ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Препринт ПОМИ 13/2008

Ширина групп типа E_6 относительно множества корневых элементов

И. М. Певзнер

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Аннотация

Пусть K — поле, в котором любой многочлен степени не выше шестой имеет корень, а G — присоединенная группа Шевалле типа E_6 над K. Нами показано, что любой элемент группы G есть произведение не более восьми корневых элементов. До сих пор подобные результаты были известны только про классические группы. В качестве вспомогательных утверждений нами доказано несколько полезных теорем про односвязную группу Шевалле типа E_6 и некоторые ее подгруппы.

Настоящая работа выполнена в рамках совместного проекта DAAD и Министерства образования России «Михаил Ломоносов», а также проекта INTAS 03-51-3251.

Введение

Эта работа является продолжением статьи [20]. Основной результат настоящей работы — доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Тогда любой элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(E_6, K)$ представляется в виде произведения не более восьми корневых элементов.*

Напомним, что ширина группы G относительно множества образующих S — это либо минимальное натуральное число n, такое, что любой элемент группы G представляется в виде произведения не более чем n элементов из S, либо ∞, если такого n не существует. Поскольку большинство объектов в группах определяются с точностью до сопряжения, то обычно полагают, что $S^g = S$ для всех $g \in G$, то есть S совпадает с одним классом сопряженности или объединением нескольких.

1.**Ширина группы в коммутаторах**

Вероятно, самым известным множеством образующих в этом контексте является множество коммутаторов. В этом случае, для удобства, ширину группы G, $c(G)$, часто определяют как минимальное целое число $s \geq 0$, такое, что любой элемент $[G, G]$ есть произведение s коммутаторов; такое определение позволяет нам обобщить понятие ширины группы в коммутаторах на группы, не совпадающие со своим коммутантом. Вышеупомянутая гипотеза Оре является, очевидно, частным случаем проблемы нахождения $c(G)$.

Впервые изучением ширины групп в коммутаторах занялся Шода: в 1936 году он показал, что $c(GL_n(F)) = 1$ для алгебраически замкнутого поля F. Позднее, в 1951 году, он показал также, что $c(GL_n(F)) \leq n$ для любого бесконечного поля F. Тояма и Гото показали, что $c(G) = 1$ для всех связных компактных полупростых групп Ли G. В 1951 году Оре в работе [86] доказал, что ширина группы перестановок любого (конечного или бесконечного) множества меньше либо равна 1. Также он, как мы уже говорили, доказал, что $c(A_n) = 1$ при $n \geq 5$ и высказал гипотезу, что $c(G) \leq 1$ для всех конечных простых групп.

В 1954-55 годах Гриффитс исследовал коммутаторы в свободном произведении $G = G_1 * G_2 * \cdots * G_n$ конечно представимых групп G_i и показал, что $c(G) \geq n$, если $[G_i, G_i]$ нетривиально для всех i. Позднее Голдстейн и Тернер в [58] показали, что на самом деле $c(G) \geq \sum c(G_i)$. В 1963 году МакДональд начинает изучение групп G с циклическим коммутатором [G,G]. В [76] он показывает, что $c(G) \leq m/2$, когда G нильпотентна и $[G, G]$ — циклическая подгруппа из m элементов, а также доказывает существование конечных групп G с циклическим коммутатором, которые имеют сколь угодно большую ширину. Изучение групп с циклическим коммутатором продолжили Родней [87], Либек [75], Айзекс [69], Гуральник [62], [63], [64] и многие другие. Шириной групп операторов занимались в своих работах [66], [67], [68] де ла Арп и Скандалис, а также Браун и Пирси [33]; коммутаторы групп диффеоморфизмов изучались МакДаффом [83], Мавером [78], [79], [80], [81] и Эпстейном [56].

Вуд в [103] показал, что $c(G) = \infty$, если группа G является универсальной накрывающей группы $SL_n(\mathbb{R})$. Группа $SL_n(A)$ для кольца A непрерывных функций на топологическом пространстве изучалась в работе Терстона и Васерштейна [94], а также в работах одного Васерштейна [95], [96]. Наконец, группу $SL_n(A)$ для любого коммутативного кольца главных идеалов изучали в своих работах Ньюман [84], Деннис и Васерштейн [43] и Васерштейн и Уэланд [97]. Ньюман в своей работе показал, что $c(SL_n(A)) \le (2\log n)/\log\frac{3}{2} + c(SL_3(A))$ для любого коммутативного кольца главных идеалов. Он предположил, что $c(SL_3(A))$ всегда конечно, однако Деннис и Васерштейн в своей работе доказывают, что это не так, когда, например, $A = \mathbb{C}[x]$. Отметим, что, как показали позднее в [89] А. С. Сивацкий и А. В. Степанов, этот результат, на самом деле, следует из работы [73] 1982 года. В ней ван дер Каллен доказал, что ширина группы $E_n(\mathbb{C}[x])$ относительно множества всех элементарных трансвекций бесконечна; а А. С. Сивацкий и А. В. Степанов в 1999 году показали, что множество всех коммутаторов в $E_n(R)$ имеет конечную ширину во множестве всех элементарных трансвекций для любого конечномерного коммутативного кольца R. Деннис и Васерштейн в [43] также доказывают, что $c(SL_n(A)) \le 5 + c(SL_3(A))$ и, если $c(SL_n(A)) < \infty$, то $c(SL_n(A)) \le 6$ при достаточно большом n. Похожие результаты получены ими и для произвольного ассоциативного кольца с конечным стабильным рангом. В статье Васерштейна и Уэланда получено улучшение этой оценки, с заменой 6 на 4.

2. **Ширина группы в инволюциях**

Другим интересным множеством образующих являются инволюции. Известно (см., например, [102]), что любой элемент группы G изометрий симметричной квадратичной формы над полем есть произведение не более двух инволюций из G. В 1976 году Густафсон, Халмош и Раджави в [65] показали, что любая матрица из $GL(n, K)$ с определителем ± 1 есть произведение не более четырех инволютивных матриц (см. также [32]). В работе [74] Кнюпель и Нильсен доказали, что любая матрица из $SL(n, K)$ есть произведение не более четырех инволютивных матриц из $SL(n, K)$. В 1999 году Остин в [31] показал, что любой элемент группы Шевалле $G = G(F_4, K)$ есть произведение не более четырех инволюций из G, если $|K| \ge 25$. В 2000 году Эллерс в [51] доказал, что если G — группа Шевалле над полем K, где K содержит достаточно много элементов, то любой нецентральный элемент G есть произведение не более четырех инволюций из G, а центральный — не более пяти. Иногда рассматривают также инволюции в группах Шевалле над кольцами; так, Репке [88] показал, что если R — локальное кольцо с $2 \in R^*$, V — свободный R-модуль размерности n, f — регулярная симметричная билинейная форма, а группа G есть группа изометрий f, то любой элемент из G есть произведение не более четырех инволюций из G.

С нахождением ширины групп в инволюциях тесно связан поиск минимального количества инволюций, порождающих ту или иную группу; необходимо отметить также естественную связь этого вопроса с $(2, 3)$-порождением групп, которое обсуждалось чуть раньше. Оказывается, верна теорема, что любая конечная простая некоммутативная группа G, не равная $U_3(3)$, порождается тремя инволюциями (отметим, что две инволюции могут породить только диэдральную группу). В 1978 году Вагнер в [100] показал, что для порождения группы $U_3(3)$ необходимо четыре инволюции. Гиллио и Тамбурини в [57] доказали теорему для знакопеременных и линейных групп, симплектических групп размерности не меньше шести и групп Сузуки. В [41] и [100] теорема доказана для групп $G = PSp_4$ и $U_3(q)$ при $q \ne 3$. Далла Вольта и Тамбурини в [42], [39], [40] доказали теорему для ортогональных групп. Для простых групп Шевалле над конечным полем характеристики 2, отличных от A_2, ${}^2A_2$, A_3 и ${}^2A_3$, теорема была доказана Нужиным в [15]; для спорадических групп — Далла Вольта в [38]; для большинства исключительных групп — Вейгелем в [101]. Наконец, в 1994 году Малле, Саксл и Вейгель в [77] доказали теорему сразу для всех конечных простых некоммутативных групп G.

В [11] В. Д. Мазуров поставил вопрос: какие конечные простые группы порождаются тремя инволюциями, две из которых коммутируют. Этот вопрос оказался тесно связан с проблемой существования гамильтонова цикла в графе Кэли, соответствующем данной группе. Нужин в работах [15], [16], [17], [18] дал ответ для простых знакопеременных групп и простых групп лиева типа. Позднее Тимофеенко, Нужин и другие математики исследовали, используя компьютер, спорадические группы: оказалось, что спорадическая группа G не порождается тремя инволюциями, две из которых коммутируют, тогда и только тогда, когда $G = M_{11}, M_{22}, M_{23}$ или McL. В 2003 году Мазуров в [14] дал, используя таблицы характеров, единое доказательство этого факта для всех спорадических групп. Также чрезвычайно интересные результаты про матричные группы над произвольными конечно порожденными коммутативными кольцами получены в работе Тамбурини и Дзукка [93].

3. **Ширина группы Шевалле в корневых элементах**

Для групп Шевалле естественным множеством образующих является также множество корневых элементов. Поскольку корневые элементы в $G_P(\Phi, R)$ порождают элементарную подгруппу $E_P(\Phi, R)$, которая, вообще говоря, не совпадает с $G_P(\Phi, R)$, то обычно ширину группы Шевалле во множестве корневых элементов определяют как ширину ее элементарной подгруппы. Нечто подобное мы уже наблюдали в случае коммутаторов.

В замечательной работе Дьедонне [46] найдена ширина классических групп в корневых элементах. Позднее результаты Дьедонне были расширены на группы, сохраняющие квадратичную форму с ненулевым радикалом, см., например, [90]. Также в работе Дьедонне исследуется ширина классических групп в симметриях, то есть в инволюциях, оставляющих неподвижным какую-нибудь гиперплоскость. Изучение симметрий тесно связано с изучением как инволюций, так и корневых элементов; после Дьедонне симметриями занимались Готцкий, Ишибаши, Эллерс и многие другие, см. [47], [48], [49], [50], [52], [53], [54], [55], [60], [61], [70], [71], [72], [92], [104], см. также [19], [85].

В отличие от классического случая, про ширину в корневых элементах *исключительных* групп до недавнего времени ничего, кроме естественных оценок снизу, известно не было. Поясним, откуда появляются оценки снизу. Напомним, что вычетом матрицы A называется ранг матрицы $A - E$. Несложно видеть, что вычет не меняется при сопряжении, и вычет произведения меньше либо равен сумме вычетов. Из этих свойств вычета легко следуют оценки на ширину групп Шевалле снизу: для интересующей нас группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, например, в минимальном 27-мерном представлении вычет корневого элемента равен шести, откуда, поскольку в $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ существуют элементы вычета 27, следует, что ширина группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ не меньше 5. Интересно, что для классических групп аналогичные оценки совпадают с точным значением, найденным в [46], поэтому естественным является предположение, что это так и для исключительных групп (по-видимому, однако, ширина групп типа E_6 равна шести, а не пяти). Не так давно Коэн, Штайнбах, Усиробира и Уэльс показали, что $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ порождается некоторыми пятью корневыми подгруппами. Из этого можно вывести, что ширина группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ не больше 10. Других оценок на ширину исключительных групп до настоящего времени не существовало.

Назовем поле k-замкнутым, если в нем любой многочлен степени не выше k имеет хотя бы один корень (к сожалению, нам не удалось найти в литературе общеупотребительного термина для таких полей). Пусть $G = G_{\mathrm{ad}}(E_6, K)$, где поле K является 6-замкнутым. Основной результат настоящей работы, как мы упоминали в самом начале, это доказательство того, что ширина группы G не больше восьми. Эта оценка не является точной, и в наши ближайшие планы входит улучшение ее до семи, а в перспективе, вероятно, и до шести. Также мы планируем доказать аналогичный результат про односвязную группу $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ и обобщить эти результаты на случай произвольного поля. Отметим, что при естественном переносе доказательства на случай 2-замкнутого поля возникнут некоторые сложности во втором пункте пятого параграфа — придется, по-видимому, заменять жорданову форму матриц на фробениусову форму. Переход к произвольному полю вызовет еще большие проблемы. Поэтому в настоящей работе мы не стремились снять ограничение на поле.

Статья организована следующим образом. В §1 определяются основные обозначения. В §2 сформулированы все утверждения из статьи [20], используемые в настоящей работе. В §3 рассматриваются некоторые подгруппы группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$. В первом пункте §3 мы изучаем диагональные матрицы, во втором — матрицы из группы $D_\alpha = \langle X_\beta; \beta \perp \alpha \rangle$, в третьем — матрицы из параболической подгруппы. В четвертом пункте §3 мы рассматриваем матрицы из подгруппы Леви и, в теореме 1, описываем их вид; в пятом пункте мы начинаем исследование унипотентного радикала. В §4 мы продолжаем исследование унипотентного радикала и, в теореме 2, показываем, что любой унипотент является произведением не более трех корневых элементов. В §5 исследуются произведения матриц. Пусть $\overline{g} = \{g_{ij}\}$, где $1 \leq i \leq 6$ и $22 \leq j \leq 27$ — матрица 6×6, расположенная в правом верхнем углу матрицы $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$. В §5, в частности, доказывается, что если K — алгебраически замкнутое поле и $A \in GL(6, K)$, то существует матрица $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такая, что $\overline{g} = A$, и g есть произведение не более чем четырех корневых элементов (следствие из теоремы 5). В §6 мы доказываем теорему 6: для произвольного нецентрального элемента $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ существует элемент $h \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такой, что подматрица $\overline{hgh^{-1}}$ обратима. Наконец, в §7 мы доказываем основной результат настоящей работы, теорему о том, что для 6-замкнутого поля K любой элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(E_6, K)$ есть произведение не более восьми корневых элементов.

Автор выражает благодарность Николаю Александровичу Вавилову, без которого эта работа никогда не была бы написана, а также Энтони Баку за гостеприимство и всестороннюю поддержку.

§1. Основные обозначения

1. Группы Шевалле

Все наши обозначения, относящиеся к корням, весам, алгебрам Ли, алгебраическим группам и представлениям вполне стандартны и следуют [1], [2], [3], [22], [23], см. также [4], [98], где можно найти много дальнейших ссылок. Мы не напоминаем определение групп Шевалле и основных подгрупп в них, которые можно найти, например, в [1], [22], [82], ... В настоящем параграфе мы лишь зафиксируем основные используемые в дальнейшем обозначения.

Прежде всего, пусть Φ — приведенная неприводимая система корней ранга l, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — фундаментальная система в Φ, Φ^+ и Φ^- — соответствующие множества положительных и отрицательных корней. Элементы Π называются *простыми* корнями, и мы всегда используем для них ту же нумерацию, что в [2]. Так как настоящая работа посвящена системе $\Phi = E_6$ и, в какой-то мере, ее подсистемам, то нас будет интересовать главным образом случай, когда все корни Φ имеют одинаковую длину — такие системы будут называться системами с *простыми связями* = `simply-laced`, в противоположность системам с *кратными связями* = `multiply-laced`. Как обычно, $W = W(\Phi)$ обозначает группу Вейля системы Φ; w_α — отражение относительно корня $\alpha \in \Phi$ и $w_i = w_{\alpha_i}$, $1 \leq i \leq l$, — фундаментальные отражения. Фундаментальная система Π фиксирует некоторый порядок на Φ. Через δ обозначим максимальный корень системы Φ относительно этого порядка; для интересующего нас в первую очередь случая $\Phi = E_6$ имеем $\delta = \substack{12321\\2}$.

Построение групп Шевалле основано на выборе базиса Шевалле в простой комплексной алгебре Ли L типа Φ. Напомним, что выбор подалгебры Картана H в L определяет корневое разложение $L = H \bigoplus \sum L_\alpha$, где L_α — одномерные корневые подпространства, инвариантные по отношению к H. Для каждого корня $\alpha \in \Phi^+$ выберем какой-то ненулевой корневой вектор $e_\alpha \in L_\alpha$ и отождествим корень α с линейным функционалом на H, для которого $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$. Ограничение формы Киллинга алгебры Ли L на H невырождено и, тем самым, устанавливает канонический изоморфизм $H \cong H^*$, так что мы можем даже считать, что $\alpha \in H$. Впрочем, обычно удобнее рассматривать кокорни $h_\alpha = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$. Таким образом, любой выбор ненулевых $e_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Phi^+$, однозначно определяет $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Phi^+$, такие, что $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$. Множество $\{e_\alpha,\ \alpha \in \Phi;\ h_\alpha,\ \alpha \in \Pi\}$ является базисом алгебры Ли L, называемым базисом Вейля. При этом $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta}e_\beta$, где $A_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$ числа Картана. Структурные константы $N_{\alpha\beta}$ определяются равенством $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$. Базис Вейля можно нормировать так, чтобы все структурные константы $N_{\alpha\beta}$ были целыми, в этом случае он называется **базисом Шевалле**, а множество $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi\}$, — **системой Шевалле**.

