ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 15/2008

ВЕСОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ НА ПРОСТРАНСТВАХ РОСТА

Е. С. ДУБЦОВ

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Август 2008

Аннотация

Пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном шаре B_n из $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Для $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и голоморфного отображения $\varphi : B_m \to B_n$ положим $C_\varphi^g f = g \cdot (f \circ \varphi)$ при $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$. В работе охарактеризованы те g и φ, для которых C_φ^g является ограниченным (или компактным) оператором из пространства роста $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ или $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, в весовое пространство Бергмана $A_\alpha^p(B_m)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Также получены некоторые обобщения этого результата и исследованы родственные интегральные операторы.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 08-01-00358-а и Фондом содействия отечественной науке.

1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном шаре $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| < 1\}$. В настоящей работе рассматриваются несколько классов линейных операторов $T : X \to Y$, где $X \subset \mathcal{H}ol(B_n)$ и $Y \subset \mathcal{H}ol(B_m)$ при $m, n \in \mathbb{N}$.

Пространство X. Предполагается, что $X = \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, или $X = \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$. При $\beta > 0$ пространство роста $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых

$$\|f\|_{-\beta} = \sup_{z \in B_n} |f(z)|(1 - |z|)^{\beta} < \infty.$$

По определению пространство логарифмического роста $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что

$$\|f\|_{-\log} = \sup_{z \in B_n} \frac{|f(z)|}{\log(e/(1 - |z|))} < \infty.$$

Пространства $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ и $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ с нормами $\|\cdot\|_{-\beta}$ and $\|\cdot\|_{-\log}$ являются банаховыми. Отметим, что для всех $\beta > 0$ имеем $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \supset \mathcal{A}^{-\log}(B_n) \supset \mathcal{B}(B_n)$, где $\mathcal{B}(B_n)$ обозначает классическое пространство Блоха в шаре. На самом деле, интерес к пространству $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ во многом объясняется его тесными связями с пространством $\mathcal{B}(B_n)$. Разнообразные свойства пространства Блоха $\mathcal{B}(B_n)$ собраны, например, в главе 3 монографии [12].

Пространство Y. Предполагается, что Y является весовым пространством Бергмана или его обобщением. При $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$ весовое пространство Бергмана $A^p_\alpha(B_m)$ состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_m)$, для которых

$$\|f\|^p_{A^p_\alpha} = \int_{B_m} |f(z)|^p (1 - |z|)^{\alpha} \, d\nu_m(z) < \infty,$$

где ν_m обозначает нормированную меру Лебега на единичном шаре B_m. Если $1 \le p < \infty$, то $A^p_\alpha(B_m)$ является банаховым пространством; если $0 < p < 1$, то пространство $A^p_\alpha(B_m)$ является полным относительно метрики $d(f, g) = \|f - g\|^p_{A^p_\alpha}$.

Весовые операторы композиции. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и пусть $\varphi : B_m \to B_n$ является голоморфным отображением. Оператор $C^g_\varphi : \mathcal{H}ol(B_n) \to \mathcal{H}ol(B_m)$ задается формулой

$$(C^g_\varphi f)(z) = g(z) f(\varphi(z)), \quad z \in B_m.$$

Задача заключается в описании тех g и φ, для которых оператор C^g_φ отображает X в Y. Интенсивно исследовались два частных случая данной задачи.

Случай $m = n$. Оператор $C_\varphi^g : \mathcal{H}ol(B_n) \to \mathcal{H}ol(B_n)$ называется весовым оператором композиции. Оператор C_φ^g обозначается символом C_φ, если $g \equiv 1$. C_φ называется оператором композиции. Разнообразные свойства операторов композиции в шаре собраны в монографии [4]. Случай $m = n = 1$ детально исследуется в монографии [9]. Оператор C_φ^g обозначается символом M_g, если $\varphi(z) \equiv z$. M_g называется оператором умножения.

