

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**МЕРЫ БЛОХА–КАРЛЕСОНА И
ПОЛИНОМЫ АЛЕКСАНДРОВА–РЫЛЯ–ВОЙТАЩИКА**

Е. С. ДУБЦОВ

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Август 2008

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном шаре B_n из \mathbb{C}^n , $n \geq 1$. Классическая задача заключается в том, чтобы описать положительные меры μ , заданные на шаре B_n , такие что $X \subset L^q(B_n, \mu)$ для данных $X \subset \mathcal{H}ol(B_n)$ и $0 < q < \infty$. В работе получено соответствующее описание, если X — пространство Блоха $\mathcal{B}(B_n)$, а мера μ является радиальной. Также сформулированная задача решена, если X является пространством роста $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ или X является пространством роста $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном шаре $B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$.

Меры Карлесона. Пусть $X \subset \mathcal{H}ol(B_n)$ и $0 < q < \infty$. По определению положительная мера μ , заданная на шаре B_n , называется q -мерой Карлесона для X , если $X \subset L^q(B_n, \mu)$. Классическая задача заключается в том, чтобы охарактеризовать q -меры Карлесона для данного $X \subset \mathcal{H}ol(B_n)$. Карлесон [2] решил эту задачу, если X является пространством Харди $H^p(B_1)$. К настоящему времени описания q -мер Карлесона известны для разнообразных классических пространств X , состоящих из голоморфных функций. В настоящей статье исследуются q -меры Карлесона для пространства Блоха $\mathcal{B}(B_n)$. Напомним, что $f \in \mathcal{B}(B_n)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и

$$\|f\|_{\mathcal{B}(B_n)} = |f(0)| + \sup_{z \in B_n} (1 - |z|)|\mathcal{R}f(z)| < \infty,$$

где

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z), \quad z \in B_n,$$

является радиальной производной функции f . Отметим, что

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k f_k(z), \quad z \in B_n,$$

если $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, $z \in B_n$, является однородным разложением функции $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$. Пространство Блоха $\mathcal{B}(B_n)$ тесно связано с пространством роста $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$. По определению $f \in \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и

$$\|f\|_{-\log} = \sup_{z \in B_n} \frac{|f(z)|}{\log(e/(1 - |z|))} < \infty.$$

Хорошо известно, что $\mathcal{B}(B_n) \subset \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$. В данной работе также рассматриваются пространства роста $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$. При $\beta > 0$ пространство $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ состоит из тех функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, для которых

$$\|f\|_{-\beta} = \sup_{z \in B_n} |f(z)|(1 - |z|)^{\beta} < \infty.$$

Отметим, что $\mathcal{B}(B_n)$, $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ и $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$, являются банаховыми пространствами относительно введенных выше норм.

При $0 < q < \infty$ Хирела, Пелаес, Перес-Гонсалес и Раттюа [5] получили разнообразные результаты о q -мерах Карлесона для $\mathcal{B}(B_1)$. В статье [5] также охарактеризованы q -меры Карлесона для $\mathcal{A}^{-\log}(B_1)$. В настоящей работе внимание сконцентрировано на случае произвольной размерности n . Для $n \in \mathbb{N}$ в данной статье охарактеризованы радиальные q -меры Карлесона для пространства Блоха $\mathcal{B}(B_n)$, а также получены описания q -мер Карлесона для $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ и для $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $\beta > 0$.

Полиномы Александрова–Рыля–Войтащика. Рыль и Войтащик [10] построили голоморфные многочлены, которые оказались весьма полезными при решении многих задач теории функций в единичном шаре (см., например, [9]). Результаты настоящей работы основаны на следующем усилении теоремы Рыля–Войтащика.

