1993).

- [22] А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин, *Зап. Научн. Семина. ПОМИ* **245**, 173–206 (1997); English transl.: *J. Math. Sci.*, **100**, 2120–2140 (2000).
- [23] В. С. Капитонов, А. Г. Пронько, *Зап. Научн. Семина. ПОМИ* **269**, 219–261 (2000); English transl.: *J. Math. Sci.*, **115**, 2009–2032 (2003).
- [24] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель* (Москва, Мир, 1990).
- [25] М. Katori, Н. Tanemura, *Scaling limit of vicious walkers, Schur function, and Gaussian random matrix ensemble*, arXiv:cond-mat/0110274v1 (2001).
- [26] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin *Quantum inverse scattering method and correlation functions* (Cambridge, Cambridge University Press, 1993).
- [27] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* (Springer, Berlin, etc., 1966).