Для систем с простыми связями всегда $N_{\alpha\beta} = 0, \pm 1$, так что нам нужно только зафиксировать *знаки* структурных констант. Мы зафиксируем **положительный** базис Шевалле, который определяется тем свойством, что $N_{\alpha\beta} > 0$ для всех экстра-специальных пар, см. [21], [24], [36]. Для систем с простыми связями это условие означает в точности, что $N_{\alpha_i\beta} = +1$ каждый раз, как $\alpha_i + \beta \in \Phi$ обладает тем свойством, что если $\alpha_j + \gamma = \alpha_i + \beta$ для какого-то фундаментального корня α_j и какого-то положительного корня γ, то $j > i$.

Обозначим через $Q(\Phi)$ решетку корней системы Φ, а через $P(\Phi)$ — ее решетку весов. Напомним, что $P(\Phi)$ состоит из целочисленных линейных комбинаций фундаментальных весов $\varpi_1, \dots, \varpi_l$, которые образуют двойственный базис по отношению к базису

$h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l}$, где, как уже говорилось, $h_\alpha = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$. В частности, $Q(\Phi) \subseteq P(\Phi)$. Пусть P — некоторая решетка, лежащая между $Q(\Phi)$ и $P(\Phi)$. Как обычно, $P_{++}(\Phi)$ обозначает конус *доминантных* целых весов, являющихся неотрицательными целочисленными линейными комбинациями фундаментальных весов $\varpi_1, \dots, \varpi_l$.

Пусть, далее, R – коммутативное кольцо с 1. Как известно, по этим данным можно построить **группу Шевалле** $G = G_P(\Phi, R)$, являющуюся группой точек над R некоторой аффинной групповой схемы $G = G_P(\Phi, -)$, называемой **схемой Шевалле-Демазюра**. В интересующем нас случае $\Phi = E_6$, как хорошо известно, $[P(\Phi) : Q(\Phi)] = 3$, поэтому P равно $P(\Phi)$ или $Q(\Phi)$. Таким образом, при $\Phi = E_6$ существует две группы точек $G = G_P(E_6, R)$, а именно присоединенная группа $G_{\mathrm{ad}}(E_6, R) = G_{P(\Phi)}(E_6, R)$ и односвязная группа $G_{\mathrm{sc}}(E_6, R) = G_{Q(\Phi)}(E_6, R)$. При этом в схемном смысле присоединенная групповая схема является фактором односвязной по схеме μ_3. Из этого, в частности, следует, что если в поле K любой многочлен степени не выше трех имеет корень, то присоединенная группа является фактором односвязной по центру, изоморфному группе μ_3 кубических корней из 1: $G_{\mathrm{ad}}(E_6, K) \cong G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)/\mu_3$.

Пусть теперь $G = G(\Phi, R)$ есть группа Шевалле типа Φ над кольцом R. Выбор базиса Шевалле задает, в частности, расщепимый максимальный тор $T = T(\Phi, R)$ в группе G и параметризацию корневых унипотентных подгрупп X_α, $\alpha \in \Phi$, относительно тора T. Фиксируем эту параметризацию, пусть $x_\alpha(\xi)$ — элементарный корневой унипотент, отвечающий $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$. При этом

$$X_\alpha = \big\{x_\alpha(\xi) \mid \xi \in R\big\}.$$

Для элементов x и y группы G через $[x, y]$ обозначается их левонормированный коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$. Коммутационная формула Шевалле утверждает, что

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\xi^i\eta^j),$$

для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ таких, что $\alpha + \beta \neq 0$, и $\xi, \eta \in R$. Произведение в правой части формулы берется по всем корням вида $i\alpha + j\beta \in \Phi$, $i, j \in \mathbb{N}$, в некотором фиксированном порядке. При этом структурные константы группы Шевалле $N_{\alpha\beta ij}$ не зависят от ξ и η. Более того, $N_{\alpha\beta 11} = N_{\alpha\beta}$ суть в точности структурные константы алгебры Ли L в соответствующем базисе Шевалле. Для системы с простыми связями единственная положительная линейная комбинация корней α и β, которая может быть корнем, это их сумма $\alpha + \beta$. Таким образом в этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид $[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = e$ в случае, если $\alpha + \beta$ не является корнем, и вид

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha\beta}\xi\eta),$$

если $\alpha + \beta$ является корнем. Группа $E(\Phi, R) = \langle X_\alpha, \alpha \in \Phi\rangle$, порожденная всеми элементарными корневыми подгруппами, называется **элементарной подгруппой** группы Шевалле $G(\Phi, R)$. В настоящей работе нас будет интересовать только случай, когда $R = K$ — поле. Хорошо известно, что в этом случае, если ранг системы Φ больше 0, то $E_{sc}(\Phi, K) = G_{sc}(\Phi, K)$.

2. **Модули Вейля**

Обычно мы рассматриваем группу Шевалле $G = G_P(\Phi, R)$ вместе с действием на **модуле Вейля** $V = V(\omega)$ для некоторого доминантного веса ω. Фиксируем вес $\omega \in P_{++}(\Phi)$ и пусть $V = V(\omega)$ — модуль Вейля группы G со старшим весом ω. Соответствующее представление $G \longrightarrow GL(V)$ будет обозначаться через $\pi = \pi(\omega)$. Через $\Lambda = \Lambda(\omega)$ обозначается *набор* весов модуля $V = V(\omega)$ *с учетом кратности*. Для обозначения *множества* весов, рассматриваемых *без* кратности, мы обычно будем писать $\bar{\Lambda}(\omega)$. В настоящей работе нас будут интересовать, главным образом, только микровесовые модули, см. [34], [37], [35], [45] и содержащиеся там ссылки. Для микровесового представления все веса экстремальны и, значит, имеют кратность 1, так что в этом случае $\Lambda = \bar{\Lambda}(\omega)$ совпадает с Вейлевской орбитой старшего веса, $\Lambda = W\omega$.

В дальнейшем мы фиксируем **допустимый** базис v^λ, $\lambda \in \Lambda$, модуля V. Напомним, что базис называется допустимым, если выполняются два следующих условия.

• Каждый вектор v^λ действительно является вектором веса λ, если рассматривать λ как вес *без кратности*.

• Действие корневых унипотентов $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$ в базисе v^λ, $\lambda \in \Lambda(\omega)$, задается матрицами, элементы которых суть полиномы от ξ с целыми коэффициентами.

Лемма Мацумото, см. [34], [37], утверждает, что для микровесовых представлений можно так нормировать допустимый базис, чтобы

$$x_\alpha(\xi)v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda+\alpha,\lambda}\xi v^{\lambda+\alpha},$$

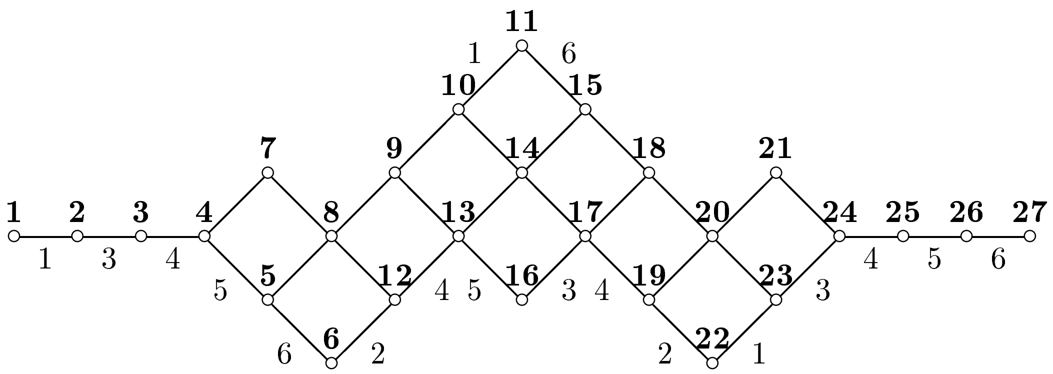
где все структурные константы действия $c_{\lambda+\alpha,\lambda}$ равны ± 1. Обычно эти константы обозначаются $c_{\lambda\alpha}$, однако нам будет удобнее использовать обозначение $c_{\lambda+\alpha,\lambda}$. В дальнейшем мы всегда выбираем **кристаллический** базис, в котором все структурные константы $c_{\lambda+\alpha,\lambda}$ равны $+1$ для простых и отрицательных простых корней, т.е. $c_{\lambda+\alpha,\lambda} = +1$, если $\alpha \in \pm\Pi$. При этом $c_{\lambda+\delta,\lambda}$ будет равно $+1$ для всех $\lambda, \lambda+\delta \in \Lambda$. Существование такого базиса вытекает из общих результатов Дж.Люстига и М.Кашивара, элементарные доказательства приведены в [10] и [45].

Мы мыслим вектор $a \in V$, $a = \sum v^\lambda a_\lambda$, как *столбец* координат $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. При этом элемент b контраградиентного модуля V^* естественно представлять себе как *строку* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Разумеется, по отношению к весам Λ^* контраградиентного модуля V^* картина обратная: элементы V^* представляются *столбцами* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$, а элементы V – *строками* $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$. Поэтому мы еще раз обращаем внимание на то, что мы индексируем как столбцы, так и строки весами модуля V – индексы λ, μ, ν и т.д. принадлежат Λ. Иными словами, нам удобно нумеровать координаты вектора из V^* весами модуля V и записывать их как строки — в то время как обычно они нумеруются весами самого модуля V^* и записываются как столбцы.

Один из принципиальных технических моментов состоит в том, что элементы этих строк являются не линейно упорядоченными, а лишь частично упорядоченными, в соответствии с порядком на Λ, задаваемым выбором системы простых корней Π. А именно, мы полагаем, что $\lambda \geq \mu$, если $\lambda - \mu = \sum m_i\alpha_i$, где $m_i \geq 0$. При описанной выше интерпретации элементов модуля V элементы группы Шевалле естественно мыслить как матрицы $g = (g_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ. Как обычно, столбцами этой матрицы являются столбцы координат векторов gv^μ, $\mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ, $\lambda \in \Lambda$. Мы будем часто пользоваться следующим обозначением: μ-й столбец матрицы g будет обозначаться через $g_{*\mu}$, а λ-я строка – через $g_{\lambda *}$.

В настоящей работе мы рассматриваем группу $G_{\rm sc}(E_6, R)$ вместе с действием на 27-мерном модуле $V = V(\varpi_1)$. Соответствующее представление является, как хорошо известно, микровесовым. К сожалению, чуть дальше нам потребуются некоторые свойства системы весов, не совсем очевидные из данного выше описания Λ. Поэтому сейчас мы приведем чуть другую конструкцию этого множества. А именно, рассмотрим систему корней $\Delta = E_7$. Очевидно, что подсистема, состоящая из корней, имеющих в разложении на простые корни коэффициент 0 при α_7, канонически изоморфна $\Phi = E_6$. Пусть Λ_1 — множество корней, имеющих в разложении на простые корни коэффициент 1 при α_7. На них стандартным образом действует группа $W_\Phi = \langle w_{\alpha_i}; 1 \leq i \leq 6 \rangle$. Несложно видеть, что это действие транзитивно. Пусть $\overline{}$ — ортогональная проекция на гиперплоскость, натянутую на корни α_i при $1 \leq i \leq 6$. Рассмотрим корень $\alpha = {234321 \atop 2}$. Заметим, что α ортогонален корням α_i при $2 \leq i \leq 6$ и образует угол $\pi/3$ с α_1. Иначе говоря, $(\alpha, \alpha_1) = 1/2$ и $(\alpha, \alpha_i) = 0$ при $2 \leq i \leq 6$. Отсюда, поскольку $\alpha - \overline{\alpha} \perp \alpha_i$ при $1 \leq i \leq 6$, следует, что $\overline{\alpha} = \varpi_1$ — первый фундаментальный вес. Поэтому получаем, что $\Lambda = W\varpi_1 = W\overline{\alpha} = \overline{W\alpha} = \overline{\Lambda_1}$. Несложно видеть, что проекция $\overline{}$, ограниченная на Λ_1, является биекцией. При этом она, по очевидным соображениям, согласована с действием группы W и $\overline{\phi} + \beta = \overline{\phi + \beta}$ для произвольных $\beta \in \Phi$ и $\phi, \phi + \beta \in \Lambda_1$. Таким образом, можно отождествить множества Λ и Λ_1. Намного более подробно, и на несколько другом языке, эта конструкция дана в [7]. Там же можно найти многочисленные дальнейшие ссылки на литературу.

Для удобства работы с интересующим нас 27-мерным представлением группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, R)$, стоит занумеровать его веса. Как уже говорилось, на множестве весов естественным образом вводится частичный порядок; рассматривают обычно только те линейные порядки, которые согласованы с этим частичным. Однако таких порядков довольно много, и мы, чтобы избежать путаницы, попытались как можно меньше использовать конкретную нумерацию. А именно, всюду, кроме §6, нам достаточно того, чтобы порядок был согласован с A_5-ветвлением (см., например, [7]). Это означает, что $i + 21 = i - \delta$ для всех $1 \leq i \leq 6$ (здесь мы допускаем некоторую неточность, путая веса и их номера: имеется в виду, что если к весу с номером $i + 21$ прибавить корень δ, то получится вес с номером i). Это условие однозначно определяет, учитывая имеющийся частичный порядок, первую и последнюю восьмерки весов. В шестом параграфе, к сожалению, нам приходится использовать всю нумерацию. Используемый нами порядок несколько отличается от порядков из [7]; соответствующая весовая диаграмма приведена на рис.:



Как обычно, вершины диаграммы соответствуют весам; две вершины соединены ребром с номером i, если разность соответствующих весов есть простой корень α_i; "параллельные" ребра соответствуют одинаковым простым корням. Более подробное описание весовых диаграмм вместе с исторической справкой и дальнейшими ссылками на литературу можно найти в [7]. Через e^i, где $i \in \Lambda$, в дальнейшем будут обозначаться базисные вектора пространства V; соответственно, базисные ковектора будут обозначаться через

e_i, где $i \in \Lambda$.

3. Трилинейная форма и 3-форма

Пусть $V = V(\varpi_1)$ — 27-мерный модуль для группы Шевалле $G = G_{\mathrm{sc}}(E_6, R)$. Тогда существует трилинейная форма $F : V \times V \times V \to R$, такая, что G является группой изометрий F, т.е., иными словами, G совпадает с группой всех $g \in GL(V, R)$, таких, что $F(gu, gv, gw) = F(u, v, w)$ для всех $u, v, w \in V$.

Впервые форма F появилась в работах Диксона в 1901 году. В дальнейшем ее активно изучали и использовали Шевалле, Фрейденталь, Спрингер, Титс, Селигман, Джекобсон, Фельдкамп, Коэн, Куперстейн и многие другие (см. [7] и [6] для дальнейших ссылок). Вначале она изучалась над полями нулевой характеристики, а в дальнейшем была обобщена на произвольные поля с характеристикой не равной 2 и 3. Априори при необратимых 2 или 3 могут возникать проблемы, однако, как показал Ашбахер [24], [25], [26], [27], [28], [29] этого не происходит. Более того, как показано в [187], форму F можно рассматривать над произвольным коммутативным кольцом, но в настоящей работе нас интересует только случай поля.

В действительности, Ашбахер в своих работах использует 3-форму $\mathfrak{F} = (T, Q, F)$, где T — кубическая форма, Q — ее частичная поляризация, а F — ее полная поляризация. Более подробно, 3-форма $\mathfrak{F}$ — это тройка (T, Q, F), такая, что:

(1) F — трилинейная форма;
(2) $Q : V \times V \to K$ линейно по первой переменной и удовлетворяет равенствам $Q(x, ay) = a^2 Q(x, y)$ и $Q(x, y + z) = Q(x, y) + Q(x, z) + F(x, y, z)$ для всех $a \in K$ и $x, y, z \in V$;
(3) $T : V \to K$ удовлетворяет равенствам $T(ax) = a^3 T(x)$ и $T(x + y) = T(x) + T(y) + Q(x, y) + Q(y, x)$ для всех $a \in K$ и $x, y \in V$.

В частности, в своих работах Ашбахер показывает, что над произвольным полем группа $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ совпадает с группой изометрий 3-формы $\mathfrak{F}$ и, кроме этого, с группами изометрий форм F и Q. В настоящей работе, кроме трилинейной формы F, мы используем, в определении сингулярных векторов, форму Q. Это сделано для того, чтобы единообразно рассматривать поля любой характеристики.