Теорема 1.1 (Александров [1, теорема 4]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют числа $\delta = \delta(n) \in (0, 1)$ и $J = J(n) \in \mathbb{N}$, для которых выполнено следующее свойство: для каждого числа $d \in \mathbb{N}$ существуют голоморфные однородные многочлены $W_j[d]$ степени d , $1 \leq j \leq J$, такие что*

$$(1.1) \quad \|W_j[d]\|_{L^\infty(\partial B_n)} \leq 1 \quad \text{и}$$

$$(1.2) \quad \max_{1 \leq j \leq J} |W_j[d](\zeta)| \geq \delta \quad \text{для всех } \zeta \in \partial B_n.$$

2. МЕРЫ КАРЛЕСОНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА БЛОХА

Предложение 2.1. *Пусть $0 < q < \infty$ и пусть μ является q -мерой Карлесона для $\mathcal{B}(B_n)$. Тогда*

$$(2.1) \quad \int_{B_n} \left(\log \frac{e}{1-|z|} \right)^{\frac{q}{2}} d\mu(z) < \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем константу $\delta(n) \in (0, 1)$ и многочлены $W_j[d]$, $1 \leq j \leq J(n)$, $d \in \mathbb{N}$, существование которых гарантировано теоремой 1.1. Для $k \in \mathbb{Z}_+$ пусть R_k обозначает функцию Радемахера:

$$R_k(t) = \text{sign} \sin(2^{k+1}\pi t), \quad t \in [0, 1].$$

Для каждого недиадического числа $t \in [0, 1]$ рассмотрим функции

$$F_{j,t}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(t) W_j[2^k](z), \quad z \in B_n, \quad 1 \leq j \leq J(n).$$

Оценка (1.1) гарантирует, что

$$(1 - |z|) |(\mathcal{R}F_{j,t})(z)| \leq (1 - |z|) \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |z|^{2^k} \leq 2(1 - |z|) \sum_{m=1}^{\infty} |z|^m \leq 2$$

для всех $z \in B_n$. Имеем $(\mathcal{R}F_{j,t})(0) = 0$, следовательно, $\|F_{j,t}\|_{\mathcal{B}(B_n)} \leq 2$. По предположению $\mathcal{B}(B_n) \subset L^q(B_n, \mu)$, поэтому, применяя теорему о замкнутом графике, получаем

$$\int_{B_n} |F_{j,t}(z)|^q d\mu(z) \leq C \|F_{j,t}\|_{\mathcal{B}(B_n)}^q \leq C, \quad 1 \leq j \leq J(n).$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int_{B_n} \int_0^1 |F_{j,t}(z)|^q dt d\mu(z) = \int_0^1 \int_{B_n} |F_{j,t}(z)|^q d\mu(z) dt \leq C, \quad 1 \leq j \leq J(n).$$

Теорема 8.4 из главы V монографии [12] гарантирует, что

$$\int_{B_n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |W_j[2^k](z)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} d\mu(z) \leq C \int_{B_n} \int_0^1 |F_{j,t}(z)|^q dt d\mu(z) \leq C.$$

Для любых положительных чисел a_j , $1 \leq j \leq J(n)$, имеет место неравенство

$$\left(\sum_{j=1}^{J(n)} a_j \right)^{\frac{q}{2}} \leq C_{q,n} \sum_{j=1}^{J(n)} a_j^{q/2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{B_n} \left(\sum_{j=1}^{J(n)} \sum_{k=0}^{\infty} |W_j[2^k](z)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} d\mu(z) &\leq C \sum_{j=1}^{J(n)} \int_{B_n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |W_j[2^k](z)|^2 \right)^{\frac{q}{2}} d\mu(z) \\ &\leq C J(n) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Так как $W_j[2^k]$ является однородным многочленом степени 2^k , то оценка (1.2) гарантирует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{J(n)} |W_j[2^k](z)|^2 \geq \delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} |z|^{2^{k+1}} \geq \delta^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^{2m}}{m} = \delta^2 \log \frac{1}{1 - |z|^2}, \quad z \in B_n.$$

Таким образом,

$$\int_{B_n} \left(\log \frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{\frac{q}{2}} d\mu(z) < \infty.$$

Наконец, отметим, что $1 \in \mathcal{B}(B_n)$, поэтому мера μ является конечной. Итак, неравенство (2.1) доказано. \square

Предложение 2.2. Пусть $0 < q < \infty$ и

$$(2.2) \quad \int_{B_n} \left(\log \frac{e}{1 - |z|} \right)^q d\mu(z) < \infty.$$

Тогда μ является q -мерой Карлесона для $\mathcal{B}(B_n)$.