Случай $n = 1$. Как и выше, оператор C_φ^g обозначается символом C_φ, если $g \equiv 1$. Следующий эвристический принцип мотивирует исследования при $n = 1$ и $m \geq 2$. Пусть оператор C_φ отображает достаточно широкое пространство $X \subset \mathcal{H}ol(B_1)$ в "хорошее" пространство $Y \subset \mathcal{H}ol(B_m)$. Предположим, что граничное поведение функции $f \in X$ является весьма нерегулярным. Так как $C_\varphi f$ наследует свойства функции f, то граничное поведение функции $C_\varphi f$ является, в определенном смысле, нерегулярным, хотя $C_\varphi f$ принадлежит хорошему пространству Y. Ахерн [1] реализовал изложенную выше схему для $X = \mathcal{B}(B_1)$ и $Y = \mathrm{BMOA}(B_m)$; см. также [8], где приведены дальнейшие результаты и ссылки. Легко объяснить выбор пространства Блоха $\mathcal{B}(B_1)$ в качестве X. Действительно, хорошо известно, что пространство $\mathcal{B}(B_1)$ содержит функции, которые не имеют конечных радиальных пределов.

Операторы интегрирования. Для $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ положим

$$(J_g f)(z) = \int_0^1 f(tz) \frac{\mathcal{R}g(tz)}{t}\, dt, \quad f \in \mathcal{H}ol(B_n),\ z \in B_n,$$

где

$$\mathcal{R}g(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial g}{\partial z_j}(z), \quad z \in B_n,$$

является радиальной производной функции g. Отметим, что

$$\mathcal{R}g(z) = \sum_{k=0}^\infty k g_k(z), \quad z \in B_n,$$

если $g(z) = \sum_{k=0}^\infty g_k(z)$, $z \in B_n$, является однородным разложением функции $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$.

Имеем $J_g : \mathcal{H}ol(B_n) \to \mathcal{H}ol(B_n)$. Как и выше, для данных $X, Y \subset \mathcal{H}ol(B_n)$ задача заключается в нахождении всех функций $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых оператор J_g отображает X в Y. Если $n = 1$, то имеем

$$(J_g f)(z) = \int_0^z f(w) g'(w)\, dw, \quad f \in \mathcal{H}ol(B_1),\ z \in B_1.$$

Поэтому J_g иногда называют обобщенным оператором Чезаро. Алеман [2] рассматривает различные свойства оператора J_g при $n = 1$. Для $n \geq 2$ оператор интегрирования J_g ввел Ху [7]. Отметим, что оператор J_g тесно связан с оператором умножения $M_{\mathcal{R}g}$. В течение последних лет несколько авторов исследовали оператор J_g на пространствах типа Бергмана и пространствах типа Блоха.

Организации статьи. В §2 сформулирована основная лемма данной статьи. Для рассматриваемых X и Y в §3 охарактеризованы отображения g и φ, для которых весовой оператор композиции $C_\varphi^g : X \to Y$ является ограниченным или компактным. Отметим, что в недавней статье [6] получен соответствующий одномерный результат для $X = \mathcal{A}^{-\log}(B_1)$ и $Y = A_\alpha^p(B_1)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. Стевич [10, теорема 5.2] сформулировал частичный результат, если $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, и $Y = H(p, q; \omega)(B_n)$ (определение пространства $H(p, q; \omega)(B_n)$ дано в §3). В настоящей работе соответствующая задача решена полностью (см. следствие 3.4).

Для рассматриваемых X и Y в §4 охарактеризованы функции $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых оператор интегрирования $J_g : X \to Y$ является ограниченным или компактным. В статье [6] доказан соответствующий результат для $X = \mathcal{A}^{-\log}(B_1)$ и $Y = A_\alpha^p(B_1)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$. В заключительном §5 собраны некоторые результаты о голоморфных пространствах Соболева.

2. Основная лемма

Следующая лемма будет ключевым инструментом при изучении операторов на пространствах роста.