Точный вид формы T (понятно, что по T формы Q и F легко определяются) вычислен в работе [7], однако, поскольку в настоящей работе чуть другая нумерация весов, мы ее тоже приведем. А именно,

$$\begin{aligned}
T(x) = {} & x_1x_{11}x_{27} - x_1x_{15}x_{26} + x_1x_{18}x_{25} - x_1x_{20}x_{24} + x_1x_{21}x_{23} \\
& - x_2x_{10}x_{27} + x_2x_{14}x_{26} - x_2x_{17}x_{25} + x_2x_{19}x_{24} - x_2x_{21}x_{22} \\
& + x_3x_9x_{27} - x_3x_{13}x_{26} + x_3x_{16}x_{25} - x_3x_{19}x_{23} + x_3x_{20}x_{22} \\
& - x_4x_8x_{27} + x_4x_{12}x_{26} - x_4x_{16}x_{24} + x_4x_{17}x_{23} - x_4x_{18}x_{22} \\
& + x_5x_7x_{27} - x_5x_{12}x_{25} + x_5x_{13}x_{24} - x_5x_{14}x_{23} + x_5x_{15}x_{22} \\
& - x_6x_7x_{26} + x_6x_8x_{25} - x_6x_9x_{24} + x_6x_{10}x_{23} - x_6x_{11}x_{22} \\
& + x_7x_{16}x_{21} - x_7x_{17}x_{20} + x_7x_{18}x_{19} - x_8x_{13}x_{21} + x_8x_{14}x_{20} \\
& - x_8x_{15}x_{19} + x_9x_{12}x_{21} - x_9x_{14}x_{18} + x_9x_{15}x_{17} - x_{10}x_{12}x_{20} \\
& + x_{10}x_{13}x_{18} - x_{10}x_{15}x_{16} + x_{11}x_{12}x_{19} - x_{11}x_{13}x_{17} + x_{11}x_{14}x_{16}.
\end{aligned}$$

Для большинства интересующих нас вопросов, однако, достаточно знать, что $T(x) = \sum \pm x_\rho x_\sigma x_\tau$, где сумма берется по всем неупорядоченным *триадам* $\{\rho, \sigma, \tau\}$ (триадой называется тройка попарно далеких весов, см. [20, §2]). Соответственно, $F(x,y,z) = \sum \pm x_\rho y_\sigma z_\tau$, где сумма берется по всем упорядоченным триадам (ρ,σ,τ), а $Q(x,y) = \sum \pm x_\rho y_\sigma y_\tau$, где сумма берется по всем триадам $(\rho,\{\sigma,\tau\})$, в которых пара, состоящая из второго и третьего веса, неупорядочена. Более подробно об этом говорится в [7]. Наконец, необходимо отметить, что точно такая же форма действует и на двойственном модуле V^*, элементы которого мы обозначаем строками. Эту форму мы также будем обозначать через $\mathfrak{F} = (T,Q,F)$.

§2. Используемые утверждения из [20]

Настоящая статья является продолжением работы [20], и мы часто будем ссылаться на утверждения из той работы. Для удобства мы в этом параграфе перечислим все используемые факты и обозначения из [20]. Стоит отметить, что все эти факты, кроме трех теорем и леммы 4.2, являются совершенно элементарными и легко могут быть доказаны самостоятельно. Ссылки на утверждения из [20] будут в дальнейшем иметь вид [утв. 6].

1. **О корнях и весах**

Пусть $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t) \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, а группа $\widetilde{W}$, называемая расширенной группой Вейля, равна $\langle w_\alpha(1); \alpha \in \Phi\rangle$. Хорошо известно, что $w_\alpha(1)x_\beta(a)w_\alpha(1)^{-1} = x_{w_\alpha\beta}(\pm a)$ для всех $\alpha, \beta \in \Phi = E_6$ и $a \in K$. Согласно [20], положим $I_1^\alpha = \{\rho; \rho, \rho - \alpha \in \Lambda\}, I_2^\alpha = \{\rho; \rho \in \Lambda, \rho \pm \alpha \notin \Lambda\}$ и $I_3^\alpha = \{\rho; \rho, \rho + \alpha \in \Lambda\}$. Несложно видеть, что при сопряжении при помощи w_β множества I_1^α, I_2^α и I_3^α переходят в $I_1^{w_\beta(\alpha)}, I_2^{w_\beta(\alpha)}$ и $I_3^{w_\beta(\alpha)}$ соответственно. Положим также $I_1 = I_1^\delta, I_2 = I_2^\delta$ и $I_3 = I_3^\delta$. Иначе говоря, $I_1 = \{i; 1 \le i \le 6\}, I_2 = \{i; 6 < i < 22\}$ и $I_3 = \{i; 22 \le i \le 27\}$.

Определение. Расстояние между различными весами i и j, обозначаемое $d(i,j)$ — это минимальное количество корней, сумма которых равна разности $i - j$. Если веса совпадают, то расстояние между ними считается равным 0.

Следствие из утверждения 2 работы [20]. *Пусть $\rho \in I_1^\alpha$ и $\sigma \in I_3^\alpha$. Тогда если $d(\rho, \sigma) = 1$, то $\rho = \sigma + \alpha$.*

Утверждение 4 работы [20]. *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$ — произвольные корни и $i, j \in \Lambda$ — веса, такие, что $i + \beta = j$. Тогда:*

(1) *Условие $\alpha = \beta$ равносильно тому, что $i \in I_3^\alpha$, а $j \in I_1^\alpha$.*
(2) *Условие $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ равносильно тому, что либо $i \in I_3^\alpha$, а $j \in I_2^\alpha$, либо $i \in I_2^\alpha$, а $j \in I_1^\alpha$. При этом оба случая встречаются по три раза.*
(3) *Условие $\angle(\alpha, \beta) = \pi/2$ равносильно тому, что либо $i, j \in I_1^\alpha$, либо $i, j \in I_2^\alpha$, либо $i, j \in I_3^\alpha$. При этом первый и третий случаи встречаются один раз, а второй — четыре раза.*
(4) *Условие $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$ равносильно тому, что либо $i \in I_2^\alpha$, а $j \in I_3^\alpha$, либо $i \in I_1^\alpha$, а $j \in I_2^\alpha$. При этом оба случая встречаются по три раза.*
(5) *Условие $\alpha = -\beta$ равносильно тому, что $i \in I_1^\alpha$, а $j \in I_3^\alpha$.*

Утверждение 5 работы [20].

(1) *В интересующем нас 27-мерном представлении расстояние между весами может быть равно только 0, 1 или 2. Для любого веса существует ровно 16 весов на расстоянии 1 от него и 10 весов на расстоянии 2 от него.*
(2) *Для двух произвольных весов на расстоянии 2 существует ровно один вес на расстоянии 2 от них обоих.*
(3) *Пусть $\alpha \in \Phi$ — произвольный корень, а $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \Lambda$ — произвольная тройка весов, таких, что $d(\phi_1, \phi_2) = d(\phi_1, \phi_3) = d(\phi_2, \phi_3) = 2$. Тогда либо все ϕ_i принадлежат I_2^α, либо один из них принадлежит I_1^α, один — I_2^α и один — I_3^α.*

Замечание. Веса на расстоянии 2 называются нами *далекими*, а на расстоянии 1 — *близкими*. Тройки попарно далеких весов часто называются *триадами*.

Утверждение 6 работы [20]. *Пусть $\alpha \in \Phi$ — произвольный корень.*

(1) *Для произвольного корня β, ортогонального α, w_β переставляет местами какие-то два веса из I_1^α, а прочие веса из I_1^α оставляет неподвижными.*

(2) *Для произвольного веса $\rho \in I_2^\alpha$ существует ровно два веса $\rho_1, \rho_2 \in I_1^\alpha$, далеких от ρ.*

(3) *Если два веса $\rho \in I_2^\alpha$ и $\rho_1 \in I_1^\alpha$ далеки, то веса ρ и $\rho_1 - \alpha$ также далеки.*

(4) *Для произвольной пары весов $\rho_1, \rho_2 \in I_1^\alpha$, существует ровно один вес $\rho \in I_2^\alpha$, далекий от них обоих.*

(5) *Пусть $\rho, \sigma \in I_2^\alpha$ — произвольные веса и $\{\rho_1, \rho_2\}, \{\sigma_1, \sigma_2\}$ — соответствующие им, по пункту (2), пары весов из I_1^α. Тогда $d(\rho, \sigma) = 2$ равносильно тому, что $\{\rho_1, \rho_2\} \cap \{\sigma_1, \sigma_2\} = \emptyset$.*

Лемма 2.1 работы [20].

(1) *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, причем $\alpha \perp \beta$. Далее, пусть ρ — такой вес, что $\rho+\alpha$ и $\rho+\beta$ — также веса. Тогда*

$$c_{\rho,\rho+\alpha} c_{\rho+\alpha,\rho+\alpha+\beta} = c_{\rho,\rho+\beta} c_{\rho+\beta,\rho+\alpha+\beta}.$$

В частности, $\rho + \alpha + \beta$ тоже является весом.

(2) *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$, причем $\alpha \perp \beta, \gamma$ и $\angle(\beta, \gamma) = 2\pi/3$. Далее, предположим, что существует такой вес σ, что $\sigma + \alpha, \sigma + \beta, \sigma + \beta + \gamma \in \Lambda$. Тогда*

$$c_{\sigma,\sigma+\beta} c_{\sigma,\sigma+\beta+\gamma} c_{\sigma+\beta,\sigma+\beta+\gamma} = c_{\sigma+\alpha,\sigma+\alpha+\beta} c_{\sigma+\alpha,\sigma+\alpha+\beta+\gamma} c_{\sigma+\alpha+\beta,\sigma+\alpha+\beta+\gamma}.$$

В частности, все эти веса существуют.

2. О сингулярности

Определение. Вектор v называется сингулярным (относительно 3-формы $\mathfrak{F}$), если для любого вектора x выполняется равенство $Q(x, v) = 0$. Подпространство называется сингулярным, если любой его вектор сингулярен. Расстояние между двумя различными сингулярными векторами u и v, обозначаемое $d(u, v)$, полагается равным 1, если вектор $u - v$ сингулярен, и 2 в противном случае. В первом случае вектора называются близкими, а во втором далекими. Если $u = v$, то расстояние между ними считается равным 0.

Поскольку любая матрица $A \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ сохраняет форму F, то она сингулярные вектора переводит в сингулярные, а несингулярные — в несингулярные. Следовательно, матрица A сохраняет расстояние между векторами.

Утверждение 7 работы [20].

(1) *Пусть u — сингулярный вектор, и ρ — некоторый вес. Предположим, что для произвольного веса $\sigma \in \Lambda$, далекого от ρ, коэффициент u_σ равен 0. Тогда вектор u близок к e^ρ.*

(2) *Пусть u — сингулярный вектор, близкий к базисному вектору e^ρ, и пусть $\sigma \in \Lambda$ — произвольный вес, далекий от ρ. Тогда $u_\sigma = 0$.*

Лемма 2.2 работы [20]. *Пусть u и v — два близких сингулярных вектора, причем $u \in V_1$. Тогда $u_\rho v_{\sigma-\delta} = u_\sigma v_{\rho-\delta}$ для всех $\rho, \sigma \in I_1$.*

Утверждение 13 работы [20]. *Пусть u — сингулярный вектор в V, а $\rho \in \Lambda$ — некоторый вес. Предположим, что $u_\rho \neq 0$, а $u_\sigma = 0$ для всех весов σ, близких к ρ. Тогда $u = u_\rho e^\rho$.*

3. **Корневые элементы**

В [20] отмечалось, что если g — корневой элемент, то $g - e$ принадлежит алгебре Ли и, следовательно, может быть разложено по базису Шевалле. Введем, для удобства, следующее обозначение.

Определение. Будем называть **координатой корневого элемента** g (или матрицы g) **при корне** $\alpha \in \Phi = E_6$ и обозначать через $(\alpha)_g$ коэффициент при e_α в разложении элемента $g - e$ по базису Шевалле.

Лемма 3.1 работы [20]. *Пусть g — корневой элемент. Тогда*

(1) *$g_{\phi\psi} = 0$ для любых $\phi, \psi \in \Lambda$, таких, что $d(\phi, \psi) = 2$;*
(2) *$g_{\phi\psi} = c_{\phi\psi}(\phi - \psi)_g$ для любых $\phi, \psi \in \Lambda$, таких, что $d(\phi, \psi) = 1$.*

Теорема 1 работы [20]. *Пусть g — корневой элемент группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, $\alpha \in \Phi = E_6$ — такой корень, что $(\alpha)_g \neq 0$, а λ такой вес, что $\lambda, \lambda + \alpha \in \Lambda$. Тогда переменные: $(\alpha)_g$, все $(\beta)_g$, такие, что $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ (таких корней β ровно 20), и $g_{\lambda\lambda}$, являются независимыми и однозначно определяют g.*

В доказательстве теоремы 1 в работе [20] показывалось, в частности, что если g — корневой элемент и $(\alpha)_g \neq 0$, то g может быть представлен в виде $f x_\alpha((\alpha)_g) f^{-1}$, где f есть произведение нескольких элементарных корневых элементов $x_\beta(a)$, где $a \in K$, а $\angle(\alpha, \beta) \geq 2\pi/3$.

Для корневого элемента g обозначим через V^g шестимерное подпространство $\mathrm{Im}(g - E)$. Иначе говоря, это подпространство, порожденное всеми столбцами матрицы $g - E$. В дальнейшем нам также понадобится шестимерное подпространство $V_g < V^*$, порожденное всеми строками матрицы $g - E$.

Лемма 3.5 работы [20]. *Пусть g — корневой элемент и α — произвольный корень. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$(\alpha)_g \neq 0$;*
(2) *шесть столбцов $(g - E)_{*,\mu_i}$, где $\mu_i \in I_3^\alpha$ и $1 \leq i \leq 6$, порождают шестимерное пространство V^g;*
(3) *в V^g существует базис $\{v^i\}_{i=1}^6$, такой, что $v^i_{\lambda_j} = \delta_{i,j}$, где $1 \leq i \leq 6$, $\lambda_j \in I_1^\alpha$ и $1 \leq j \leq 6$.*

4. **Корневые элементы и сингулярные подпространства**

Лемма 4.2 работы [20]. *Пусть $n = 1, 2, 3, 4$ или 6, $\{u^i\}_{i=1}^n$ — некоторые сингулярные вектора, образующие n-мерное сингулярное подпространство. Далее, пусть существует такой корень α, что $u^i_{\lambda_j} = c_{\lambda_j, \lambda_j - \alpha}\delta_{i,j}$, где $\lambda_j \in I_1^\alpha$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 6$. Тогда существует такой корневой элемент h, что $h_{*,\lambda_i - \alpha} = u^i$.*

Теорема 2 работы [20]. *Пусть $n = 1, 2, 3, 4$ или 6, $\{u^i\}_{i=1}^n$ — некоторые сингулярные вектора, порождающие n-мерное сингулярное подпространство. Для произвольного набора сингулярных векторов $\{v^i\}_{i=1}^n$, порождающих n-мерное сингулярное подпространство, существует матрица $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такая, что $u^i = gv^i$ при $i \leq n, 5$. Если $n = 6$, то $u^6 = agv^6$, где $a \in K^*$.*

Следствие из теоремы 2 работы [20]. *Любое шестимерное сингулярное подпространство соответствует некоему корневому элементу. Любые четырех-, трех-, двух- и одномерные сингулярные подпространства лежат в каком-то шестимерном, однако существуют исключительные пятимерные сингулярные подпространства, не лежащие ни в одном шестимерном сингулярном подпространстве.*

Определение. Пусть пара корневых элементов g и h сопряжена паре элементарных корневых элементов $x_\alpha(\cdot)$ и $x_\beta(\cdot)$. Тогда углом между корневыми элементами g и h называется угол между корнями α и β.

Утверждение 12 работы [20]. *Пусть даны два корневых элемента g и h. Тогда понятие угла определено корректно и выполняется ровно один из следующих случаев:*

(1) *если $V^g = V^h$, то $\angle(g,h) = 0$;*
(2) *если $\dim(V^g \cap V^h) = 3$, то $\angle(g,h) = \pi/3$;*
(3) *если $\dim(V^g \cap V^h) = 1$, то $\angle(g,h) = \pi/2$;*
(4) *если $V^g \cap V^h = 0$ и существует шестимерное сингулярное подпространство W, такое, что $\dim(V^g \cap W) = \dim(V^h \cap W) = 3$, то $\angle(g,h) = 2\pi/3$;*
(5) *если $V^g \cap V^h = 0$ и для произвольного вектора $v \in V^g$ существует ровно один, с точностью до кратности, вектор $u \in V^h$, такой, что $v + u$ сингулярен, то $\angle(g,h) = \pi$.*

Теорема 3 работы [20]. *Одну пару корневых подгрупп можно перевести сопряжением при помощи элемента из $G(E_6, K)$ в другую пару, если и только если углы между элементами каждой пары равны.*

§3. Некоторые подгруппы

В этом параграфе мы рассмотрим несколько подгрупп группы $G = G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, используемых в дальнейшем, и покажем некоторые общие свойства элементов этих подгрупп.

1. **Подгруппа диагональных матриц**

Пусть $T = \{A \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K); i \neq j \Leftrightarrow A_{ij} = 0\}$ — подгруппа диагональных матриц.

Лемма 3.1. *Пусть A — произвольная диагональная матрица размера 27×27. Тогда $A \in T$ тогда и только тогда, когда для каждой триады $\{\rho, \sigma, \tau\}$ выполняется равенство $A_{\rho\rho}A_{\sigma\sigma}A_{\tau\tau} = 1$.*

Доказательство. Как мы говорили в §1, группа $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ совпадает с группой изометрий трилинейной формы F. В частности, если $A \in T$, то $F(e^\rho, e^\sigma, e^\tau) = F(Ae^\rho, Ae^\sigma, Ae^\tau) = A_{\rho\rho}A_{\sigma\sigma}A_{\tau\tau}F(e^\rho, e^\sigma, e^\tau)$, что доказывает утверждение слева направо, поскольку $F(e^\rho, e^\sigma, e^\tau) \neq 0$. Для доказательства в обратную сторону надо показать, что $F(x, y, z) = F(Ax, Ay, Az)$ для всех x, y и z. По линейности, достаточно показать это для случая, когда x, y и z — базисные вектора. По предположению, требуемое равенство выполняется, когда веса, соответствующие x, y и z, образуют триаду. В противном случае в обеих частях равенства стоят нули. Таким образом, $F(x, y, z) = F(Ax, Ay, Az)$ для всех x, y и z, что и требовалось.