Доказательство. Если свойство (2.2) имеет место, то $\mathcal{A}^{-\log}(B_n) \subset L^q(B_n, \mu)$ по определению пространства $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$. Остается напомнить, что $\mathcal{B}(B_n) \subset \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$. \square

При $n = 1$ соотношения между (2.1) и (2.2) обсуждаются в статье [5].

Пусть σ_n обозначает нормированную меру Лебега на сфере ∂B_n . Следующая лемма будет использована при описании радиальных q -мер Карлесона для $\mathcal{B}(B_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2.3. Пусть $0 < q < \infty$. Тогда

$$(2.3) \quad \int_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^q d\sigma_n(\zeta) \leq C \|f\|_{\mathcal{B}(B_n)} \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^{\frac{q}{2}}, \quad 0 \leq r < 1,$$

для всех $f \in \mathcal{B}(B_n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{B}(B_n)$. Для $\zeta \in B_n$ положим $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$ при $\lambda \in B_1$. Таким образом, $f_\zeta \in \mathcal{H}ol(B_1)$. Отметим, что $(\mathcal{R}f)(\lambda\zeta) = \lambda f'_\zeta(\lambda)$, следовательно,

$$\max_{|\lambda| \leq 1/2} |f'_\zeta(\lambda)| \leq 4 \|f\|_{\mathcal{B}(B_n)}$$

в силу принципа максимума. Также имеем

$$\sup_{1/2 < |\lambda| < 1} (1 - |\lambda|) |f'_\zeta(\lambda)| \leq 2 \sup_{1/2 < |\lambda| < 1} (1 - |\lambda\zeta|) |(\mathcal{R}f)(\lambda\zeta)| \leq 2 \|f\|_{\mathcal{B}(B_n)}.$$

Так как $f_\zeta(0) = f(0)$, то получаем, что $\|f_\zeta\|_{\mathcal{B}(B_1)} \leq C \|f\|_{\mathcal{B}(B_n)}$ для всех $\zeta \in \partial B_n$.

Теперь заметим, что Клуни и МакГреггор [3] и Макаров [6] доказали оценку (2.3) при $n = 1$. Таким образом, применяя предложение 1.4.7 из монографии [8], получаем

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^q d\sigma_n(\zeta) &= \int_{\partial B_n} \int_{\partial B_1} |f_\zeta(rw)|^q d\sigma_1(w) d\sigma_n(\zeta) \\ &\leq C \int_{\partial B_n} \|f_\zeta\|_{\mathcal{B}(B_1)} \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^{\frac{q}{2}} d\sigma_n(\zeta) \\ &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}(B_n)} \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^{\frac{q}{2}} \end{aligned}$$

при $0 \leq r < 1$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 2.4. Пусть $0 < q < \infty$ и пусть ρ — положительная мера на интервале $[0, 1)$. Тогда следующие свойства эквивалентны:

$$(2.4) \quad \int_0^1 \int_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^q d\sigma_n(\zeta) d\rho(r) < \infty \quad \text{для всех } f \in \mathcal{B}(B_n);$$

$$(2.5) \quad \int_0^1 \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^{\frac{q}{2}} d\rho(r) < \infty.$$

Доказательство. Пусть выполнено (2.5). Предположим, что $f \in \mathcal{B}(B_n)$, тогда

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^q d\sigma_n(\zeta) d\rho(r) \leq C \|f\|_{\mathcal{B}(B_n)} \int_0^1 \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^{\frac{q}{2}} d\rho(r) < \infty$$

в силу леммы 2.3. Итак, (2.4) следует из (2.5). Остается заметить, что обратная импликация имеет место в силу предложения 2.1. \square

3. МЕРЫ КАРЛЕСОНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ РОСТА

Следующее утверждение является основным техническим средством при изучении пространств роста. При $n = 1$ первая часть леммы 3.1 доказана в работах [7] и [4] для $\beta = 1$ и для всех $\beta > 0$ соответственно. Вторая часть леммы 3.1 доказана в статье [5] для $n = 1$.