Лемма 2.1 ([5]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует натуральное число $L = L(n)$, такое что имеют место следующие утверждения.*

1. Пусть $\beta > 0$. Тогда существуют функции $f_\ell \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $0 \le \ell \le L$, такие что

$$\sum_{\ell=0}^{L} |f_\ell(z)| \ge \frac{1}{(1-|z|)^\beta}, \quad z \in B_n. \tag{2.1}$$

2. Существуют функции $h_\ell \in \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$, $0 \le \ell \le L$, такие что

$$\sum_{\ell=0}^{L} |h_\ell(z)| \ge \log \frac{e}{1-|z|}, \quad z \in B_n. \tag{2.2}$$

3. Весовые операторы композиции

3.1. **Операторы из X в Y.** Пусть $\mathcal{Y}(B_m)$ — линейное пространство, состоящее из функций $f : B_m \to \mathbb{C}$. Будем говорить, что $\mathcal{Y}(B_m)$ является решеткой, если имеет место следующее свойство:

если $F \in \mathcal{Y}(B_m)$ и $|f(z)| \le |F(z)|$ для всех $z \in B_m$, то $f \in \mathcal{Y}(B_m)$.

Для решетки $\mathcal{Y}(B_m)$ положим $\mathcal{Y}_A(B_m) = \mathcal{Y}(B_m) \bigcap \mathcal{H}ol(B_m)$. Весовое пространство Бергмана $A_\alpha^p(B_m)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, является частным случаем пространства $\mathcal{Y}_A(B_m)$. Действительно, $A_\alpha^p(B_m) = \mathcal{Y}_A(B_m)$ для $\mathcal{Y}(B_m) = L^p(B_m, (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z))$.

Предложение 3.1. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и пусть $\varphi : B_m \to B_n$ является голоморфным отображением. Предположим, что $\mathcal{Y}(B_m)$ является решеткой.*

1. Пусть $\beta > 0$. Оператор C_φ^g отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $\mathcal{Y}_A(B_m)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{|g(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^\beta} \in \mathcal{Y}(B_m). \tag{3.1}$$

2. Оператор C_φ^g отображает пространство $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $\mathcal{Y}_A(B_m)$ тогда и только тогда, когда

$$|g(z)| \log \frac{e}{1-|\varphi(z)|} \in \mathcal{Y}(B_m).$$

Доказательство. Предположим, что $\beta > 0$ и оператор C_φ^g отображает пространство $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $\mathcal{Y}_A(B_m)$. Зафиксируем число $L = L(n)$ и функции $f_\ell \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, существующие в силу леммы 2.1. Применяя неравенство (2.1), имеем

$$\frac{|g(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^\beta} \le \sum_{\ell=0}^{L} |g(z)||f_\ell(\varphi(z))| = \sum_{\ell=0}^{L} |(C_\varphi^g f_\ell)(z)|, \quad z \in B_m.$$

Так как $\mathcal{Y}(B_m)$ является решеткой, то получаем (3.1).

Для доказательства обратной импликации предположим, что выполнено свойство (3.1). Если $f \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, то

$$|(C_\varphi^g f)(z)| \le \|f\|_{-\beta} |g(z)|(1-|\varphi(z)|)^{-\beta} \in \mathcal{Y}(B_m).$$

Следовательно, $C_\varphi^g f \in \mathcal{Y}_A(B_m)$. Доказательство части 1 завершено. Доказательство части 2 аналогично. Действительно, воспользуемся функциями $h_\ell \in \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$, существующими в силу леммы 2.1, и применим неравенство (2.2). □

3.2. **Компактные операторы.** Нам потребуется следующий критерий компактности, различные модификации которого хорошо известны.

Лемма 3.2 (ср. с [11, лемма 3.7])**.** *Пусть $X = \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, или $X = \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ и пусть Y — векторное пространство, состоящее из голоморфных функций в шаре B_m. Предположим, что Y является метрическим пространством с инвариантной относительно сдвига метрикой. Рассмотрим линейный оператор $T : X \to Y$. Тогда имеет место следующая импликация.*

Предположим, что последовательность $\{Th_j\}$ сходится к нулю в метрике пространства Y для любой ограниченной в X последовательности $\{h_j\}$, такой что $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n. Тогда T — компактный оператор.

