

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ БЕРГМАНА–СОБОЛЕВА

Е. С. ДУБЦОВ

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Октябрь 2008

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство голоморфных функций в единичном шаре B_n из \mathbb{C}^n , $n \geq 1$. При $s > 0$, $q > 0$ и $0 < p < \infty$ в работе исследуется граничное поведение тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых дробная производная $R^s f$ принадлежит весовому пространству Бергмана $A_q^p(B_n)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство голоморфных функций в единичном шаре $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$. Напомним, что пространство Харди $H^p(B_n)$, $0 < p < \infty$, состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что

$$\|f\|_{H^p(B_n)}^p = \sup_{0 < r < 1} \int_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^p d\sigma_n(\zeta) < +\infty,$$

где σ_n обозначает нормированную меру Лебега на сфере ∂B_n . Весовое пространство Бергмана $A_q^p(B_n)$, $q > 0$, $0 < p < \infty$, состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых

$$\|f\|_{A_q^p(B_n)}^p = \int_{B_n} |f(z)|^p (1 - |z|)^{q-1} d\nu_n(z) < +\infty,$$

где ν_n обозначает нормированную меру Лебега на шаре B_n .

При $s > 0$ оператор $R^s : \mathcal{H}ol(B_n) \rightarrow \mathcal{H}ol(B_n)$ определяется следующим образом. Если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$$

является однородным разложением функции $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, то

$$R^s f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^s f_k(z), \quad z \in B_n.$$

Пространство Харди–Соболева $H_s^p(B_n)$, $s > 0$, $0 < p < \infty$, задается равенством

$$H_s^p(B_n) = \{f \in \mathcal{H}ol(B_n) : R^s f \in H^p(B_n)\}.$$

Пространство Бергмана–Соболева $A_{q,s}^p(B_n)$, $s > 0$, $q > 0$, $0 < p < \infty$, состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых

$$\|f\|_{A_{q,s}^p(B_n)}^p = \|R^s f\|_{A_q^p(B_n)}^p < +\infty.$$

Последнее определение было введено Беатрусом и Бурбеа в работе [1]; для пространств $H_s^p(B_n)$ в работе [1] использовано обозначение $A_{0,s}^p(B_n)$. Отметим, что $A_{q,1}^p(B_1)$ часто называют пространствами типа Дирихле; для таких пространств используется обозначение \mathcal{D}_{q-1}^p (см., например, [2, 3, 4] и другие работы Хирелы, Пелаеса и их соавторов). Для определения пространств \mathcal{D}_{q-1}^p используется стандартная производная f' вместо $R^1 f$; однако хорошо известно, что соответствующие пространства совпадают (см. [1, теорема 5.3]). Отметим, что $A_{1,1}^2(B_1)$ является классическим пространством Дирихле. Пространства $A_{q,m}^p(B_n)$, $m \in \mathbb{N}$, иногда называют голоморфными пространствами Бесова.

При $n = s = 1$ граничное поведение функций из пространств $A_{q,s}^p(B_n)$ недавно исследовали Хирела и Пелаес (см. [3, 4]). В настоящей работе акцент сделан на случае $n \geq 2$. Также уточняются некоторые детали для $n = 1$. Безусловно, граничное поведение функций из пространств $A_{q,s}^p(B_n)$ становится более регулярным при убывании

разности $q - ps$. В §2 соответствующие количественные утверждения выведены из результатов работ [1, 5, 6, 7, 8]. Предельный случай $q/s = p \in (2, \infty)$ изучается в §3 при дополнительном предположении $s = 1$. Соответствующая теорема 2.2 является основным результатом настоящей статьи.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем предполагается, что $n \in \mathbb{N}$, $s > 0$, $q > 0$ и $0 < p < \infty$, если не наложены дополнительные ограничения.

2.1. Отсутствие радиальных пределов.