Лемма 3.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует натуральное число $M = M(n)$, такое что имеют место следующие свойства.*

(i) *Пусть $\beta > 0$. Тогда существуют функции $f_m \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $0 \leq m \leq M$, такие что*

$$(3.1) \quad \sum_{m=0}^M |f_m(z)| \geq \frac{1}{(1-|z|)^\beta}, \quad z \in B_n.$$

(ii) *Существуют функции $g_m \in \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$, $0 \leq m \leq M$, такие что*

$$\sum_{m=0}^M |g_m(z)| \geq \log \frac{e}{1-|z|}, \quad z \in B_n.$$

Доказательство леммы 3.1 приведено в разделе 4.

Теорема 3.2. *Пусть $0 < q < \infty$ и пусть μ — положительная мера на шаре B_n .*

(i) *Пусть $\beta > 0$. Тогда μ является q -мерой Карлесона для $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ в том и только в том случае, когда*

$$(3.2) \quad \int_{B_n} \frac{d\mu(z)}{(1-|z|)^{\beta q}} < \infty.$$

(ii) *Мера μ является q -мерой Карлесона для $\mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_{B_n} \left(\log \frac{e}{1-|z|} \right)^q d\mu(z) < \infty.$$

Доказательство. Предположим, что выполнено неравенство (3.2). Если $f \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, то

$$\int_{B_n} |f(z)|^q d\mu(z) \leq \|f\|_{-\beta}^q \int_{B_n} \frac{d\mu(z)}{(1-|z|)^{\beta q}} < \infty.$$

Для доказательства обратной импликации предположим, что $\mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \subset L^q(\mu)$. Зафиксируем число $M = M(n)$ и функции f_m , $0 \leq m \leq M$, существование которых гарантирует лемма 3.1. Для любых положительных чисел a_m , $0 \leq m \leq M$, имеет место оценка

$$(3.3) \quad \left(\sum_{m=0}^M a_m \right)^q \leq C_{q,n} \sum_{m=0}^M a_m^q.$$

Используя неравенства (3.1) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_n} \frac{d\mu(z)}{(1-|z|)^{\beta q}} &\leq \int_{B_n} \left(\sum_{m=0}^M |f_m(z)| \right)^q d\mu(z) \\ &\leq C_{q,n} \sum_{m=0}^M \int_{B_n} |f_m(z)|^q d\mu(z) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

так как $f_m \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n) \subset L^q(\mu)$. Итак, часть (i) доказана. Доказательство части (ii) аналогично, поэтому оно будет опущено. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1

Доказательство леммы 3.1(i). Зафиксируем константу $\delta(n) \in (0, 1)$ и полиномы $W_j[d]$, $1 \leq j \leq J(n)$, $d \in \mathbb{N}$, существование которых гарантирует теорема 1.1. Положим

$$F_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(\beta-1)k} W_j[Q^k](z), \quad z \in B_n, \quad 1 \leq j \leq J(n),$$

для достаточно большого числа $Q \in \mathbb{N}$. Рассматривая срез-функции $(F_j)_{\zeta} \in \mathcal{Hol}(B_1)$, $\zeta \in \partial B_n$, и применяя оценку (1.1) и основной результат статьи [11], получаем, что

$$|\mathcal{R}F_j(z)|(1-|z|)^{\beta} \leq C, \quad z \in B_n.$$

Иными словами, $\mathcal{R}F_j \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$, $1 \leq j \leq J(n)$. Теперь положим

$$f_j(z) = \mathcal{R}F_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{\beta k} W_j[Q^k](z), \quad z \in B_n, \quad 1 \leq j \leq J(n).$$

Утверждение. Для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^{J(n)} |f_j(z)| \geq \frac{C}{(1-|z|)^{\beta}} \quad \text{при}$$

$$(4.2) \quad 1 - Q^{-k} \leq |z| \leq 1 - Q^{-(k+1/2)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство утверждения. Изложенное ниже рассуждение схоже с доказательством предложения 5.4 из статьи [7].