3.2.1. *Y является весовым пространством Бергмана.*

Следствие 3.3. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и пусть $\varphi : B_m \to B_n$ является голоморфным отображением. Предположим, что $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$.*

1. Пусть $\beta > 0$. Оператор C_φ^g отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A_\alpha^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C_\varphi^g : \mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \to A_\alpha^p(B_m)$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда

$$\int_{B_m} \frac{|g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z)}{(1-|\varphi(z)|)^{\beta p}} < \infty. \tag{3.2}$$

2. Оператор C_φ^g отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $A_\alpha^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C_\varphi^g : \mathcal{A}^{-\log}(B_n) \to A_\alpha^p(B_m)$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда

$$\int_{B_m} |g(z)|^p \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(z)|}\right)^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z) < \infty.$$

Доказательство. Пусть имеет место (3.2). Отметим, что предположения леммы 3.2 выполнены для $T = C_\varphi^g$ и $Y = A_\alpha^p(B_m)$. Итак, пусть $\|h_j\|_{-\beta} \le K$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если число $t \in [0,1)$ находится достаточно близко к 1, то

$$\begin{aligned}
&\int_{\{z\in B_m:\ |\varphi(z)|>t\}} |(C_\varphi^g h_j)(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z) \\
&\le K \int_{\{z\in B_m:\ |\varphi(z)|>t\}} \frac{|g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z)}{(1-|\varphi(z)|)^{\beta p}} \\
&< \varepsilon/2
\end{aligned}$$

в силу (3.2). Так как $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n, то имеем

$$\int_{\{z\in B_m:\ |\varphi(z)|\le t\}} |(C_\varphi^g h_j)(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_m(z) < \varepsilon/2,$$

если индекс j достаточно велик. Следовательно, $\|C_\varphi^g h_j\|_{A_\alpha^p}^p < \varepsilon$ для всех достаточно больших j. Таким образом, лемма 3.2 гарантирует, что C_φ^g является компактным оператором из $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A_\alpha^p(B_n)$. В силу предложения 3.1 доказательство части 1 завершено. Доказательство части 2 аналогично, поэтому оно будет опущено. □

3.2.2. *Y является пространством со смешанной нормой.* Положительная непрерывная функция ω на интервале $[0,1)$ называется нормальной, если существуют числа s и t, $0 < s < t$, такие что $\omega(r)(1-r)^{-s}$ убывает в окрестности точки 1 и $\omega(r)(1-r)^{-s} \to 0$ при $r \to 1-$; $\omega(r)(1-r)^{-t}$ возрастает в окрестности точки 1 и $\omega(r)(1-r)^{-t} \to \infty$ при $r \to 1-$.

Пусть σ_m обозначает нормированную меру Лебега на сфере ∂B_m. Если $0 < p, q < \infty$ и ω является нормальной функцией, то пространство со смешанной нормой $H(p,q;\omega)(B_m)$ состоит из тех функций$f \in \mathcal{H}ol(B_m)$, для которых

$$\|f\|_{p,q;\omega}^p = \int_0^1 \mathcal{M}_q^p(f,r)\omega^p(r)(1-r)^{-1} \, dr < \infty,$$

где $\mathcal{M}_q^q(f,r) = \int_{\partial B_m} |f(r\zeta)|^q \, d\sigma_m(\zeta)$, $0 \le r < 1$. Отметим, что $H(p,p;\omega)(B_m)$ является весовым пространством Бергмана $A^p_\alpha(B_m)$, если $\omega(r) = (1-r)^{(\alpha+1)/p}$ при $\alpha > -1$. Если $\mu = \min\{p,q\} \ge 1$, то $H(p,q;\omega)(B_m)$ — банахово пространство; если $0 < \mu < 1$, то пространство $H(p,q;\omega)(B_m)$ является полным относительно метрики $d(f,g) = \|f - g\|^\mu_{p,q;\omega}$.

Для дальнейших ссылок сформулируем следующее обобщение следствия 3.3.