Напомним, что, по [утв. 6], для произвольного веса из I_2^α существует ровно два веса из I_1^α, далеких от него. В настоящем параграфе для обозначения таких весов мы будем добавлять к обозначению веса из I_2^α нижние индексы 1 и 2: если $\rho \in I_2^\alpha$, то $\rho_1, \rho_2 \in I_1^\alpha$ и $d(\rho, \rho_1) = d(\rho, \rho_2) = 2$.

Предложение 1. *Пусть A — произвольная диагональная матрица размера 27×27. Тогда $A \in T$ если и только если существует $d_A \in K$, такое, что:*

(1) $d_A^3 = \prod\limits_{\phi \in I_1} A_{\phi\phi}$,

(2) $A_{\phi\phi} = \frac{A_{\phi+\delta,\phi+\delta}}{d_A}$, *где* $\phi \in I_3$, *и*

(3) $A_{\phi\phi} = \frac{d_A}{A_{\phi_1,\phi_1}A_{\phi_2,\phi_2}}$, *где* $\phi \in I_2$.

Доказательство. Докажем, что $A \in T$, если искомое d_A существует. Для этого, по предыдущей лемме, достаточно проверить равенство $A_{\rho\rho}A_{\sigma\sigma}A_{\tau\tau} = 1$ для произвольной триады $\{\rho, \sigma, \tau\}$. По [утв. 5], либо $\rho, \sigma, \tau \in I_2$, либо, с точностью до перенумерации, $\rho \in I_1, \sigma \in I_2$ и $\tau \in I_3$. В первом случае, воспользовавшись [утв. 6], получаем, что

$$A_{\rho\rho}A_{\sigma\sigma}A_{\tau\tau} = \frac{d_A}{A_{\rho_1,\rho_1}A_{\rho_2,\rho_2}} \frac{d_A}{A_{\sigma_1,\sigma_1}A_{\sigma_2,\sigma_2}} \frac{d_A}{A_{\tau_1,\tau_1}A_{\tau_2,\tau_2}} = \frac{d_A^3}{\prod\limits_{i \in I_1} A_{ii}} = 1.$$

Для доказательства второго случая (когда $\rho \in I_1, \sigma \in I_2$ и $\tau \in I_3$) вспомним, что, как следует из [утв. 6], вес σ будет далек от весов ρ и $\tau + \delta$, поэтому, с точностью до перестановки, $\rho = \sigma_1$ и $\tau + \delta = \sigma_2$. Таким образом, получаем:

$$A_{\rho\rho}A_{\sigma\sigma}A_{\tau\tau} = A_{\sigma_1,\sigma_1} \frac{d_A}{A_{\sigma_1,\sigma_1}A_{\sigma_2,\sigma_2}} \frac{A_{\sigma_2,\sigma_2}}{d_A} = 1.$$

Докажем, что если $A \in T$, то искомое d_A существует. Рассмотрим триады $\{\rho, \rho_1, \rho_2-\delta\}$ и $\{\rho, \rho_2, \rho_1 - \delta\}$, где $\rho \in I_2$. Поскольку $A \in T$, то

$$A_{\rho\rho}A_{\rho_1\rho_1}A_{\rho_2-\delta,\rho_2-\delta} = A_{\rho\rho}A_{\rho_2\rho_2}A_{\rho_1-\delta,\rho_1-\delta} = 1. \tag{3.1}$$

Отсюда, по [утв. 6], $A_{\phi-\delta,\phi-\delta} = kA_{\phi\phi}$, где $k \in K$ одно и то же для всех $\phi \in I_1$. Следовательно, по (3.1), $A_{\rho\rho} = \frac{1}{kA_{\rho_1,\rho_1}A_{\rho_2,\rho_2}}$ для произвольного веса $\rho \in I_2$. Далее, рассмотрим произвольную триаду $\{\rho, \sigma, \tau\}$, где $\rho, \sigma, \tau \in I_2$. Для нее

$$A_{\rho\rho}A_{\sigma\sigma}A_{\tau\tau} = \frac{1}{kA_{\rho_1,\rho_1}A_{\rho_2,\rho_2}}\frac{1}{kA_{\sigma_1,\sigma_1}A_{\sigma_2,\sigma_2}}\frac{1}{kA_{\tau_1,\tau_1}A_{\tau_2,\tau_2}}.$$

По [утв. 6] это равно $\frac{1}{k^3\prod_{\phi\in I_1}A_{\phi\phi}}$. Поэтому $d_A = \frac{1}{k}$ нам подходит.

2. **Подгруппа D_α**

Пусть $\alpha \in \Phi$ — произвольный корень. Далее, пусть $D_\alpha = \langle X_\beta; \beta \perp \alpha\rangle$. По [утв. 4], пространство раскладывается в прямую сумму трех инвариантных под действием D_α подпространств: $V_k^\alpha = \langle e^\phi; \phi \in I_k^\alpha\rangle$, где $1 \le k \le 3$. Рассмотрим ограничение D_α на V_k^α. Снова по [утв. 4], любое X_β, ограниченное на V_1^α, является трансвекцией, поэтому D_α, ограниченное на V_1^α, совпадает с $SL(V_1^\alpha, K)$. Аналогичный факт верен для ограничения на V_3^α.

Предложение 2. *Пусть $A \in D_\alpha$ и $\phi \neq \psi \in I_1^\alpha$. Тогда $A_{\phi-\alpha,\phi-\alpha} = A_{\phi\phi}$ и $c_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}A_{\phi-\alpha,\psi-\alpha} = c_{\phi\psi}A_{\phi\psi}$.*

Доказательство. По определению D_α, матрица A является произведением n элементарных корневых элементов. Будем доказывать настоящее предложение индукцией по n. Если A — единичная матрица, то предложение очевидно. Далее, умножим матрицу A, для которой требуемые равенства выполняются, на элементарный корневой элемент $x_\beta(a)$, где $\beta \perp \alpha$. Пусть $B = x_\beta(a)A$. Если $\phi - \beta \notin \Lambda$, то коэффициенты в строке с номером ϕ не меняются. Применяя [утв. 4], получаем, что $\phi - \alpha - \beta \notin \Lambda$. Поэтому коэффициенты в строке с номером $\phi - \alpha$ не меняются также. Таким образом, можно считать, что $\phi - \beta, \phi - \alpha - \beta \in \Lambda$. Тогда

$$B_{\phi-\alpha,\phi-\alpha} = A_{\phi-\alpha,\phi-\alpha} + c_{\phi-\alpha,\phi-\alpha-\beta}aA_{\phi-\alpha-\beta,\phi-\alpha}.$$

По предположению индукции, это равно

$$A_{\phi\phi} + c_{\phi-\alpha,\phi-\alpha-\beta}a(c_{\phi-\alpha-\beta,\phi-\alpha}c_{\phi-\beta,\phi}A_{\phi-\beta,\phi}) = A_{\phi\phi} + c_{\phi,\phi-\beta}aA_{\phi-\beta,\phi} = B_{\phi\phi}.$$

Далее, предположим, что $\phi - \beta = \psi$. Тогда

$$B_{\phi-\alpha,\psi-\alpha} = A_{\phi-\alpha,\psi-\alpha} + c_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}aA_{\psi-\alpha,\psi-\alpha},$$

что, по предположению индукции, равно

$$c_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}c_{\phi\psi}A_{\phi\psi} + c_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}aA_{\psi\psi} = c_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}c_{\phi\psi}B_{\phi\psi},$$

что и требовалось.

Предположим, наконец, что $\phi-\beta\neq\psi$. Тогда

$$B_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}=A_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}+c_{\phi-\alpha,\phi-\alpha-\beta}aA_{\phi-\alpha-\beta,\psi-\alpha}.$$

По предположению индукции, это равно

$$c_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}c_{\phi\psi}A_{\phi\psi}+c_{\phi-\alpha,\phi-\alpha-\beta}a(c_{\phi-\alpha-\beta,\psi-\alpha}c_{\phi-\beta,\psi}A_{\phi-\beta,\psi}).$$

С другой стороны,

$$B_{\phi\psi}=A_{\phi\psi}+c_{\phi,\phi-\beta}aA_{\phi-\beta,\psi},$$

поэтому нам достаточно показать, что

$$c_{\phi-\alpha,\psi-\alpha}c_{\phi\psi}c_{\phi-\alpha,\phi-\alpha-\beta}c_{\phi-\alpha-\beta,\psi-\alpha}c_{\phi-\beta,\psi}c_{\phi,\phi-\beta}=1. \tag{3.2}$$

Заметим, что $\psi-\phi\in\Phi$ — корень, ортогональный α, поэтому (3.2) следует из [л. 2.1], если корень γ в ней положить равным $\psi-\phi$, а σ — равным $\phi-\alpha-\beta$.

В дальнейшем у нас будет использоваться в основном группа D_δ, которую мы будем для краткости обозначать просто D. Пространства V_k^δ в дальнейшем также будут обозначаться через V_k. Для группы D предыдущее предложение упростится:

Следствие. *Пусть $A\in D$ и $\phi,\psi\in I_1$. Тогда $A_{\phi-\delta,\psi-\delta}=A_{\phi\psi}$.*

Предложение 3. *Предположим, что $A\in D$ и $\rho,\sigma\in I_2$. Далее, пусть $A_1=A|_{V_1}$ и $A_1^{(\rho,\sigma)}$ — подматрица A_1, полученная выбрасыванием строк ρ_1,ρ_2 и столбцов σ_1,σ_2. Наконец, пусть $d_A^{(\rho,\sigma)}=\det A_1^{(\rho,\sigma)}$. Тогда $A_{\rho\sigma}=d_A^{(\rho,\sigma)}$.*

Доказательство. 1. По определению D, матрица A является произведением n элементарных корневых элементов, соответствующих *простым и отрицательным простым* корням. Мы будем доказывать предложение индукцией по n. Для единичной матрицы утверждение очевидно. Предположим, что для матрицы A предложение выполняется. Умножим A на элементарный корневой элемент $x_\alpha(a)$, где $\alpha\in\Pi^\pm,\alpha\perp\delta$, и пусть $B=x_\alpha(a)A$. Заметим, что для простых и отрицательных простых корней структурные константы действия равны 1. Поэтому, если $\rho-\alpha\in\Lambda$, то $B_{\rho\sigma}=A_{\rho\sigma}+aA_{\rho-\alpha,\sigma}$; если же $\rho-\alpha\notin\Lambda$, то $B_{\rho\sigma}=A_{\rho\sigma}$.

2. Рассмотрим случай, когда $\rho-\alpha\in\Lambda$. Согласно [утв. 6], в I_1 есть три веса, близких к ρ и $\rho-\alpha$, один вес, скажем ρ_1, далекий от ρ и $\rho-\alpha$, один вес, ρ_2, далекий от ρ и близкий к $\rho-\alpha$ и, наконец, один вес, $\rho_2+\alpha$, близкий к ρ и далекий от $\rho-\alpha$. По [утв. 4], ρ_2 — единственный вес в I_1, такой, что $\rho_2+\alpha\in\Lambda$, поэтому матрица B_1 получается из A_1 элементарным преобразованием, а именно прибавлением с коэффициентом a строки с номером ρ_2 к строке с номером $\rho_2+\alpha$. Следовательно, матрицы $B_1^{(\rho,\sigma)}$, $A_1^{(\rho,\sigma)}$ и $A_1^{(\rho-\alpha,\sigma)}$ совпадают в трех строках, а строка с номером $\rho_2+\alpha$ матрицы $B_1^{(\rho,\sigma)}$ есть сумма строки с номером $\rho_2+\alpha$ матрицы $A_1^{(\rho,\sigma)}$ и, с коэффициентом a, строки с номером ρ_2 матрицы $A_1^{(\rho-\alpha,\sigma)}$. Заметим, что, поскольку α — простой корень, то веса ρ_2 и $\rho_2+\alpha$ отличаются по номеру на 1, то есть строки с с номерами ρ_2 и $\rho_2+\alpha$ — соседние. Поэтому в матрицах $A_1^{(\rho-\alpha,\sigma)}$ и $A_1^{(\rho,\sigma)}$ строки с номерами ρ_2 и $\rho_2+\alpha$ оказываются на одинаковой позиции. Отсюда, используя разложение определителя по строке, получаем, что $d_B^{(\rho,\sigma)}=d_A^{(\rho,\sigma)}+ad_A^{(\rho-\alpha,\sigma)}$, что и требовалось.

3. Предположим, что $\rho - \alpha \notin \Lambda$, и пусть $\phi \in I_1$ — такой вес, что $\phi + \alpha \in \Lambda$ (по [утв. 4], такой вес существует ровно один). Тогда из [утв. 6] следует, что либо ϕ и $\phi + \alpha$ далеки от ρ, либо ϕ близок к ρ, а $\phi + \alpha$ далек, либо ϕ и $\phi + \alpha$ близки к ρ. В первом и втором случаях, как несложно видеть, $B_1^{(\rho,\sigma)} = A_1^{(\rho,\sigma)}$, поэтому $d_B^{(\rho,\sigma)} = d_A^{(\rho,\sigma)}$, что и требовалось. В третьем случае матрица $B_1^{(\rho,\sigma)}$ получается из $A_1^{(\rho,\sigma)}$ прибавлением с коэффициентом a одной из строк к другой, что, как известно, не меняет определителя, то есть $d_B^{(\rho,\sigma)} = d_A^{(\rho,\sigma)}$ и в этом случае.

Следствие. *Отображение из D в $SL(6, K)$, переводящее произвольный элемент $A \in D$ в $A_1 = A|_{V_1}$, является изоморфизмом. Более того, отображение из D_α в $SL(6, K)$, переводящее произвольный элемент $A \in D_\alpha$ в $A|_{V_1^\alpha}$, также является изоморфизмом. В частности, $A|_{V_2^\alpha}$ однозначно задается матрицей $A|_{V_1^\alpha}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно из предложения 3 и следствия из предложения 2. В §2 отмечалось, что $w_\alpha(1)x_\beta(a)w_\alpha(1)^{-1} = x_{w_\alpha\beta}(\pm a)$. Отсюда $w_\alpha(1)D_\beta w_\alpha(1)^{-1} \subseteq D_{w_\alpha\beta}$. Учитывая то, что $w_\alpha(1)^4 = E$, получаем, что сопряжение элементом $w_\alpha(1)$ является изоморфизмом групп D_β и $D_{w_\alpha\beta}$. Теперь второе утверждение следует из первого и того, что w_α переводит I_k^β в $I_k^{w_\alpha\beta}$ при $1 \le k \le 3$. Третье утверждение сразу следует из второго.

3. **Параболическая подгруппа**

Пусть $P = \{A \in G_{\rm sc}(E_6, K); AV_1 = V_1\}$, то есть P — параболическая подгруппа типа P_2. Иначе говоря, все матрицы из P имеют такую блочную форму:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где блоки A_{11}, A_{13} и A_{33} имеют размер 6×6, блок A_{22} — 15×15, блоки A_{12} и A_{32} — 6×15, а блок A_{23} — 15×6. Обозначим также через P^- группу $P^T = P_{-2}$.

Предложение 4. *Для произвольной матрицы $A \in P$ подпространство AV_2 лежит в $V_1 \oplus V_2$. Иначе говоря, блок A_{32} в вышенаписанной форме является нулевым.*

Доказательство. Рассмотрим множество Ω сингулярных векторов $v \in V$, удовлетворяющих следующему свойству: в V_1 существует четырехмерное подпространство, все вектора которого близки к v. Пусть $V' \le V$ — подпространство, порожденное векторами из Ω. Несложно видеть, что $V' \supseteq V_1 \oplus V_2$, поскольку e^i при $i \in I_1 \cup I_2$ принадлежит Ω. С другой стороны, из [л. 2.2] следует, что если $v \notin V_1 \oplus V_2$, то в V_1 существует максимум один, с точностью до кратности, вектор, близкий к v, откуда $v \notin \Omega$. Таким образом, $\Omega \subseteq V_1 \oplus V_2$, поэтому $V' = V_1 \oplus V_2$. Далее, поскольку $AV_1 = V_1$, то $A\Omega = \Omega$ и, следовательно, $AV' = V'$. Отсюда получаем, что $AV_2 \subset V_1 \oplus V_2$, что и требовалось.

Замечание. Несложно видеть, что у предложения 4 существуют аналог: если у матрицы $A \in G_{\rm sc}(E_6, K)$ блоки A_{31} и A_{32} нулевые, то A_{21} также нулевой, то есть $A \in P$. Кроме этого, и предложение 4, и только что описанный аналог можно транспонировать, получив утверждения про P^-. И аналог, и транспонированные утверждения доказываются точно так же, как и предложение 4.