Предложение 2.1. *Предположим, что $q > ps$. Тогда существует функция $f \in A_{q,s}^p(B_n)$, такая что конечный радиальный предел $\lim_{r \rightarrow 1-} f(r\zeta)$ не существует для всех точек $\zeta \in \partial B_n$.*

Доказательство. Имеем $q > ps$, следовательно, $A_{q,s}^p(B_n)$ совпадает с пространством Бергмана $A_{q-ps}^p(B_n)$ в силу теоремы 5.12 из работы [1]. Далее, напомним, что пространство Блоха $\mathcal{B}(B_n)$ задается равенством

$$\mathcal{B}(B_n) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(B_n) : \sup_{z \in B_n} (1 - |z|)|\nabla f(z)| < \infty \right\}.$$

Хорошо известно, что $\mathcal{B}(B_n) \subset A_r^p(B_n)$ для всех $r > 0$ и $0 < p < \infty$ (см., например, [9]). Остается заметить, что Улрич [10] построил функцию $f \in \mathcal{B}(B_n)$, которая нигде не имеет конечных радиальных пределов. \square

Если $q = ps$, то необходимо рассмотреть два случая: $0 < p \leq 2$ (см. предложение 2.3 ниже) и $2 < p < \infty$. В последнем случае дополнительно предположим, что $s = 1$.

Теорема 2.2. *Пусть $2 < p < \infty$. Тогда существует функция $f \in A_{p,1}^p(B_n)$, такая что конечный радиальный предел $\lim_{r \rightarrow 1-} f(r\zeta)$ не существует для σ_n -п.в. точек $\zeta \in \partial B_n$.*

При $n = 1$ известен количественный вариант сформулированного утверждения (см. [4]). Доказательство теоремы 2.2 приведено в §3.

2.2. Исключительные множества: определения. Для $\zeta \in \partial B_n$ и $\tau \in (0, 1]$ положим

$$D_{\tau,K}(\zeta) = \{z \in B_n : |1 - \langle z, \zeta \rangle| < K(1 - |z|)^\tau\},$$

где $K > 1$ при $\tau = 1$ и $K > 0$ при $0 < \tau < 1$. Рассмотрим функцию $f : B_n \rightarrow \mathbb{C}$. По определению исключительное множество $E_\tau[f]$ состоит из всех точек $\zeta \in \partial B_n$, таких что для некоторого числа K функция $f(z)$ не имеет предела в точке ζ , когда z приближается к ζ , оставаясь в множестве $D_{\tau,K}(\zeta)$. Множество $E_1[f]$ является классическим объектом. Если $\zeta \in E_1[f]$, то говорят, что функция f не имеет допустимого (в смысле Кораньи) предела в точке ζ . Также отметим, что порядок касания между областью $D_{\tau,K}(\zeta)$ и границей ∂B_n возрастает при убывании параметра τ .

Следующие области подхода имеют экспоненциальный порядок контакта со сферой. Для $\zeta \in \partial B_n$, $1 < p < \infty$, $\mu \geq 1$ и $K > 0$ положим

$$\mathcal{D}_{p,\mu,K}(\zeta) = \left\{ z \in B_n : |1 - \langle z, \zeta \rangle| < K \left(\log \frac{e}{1 - |z|} \right)^{\frac{(1-p)\mu}{n}} \right\}.$$

Отметим, что максимальный порядок контакта между областью $\mathcal{D}_{p,\mu,K}(\zeta)$ и границей ∂B_n имеет место при $\mu = 1$. По определению, если параметры p и μ зафиксированы, то исключительное множество $\mathcal{E}_{p,\mu}[f]$ соответствует областям подхода $\mathcal{D}_{p,\mu,K}(\zeta)$, $\zeta \in \partial B_n$, $K > 0$.