Следствие 3.4. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и пусть $\varphi : B_n \to B_m$ является голоморфным отображением. Предположим, что $0 < p, q < \infty$ и ω — нормальная функция.*

1. Пусть $\beta > 0$. Оператор C^g_φ отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C^g_\varphi : \mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_m)$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \left(\int_{\partial B_m} \frac{|g(r\zeta)|^q \, d\sigma_m(\zeta)}{(1-|\varphi(r\zeta)|)^{\beta q}} \right)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{-1} \, dr < \infty.$$

2. Оператор C^g_φ отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $H(p,q;\omega)(B_m)$ тогда и только тогда, когда $C^g_\varphi : \mathcal{A}^{-\log}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_m)$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \left(\int_{\partial B_m} |g(r\zeta)|^q \left(\log \frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|} \right)^q d\sigma_m(\zeta) \right)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{-1} \, dr < \infty.$$

Для доказательства сформулированного следствия достаточно повторить доказательство следствия 3.3. Отметим также, что следствие 3.4 имеет место для более общих весов, чем нормальные. Наконец, первая часть следствия 3.4 закрывает пробел между достаточным условием и необходимым условием, приведенными в [10, теорема 5.2].

4. Операторы интегрирования и операторы умножения

Напомним, что

$$(J_g f)(z) = \int_0^1 f(tz) \frac{\mathcal{R}g(tz)}{t} \, dt, \quad g, f \in \mathcal{H}ol(B_n), \ z \in B_n.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$(\mathcal{R}J_g f)(z) = f(z)\mathcal{R}g(z), \quad z \in B_n, \tag{4.1}$$

для всех $f, g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ (см. [7]). Отметим также, что $(J_g f)(0) = 0$ для всех $f, g \in \mathcal{H}ol(B_n)$. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4.1 ([7, теорема 2])**.** *Предположим, что $0 < p, q < \infty$, функция ω является нормальной и $h \in H(p,q;\omega)(B_n)$. Тогда*

$$C_1 \|h\|_{p,q;\omega} \le |h(0)| + \left(\int_0^1 \mathcal{M}_q^p(\mathcal{R}h, r) \omega^p(r)(1-r)^{p-1} \, dr \right)^{\frac{1}{p}} \le C_2 \|h\|_{p,q;\omega},$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от функции h.

Теорема 4.2. *Предположим, что* $0 < p, q < \infty$, *функция* ω *является нормальной и* $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$.

1. Пусть $\beta > 0$. *Тогда следующие свойства эквивалентны.*

(i) *Оператор* J_g *отображает* $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ *в* $H(p,q;\omega)(B_n)$.

(ii)
$$\int_0^1 \mathcal{M}_q^p(\mathcal{R}g, r)\omega^p(r)(1-r)^{p-\beta p-1}\,dr < \infty.$$

(iii) *Оператор* $J_g : \mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ *является компактным.*

Если $\omega(r)(1-r)^{-\beta}$ *является нормальной функцией, то условия* (i)–(iii) *эквивалентны каждому из следующих свойств.*

(iv) *Оператор* M_g *отображает* $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ *в* $H(p,q;\omega)(B_n)$.

(v)
$$\int_0^1 \mathcal{M}_q^p(g, r)\omega^p(r)(1-r)^{-\beta p-1}\,dr < \infty.$$

(vi) *Оператор* $M_g : \mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ *является компактным.*

2. Следующие свойства эквивалентны.

(i) *Оператор* J_g *отображает* $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ *в* $H(p,q;\omega)(B_n)$.

(ii)
$$\int_0^1 \mathcal{M}_q^p(\mathcal{R}g, r)\left(\omega(r)\log\frac{e}{1-r}\right)^p(1-r)^{p-1}\,dr < \infty.$$

(iii) *Оператор* $J_g : \mathcal{A}^{-\log}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ *является компактным.*

(iv) *Оператор* M_g *отображает* $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ *в* $H(p,q;\omega)(B_n)$.