4. **Подгруппа Леви**

Пусть L — подгруппа Леви, соответствующая параболической подгруппе P, то есть $L = P \cap P^-$. По предложению 4 и "транспонированному" предложению 4, L состоит из всех матриц из $G_{\rm sc}(E_6, K)$, имеющих такую блочную форму:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \qquad (3.3)$$

где блоки A и C имеют размер 6×6, а блок B — 15×15. Очевидно, что в L содержатся T и D.

Предложение 5. *$TD = L = DT$.*

Перед доказательством этого предложения докажем вспомогательную лемму.

Лемма 3.2. *Пусть $C \in L$ и $C_1 = C|_{V_1}$ диагональна. Тогда вся матрица C тоже диагональна.*

Доказательство. Предположим, что $C|_{V_3}$ недиагональна. Тогда существуют такие веса $\rho \neq \sigma \in I_3$, что $C_{\rho\sigma} \neq 0$. Далее, σ близок к $\sigma + \delta \in I_1$, или, иначе говоря, вектор e^σ близок к $e^{\sigma+\delta}$. Положим $x = \mathrm{C}_{*\sigma} = \mathrm{C}e^\sigma \in V_3$. По предположению, $x_\rho \neq 0$. При этом x близок к $e^{\sigma+\delta}$, поскольку $\mathrm{C}e^{\sigma+\delta}$ кратен $e^{\sigma+\delta}$. Тогда вектор $y = x + e^{\sigma+\delta}$ сингулярен. Далее, по [сл. из утв. 2], вес ρ далек от веса $\sigma + \delta$. Пусть $\tau \in I_2$ — вес, далекий от ρ и $\sigma + \delta$. Рассмотрим, чему равно $Q(e^\tau, y)$. Как несложно вывести из определения Q, это равно $\sum \pm y_\phi y_\psi$, где сумма берется по всевозможным неупорядоченным парам $\{\phi, \psi\}$, образующим, вместе с τ, триаду. По [утв. 5], либо $\phi, \psi \in I_2$, либо один из весов, например ϕ, принадлежит I_1, а другой — I_3. Все триады первого типа нас не интересуют, поскольку если $\phi \in I_2$, то $y_\phi = 0$. Более того, по определению y, если $\phi \in I_1$ и $y_\phi \neq 0$, то $\phi = \sigma + \delta$, откуда $\psi = \rho$. Таким образом, $Q(e^\tau, y) = \pm y_{\sigma+\delta} y_\rho = \pm y_\rho$, что, по предположению, не равно 0. С другой стороны, y сингулярен, поэтому $Q(e^\tau, y) = 0$. Полученное противоречие показывает, что матрица $C|_{V_3}$ диагональна.

То, что матрица $C|_{V_2}$ диагональна, доказывается аналогично. А именно, предположим противное, то есть существуют такие веса $\rho \neq \sigma \in I_2$, что $C_{\rho\sigma} \neq 0$. Положим $x = \mathrm{C}_{*\sigma} = \mathrm{C}e^\sigma \in V_2$. По предположению, $x_\rho \neq 0$. По [утв. 6], существует вес $\rho_1 \in I_1$, близкий к σ и далекий от ρ, и пусть $\rho_2 - \delta \in I_3$ — вес, далекий от ρ и ρ_1. Положим $y = x + e^{\rho_1}$ и посмотрим, чему равно $Q(e^{\rho_2-\delta}, y)$. Как и в предыдущем абзаце, это равно $\sum \pm y_\phi y_\psi$, где сумма берется по всевозможным неупорядоченным парам $\{\phi, \psi\}$, образующим, вместе с $\rho_2 - \delta$, триаду. По [утв. 5], один из весов, например ϕ, принадлежит I_1, а другой — I_2. Более того, по определению y, если $\phi \in I_1$ и $y_\phi \neq 0$, то $\phi = \rho_1$, откуда $\psi = \rho$. Таким образом, $Q(e^{\rho_2-\delta}, y) = \pm y_{\rho_1} y_\rho = \pm y_\rho$, что, по предположению, не равно 0. С другой стороны, y сингулярен, поэтому $Q(e^{\rho_2-\delta}, y) = 0$. Полученное противоречие показывает, что матрица $C|_{V_2}$ также диагональна, что завершает доказательство леммы.

Доказательство предложения 5. Пусть $A \in L$ и $A_1 = A|_{V_1}$. Рассмотрим матрицу $B_1 \in SL(V_1, K)$, полученную из A_1 делением последней строки на $\det A_1$. Тогда матрица $C_1 = A_1(B_1)^{-1}$ является диагональной. По следствию из предложения 3, существует элемент $B \in D$, такой, что $B|_{V_1} = B_1$, и пусть $C = AB^{-1}$. Таким образом, $C|_{V_1} = C_1$. Отсюда следует, по лемме 3.2, что C диагональна, то есть $A = CB$, где $B \in D$, а $C \in T$. Вторая часть есть "транспонированная" первая.

Теорема 1. *Пусть A — произвольная матрица из $GL(27, K)$, относительно которой подпространства V_1, V_2 и V_3 являются инвариантными. Пусть $A_1 = A|_{V_1}$, а $A_1^{(\rho,\sigma)}$ при $\rho, \sigma \in I_2$ — это матрица 4×4, полученная из A_1 выкидыванием строк ρ_1 и ρ_2 и* *столбцов* σ_1 *и* σ_2*;* $d_A^{(\rho,\sigma)} = \det A_1^{(\rho,\sigma)}$*. Тогда то, что* $A \in L$*, равносильно существованию такого* $d_A = \sqrt[3]{\det A_1}$*, что* $A_{\rho\sigma} = \frac{A_{\rho+\delta,\sigma+\delta}}{d_A}$ *при* $\rho, \sigma \in I_3$ *и* $A_{\rho\sigma} = \frac{d_A^{(\rho,\sigma)}}{d_A^2}$ *при* $\rho, \sigma \in I_2$*.*

Доказательство. 1. Покажем, что если $A \in L$, то d_A, описанное в условии, существует. По предложению 5, $A = BC$, где $B \in D$ и $C \in T$; пусть $B_1 = B|_{V_1}$ и $C_1 = C|_{V_1}$. Положим искомое d_A равным d_C из предложения 1, примененного к матрице C. Очевидно, по определению C, что $d_A = \sqrt[3]{\det A_1}$. Проверим, что выбранное d_A удовлетворяет и остальным равенствам. Пусть $\rho, \sigma \in I_3$. Тогда $A_{\rho\sigma} = B_{\rho\sigma} C_{\sigma\sigma} = \frac{B_{\rho+\delta,\sigma+\delta} C_{\sigma+\delta,\sigma+\delta}}{d_A}$ по предложению 1 и следствию из предложения 2. Осталось заметить, что это равно $\frac{A_{\rho+\delta,\sigma+\delta}}{d_A}$, что и требовалось.

Далее, пусть $\rho, \sigma \in I_2$. Тогда $A_{\rho\sigma} = B_{\rho\sigma} C_{\sigma\sigma} = \frac{d_B^{(\rho,\sigma)} d_A}{C_{\sigma_1,\sigma_1} C_{\sigma_2,\sigma_2}}$ по предложениям 1 и 3. Несложно видеть, что $d_A^{(\rho,\sigma)} = d_B^{(\rho,\sigma)} \prod C_{\tau\tau}$, где произведение берется по всем $\tau \in I_1$, близким к σ. Поэтому $\frac{d_B^{(\rho,\sigma)} d_A}{C_{\sigma_1,\sigma_1} C_{\sigma_2,\sigma_2}} = \frac{d_A^{(\rho,\sigma)} d_A}{\prod_{\tau \in I_1} C_{\tau\tau}} = \frac{d_A^{(\rho,\sigma)}}{d_A^2}$, что и требовалось.

2. Предположим, что d_A, описанное в условии, существует. Покажем, что тогда $A \in L$. Пусть $C_1 \in GL(V_1, K)$ — такая диагональная матрица, что $B_1 = A_1 C_1 \in SL(V_1, K)$. Тогда, как несложно видеть, в качестве d_C из предложения 1 можно взять d_A^{-1}. Пусть $C \in T$ — матрица, построенная в предложении 1 по C_1 и d_C. Пусть $B = AC$; тогда $B|_{V_1} = B_1$. Необходимо доказать, что $B \in D$. По предложению 3 и следствиям из предложений 2 и 3, для этого достаточно показать, что $B|_{V_3} = B|_{V_1}$ и что $B_{\rho\sigma} = d_B^{(\rho,\sigma)}$ при $\rho, \sigma \in I_2$. Докажем первое равенство. Пусть $\rho, \sigma \in I_3$. Тогда $B_{\rho\sigma} = A_{\rho\sigma} C_{\sigma\sigma} = \frac{A_{\rho+\delta,\sigma+\delta}}{d_A} \cdot \frac{C_{\sigma+\delta,\sigma+\delta}}{d_C} = A_{\rho+\delta,\sigma+\delta} C_{\sigma+\delta,\sigma+\delta} = B_{\rho+\delta,\sigma+\delta}$.

Докажем второе равенство. Пусть $\rho, \sigma \in I_2$. Тогда $B_{\rho\sigma} = A_{\rho\sigma} C_{\sigma\sigma} = \frac{d_A^{(\rho,\sigma)}}{d_A^2} \cdot \frac{d_C}{C_{\sigma_1,\sigma_1} C_{\sigma_2,\sigma_2}}$. Несложно видеть, что $d_B^{(\rho,\sigma)} = d_A^{(\rho,\sigma)} \prod C_{\tau\tau}$, где произведение берется по всем $\tau \in I_1$, близким к σ. Поэтому $\frac{d_A^{(\rho,\sigma)}}{d_A^2} \cdot \frac{d_C}{C_{\sigma_1,\sigma_1} C_{\sigma_2,\sigma_2}} = \frac{d_B^{(\rho,\sigma)} d_C^3}{\prod_{\tau \in I_1} C_{\tau\tau}} = d_B^{(\rho,\sigma)}$, что и требовалось.

5. Унипотентная подгруппа

Пусть $U = U^+$ — унипотентный радикал параболической подгруппы P_2, то есть $U = \langle X_\alpha; \angle(\alpha, \delta) \le \pi/3 \rangle$. Иначе говоря, все матрицы из U имеют такую блочную форму:

$$\begin{pmatrix} I_6 & A & B \\ 0 & I_{15} & C \\ 0 & 0 & I_6 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где I_n обозначает единичную матрицу размера $n \times n$. Обозначим группу всех матриц из $G(E_6, K)$, имеющих вышеописанный блочный вид, через U'. Хорошо известно, что $U = U'$, однако в настоящей работе, как мы уже говорили, мы стараемся как можно меньше пользоваться внешними результатами. В §5 будет показано, что $U = U'$, но во всей настоящей работе нам достаточно того очевидного факта, что $U \le U'$. Аналогично, $U^- = U^T = \langle X_\alpha; \angle(\alpha, -\delta) \le \pi/3 \rangle$.

Несложно видеть, что для двух корневых подгрупп, лежащих в U, их коммутант лежит в X_δ, сама же X_δ коммутирует со всей группой U. Поэтому коэффициент, с которым x_α, при $\angle(\alpha, \delta) = \pi/3$, входит в разложение унипотента g на элементарные корневые элементы, определен однозначно. В дальнейшем мы будем его обозначать через $(\alpha)_g$. Заметим, что при перемножении двух унипотентов их блоки, обозначенные в (3.4) через A (соответственно, C) складываются. Поэтому для произвольного унипотента g его коэффициенты в блоке A (соответственно, C) удовлетворяют условиям, аналогичным [л. 3.1]. А именно, мы показали следующую лемму:

Лемма 3.3. *Пусть $g \in U$ — унипотент и либо $\phi \in I_1$ и $\psi \in I_2$, либо $\phi \in I_2$ и $\psi \in I_3$. Тогда:*

(1) $g_{\phi\psi} = 0$, *если* $d(\phi, \psi) = 2$;
(2) $g_{\phi\psi} = c_{\phi\psi}(\psi - \phi)_g$, *если* $d(\phi, \psi) = 1$.

Из этой леммы, в частности, следует согласованность старого, данного в работе [20], и нового определений $(\alpha)_g$: там, где у них совпадают области определения, то есть для корневых элементов, являющихся одновременно унипотентами, и при корнях α, таких, что $\angle(\alpha, \delta) = \pi/3$, их значения также совпадают.

§4. Унипотентные элементы

Пусть $g \in U$ — унипотент, а $x_\alpha(a)$, где $\alpha \perp \delta$ — элементарный корневой элемент. Из леммы 3.3 следует, что

$$g = e + \sum_{\beta;\angle(\beta,\delta)=\pi/3} (\beta)_g e_\beta + \sum_{i,j;i\in I_1, j\in I_3} g_{ij}.$$

Сопрягая это равенство при помощи $x_\alpha(a)$, получаем:

$$x_\alpha(a) g x_\alpha(-a) = e + \sum_{\beta;\angle(\beta,\delta)=\pi/3} (\beta)_g x_\alpha(a) e_\beta x_\alpha(-a) + \sum_{i\in I_1, j\in I_3} x_\alpha(a) g_{ij} x_\alpha(-a).$$

Пусть $x_\alpha(a) g x_\alpha(-a) = g'$. По [утв. 4], несложно видеть, что вторая сумма равна $\sum\limits_{i,j;i\in I_1,j\in I_3} g'_{ij}$. Далее, посмотрим на слагаемые из первой суммы. Очевидно, что угол между α и β может быть равен $\pi/3, \pi/2$ или $2\pi/3$. Если он равен $\pi/3$ или $\pi/2$, то $x_\alpha(a)$ коммутирует с $x_\beta(b)$, откуда $x_\alpha(a) e_\beta x_\alpha(-a) = e_\beta$. Если же $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$, то $x_\alpha(a) e_\beta x_\alpha(-a) = e_\beta + N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$. Из этого сразу следует лемма:

Лемма 4.1. *Пусть $g \in U$ — унипотент, $x_\alpha(a)$, где $\alpha \perp \delta$ — элементарный корневой элемент, а $g' = x_\alpha(a) g x_\alpha(-a)$. Тогда если $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$, то $(\beta)_{g'} = (\beta)_g + N_{\alpha\beta} a (\beta - \alpha)_g$. Иначе $(\beta)_{g'} = (\beta)_g$.*

Лемма 4.2. *Пусть $g \in U$ — унипотент и существует корень β, такой, что $\angle(\beta, \delta) = \pi/3$ и $(\beta)_g \neq 0$. Тогда, сопрягая, при необходимости, g элементом из D, можно считать, что $(\alpha)_g \neq 0$, где $\alpha = \substack{12321\\1}$.*

Доказательство. По очевидным соображениям, корни α и β можно связать цепочкой корней $\beta = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n = \alpha$, такой, что $\angle(\delta, \beta_i) = \angle(\beta_{i-1}, \beta_i) = \pi/3$ для всех $1 \le i \le n$. Поэтому достаточно показать, что если $(\beta_{i-1})_g \neq 0$, то, сопрягая g элементом из D, можно считать, что $(\beta_i)_g \neq 0$. Последнее же легко следует из леммы 4.1 при $\alpha = \beta_i - \beta_{i-1}$.

Лемма 4.3. *Пусть $g \in U$ — унипотент и $(\alpha)_g \neq 0$, где $\alpha = \substack{12321\\1}$. Тогда, сопрягая, при необходимости, g элементом из D, можно считать, что $(\alpha')_g = 0$ для всех корней α', таких, что $\angle(\alpha', \delta) = \angle(\alpha', \alpha) = \pi/3$.*

Доказательство. Пусть β — произвольный корень, такой, что $\angle(\beta, \delta) = \angle(\beta, \alpha) = \pi/3$, и предположим, что $(\beta)_g \neq 0$. Сопряжем g элементом $x_{\beta-\alpha}(a)$. При таком сопряжении, по лемме 4.1, меняются коэффициенты только при корнях, образующих угол $\pi/3$ с $\beta - \alpha$. Поскольку $\angle(\alpha, \beta - \alpha) = 2\pi/3$, то из всех корней α', таких, что $\angle(\alpha', \alpha) = \pi/3$, коэффициент меняется только при корне β. Подставляя вместо a дробь $\frac{-N_{\alpha\beta}(\beta)_g}{(\alpha)_g}$, мы получаем, что $(\beta)_g = 0$. Повторяя эту операцию для всех β, таких, что $\angle(\beta, \delta) = \angle(\beta, \alpha) = \pi/3$, получим требуемое.

Рассмотрим множество корней, образующих угол $\pi/3$ с корнем δ и их разложение на простые корни. У них всех, как несложно видеть, коэффициент при корне α_2 равен 1. Можно заметить, что в этом множестве существует один корень с коэффициентом 3 при корне α_4, а именно $\alpha = \substack{12321\\1}$, и один корень с коэффициентом 0, а именно $\delta - \alpha = \substack{00000\\1}$. Все остальные корни при α_4 имеют коэффициент либо 1, либо 2, по 9 корней каждого типа. Наконец, отметим, что α образует угол $\pi/3$ с корнями, имеющими коэффициент 2 при α_4, и ортогонален корням, имеющим коэффициент 1 при α_4, а $\delta - \alpha$ — наоборот.