Теперь пусть $\beta > 0$. Напомним, что неизотропный (при $n \geq 2$) β -охват по Хаусдорфу множества $E \subset \partial B_n$ определяется формулой

$$\mathcal{H}_\beta(E) = \mathcal{H}_\beta(E, \partial B_n) = \inf \left\{ \sum_j \delta_j^\beta : E \subset \bigcup_j B(\zeta_j, \delta_j) \right\},$$

где $\zeta_j \in \partial B_n$ и $B(\zeta, \delta) = \{\xi \in \partial B_n : |1 - \langle \zeta, \xi \rangle| < \delta\}$. Если $\zeta \in \partial B_1$, то $B(\zeta, \delta) = \{\xi \in \partial B_1 : |\zeta - \xi| < \delta\}$. Иными словами, если $E \subset \partial B_1$, то $\mathcal{H}_\beta(E)$ является стандартным β -охватом по Хаусдорфу. Также отметим, что свойства $\mathcal{H}_n(E) = 0$ и $\sigma_n(E) = 0$ эквивалентны для множества $E \subset \partial B_n$.

2.3. Исключительные множества.

Предложение 2.3. *Предположим, что $q = ps$ и $0 < p \leq 2$. Если $f \in A_{q,s}^p(B_n)$, то $\mathcal{H}_n(E_1[f]) = 0$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае имеем $A_{q,s}^p(B_n) \subset H^p(B_n)$ в силу теоремы 5.12 из работы [1]. Поэтому искомое равенство следует из классических результатов о пространствах Харди. \square

Нейджел, Рудин и Шапиро [11] доказали, что $\mathcal{H}_1(E_{q-1}[f]) = 0$, если $f \in A_{q,1}^2(B_1)$ и $1 < q < 2$. Далее, если $f \in A_{1,1}^2(B_1)$, то $\mathcal{H}_1(\mathcal{E}_{2,1}[f]) = 0$ (см. [11]). Более того, из результатов, полученных в статье [11], можно вывести следующую теорему.

Теорема 2.4 (Хирела и Пелаес [3, теорема 1.2]).

- (i) Пусть $1 \leq p \leq 2$ и $p - 1 < q < p$. Если $f \in A_{q,1}^p(B_1)$, то $\mathcal{H}_1(E_{1+q-p}[f]) = 0$.
- (ii) Предположим, что $1 < p \leq 2$. Если $f \in A_{p-1,1}^p(B_1)$, то $\mathcal{H}_1(\mathcal{E}_{p,1}[f]) = 0$.

Отметим, индекс множества $E_{1+q-p}[f]$ в части (i) сформулированной теоремы является точным (см. [3]).

Сопоставляя теоремы, доказанные в работах [1] и [8], получаем следующее обобщение части (i) теоремы 2.4 для всех $n \geq 1$.

Теорема 2.5. *Предположим, что $0 < p \leq 2$, $s > 0$, $\max\{0, ps - n\} < q < ps$ и $f \in A_{q,s}^p(B_n)$.*

- (i) Если $1 + (q - ps)/n \leq \tau < 1$, то $\mathcal{H}_{(n+q-ps)/\tau}(E_\tau[f]) = 0$.

- (ii) Если $0 < p \leq 1$, то $\mathcal{H}_{n+q-ps}(E_1[f]) = 0$.
- (iii) Если $1 < p \leq 2$, то $\mathcal{H}_m(E_1[f]) = 0$ для всех $m > n + q - ps$.

Доказательство. Имеем $0 < p \leq 2$, следовательно, применяя теорему 5.12 из работы [1], получаем $A_{q,s}^p(B_n) \subset H_{s-q/p}^p(B_n)$. Так как $f \in H_{s-q/p}^p(B_n)$, то часть (i) имеет место в силу следствия 2.1 из статьи [8]; см. также теорему 2.2 из статьи [8]. Часть (ii) следует из результатов работ [5] и [6]. Наконец, заметим, что $E_1[f] \subset E_\tau[f]$ при $0 < \tau < 1$, следовательно, (iii) следует из (i). \square

Отметим, что часть (iii) теоремы 2.5 можно несколько уточнить с помощью теорем, доказанных в статье [12].