(v)
$$\int_0^1 \mathcal{M}_q^p(g, r)\left(\omega(r)\log\frac{e}{1-r}\right)^p(1-r)^{-1}\,dr < \infty.$$

(vi) *Оператор* $M_g : \mathcal{A}^{-\log}(B_n) \to H(p,q;\omega)(B_n)$ *является компактным.*

Доказательство. Часть 2. Пусть выполнено (i). Лемма 4.1 гарантирует, что оператор $\mathcal{R}J_g$ отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $H(p,q;(1-r)\omega(r))(B_n)$. Следовательно, в силу (4.1) оператор умножения $M_{\mathcal{R}g}$ отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в пространство $H(p,q;(1-r)\omega(r))(B_n)$. Таким образом, (ii) имеет место в силу следствия 3.4. Итак, (ii) следует из (i).

Далее, пусть выполнено (ii). Предположим, что $\|h_j\|_{-\log} \le K$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если число $t \in [0,1)$ расположено достаточно близко к 1, то

$$\begin{aligned}
&\int_t^1 \left(\int_{\partial B_n} |h_j(r\zeta)|^q |\mathcal{R}g(r\zeta)|^q \, d\sigma_n(\zeta) \right)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{p-1} \, dr \\
&\le K \int_t^1 \mathcal{M}_q^p(\mathcal{R}g, r) \left(\omega(r) \log \frac{e}{1-r} \right)^p (1-r)^{p-1} \, dr \\
&< \varepsilon/2
\end{aligned}$$

в силу (ii). Так как $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n, то получаем

$$\int_0^t \left(\int_{\partial B_n} |h_j(r\zeta)|^q |\mathcal{R}g(r\zeta)|^q \, d\sigma_n(\zeta) \right)^{\frac{p}{q}} \omega^p(r)(1-r)^{p-1} \, dr < \varepsilon/2,$$

если индекс j достаточно велик. Следовательно, в силу (4.1) имеем

$$\int_0^1 \mathcal{M}_q^p(\mathcal{R}J_g h_j, r) \omega^p(r)(1-r)^{p-1} \, dr < \varepsilon$$

для всех достаточно больших j. Напомним, что $(J_g h_j)(0) = 0$, поэтому

$$\|J_g h_j\|_{p,q;\omega} \to 0 \quad \text{при } j \to \infty$$

в силу леммы 4.1. Применяя лемму 3.2, получаем (iii). Итак, (iii) следует из (ii). Безусловно, (i) следует из (iii). Итак, свойства (i)–(iii) эквивалентны.

Свойства (iv)—(vi) эквивалентны в силу следствия 3.4.

Проверим эквивалентность свойств (ii) и (v). Пусть s и t — числа из определения нормальной функции ω. Имеем

$$\frac{\omega(r)\log(e/(1-r))}{(1-r)^{s/2}} = \frac{\omega(r)}{(1-r)^s} \cdot (1-r)^{s/2} \log \frac{e}{1-r} \to 0 \quad \text{при } r \to 1- .$$

Так как функция $(1-r)^{s/2}\log(e/(1-r))$ убывает в окрестности точки 1, то функция $(1-r)^{-s/2}\omega(r)\log(e/(1-r))$ убывает в окрестности точки 1. Наконец, функция $(1-r)^{-t}\omega(r)\log(e/(1-r))$ возрастает в окрестности точки 1 и $(1-r)^{-t}\omega(r)\log(e/(1-r)) \to \infty$ при $r \to 1-$. Таким образом, функция $\omega(r)\log(e/(1-r))$ является нормальной. Следовательно, свойства (ii) и (v) эквивалентны в силу леммы 4.1. Итак, доказательство части 2 завершено. Доказательство части 1 аналогично (см. также доказательство теоремы 5.4). □

5. Дальнейшие результаты

5.1. **Весовые операторы композиции и пространства Харди.** Напомним, что σ_m обозначает нормированную меру Лебега на сфере ∂B_m. При $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p(B_m)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_m)$, таких что

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0<r<1} \int_{\partial B_m} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma_m(\zeta) < \infty.$$

Положим
$$\mathcal{Y}^p(B_m) = \left\{ f \in C(B_m) : \sup_{0<r<1} \int_{\partial B_m} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma_m(\zeta) < \infty \right\}.$$
Тогда $\mathcal{Y}^p(B_m)$ является решеткой и $H^p(B_m) = \mathcal{Y}^p_A(B_m)$. Таким образом, предложение 3.1 влечет следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_m)$ и пусть $\varphi : B_m \to B_n$ является голоморфным отображением. Предположим, что $0 < p < \infty$.*