Лемма 4.4. *Пусть $g \in U$ — унипотент, $(\alpha)_g \neq 0$, где $\alpha = \substack{12321\\1}$. Далее, пусть $(\alpha')_g = 0$ для всех корней α', таких, что $\angle(\alpha', \delta) = \angle(\alpha', \alpha) = \pi/3$. Предположим, что существует корень $\gamma \perp \alpha$, такой, что $\angle(\gamma, \delta) = \pi/3$ и $(\gamma)_g \neq 0$. Тогда, сопрягая, при необходимости, g элементом из D, можно считать, что $(\beta)_g \neq 0$, где $\beta = \substack{11100\\1}$.*

Доказательство. Несложно видеть, что угол между корнями β и γ равен либо $\pi/3$, либо $\pi/2$. Более того, во втором случае существует корень γ', такой, что $\angle(\gamma', \gamma) = \angle(\gamma', \beta) = \angle(\gamma', \delta) = \pi/3$. Покажем, что если есть два веса γ_1 и γ_2, причем $\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \angle(\gamma_i, \delta) = \pi/3$ и $\angle(\gamma_i, \alpha) = \pi/2$ при $i = 1, 2$, и $(\gamma_1)_g \neq 0$, то, сопрягая g элементом из D, можно считать, что $(\gamma_2)_g \neq 0$. Для этого, по лемме 4.1, достаточно показать, что после сопряжения g корневым элементом $x_{\gamma_2 - \gamma_1}(a)$ по прежнему $(\alpha)_g \neq 0$ и $(\alpha')_g = 0$. Заметим, что $\gamma_2 - \gamma_1$ в разложении на простые корни имеет коэффициент 0 при α_4. Отсюда, по лемме 4.1, следует требуемое.

Лемма 4.5. *Пусть $g \in U$ — унипотент, $(\alpha)_g \neq 0$, где $\alpha = \substack{12321\\1}$. Далее, пусть $(\alpha')_g = 0$ для всех корней α', таких, что $\angle(\alpha', \delta) = \angle(\alpha', \alpha) = \pi/3$. Предположим, что $(\beta)_g \neq 0$, где $\beta = \substack{11100\\1}$. Тогда, сопрягая, при необходимости, g элементом из D, можно считать, что $(\beta')_g = 0$ для всех корней β', таких, что $\angle(\beta', \delta) = \angle(\beta', \beta) = \pi/3$.*

Доказательство. Действуем аналогично лемме 4.3. Пусть γ — произвольный корень, такой, что $\angle(\gamma, \delta) = \angle(\gamma, \beta) = \pi/3$, и предположим, что $(\gamma)_g \neq 0$. Сопряжем g элементом $x_{\gamma-\beta}(a)$. Как мы показывали в лемме 4.3, при таком сопряжении коэффициенты при корнях $\beta' \neq \gamma$, таких, что $\angle(\beta', \delta) = \angle(\beta', \beta) = \pi/3$, не меняются. Заметим, что $\gamma - \beta$ в разложении на простые корни имеет коэффициент 0 при α_4. Отсюда, по лемме 4.1, следует, что коэффициенты при α и α' также не изменятся. Подбирая коэффициент a так, чтобы $(\gamma)_g$ стало равным 0, и повторяя такую процедуру для всех γ, таких, что $\angle(\gamma, \delta) = \angle(\gamma, \beta) = \pi/3$ и $(\gamma)_g \neq 0$, получаем требуемое.

Лемма 4.6. *Пусть $g \in U$ — унипотент. Тогда, сопрягая, при необходимости, g элементом из D, можно считать, что $(\gamma)_g = 0$ для всех корней $\gamma \neq \substack{12321\\1}, \substack{11100\\1}, \substack{01110\\1}, \substack{00111\\1}$ и $\substack{00000\\1}$, таких, что $\angle(\gamma, \delta) = \pi/3$.*

Доказательство. Применим леммы 4.2-4.5. Нам осталось, сопрягая g элементом из D, добиться того, чтобы $(\substack{01111\\1})_g = (\substack{00110\\1})_g = 0$ (разумеется, не испортив других коэффициентов). Предположим, что или $(\substack{01111\\1})_g$, или $(\substack{00110\\1})_g$ не равно 0. Тогда, сопрягая, при необходимости, g корневыми элементами $x_{\gamma'}(a)$ при $\gamma' = -\substack{00001\\0}$ или $\substack{01000\\0}$, можно считать, что $(\substack{01110\\1})_g \neq 0$. Отсюда, сопрягая g корневыми элементами $x_{\gamma'}(a)$ при $\gamma' = \substack{00001\\0}$ и $-\substack{01000\\0}$, можно считать, что $(\substack{01111\\1})_g = (\substack{00110\\1})_g = 0$, что и требовалось.

Теорема 2. *Любой унипотент $g \in U$ можно представить в виде произведения не более чем трех корневых элементов.*

Доказательство. По лемме 4.6, можно считать, что $(\gamma)_g = 0$ для всех корней $\gamma \neq \substack{12321\\1}, \substack{11100\\1}, \substack{01110\\1}, \substack{00111\\1}$ и $\substack{00000\\1}$, таких, что $\angle(\gamma, \delta) = \pi/3$. Предположим, что $(\substack{00000\\1})_g \neq 0$. Тогда, сопрягая g элементом $x_{\gamma'}(a)$ при $\gamma' = \substack{00111\\0}$, можно добиться, чтобы $(\substack{00111\\1})_g = 0$. При этом, возможно, перестанут быть нулями коэффициенты при $\substack{11211\\1}$

и $\begin{smallmatrix}01221\\ 1\end{smallmatrix}$. Иначе говоря, унипотент g у нас представляется в виде произведения элементарных корневых элементов, соответствующих корням $\begin{smallmatrix}00000\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01110\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11100\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11211\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01221\\ 1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}12321\\ 1\end{smallmatrix}$, а также, возможно, $\begin{smallmatrix}12321\\ 2\end{smallmatrix}$. Заметим, что произведение двух корневых элементов, образующих угол $\pi/3$, также является корневым элементом. В самом деле, по [т. 3], можно считать, что эти корневые элементы — элементарные, а для них это очевидно. Поэтому произведения первого и второго, третьего и четвертого, а также пятого, шестого и седьмого корневых элементов также являются корневыми элементами, и их произведение равно g.

Осталось рассмотреть случай, когда $(\begin{smallmatrix}00000\\ 1\end{smallmatrix})_g = 0$. Если хоть один из оставшихся коэффициентов также равен 0, то утверждение теоремы очевидно. Предположим, что оставшиеся четыре коэффициента 0 не равны. Сопряжем g корневым элементом $x_{\gamma'}(1)$ при $\gamma' = -\begin{smallmatrix}11100\\ 0\end{smallmatrix}$. При таком сопряжении станут ненулевыми коэффициенты при $\begin{smallmatrix}00000\\ 1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}01221\\ 1\end{smallmatrix}$. Теперь, сопрягая g элементом $x_{\gamma'}(a)$ при $\gamma' = \begin{smallmatrix}00111\\ 0\end{smallmatrix}$, можно добиться, чтобы $(\begin{smallmatrix}00111\\ 1\end{smallmatrix})_g = 0$. При этом перестанет быть нулем коэффициент при $\begin{smallmatrix}11211\\ 1\end{smallmatrix}$. Иначе говоря, унипотент g, как и в предыдущем случае, представляется в виде произведения элементарных корневых элементов, соответствующих корням $\begin{smallmatrix}00000\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01110\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11100\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11211\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01221\\ 1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}12321\\ 1\end{smallmatrix}$, а также, возможно, $\begin{smallmatrix}12321\\ 2\end{smallmatrix}$. Поэтому, как и в предыдущем случае, g представляется в виде произведения трех корневых элементов, что и требовалось.

Замечание. Несложно видеть, что корни $\begin{smallmatrix}12321\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}11100\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}01110\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}00111\\ 1\end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix}00000\\ 1\end{smallmatrix}$, выбранные в леммах 4.2-4.6, а также максимальный корень $\delta = \begin{smallmatrix}12321\\ 2\end{smallmatrix}$, лежат в подсистеме корней типа D_4. Соответственно, доказательство теоремы 2 проходит, *на самом деле*, в D_4.

В дальнейшем, нас будет интересовать подматрица 6×6 матрицы g, расположенная в правом верхнем углу. Обозначим эту матрицу через $\overline{g} = \{g_{ij}\}_{i \in I_1, j \in I_3}$. Эта матрица переводит подпространство V_3 в V_1. Очевидно, однако, что существует стандартный изоморфизм из V_1 в V_3, переводящий e^i, при $i \in I_1$, в $e^{i-\delta}$. Во многих дальнейших утверждениях, для простоты формулировок, мы будем говорить про сопряжение матрицы $\overline{g}$, ее жорданову форму и тому подобное, подразумевая использование этого (или обратного ему) стандартного изоморфизма.

Последующее определение мы уже формулировали в введении.

Определение. Поле K называется n-замкнутым, если в нем любой многочлен степени не выше n имеет хотя бы один корень.

Утверждение 1.

(1) *Пусть $g \in U$ — унипотент. Тогда $\overline{g}$ сопряжено матрице*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & kx & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & ky & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & kz \\ yz & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & xy & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

для некоторых $a, b, k, x, y, z \in K$.

(2) *Предположим, что поле K является 2-замкнутым. Пусть $g \in U$ — унипотент. Тогда $\overline{g}$ имеет одну из следующих жордановых форм:*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

или, при $a \neq b \in K$,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

(3) *Предположим, что поле K является 2-замкнутым. Пусть $A \in GL(6, K)$ — произвольная матрица, жорданова форма которой — одна из перечисленных в предыдущем пункте. Тогда существует унипотент $g \in U$, такой, что $\overline{g} = A$.*

В дальнейшем, когда нам будет встречаться матрица $A \in GL(6, K)$, сопряженная матрице вида, указанного в пункте (1), мы будем говорить, что A имеет вид †.

Доказательство. Как несложно видеть, при сопряжении g элементом $f \in D$ матрица $\overline{g}$ умножается слева на $f|_{V_1}$, а справа на $f^{-1}|_{V_3}$. Поскольку $f^{-1} \in D$, то $f^{-1}|_{V_3} = f^{-1}|_{V_1} = (f|_{V_1})^{-1}$, поэтому сопряжение g матрицей f соответствует сопряжению $\overline{g}$ матрицей $f|_{V_1}$. Применим лемму 4.6. Для доказательства первого пункта нам осталось показать, что если g выглядит, как в лемме 4.6, то $\overline{g}$ имеет требуемый вид. Пусть $i \in I_1, j \in I_3$ и $i \neq j+\delta$. Поскольку вектор g_{*j} сингулярен, то $Q(e^k, g_{*j})$ равно 0 при весе $k \in I_2$, далеком от i и j. С другой стороны, из вида формы Q следует, что $Q(e^k, g_{*j}) = \pm g_{ij}g_{jj} + \pm g_{i-\delta,j}g_{j+\delta,j} + \sum \pm g_{lj}g_{mj}$. При этом, по [утв. 6], последняя сумма состоит из трех слагаемых и $l, m \in I_2$; кроме этого, $g_{jj} = 1$, а $g_{i-\delta,j} = 0$. Отсюда несложно получить прямым вычислением, что g_{ij} при $i \neq j + \delta$ принимает нужное значение. Требуемые соотношения между диагональными элементами $\overline{g}$, скажем, $g_{i,i-\delta}$ и $g_{j,j-\delta}$, можно получить аналогичным вычислением из того, что $Q(e^k, g_{*,i-\delta} + g_{*,j-\delta}) = 0$, где $k \in I_2$ и $d(k,i) = d(k,j) = 2$.

Второй пункт сразу следует из первого. Докажем третий пункт. Несложно видеть, что существуют унипотенты g, такие, что $\overline{g}$ имеет такую же жорданову форму, что и A. Более того, как мы говорили в предыдущем абзаце, при сопряжении g элементом $f \in D$ подматрица $\overline{g}$ сопрягается матрицей $f|_{V_1} \in SL(6, K)$. И наоборот, по следствию из предложения 3, для произвольной матрицы $B \in SL(6, K)$ существует матрица $f \in D$, такая, что $f|_{V_1} = B$. Таким образом, нам достаточно показать, что A сопряжена некоторой матрице из пункта (2) при помощи матриц из $SL(6, K)$. Это, в свою очередь, сразу следует из того, что поле K — 2-замкнутое и минимальный размер жорданова блока в матрицах из (2) равен 1 или 2.

§5. Произведения

1. **Сведение произведения матриц из $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ к произведению матриц из $GL(6, K)$ и унипотентным элементам.**

Пусть $g \in U$ — унипотент. Последние шесть столбцов g образуют шестимерное сингулярное подпространство W. Тогда по [т. 2] существует корневой элемент h, такой, что $V^h = W$. Более того, по [л. 3.5] $(-\delta)_h \neq 0$. Таким образом, мы получили отображение θ из U в множество корневых элементов $RootEl_{-\delta} = \{h; h - \text{корневой элемент}, (-\delta)_h = 1\}$. Заметим, что, по лемме 3.3, шестимерным сингулярным подпространством W унипотент g определяется однозначно, поэтому θ является инъекцией. Легко видеть также, что если $g \in U$ и $h = \theta(g) \in RootEl_{-\delta}$, то первые шесть столбцов матрицы $h - e$ совпадают с последними шестью столбцами матрицы g. Иначе говоря, $h_{\rho\sigma} - \delta_{\rho,\sigma} = g_{\rho\sigma-\delta}$ при $\rho \in \Lambda$ и $\sigma \in I_1$. В частности, $(\gamma)_g = \pm(\gamma - \delta)_h$ для произвольного корня γ, такого, что $\angle(\gamma, \delta) = \pi/3$.

Применим к интересующему нас случаю $\alpha = -\delta$ [т. 1]. В ней мы показали, что любой элемент из $RootEl_{-\delta}$ получается сопряжением элементарного корневого элемента $x_{-\delta}(1)$ корневыми элементами $x_{\beta+\delta}(\cdot)$, $\beta, \beta + \delta \in \Phi$ и $x_\delta(\cdot)$. Иначе говоря, для произвольного $h \in RootEl_{-\delta}$ мы получаем, что $h = gx_{-\delta}(1)g^{-1}$ для некоторого $g \in U$. Таким образом, получилось отображение η из $RootEl_{-\delta}$ в U, переводящее h в g. Сравнивая he^λ с $gx_{-\delta}(1)g^{-1}e^\lambda$, обнаруживаем, что η является обратным к θ и, поэтому, θ — биекция. Более того, можно заметить, что η и, следовательно, θ сохраняются при сопряжении U и $RootEl_{-\delta}$ элементами из D. Понятно, что кроме вышеописанной биекции θ, существуют еще три подобные биекции. Во-первых, это биекция из U в $RootEl_{-\delta}$, переводящая унипотент g в корневой элемент h, такой, что $V_h = \langle g_{i*}; i \in I_1\rangle$. Во-вторых, биекция из U^- в $RootEl_\delta$, переводящая унипотент g в корневой элемент h, такой, что $V^h = \langle g_{*i}; i \in I_1\rangle$. В-третьих, биекция из U^- в $RootEl_\delta$, переводящая унипотент g в корневой элемент h, такой, что $V_h = \langle g_{i*}; i \in I_3\rangle$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2.

(1) *Для произвольного корневого элемента h, такого, что $(-\delta)_h \neq 0$, существует унипотент $g \in U$, такой, что $V^h = \langle g_{*i}; i \in I_3\rangle$.*

(2) *Для произвольного корневого элемента h, такого, что $(-\delta)_h \neq 0$, существует унипотент $g \in U$, такой, что $V_h = \langle g_{i*}; i \in I_1\rangle$.*

(3) *Для произвольного корневого элемента h, такого, что $(\delta)_h \neq 0$, существует унипотент $g \in U^-$, такой, что $V^h = \langle g_{*i}; i \in I_1\rangle$.*

(4) *Для произвольного корневого элемента h, такого, что $(\delta)_h \neq 0$, существует унипотент $g \in U^-$, такой, что $V_h = \langle g_{i*}; i \in I_3\rangle$.*

Следствие.

(1) *Пусть g — корневой элемент и либо $(\delta)_g$, либо $(-\delta)_g$ не равно 0. Тогда матрицы $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{6}$ и $\{g_{ij}\}_{i,j=22}^{27}$ имеет вид †.*

(2) *Предположим, что поле K является 2-замкнутым. Тогда для произвольной матрицы A, имеющей вид †, существуют корневые элементы g и h, такие, что $(\delta)_g \neq 0$, $(\delta)_h \neq 0$, $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^{6} = A$ и $\{h_{ij}\}_{i,j=22}^{27} = A$.*

Доказательство. Оба пункта следует из утверждений 1 и 2.

Замечание. Очевидно, что во втором пункте условия $(\delta)_g \neq 0$ и $(\delta)_h \neq 0$ можно заменить на $(-\delta)_g \neq 0$ и $(-\delta)_h \neq 0$.

В §3 мы рассматривали группы U и U'. Там мы заметили, что $U \le U'$. Сейчас мы легко сможем доказать их равенство.