При $p > 2$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Предположим, что $2 < p < \infty$, $s > 0$, $\max\{0, ps - n\} < q < ps$ и $f \in A_{q,s}^p(B_n)$.*

- (i) Если $1 + (q - ps)/n < \tau < 1$, то $\mathcal{H}_{m/\tau}(E_\tau[f]) = 0$ для всех $m > n + q - ps$.
- (ii) $\mathcal{H}_m(E_1[f]) = 0$ для всех $m > n + q - ps$.

Доказательство. Зафиксируем число $m > n + q - ps$. Не умаляя общности, будем предполагать, что $\tau n > m$. Положим $p^* = pm/(n + q - ps)$. Так как $p^* > p$, то теорема 5.13 из работы [1] гарантирует, что $A_{q,s}^p(B_n) \subset H_{s^*}^{p^*}(B_n)$, где

$$\frac{n + q}{p} - \frac{n}{p^*} = s - s^*.$$

Имеем $n > m$, поэтому $s^* > 0$.

Так как $f \in H_{s^*}^{p^*}(B_n)$, то получаем, что $\mathcal{H}_{(n-p^*s^*)/\tau}(E_\tau[f]) = 0$ в силу следствия 2.1 из статьи [8]. Заметим, что $n - p^*s^* = m$, следовательно, часть (i) доказана. Наконец, (ii) следует из (i). \square

Предложение 2.7. *Предположим, что $2 < p < \infty$, $s > 0$, $\max\{0, ps - n\} < q < ps$ и $1 + (q - ps)/n < \tau \leq 1$. Если $E \subset \partial B_n$ является компактом и $\mathcal{H}_{(n+q-ps)/\tau}(E) = 0$, то $E = E_\tau[f]$ для некоторой функции $f \in A_{q,s}^p(B_n)$.*

Доказательство. Имеем $E = E_\tau[f]$ для некоторой функции $f \in H_{s-q/p}^p(B_n)$ (см. [12] и [8]). Остается заметить, что $H_{s-q/p}^p(B_n) \subset A_{q,s}^p(B_n)$, так как $2 < p < \infty$ (см. [1]). \square

В предельном случае $ps - n = q$ имеет место следующее обобщение части (ii) теоремы 2.4.

Теорема 2.8. *Предположим, что $ps - n = q > 0$ и $f \in A_{q,s}^p(B_n)$.*

- (i) Если $2 < p < \infty$ и $\mu \geq 1$, то $\mathcal{H}_{n/\mu}(\mathcal{E}_{p+\varepsilon,\mu}[f]) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$.
- (ii) Если $1 < p \leq 2$ и $\mu \geq 1$, то $\mathcal{H}_{n/\mu}(\mathcal{E}_{p,\mu}[f]) = 0$.
- (iii) Если $0 < p \leq 1$, то функция f непрерывно продолжается на замкнутый шар $\overline{B_n}$.

Доказательство. Если $2 < p < \infty$, то теорема 5.13 из работы [1] гарантирует, что $A_{q,s}^p(B_n) \subset H_{n/(p+\varepsilon)}^{p+\varepsilon}(B_n)$ для всех $\varepsilon > 0$. Поэтому для доказательства части (i) при $\mu = 1$ можно применить результаты статьи [7], а при $\mu > 1$ можно применить следствие 3.1 из статьи [8].

Если $0 < p \leq 2$, то, используя теорему 5.12 из работы [1], имеем $A_{q,s}^p(B_n) \subset H_{n/p}^p(B_n)$. Следовательно, свойство (ii) имеет место в силу теорем, доказанных в статьях [7] и [8]. Часть (iii) следует из результатов В. Г. Кротова (см. [7]). \square

Наконец, если $ps - n > q > 0$ и $f \in A_{q,s}^p(B_n)$, то функция f обладает свойством, сформулированным в заключении части (iii) теоремы 2.8 (см. например, [7]). В частности, все исключительные множества являются пустыми для функции f .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2

Нам потребуются четыре вспомогательных леммы.