Для любой точки $z \in B_n$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{J(n)} |f_j(z)| &\geq Q^{\beta k} \sum_{j=1}^{J(n)} |W_j[Q^k](z)| - J(n) \sum_{m=0}^{k-1} Q^{\beta m} |z|^{Q^m} - J(n) \sum_{m=k+1}^{\infty} Q^{\beta m} |z|^{Q^m} \\ &= \Sigma_0 - \Sigma_- - \Sigma_+, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

В силу неравенства (1.2) выполнена оценка

$$(4.3) \quad \Sigma_0 \geq \delta Q^{\beta k} |z|^{Q^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ниже будем предполагать, что выполнено условие (4.2). Таким образом, имеем

$$(1 - Q^{-k})^{Q^k} \leq |z|^{Q^k} \leq \left((1 - Q^{-(k+1/2)})^{Q^{k+1/2}} \right)^{Q^{-1/2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, если число Q достаточно велико, то

$$(4.4) \quad 1/3 \leq |z|^{Q^k} \leq 2^{-Q^{-1/2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, $\Sigma_0 \geq \delta Q^{\beta k} / 3$ в силу оценки (4.3). Также имеем

$$\Sigma_- \leq J(n) \sum_{m=0}^{k-1} Q^{\beta m} \leq \frac{J(n) Q^{\beta k}}{Q - 1}.$$

Теперь рассмотрим третье слагаемое. Отметим, что

$$|z|^{Q^m(Q-1)} \leq |z|^{Q^{k+1}(Q-1)} \quad \text{для } m \geq k+1, \quad z \in B_n.$$

Поэтому соотношение между двумя последовательными слагаемыми в сумме Σ_+ не превосходит соотношения между вторым и первым слагаемым. Следовательно, ряд Σ_+ оценивается геометрической прогрессией, первые два члена которой совпадают с первыми двумя членами ряда Σ_+ . Таким образом, полагая $x = |z|^{Q^k}$, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_+ / J(n) &\leq Q^{(k+1)\beta} |z|^{Q^{k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(Q^{\beta} |z|^{(Q^{k+2}-Q^{k+1})} \right)^m \\ &= \frac{Q^{(k+1)\beta} |z|^{Q^{k+1}}}{1 - Q^{\beta} |z|^{(Q^{k+2}-Q^{k+1})}} \\ &= Q^{k\beta} \frac{Q^{\beta} x^Q}{1 - Q^{\beta} x^{(Q^2-Q)}} \\ &\leq Q^{k\beta} \frac{Q^{\beta} 2^{-Q^{1/2}}}{1 - Q^{\beta} 2^{(Q^{1/2}-Q^{3/2})}} \end{aligned}$$

в силу условия (4.4). В сумме имеем

$$\sum_{j=1}^{J(n)} |f_j(z)| \geq \frac{\delta}{4} Q^{\beta k} = \frac{\delta}{4 Q^{\beta/2}} Q^{\beta(k+1/2)} \geq \frac{\delta}{4 Q^{\beta/2}} \frac{1}{(1 - |z|)^{\beta}},$$

если число Q достаточно велико, а точка z удовлетворяет условию (4.2). Доказательство утверждения завершено. \square

Аналогично положим

$$f_{J(n)+j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{\beta(k+1/2)} W_j[Q^{k+1/2}](z), \quad z \in B_n, \quad 1 \leq j \leq J(n),$$

где $Q = q^2$ и $q \in \mathbb{N}$. Если число q достаточно велико, то $f_{J(n)+j} \in \mathcal{A}^{-\beta}(B_n)$ и

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^{J(n)} |f_{J(n)+j}(z)| \geq \frac{C}{(1-|z|)^{\beta}} \quad \text{при}$$

$$(4.6) \quad 1 - Q^{-(k+1/2)} \leq |z| \leq 1 - Q^{-(k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство последней оценки аналогично доказательству утверждения, поэтому оно будет опущено.