Утверждение 3. $U' = U$.

Доказательство. Достаточно показать, что $U' \le U$. Пусть $g' \in U'$. Тогда последние шесть столбцов матрицы g' образуют шестимерное сингулярное подпространство V'. По [сл. из т. 2], существует корневой элемент $h \in RootEl_{-\delta}$, такой, что $V^h = V'$. Тогда, по утверждению 2, существует элемент $g \in U$, такой, что подпространство, порожденное последними шестью строками матрицы g, совпадает с V'. Иначе говоря, $gV_1 = g'V_1 = V'$. Поэтому матрица $g^{-1}g'$ оставляет V_1 на месте, то есть $g^{-1}g' \in P^-$. Теперь из предложения 4 (точнее говоря, из его транспонированного аналога, см. замечание после предложения 4) и определения U' следует, что $g^{-1}g' = E$, что и требовалось.

Пусть $J \in G_{\rm sc}(E_6, K)$ — матрица, равная $w_\delta(1) = x_\delta(1)x_{-\delta}(-1)x_\delta(1)$. Рассмотрим множество L', получаемое из подгруппы Леви L умножением справа на J: $L' = \{AJ; A \in L\}$.

Замечание. Мы используем новое обозначение для $w_\delta(1)$, чтобы не путать умножение на него и сопряжение им. Как и прежде, говоря про "действие элементом $w_\delta(1)$", мы подразумеваем сопряжение этим элементом.

Теорема 3. *Пусть $g \in G_{\rm sc}(E_6, K)$ — произвольный элемент с $det(\overline{g}) \neq 0$. Тогда $g = vdw$, где $v, w \in U^-$, а $d \in L'$.*

Доказательство. Рассмотрим шестимерное подпространство W, порожденное последними шестью столбцами матрицы g. Пусть h — корневой элемент, такой, что $V^h = W$. Поскольку по условию $det(\overline{g}) \neq 0$, то, по [л. 3.5], $(\delta)_h \neq 0$. Для некоторого $a \in K$, поэтому, $ah \in RootEl_\delta$. Тогда существует унипотент $v \in U^-$, такой, что подпространство, порожденное первыми шестью столбцами v, совпадает с $V^{ah} = V^h = W$. Далее, рассмотрим шестимерное подпространство $W' < V^*$, порожденное первыми шестью строками матрицы g. "Транспонируя" предыдущие соображения, получаем, что существует унипотент $w \in U^-$, такой, что подпространство, порожденное последними шестью строками w, совпадает с W'.

Теперь положим $d = v^{-1}gw^{-1}$. Рассмотрим подпространство V', порожденное последними шестью столбцами матрицы d. При этом $w^{-1}V_3 = V_3$, поэтому $V' = v^{-1}gw^{-1}V_3 = v^{-1}V$. Далее, из выбора v следует, что $V = vV_1$, поэтому $V' = V_1$. Иначе говоря, $d_{ij} = 0$ при $7 \le i \le 27, 22 \le j \le 27$. Аналогично, "транспонируя" вышеописанные рассуждения, можно получить, что $d_{ij} = 0$ при $1 \le i \le 6, 1 \le j \le 21$. Наконец, рассмотрим матрицу dJ^{-1}. Несложно заметить, что она лежит в параболических подгруппах P и P^-, следовательно, $dJ^{-1} \in L$, то есть $d \in L'$, что и требовалось.

Предложение 6. *Пусть g_1, g_2 — два корневых элемента, такие, что $(\delta)_{g_1}$ и $(\delta)_{g_2}$ не равны 0.*

(1) *Матрица $\overline{g_1 g_2}$ имеет вид †.*
(2) *Предположим, что поле K является 2-замкнутым. Зафиксируем корневой элемент g_1. Тогда для произвольной матрицы A вида † существует такой корневой элемент g_2, что $\overline{g_1 g_2} = A$.*

Доказательство. Докажем первый пункт. Как мы напоминали в §2, из доказательства [т. 1] следует, что $g_1 = fx_\delta(a)f^{-1}$, где $f \in U^-$. Далее, несложно видеть, что для произвольного элемента $g \in G(E_6, K)$ и произвольного унипотента $u \in U^-$ матрица $\overline{g}$ равна $\overline{ug}$ и $\overline{gu}$. В частности, $\overline{g_1g_2} = \overline{f^{-1}g_1g_2f} = \overline{x_\delta(a)(f^{-1}g_2f)}$. Далее, $\overline{x_\delta(a)(f^{-1}g_2f)} = \overline{f^{-1}g_2f} + a\{(f^{-1}g_2f)_{ij}\}_{i,j\in I_3}$. Поскольку g_2 — корневой элемент, то матрица $\overline{f^{-1}g_2f} = \overline{g}_2$ — скалярная и не равна 0. По следствию из утверждения 2, матрица $\{(f^{-1}g_2f)_{ij}\}_{i,j\in I_3}$ имеет вид †, поэтому и $\overline{g_1g_2}$ имеет вид †.

Докажем второй пункт. Как и в предыдущем пункте, имеем $\overline{g_1g_2} = \overline{x_\delta(a)(f^{-1}g_2f)} = \overline{f^{-1}g_2f} + a\{(f^{-1}g_2f)_{ij}\}_{i,j\in I_3}$, при этом f и a зависят только от g_1. Пусть $h = f^{-1}g_2f$, тогда $\overline{g_1g_2} = \overline{h} + a\{h_{ij}\}_{i,j\in I_3}$. При этом h может быть произвольным корневым элементом, а поскольку $(\delta)_h = (\delta)_{g_2}$, то условие, что $(\delta)_{g_2} \neq 0$, переходит в условие $(\delta)_h \neq 0$. Отсюда, используя следствие из утверждения 2, получаем требуемое.

Теорема 4.

(1) *Пусть g_1 и g_2 — два произвольных элемента группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такие, что $\det\overline{g_1}$ и $\det\overline{g_2}$ не равны 0. Тогда $\overline{g_1g_2} = \overline{g_1}A\overline{g_2}$, где A — некоторая матрица вида †. В частности, если g_2 — корневой элемент, то $\overline{g_1g_2} = \overline{g_1}A$.*

(2) *Предположим, что поле K является 2-замкнутым. Зафиксируем элемент $g_1 \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$. Тогда для произвольной матрицы A вида † существует такой корневой элемент g_2, что $\overline{g_1g_2} = \overline{g_1}A$.*

Доказательство. Пусть f_1 — корневой элемент, такой, что $\langle\{f_1\}_{i*}; i \in I_1\rangle = \langle\{g_1\}_{i*}; i \in I_1\rangle$ и $(\delta)_{f_1} = 1$. Иначе говоря, если $W = \langle\{g_1\}_{i*}; i \in I_1\rangle$ и h_1 — корневой элемент, такой, что $V^{h_1} = W$ и $(\delta)_{h_1} = 1$, то $f_1 = x_{-\delta}(1)h_1x_{-\delta}(-1)$. Аналогично, пусть f_2 — корневой элемент, такой, что $\langle\{f_2\}_{*i}; i \in I_3\rangle = \langle\{g_2\}_{*i}; i \in I_3\rangle$ и $(\delta)_{f_2} = 1$. Тогда при $i \in I_1, j \in I_3$ и $k \in \Lambda$ имеем $\{g_1\}_{ik} = \sum\limits_{l\in I_1}\{g_1\}_{i,l-\delta}\{f_1\}_{lk}$, поскольку строка матрицы g_1 с номером i есть сумма строк f_1 с номерами l с коэффициентами $\{g_1\}_{i,l-\delta}$; аналогично, $\{g_2\}_{kj} = \sum\limits_{m\in I_3}\{g_2\}_{m+\delta,j}\{f_2\}_{km}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\{g_1g_2\}_{ij} &= \sum_{k\in\Lambda}\{g_1\}_{ik}\{g_2\}_{kj} \\
&= \sum_{k\in\Lambda}\left(\sum_{l\in I_1}\{g_1\}_{i,l-\delta}\{f_1\}_{lk}\right)\left(\sum_{m\in I_3}\{g_2\}_{m+\delta,j}\{f_2\}_{km}\right) \\
&= \sum_{l\in I_1}\sum_{m\in I_3}\left(\{g_1\}_{i,l-\delta}\{g_2\}_{m+\delta,j}\left(\sum_{k\in\Lambda}\{f_1\}_{lk}\{f_2\}_{km}\right)\right) \\
&= \sum_{l\in I_1}\sum_{m\in I_3}(\{g_1\}_{i,l-\delta}\{f_1f_2\}_{lm}\{g_2\}_{m+\delta,j}).
\end{aligned}$$

Это выражение, учитывая упоминаемый в предыдущем параграфе неявно используемый нами стандартный изоморфизм $V_3 \to V_1$, есть в точности то, что требуется в первом пункте. Второй пункт следует из предыдущих выкладок и предложения 6.

2.**Произведения матриц из** $GL(6, K)$.

В этом пункте нам придется довольно много работать с жордановыми формами размером 6×6. Для краткости, будем обозначать через $D(B_1, \cdots, B_k)$ блочно-диагональную матрицу с блоками $B_1, \cdots, B_k$; жордановы блоки мы будем обозначать как $(a, \cdots, a)$, где a — соответствующее собственное число, а их количество — размер клетки. Если собственные числа обозначаются различными буквами, то они не равны. Например, запись $D(a,a,(b,b),b)$ обозначает матрицу $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Ранее мы часто использовали выражение "матрицы вида †". Теперь нам понадобится уточнить этот термин. Будем называть $A \in GL(6,K)$ матрицей вида ‡, если она сопряжена матрице $D(a,a,a,b,b,b)$ при некоторых $a, b \neq 0$. В частности, матрица вида ‡ является матрицей вида †.

Лемма 5.1. *Предположим, что поле K является 2-замкнутым.*

(1) *Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ — две произвольные нескалярные матрицы из $GL(2,K)$. Тогда любая нескалярная матрица из $GL(2,K)$ с определителем $abcd$ представляется в виде произведения матриц A' и B', где A' сопряжена A, а B' — B.*

(2) *Пусть $A \in GL(6,K)$ — блочно-диагональная матрица с тремя нескалярными блоками 2×2, причем определители этих блоков равны. Тогда она является произведением двух матриц вида ‡.*

(3) *Пусть матрица $B \in GL(6,K)$ имеет в поле K собственные числа $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$ и $z, \frac{1}{z}$, причем все они различны. Тогда B является произведением двух матриц вида ‡.*

Доказательство. Несложно видеть, что для доказательства первого пункта достаточно показать, что у произведения $A'B'$ может быть произвольный след. Пусть $A' = A$ и $B' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. То, что B' сопряжено B, равносильно тому, что $x+t = c+d$ и $xt-yz = cd$. Далее, след матрицы $A'B'$ равен $ax+bt$. Поскольку $a \neq b$, то система $\begin{cases} x+t = c+d \\ ax+bt = k \\ xt-yz = cd \end{cases}$ разрешима при любом k. Отсюда следует требуемое утверждение. Второй пункт сразу следует из первого, а третий — из второго.

Лемма 5.2. *Предположим, что поле K является 2-замкнутым, и пусть матрица $A \in SL(6,K)$ является блочно-верхнетреугольной с тремя блоками 2×2 на диагонали. Далее, предположим, что:*

(1) *все блоки на диагонали не являются скалярными, или*

(2) *из трех блоков на диагонали ровно один является скалярным.*

Тогда A является произведением трех матриц вида ‡.

Доказательство. 1. Пусть определитель первого блока равен a, второго — b, а третьего — c, где $abc = 1$. Далее, несложно видеть, что любое 2-замкнутое поле бесконечно. Для доказательства первого пункта рассмотрим произвольную нескалярную матрицу $P = D(p, \frac{1}{p}, p, \frac{1}{p}, p, \frac{1}{p})$, то есть $p \neq \pm 1$. Тогда, по первому пункту леммы 5.1, P можно так сопрячь блочно-диагональной матрицей $Q \in GL(6,K)$ с блоками 2×2, что матрица $AQPQ^{-1}$ будет иметь, в соответствующих диагональных блоках, собственные числа $\{x, \frac{a}{x}\}, \{y, \frac{b}{y}\}$ и $\{z, \frac{c}{z}\}$ для произвольных $x, y, z \in K^*$, таких, что $x \neq \frac{a}{x}, y \neq \frac{b}{y}$ и $z \neq \frac{c}{z}$. Мы хотим так подобрать x, y и z, чтобы матрица $AQPQ^{-1}$ удовлетворяла условию пункта (3) леммы 5.1.

2. Предположим, что a, b и c не равны 1. Тогда положим $y = \frac{x}{a}$ и $z = \frac{y}{b} = cx$. При этом матрица $AQPQ^{-1}$ имеет собственные числа $x, \frac{1}{y}, y, \frac{1}{z}, z, \frac{1}{x}$. Для того, чтобы матрица $AQPQ^{-1}$ удовлетворяла условию пункта (3) леммы 5.1, нужно так подобрать $x \in K^*$, чтобы все ее собственные числа были различны; это нам дает систему из 15 неравенств на x. Несложно видеть, что все неравенства являются многочленами или сводятся к ним умножением на x. Поскольку поле K бесконечно, а неравенств — конечное число, то для доказательства существования x достаточно показать, что в полученной системе нет неравенств степени $-\infty$, то есть сводящихся к виду $0 \neq 0$. Заметим, что неравенств степени не выше нулевой у нас ровно 6. При этом неравенства о том, что x, $y = \frac{x}{a}$ и $z = cx$ неравны друг другу, следуют из того, что $a, b, c \neq 1$ (так же, разумеется, нужно помнить, что $x \neq 0$); аналогичные неравенства про $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$ следуют из того же. Таким образом, все неравенства имеют степень не меньше нуля, поэтому искомый $x \in K^*$ существует. Взяв этот x, мы получаем, что матрица $AQPQ^{-1}$ удовлетворяет условию пункта (3) леммы 5.1 и, следовательно, является произведением двух матриц вида ‡. Таким образом, A является произведением трех матриц вида ‡.

3. Осталось рассмотреть два случая: когда $a = 1$, а b и c не равны 1, и когда $a = b = c = 1$. Полагая в первом из этих случаев $z = \frac{y}{b}$, получаем в обоих случаях, что матрица $AQPQ^{-1}$ имеет собственные числа $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}, z$ и $\frac{1}{z}$. Для того, чтобы эта матрица удовлетворяла условию пункта (3) леммы 5.1, требуется выполнение тех же 15 неравенств, однако в рассматриваемых случаях — от двух, в первом случае, или трех, во втором, переменных. Несложно убедиться, что, как и ранее, полученная система не содержит неравенств степени $-\infty$, то есть имеет решение. Из этого, так же как и в предыдущем пункте, получаем, что A является произведением трех матриц вида ‡, что доказывает первый пункт леммы.

4. Докажем второй пункт. Положим, для определенности, что скалярным блоком $D(d, d)$ является первый, и $d^2 = a$. Несложно видеть, что для получения такой же, как и в первом пункте, матрицы $AQPQ^{-1}$ достаточно взять матрицу P не произвольную, а с $p = \frac{x}{d}$ (поскольку x, y и z от p не зависят, то p можно выбирать после выбора x, y и z). В этом случае, поскольку $p \neq \pm 1$, мы получаем два дополнительных неравенства на x, а именно $x \neq \pm d$. Поскольку это неравенства первой степени, то далее доказательство первого пункта проходит без изменений.

Теорема 5. *Предположим, что поле K является 6-замкнутым. Тогда произвольная матрица $A \in GL(6, K)$ есть произведение не более чем четырех матриц вида †.*

Доказательство. Поскольку поле K 6-замкнуто, то все собственные числа матрицы A лежат в K. Поэтому жорданова форма матрицы A лежит в $GL(6, K)$, и A ей сопряжена. Далее, поскольку матрицы вида † определены с точностью до сопряжения, то можно считать, что A совпадает со своей жордановой формой. Перечислим все жордановы формы для матриц из $GL(6, K)$. Для удобства, они разбиты нами на группы по наборам собственных чисел.