Лемма 3.1 (Рыль и Войтащик [13]). *Для каждого числа $j \in \mathbb{N}$ существуют голоморфный однородный многочлен W_j степени j в \mathbb{C}^n , такой что*

$$\|W_j\|_{L^\infty(\partial B_n)} = 1 \quad \text{и} \quad \|W_j\|_{L^2(\partial B_n)} \geq 2^{-n} \sqrt{\pi}.$$

Следующая “лемма о перемешивании” принадлежит Кальдерону и Стейну.

Лемма 3.2 (Рудин [14, лемма 7.2.7]). *Рассмотрим последовательность борелевских функций $g_k : \partial B_n \rightarrow [0, 1]$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\partial B_n} g_k(\zeta) d\sigma_n(\zeta) = \infty.$$

Тогда существуют унитарные преобразования $U_k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, такие что

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(U_k \zeta) = \infty \quad \text{для } \sigma_n\text{-п.в. точек } \zeta \in \partial B_n.$$

Лемма 3.3 (Рудин [14, предложения 1.4.3 и 1.4.7]). *Пусть $h : B_n \rightarrow [0, +\infty)$ является борелевской функцией. Тогда*

$$\frac{1}{n} \int_{B_n} h(z) |z|^{2-2n} d\nu_n(z) = \int_{\partial B_n} \int_{B_1} h(\lambda \zeta) d\nu_1(\lambda) d\sigma_n(\zeta).$$

Лемма 3.4. *Предположим, что $2 < p < \infty$, $b = \{b_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell^p$ и*

$$f_b(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^{2^k}, \quad \lambda \in B_1.$$

Тогда $f_b \in A_{p,1}^p(B_1)$ и

$$\|f_b\|_{A_{p,1}^p(B_1)} \leq C \|b\|_{\ell^p},$$

где константа C не зависит от последовательности b .

Доказательство. В силу предложения А из работы [4] имеем $f_b \in A_{p,1}^p(B_1)$. Так как пространство $A_{p,1}^p(B_1)$ является банаховым, то искомая оценка для нормы функции f_b следует из теоремы о замкнутом графике. \square

Доказательство теоремы 2.2. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и последовательность многочленов Рыля–Войташика $\{W_j\}_{j=1}^\infty$. Также зафиксируем $p \in (2, \infty)$ и последовательность $\{a_k\}_{k=0}^\infty \in \ell^p \setminus \ell^2$, такую что $|a_k| \leq 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\zeta \in \partial B_n$ положим $g_k(\zeta) = |a_k W_{2^k}(\zeta)|^2 \in [0, 1]$. Лемма 3.1 гарантирует, что

$$\sum_{k=0}^\infty \int_{\partial B_n} g_k(\zeta) d\sigma_n(\zeta) \geq C(n) \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 = \infty.$$

С помощью леммы 3.2 построим унитарные преобразования $\{U_k\}_{k=0}^\infty$, такие что

$$\sum_{k=0}^\infty |a_k W_{2^k} \circ U_k(\zeta)|^2 = \infty \quad \text{для } \sigma_n\text{-п.в. точек } \zeta \in \partial B_n.$$

Положим

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k W_{2^k} \circ U_k(z), \quad z \in B_n.$$

Ниже будет доказано, что функция f обладает требуемыми свойствами.