Теперь зафиксируем столь большое число Q , что оценки (4.1) и (4.5) имеют место при выполнении условий (4.2) и (4.6) соответственно. Положим $M = 2J(n)$ и умножим функции f_m , $1 \leq m \leq M$, на достаточно большую константу. Тогда

$$\sum_{m=1}^M |f_m(z)| \geq \frac{1}{(1-|z|)^{\beta}} \quad \text{при } 1 - Q^{-1} \leq |z| < 1.$$

Остается положить по определению $f_0 \equiv Q$. Доказательство леммы 3.1(i) завершено. \square

Доказательство леммы 3.1(ii). Положим

$$g_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k W_j[Q^{Q^k}](z), \quad z \in B_n, \quad 1 \leq j \leq J(n),$$

где использованы обозначения из доказательства леммы 3.1(i). Тогда $g_j \in \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$, $1 \leq j \leq J(n)$, в силу теоремы 12 из статьи [5]. Рассуждение, использованное в доказательстве теоремы 2 из работы [5], гарантирует, что

$$\sum_{j=1}^{J(n)} |g_j(z)| \geq C \log \frac{1}{1-|z|} \quad \text{при } 1 - Q^{-Q^k} \leq |z| \leq 1 - Q^{-Q^{(k+1/2)}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

если число $Q \in \mathbb{N}$ достаточно велико (см. также доказательство леммы 3.1(i)).

Аналогично положим

$$g_{J(n)+j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^{(k+1/2)} W_j[Q^{Q^{(k+1/2)}}](z), \quad z \in B_n, \quad 1 \leq j \leq J(n),$$

где $Q = q^2$ и $q \in \mathbb{N}$. Если число q достаточно велико, то $g_{J(n)+j} \in \mathcal{A}^{-\log}(B_n)$ и

$$\sum_{j=1}^{J(n)} |g_{J(n)+j}(z)| \geq C \log \frac{1}{1-|z|} \quad \text{при } 1 - Q^{-Q^{(k+1/2)}} \leq |z| \leq 1 - Q^{-Q^{(k+1)}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Для завершения доказательства положим $M = 2J(n)$ и $f_0 \equiv C > 0$ для достаточно большой константы C . \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Б. Александров, *Собственные голоморфные отображения из шара в полидиск*, Докл. АН СССР **286** (1986), вып. 1, 11–15.
 - [2] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.
 - [3] J. G. Clunie and T. H. MacGregor, *Radial growth of the derivative of univalent functions*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 3, 362–375.
 - [4] P. M. Gauthier and J. Xiao, *BiBloch-type maps: existence and beyond*, Complex Var. Theory Appl. **47** (2002), no. 8, 667–678.
 - [5] D. Girela, J. Á. Peláez, F. Pérez-González, and J. Rättyä, *Carleson measures for the Bloch space*, preprint (2007).
 - [6] N. G. Makarov, *On the distortion of boundary sets under conformal mappings*, Proc. London Math. Soc. (3) **51** (1985), no. 2, 369–384.
 - [7] W. Ramey and D. Ullrich, *Bounded mean oscillation of Bloch pull-backs*, Math. Ann. **291** (1991), no. 4, 591–606.
 - [8] W. Rudin, *Function theory in the unit ball of \mathbf{C}^n* , Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 241, Springer-Verlag, New York, 1980.
 - [9] W. Rudin, *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of \mathbf{C}^n* , CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 63, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.
 - [10] J. Ryll and P. Wojtaszczyk, *On homogeneous polynomials on a complex ball*, Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), no. 1, 107–116.
 - [11] S. Yamashita, *Gap series and α -Bloch functions*, Yokohama Math. J. **28** (1980), no. 1-2, 31–36.
 - [12] A. Zygmund, *Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II*, Cambridge University Press, New York, 1959.
- E-mail address:* dubtsov@pdmi.ras.ru