1. Пусть $\beta > 0$. Оператор C^g_φ отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $H^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда
$$\sup_{0<r<1} \int_{\partial B_m} \frac{|g(r\zeta)|^p \, d\sigma_m(\zeta)}{(1 - |\varphi(r\zeta)|)^{\beta p}} < \infty.$$

2. Оператор C^g_φ отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $H^p(B_m)$ тогда и только тогда, когда
$$\sup_{0<r<1} \int_{\partial B_m} |g(r\zeta)|^p \left(\log \frac{e}{1 - |\varphi(r\zeta)|} \right)^p d\sigma_m(\zeta) < \infty. \tag{5.1}$$

Отметим, что при $n = 1$ и $g \equiv 1$ Квон [8] использует условие (5.1) для определения гиперболического пространства Харди $\varrho H^p(B_m)$. В работе [8] приведены разнообразные свойства, которые равносильны условию (5.1) при $n = 1$ и $g \equiv 1$.

Следствие 5.2. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и $0 < p < \infty$. Тогда оператор умножения M_g отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ или $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, в $H^p(B_n)$ в том и только в том случае, когда $g \equiv 0$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{A}^{-\log}(B_n) \subset \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ для всех $\beta > 0$, то предположим, что оператор M_g отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $H^p(B_n)$. Следствие 5.1 гарантирует, что
$$\sup_{0<r<1} \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^p \int_{\partial B_n} |g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta) < \infty.$$
Так как $\int_{\partial B_n} |g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta)$ является возрастающей функцией от r, то $g \equiv 0$. Остается заметить, что $M_g f = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, если $g \equiv 0$. □

5.2. **Операторы интегрирования и голоморфные пространства Соболева.** Пространство Харди–Соболева $H^p_1(B_n)$, $0 < p < \infty$, задается равенством
$$H^p_1(B_n) = \{ f \in \mathcal{H}ol(B_n) : \ \mathcal{R}f \in H^p(B_n) \}.$$

Следствие 5.3. *Пусть $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и $0 < p < \infty$. Тогда оператор интегрирования J_g отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ или $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, в $H^p_1(B_n)$ в том и только в том случае, когда g является константой.*

Доказательство. Пусть оператор J_g отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $H^p_1(B_n)$. Тогда в силу (4.1) оператор умножения $M_{\mathcal{R}g}$ отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ в $H^p(B_n)$. Таким образом, следствие 5.1 гарантирует, что $\mathcal{R}g \equiv 0$. Поэтому g является константой. Для завершения доказательства заметим, что $J_g f = 0$ для всех $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, если g является константой. □

Пространство Бергмана–Соболева $A^p_{\alpha,1}(B_n)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что

$$\|f\|_{A^p_{\alpha,1}} = |f(0)| + \|\mathcal{R}f\|_{A^p_\alpha} < \infty.$$

Напомним, что в силу леммы 4.1 пространство $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ совпадает с весовым пространством Бергмана $A^p_{\alpha-p}(B_n)$ при $\alpha > p-1$. Отметим также, что $A^2_{1,1}(B_n)$ совпадает с пространством Харди $H^2(B_n)$ (см., например, [3], где приведены дальнейшие детали).

Теорема 5.4. *Предположим, что $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$, $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$.*

1. Пусть $\beta > 0$. Оператор J_g отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда $J_g : \mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \to A^p_{\alpha,1}(B_n)$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда

$$\int_{B_n} |\mathcal{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha-\beta p}\, d\nu_n(z) < \infty. \tag{5.2}$$

В частности, если $\beta p \geq \alpha+1$, то оператор J_g отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда g является константой.

2. Оператор J_g отображает $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ to $A^p_{\alpha,1}(B_n)$ тогда и только тогда, когда $J_g : \mathcal{A}^{-\log}(B_n) \to A^p_{\alpha,1}(B_n)$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда

$$\int_{B_n} |\mathcal{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha} \left(\log \frac{e}{1-|z|}\right)^p d\nu_n(z) < \infty.$$

Доказательство. Часть 1. Пусть оператор J_g отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$. Тогда в силу (4.1) оператор умножения $M_{\mathcal{R}g}$ отображает $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_\alpha(B_n)$. Следовательно, (5.2) имеет место в силу следствия 3.3.