1. Проверим, что $f \in A_{p,1}^p(B_n)$. Для $\zeta \in \partial B_n$ рассмотрим срез-функцию $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$, $\lambda \in B_1$. Так как $W_{2^k} \circ U_k$ является однородным многочленом степени 2^k , то имеем

$$f_\zeta(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty a_k W_{2^k} \circ U_k(\zeta) \lambda^{2^k}, \quad \lambda \in B_1.$$

Напомним, что $\|W_{2^k}\|_{L^\infty(\partial B_n)} = 1$, следовательно,

$$\|f_\zeta\|_{A_{p,1}^p(B_1)} \leq C \|a\|_{\ell^p}$$

в силу леммы 3.4. Отметим, что $R^1 f(\lambda\zeta) = R^1(f_\zeta)(\lambda)$ для $\lambda \in B_1$ и $\zeta \in \partial B_n$. Таким образом, применяя лемму 3.3, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \int_{B_n} |R^1 f(z)|^p (1 - |z|)^{p-1} d\nu_n(z) \\ & \leq \int_{\partial B_n} \int_{B_1} |R^1(f_\zeta)(\lambda)|^p (1 - |\lambda|)^{p-1} d\nu_1(\lambda) d\sigma_n(\zeta) \\ & \leq C \|a\|_{\ell^p}^p < \infty, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2. Изучим радиальное поведение функции f . Предположим, что $\xi \in \partial B_n$ и

$$(3.1) \quad \sum_{k=0}^\infty |a_k W_{2^k} \circ U_k(\xi)|^2 = \infty.$$

В силу теоремы Зигмунда о суммировании лакунарных рядов (см. [15, глава V, теорема 6.4]) конечный предел $\lim_{r \rightarrow 1-} f_{\xi}(rw)$ не существует для σ_1 -п.в. точек $w \in \partial B_1$. По построению свойство (3.1) имеет место для σ_n -п.в. точек $\xi \in \partial B_n$. Следовательно, конечный предел $\lim_{r \rightarrow 1-} f(r\zeta)$ не существует для σ_n -п.в. точек $\zeta \in \partial B_n$ в силу предложения 1.4.7 из монографии [14]. Доказательство теоремы 2.2 завершено. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Beatrous and J. Burbea, “Holomorphic Sobolev spaces on the ball”, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, **276** (1989), 60pp.
- [2] Z. Wu, “Carleson measures and multipliers for Dirichlet spaces”, *J. Funct. Anal.*, **169**:1 (1999), 148–163.
- [3] D. Girela and J. Á. Peláez, “Boundary behaviour of analytic functions in spaces of Dirichlet type”, *J. Inequal. Appl.*, **2006**, Art. ID 92795, 12pp.
- [4] D. Girela and J. Á. Peláez, “Growth properties and sequences of zeros of analytic functions in spaces of Dirichlet type”, *J. Aust. Math. Soc.*, **80**:3 (2006), 397–418.
- [5] P. Ahern, “Exceptional sets for holomorphic Sobolev functions”, *Michigan Math. J.*, **35**:1 (1988), 29–41.
- [6] W. S. Cohn, “Nonisotropic Hausdorff measure and exceptional sets for holomorphic Sobolev functions”, *Illinois J. Math.*, **33**:4 (1989), 673–690.
- [7] В. Г. Кротов, “Граничное поведение дробных интегралов голоморфных функций в единичном шаре из \mathbf{C}^N ”, *Изв. вузов. Математика*, **1988**:4, 73–75.
- [8] C. Cascante and J. M. Ortega, “Tangential-exceptional sets for Hardy–Sobolev spaces”, *Illinois J. Math.*, **39**:1 (1995), 68–85.
- [9] K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [10] D. C. Ullrich, “A Bloch function in the ball with no radial limits”, *Bull. London Math. Soc.*, **20**:4 (1988), 337–341.
- [11] A. Nagel, W. Rudin, and J. H. Shapiro, “Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces”, *Ann. of Math. (2)*, **116**:2 (1982), 331–360.
- [12] P. Ahern and W. Cohn, “Exceptional sets for Hardy Sobolev functions, $p > 1$ ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **38**:2 (1989), 417–453.
- [13] J. Ryll and P. Wojtaszczyk, “On homogeneous polynomials on a complex ball”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **276**:1 (1983), 107–116.
- [14] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из \mathbf{C}^n* , Мир, М., 1984.
- [15] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965.

E-mail address: dubtsov@pdmi.ras.ru