Далее, предположим, что выполнено (5.2). Пусть $\|h_j\|_{-\beta} \leq K$ и $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если число $t \in [0,1)$ находится достаточно близко к 1, то

$$\begin{aligned}
&\int_{\{z\in B_n:\ |z|>t\}} |(\mathcal{R}J_g h_j)(z)|^p (1-|z|)^{\alpha}\, d\nu_n(z)\\
&= \int_{\{z\in B_n:\ |z|>t\}} |h_j(z)|^p |\mathcal{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha}\, d\nu_n(z)\\
&\leq K \int_{\{z\in B_n:\ |z|>t\}} |\mathcal{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha-\beta p}\, d\nu_n(z)\\
&< \varepsilon/2
\end{aligned}$$

в силу (4.1) и (5.2). Так как $h_j \to 0$ равномерно на компактных подмножествах шара B_n, то имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\{z\in B_n:\ |z|\le t\}} |(\mathcal{R}J_g h_j)(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_n(z) \\
&= \int_{\{z\in B_n:\ |z|\le t\}} |h_j(z)|^p |\mathcal{R}g(z)|^p (1-|z|)^\alpha \, d\nu_n(z) \\
&< \varepsilon/2,
\end{aligned}$$

если индекс j достаточно велик. Отметим, что $J_g h_j(0) = 0$, следовательно,

$$\|J_g h_j\|^p_{A^p_{\alpha,1}} < \varepsilon$$

для всех достаточно больших j. Таким образом, лемма 3.2 гарантирует, что J_g — компактный оператор из $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в $A^p_{\alpha,1}(B_n)$.

Наконец, если выполнено условие (5.2), то

$$\begin{aligned}
&2n \int_0^1 \int_{\partial B_n} |\mathcal{R}g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta) \, r^{2n-1} (1-r)^{\alpha-\beta p} \, dr \\
&= \int_{B_n} |\mathcal{R}g(z)|^p (1-|z|)^{\alpha-\beta p} \, d\nu_n(z) < \infty.
\end{aligned}$$

Так как $\int_{\partial B_n} |\mathcal{R}g(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta)$ является возрастающей функцией от r, то из неравенства $\alpha - \beta p \le -1$ следует, что $\mathcal{R}g \equiv 0$ и g является константой. Итак, доказательство части 1 завершено. Доказательство части 2 аналогично. □

Список литературы

1. P. Ahern, *On the behavior near a torus of functions holomorphic in the ball*, Pacific J. Math. **107** (1983), no. 2, 267–278.
2. A. Aleman, *A class of integral operators on spaces of analytic functions*, Topics in complex analysis and operator theory, Univ. Málaga, Málaga, 2007, pp. 3–30.
3. F. Beatrous and J. Burbea, *Holomorphic Sobolev spaces on the ball*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **276** (1989), 60pp.
4. C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
5. Е. С. Дубцов, *Меры Блоха–Карлесона и полиномы Александрова–Рыля–Войтащика*, ПОМИ, препринт (2008), no. 14.
6. D. Girela, J. Á. Peláez, F. Pérez-González, and J. Rättyä, *Carleson measures for the Bloch space*, preprint (2007).
7. Z. Hu, *Extended Cesàro operators on mixed norm spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 7, 2171–2179.
8. E. G. Kwon, *Hyperbolic mean growth of bounded holomorphic functions in the ball*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 3, 1269–1294.
9. J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.

10. S. Stević, *Weighted composition operators between mixed norm spaces and H_α^∞ spaces in the unit ball*, J. Inequal. Appl. (2007), Art. ID 28629, 9pp.
11. M. Tjani, *Compact composition operators on Besov spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 11, 4683–4698.
12. K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.

E-mail address: `dubtsov@pdmi.ras.ru`