I $D(a, b, c, d, e, f)$;

II a) $D(a, b, c, d, e, e)$, b) $D(a, b, c, d, (e, e))$;

III a) $D(a, b, c, d, d, d)$, b) $D(a, b, c, d, (d, d))$, c) $D(a, b, c, (d, d, d))$;

IV a) $D(a, b, c, c, d, d)$, b) $D(a, b, c, c, (d, d))$, c) $D(a, b, (c, c), (d, d))$;

V a) $D(a,b,c,c,c,c)$, b) $D(a,b,c,c,(c,c))$, c) $D(a,b,c,(c,c,c))$, d) $D(a,b,(c,c),(c,c))$, e) $D(a,b,(c,c,c,c))$;

VI a) $D(a,b,b,c,c,c)$, b) $D(a,b,b,c,(c,c))$, c) $D(a,b,b,(c,c,c))$, d) $D(a,(b,b),c,c,c)$, e) $D(a,(b,b),c,(c,c))$, f) $D(a,(b,b),(c,c,c))$;

VII a) $D(a,a,b,b,c,c)$, b) $D(a,a,b,b,(c,c))$, c) $D(a,a,(b,b),(c,c))$, d) $D((a,a),(b,b),(c,c))$;

VIII a) $D(a,b,b,b,b,b)$, b) $D(a,b,b,b,(b,b))$, c) $D(a,b,b,(b,b,b))$, d) $D(a,b,(b,b),(b,b))$, e) $D(a,b,(b,b,b,b))$, f) $D(a,(b,b),(b,b,b))$, g) $D(a,(b,b,b,b,b))$;

IX a) $D(a,a,b,b,b,b)$, b) $D(a,a,b,b,(b,b))$, c) $D(a,a,b,(b,b,b))$, d) $D(a,a,(b,b),(b,b))$, e) $D(a,a,(b,b,b,b))$, f) $D((a,a),b,b,b,b)$, g) $D((a,a),b,b,(b,b))$, h) $D((a,a),b,(b,b,b))$, i) $D((a,a),(b,b),(b,b))$, j) $D((a,a),(b,b,b,b))$;

X a) $D(a,a,a,b,b,b)$, b) $D(a,a,a,b,(b,b))$, c) $D(a,a,a,(b,b,b))$, d) $D(a,(a,a),b,(b,b))$, e) $D(a,(a,a),(b,b,b))$, f) $D((a,a,a),(b,b,b))$;

XI a) $D(a,a,a,a,a,a)$, b) $D(a,a,a,a,(a,a))$, c) $D(a,a,a,(a,a,a))$, d) $D(a,a,(a,a),(a,a))$, e) $D(a,a,(a,a,a,a))$, f) $D(a,(a,a),(a,a,a))$, g) $D(a,(a,a,a,a,a))$, h) $D((a,a),(a,a),(a,a))$, i) $D((a,a),(a,a,a,a))$, j) $D((a,a,a),(a,a,a))$, k) $D((a,a,a,a,a,a))$.

Поскольку матрицы вида † можно умножать на скаляр, то можно считать, что $\det A = 1$; в случае XI, более того, будем полагать, что $a = 1$.

Отметим, что под условие пункта (1) леммы 5.2 подпадают случаи I, II, III, IV, V без подслучая a), VI, VII, VIII без подслучаев a), b) и c), IX без подслучаев a) и f), X и подслучаи h), i) и k) в XI. Поэтому в этих случаях теорема уже доказана. Далее, из оставшихся случаев под условие пункта (2) леммы 5.2 подпадают случаи V a), VIII b) и c), IX a) и f), и XI d)-g) и j). Таким образом, у нас осталось рассмотреть варианты VIII a) и XI a)-c). Далее, несложно видеть, что для случая XI c) хватает двух, для XI b) — одной, а для XI a), в некотором смысле, нуля матриц с жордановой формой $D(1,1,1,1,(1,1))$. Для оставшегося случая VIII a), очевидно, хватит четырех матриц вида †.

Следствие. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле и $A \in GL(6,K)$. Тогда существует $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6,K)$, такой, что $\overline{g} = A$ и g является произведением пяти корневых элементов.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, A является произведением четырех матриц вида †; назовем их A_1, A_2, A_3 и A_4. Возьмем корневой элемент $g_0 = x_\delta(1)$. По пункту (2) теоремы 4, существует такой корневой элемент g_1, что $\overline{g_0 g_1} = \overline{g_0} A_1 = A_1$. Применяя пункт (2) теоремы 4 еще три раза, получаем $\overline{g_0 g_1 g_2 g_3 g_4} = A_1 A_2 A_3 A_4 = A$, что и требовалось.

§6. Теорема о невырожденности

Цель этого параграфа — доказать теорему:

Теорема 6. *Для произвольного нецентрального элемента $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ существует элемент $h \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такой, что подматрица $\{hgh^{-1}\}_{ij}$, где $i \in I_1$ и $j \in I_3$, обратима.*

Напомним, что подматрицу $\{g_{ij}\}_{i\in I_1, j\in I_3}$ матрицы $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ мы обозначаем через $\overline{g}$.

Докажем несколько вспомогательных (хотя представляющих и самостоятельный интерес) утверждений.

Лемма 6.1. *Пусть u и v — два сингулярных вектора.*

(1) *Если $v = au$, то существует матрица $h \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такая, что $hu = e^1$, а $hv = ae^1$.*
(2) *Если $\langle u, v\rangle$ —двумерное сингулярное подпространство, то существует матрица $h \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такая, что $hu = e^1$, а $hv = e^{22}$.*
(3) *Если подпространство $\langle u, v\rangle$ несингулярно, то существует матрица $h \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такая, что $hu = e^1$, а $hv = e^{23}$.*

Доказательство. Первый и второй пункты сразу следуют из [т. 2]. Докажем третий пункт. По той же теореме, можно считать, что $u = e^1$. Поскольку подпространство $\langle u, v\rangle$ несингулярно, то, по [утв. 7], существует вес k, далекий от первого веса, такой, что $v_k \neq 0$.

Далее, пусть l — произвольный вес, близкий к k и такой, что $v_l \neq 0$. Умножим v на корневой элемент $h_1 = x_{l-k}\left(-c_{lk}\frac{v_l}{v_k}\right)$. Несложно видеть, что после этого координата v_l становится равной 0. При этом, по [сл. из утв. 2], координаты вектора v при других весах, близких к k, не меняются. Также не меняется координата и при самом k. Наконец, заметим, что для того, чтобы $h_1e^1 \neq e^1$, необходимо, чтобы в разложении $l - k$ на простые корни коэффициент при α_1 был равен -1. Однако, как несложно видеть, этот коэффициент может быть равен только 0 или 1, поэтому вектор $u = e^1$ при умножении на h_1 остается неподвижным. Применяя аналогичную процедуру ко всевозможным l, можно сделать координаты вектора v при всех весах, близких к k, при этом по-прежнему $v_k \neq 0$ и $u = e^1$. Применяя [утв. 13], получаем, что $v = v_ke^k$.

Осталось доказать, что из пары $(u, v) = (e^1, ae^k)$, если $d(1, k) = 2$, можно получить пару (e^1, e^{23}). Для этого, очевидно, достаточно показать, что из пары $(u, v) = (e^1, ae^k)$ можно получить пару (e^1, e^l) для произвольного веса l, близкого к k и далекого от 1. Для этого, в свою очередь, достаточно из пары $(u, v) = (e^1, ae^k)$ научиться получать пару $(e^1, ae^k + be^l)$, где l тот же самый вес, а $b \in K$ — произвольное. Осталось заметить, что этого легко добиться, умножая u и v на $x_{l-k}(c_{lk}\frac{b}{a})$.

Лемма 6.2. *Пусть $A \in GL(6, K)$.*

(1) *Если $\mathrm{rk}\, A = 1$, то существует матрица $B \in SL(6, K)$, такая, что $\{BAB^{-1}\}_{ij} = 0$ при $1 \leq i \leq 6$ и $1 < j \leq 6$;*
(2) *Если $\mathrm{rk}\, A = 3$, то существует матрица $B \in SL(6, K)$, такая, что $\{BAB^{-1}\}_{ij} = 0$ при $1 \leq i \leq 6$ и $4 \leq j \leq 6$, а подматрица $\{BAB^{-1}\}_{ij}$ при $4 \leq i \leq 6$ и $1 \leq j \leq 3$ обратима.*

Доказательство. Очевидно.

Утверждение 4.

(1) *Пусть* v *— сингулярный вектор, причем* $v_{22} \neq 0$*, а* $v_i = 0$ *при* $22 < i \leq 27$*. Тогда* v *близок к* e^1*.*

(2) *Пусть* u, v *— два сингулярных вектора, причем* $u \in V_1$*, а* $v \notin V_1 \oplus V_2$*. Предположим, что* $u_i v_{j-\delta} = u_j v_{i-\delta}$ *для всех* $i, j \in I_1$*. Тогда вектора* u *и* v *близки.*

Доказательство. Докажем первый пункт. Покажем, что для произвольного $k \in I_2$, далекого от 22-го веса, $v_k = 0$. Предположим противное — пусть существует такое $k \in I_2$, далекое от 22-го веса, что $v_k \neq 0$. Пусть $j \in I_1$ — вес, далекий от k и 22-го веса. По определению, $Q(e^j, v) = \sum \pm v_l v_m$, где $d(j,l) = d(j,m) = d(l,m) = 2$ и пара $\{l, m\}$ неупорядочена. Заметим, что по [утв. 5] в каждой паре $\{l, m\}$ один из весов принадлежит I_3. Отсюда, по условию, все слагаемые, кроме $\pm v_k v_{22}$, оказываются нулевыми. При этом, из сингулярности v следует, что $Q(e^j, v) = 0$, откуда $v_k = 0$ — противоречие. Далее, по [сл. из утв. 2] и [утв. 6], веса, далекие от первого веса — это все $22 < j \leq 27$, а также $k \in I_2$, далекие от 22-го веса. Таким образом, коэффициенты вектора v при них всех равны 0. Из этого, а также из вида F, следует, что $F(v, e^1, x) = 0$, поэтому вектора v и e_1 близки.

Докажем второй пункт. Пусть A_1 — матрица из $SL(V_1, K)$, переводящая вектор u в e^1. Тогда, как мы уже упоминали, существует матрица $A \in D$, такая, что $A|_{V_1} = A_1$. Пусть $v' = Av$. Поскольку $A_{V_1} = A_{V_3}$ и учитывая, что $u_i v_{j-\delta} = u_j v_{i-\delta}$ для всех $i, j \in I_1$, получаем, что $v'_i = 0$ при $22 < i \leq 27$. Поскольку $v \notin V_1 \oplus V_2$, то $v' \notin V_1 \oplus V_2$, откуда $v'_{22} \neq 0$. Используя первый пункт, получаем требуемое.

Лемма 6.3. *Пусть* $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$*, причем* $g_{ij} = 0$ *при* $1 \leq i \leq 6$ *и* $22 < j \leq 27$*, но существует* i*, такое, что* $g_{i,22} \neq 0$*. Тогда существует* $h \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$*, такое, что* $(hgh^{-1})_{i*} = e_{22}$*.*

Доказательство. Пусть $i = 1$. Применяя первый пункт "транспонированного" утверждения 4 при $v = g_{i*}$, получаем, что ковектора g_{i*} и e_1 близки. В этом случае, можно применить второй пункт "транспонированной" леммы 6.1. По нему, существует матрица $f \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такая, что $e_1 f = e_1$, а $g_{1*} f = e_{22}$. Отсюда следует, что $e_1 f^{-1} g f = e_{22}$. Таким образом, в качестве искомого h можно взять f^{-1}.

Пусть $i \neq 1$. Применяя "транспонированную" [л. 2.2] при $v = g_{i*}$ и $u = e_i$, получаем, что ковектора g_{i*} и e_i далеки. В этом случае, можно применить третий пункт "транспонированной" леммы 6.1. Из него следует, что существует матрица $f \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такая, что $e_i f = e_i$, а $g_{i*} f = e_{22}$. Отсюда, $e_i f^{-1} g f = e_{22}$. Таким образом, в качестве искомого h можно взять f^{-1}.

Лемма 6.4. *Пусть* $\mathrm{rk}\,\overline{g} = 1$*, причем* $\{\overline{g}\}_{ij} = 0$ *для любых* $1 \leq i \leq 6$*,* $22 < j \leq 27$ *и существует такое* $1 \leq i \leq 6$*, что* $\overline{g}_{i,22} \neq 0$*. Тогда существуют веса* $6 < k < 22$ *и* $22 < j \leq 27$*, такие, что* $d(i,k) = 1$*,* $j \neq i - \delta$ *и* $g_{kj} \neq 0$*.*

Доказательство. Предположим, что таких k и j не существует. Рассмотрим произвольный вес $22 < j \leq 27$, не равный $i - \delta$. Тогда, по предположению, $g_{kj} = 0$ для всех $k \in I_2$, таких, что $d(i,k) = 1$. Пусть $l \in I_2$ и $d(i,l) = 2$. Далее, пусть $m \in I_3$ — такой вес, что $d(i,m) = d(l,m) = 2$. Рассмотрим пару сингулярных векторов ge^{22} и ge^j. Они должны образовывать двумерное сингулярное подпространство в V, поэтому $F(ge^{22}, ge^j, e^m) = 0$. Левая часть, по определению формы F, равна $\sum \pm (ge^{22})_s (ge^j)_t$, где сумма берется по всем упорядоченным парам весов s и t, далеким друг от друга и от m. Заметим, что вес t, далекий от m, либо далек и от i, то есть, по [утв. 6], равен l, либо близок к i, либо равен i. Однако, по предположению, $g_{tj} = 0$ для всех $t \neq i - \delta$, таких, что $d(i,t) \leq 1$. Поскольку веса $i - \delta$ и m близки, то все слагаемые в сумме, кроме $\pm g_{i,22}g_{lj}$, равны 0. Отсюда следует, что $g_{lj} = 0$ для всех $l < 22$.

Таким образом, $ge^j \in V_3 = \langle e^{22}, e^{23}, e^{24}, e^{25}, e^{26}, e^{27}\rangle$ для всех j, таких, что $22 < j \leq 27$, $j \neq i - \delta$. Кроме этого, разумеется, $ge^j \in gV_3$. По [утв. 12], два шестимерных сингулярных подпространства, чье пересечение содержит четырехмерное подпространство, совпадают. Поэтому $V_3 = gV_3$, откуда $ge^{22} \in V_3$. В частности, $g_{i,22} = 0$, что противоречит предположению.

Лемма 6.5. *Пусть* $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, $i_1, i_2, i_3 \in I_1$ *и* $g_{ij} = 0$ *при* $1 \leq i \leq 6$ *и* $25 \leq j \leq 27$. *Предположим также, что* $\det\{g_{ij}\} \neq 0$, *где* $i = i_1, i_2, i_3$, *а* $22 \leq j \leq 24$. *Тогда существует* $h \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, *такое, что* $(hgh^{-1})_{ij} = 0$ *при* $i = i_1, i_2, i_3$ *и* $j \neq 22, 23, 24$.

Доказательство. Рассмотрим трехмерное подпространство $W = \langle g_{i*}; i = i_1, i_2, i_3\rangle < V^*$. По условию, существует базис этого подпространства l^1, l^2, l^3, такой, что $l^t_s = \delta_{t,s+\delta}$ при $s \in I_3$. W сингулярно, поэтому, по "транспонированной" [л. 4.2], существует корневой элемент f, такой, что $f_{i*} = l^i$ при $1 \leq i \leq 3$. При этом $(\delta)_f = 1$. Далее, положим $f' = x_{-\delta}(-1) f x_{-\delta}(1)$. Тогда $V^{f'} = \langle f_{i*}; i \in I_1\rangle$ и $f'_{ij} = f_{ij} + \delta_{i,j}$ при $i \in I_1$. Отсюда, по пункту (4) утверждения 2, следует существование унипотента $h \in U^-$, такого, что $V^{f'} = \langle h_{j*}; j \in I_3\rangle$. Как уже говорилось, это означает, что $f_{ij} = f'_{ij} - \delta_{i,j} = h_{i-\delta,j}$ для $i \in I_1$, откуда $W = \langle h_{i-\delta,*}; 1 \leq i \leq 3\rangle$. Иначе говоря, h переводит подпространство $\langle e_{22}, e_{23}, e_{24}\rangle < V^*$ в W, а подпространство $\langle e_i; i = i_1, i_2, i_3\rangle < V^*$ оставляет на месте, поскольку $h \in U^-$. Таким образом, при $i = i_1, i_2$ или i_3 получаем $e_i hgh^{-1} = e_i gh^{-1} = g_{i*}h^{-1} \in \langle e_{22}, e_{23}, e_{24}\rangle$, что и требовалось.

Доказательство теоремы 6. 1. По [т. 3], пару корневых подгрупп можно перевести сопряжением в любую другую пару с тем же углом между ними. Заметим, что сопряжение корневого элемента X некоторым $f \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ соответствует умножению подпространства V^X на f, то есть $fV^X = V^{fXf^{-1}}$. Используя [сл. из т. 2], получаем, что пару шестимерных сингулярных подпространств можно умножением (= изменением базиса) перевести в любую другую с тем же углом между ними (= углом между соответствующими корневыми подгруппами). Можно сказать, что взаимное расположение двух шестимерных сингулярных подпространств определяется углом между ними.

Рассмотрим шестимерные сингулярные подпространства V_3 и gV_3. Согласно вышесказанному, существует элемент $f \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, такой, что $fV_3 = V_3$, а fgV_3 равно $V^{X_{-\delta}} = V_3$, $V^{X_{-\alpha_2}}$, $V^{X_{\alpha_1}}$, $V^{X_{\alpha_2}}$ или $V^{X_\delta} = V_1$. Поскольку $f(gV_3) = (fgf^{-1})(fV_3)$, то сопрягая, при необходимости, матрицу g, можно считать, что gV_3 — одно из пяти перечисленных в предыдущем предложении подпространств. Более того, раз $fV_3 = V_3$, то $f \in P^-$. Поэтому $\mathrm{rk}\,\overline{g} = \mathrm{rk}\,\overline{fgf^{-1}}$. Осталось заметить, что этот ранг определяется углом между подпространствами V_3 и gV_3: если $gV_3 = V_3$ или $V^{X_{-\alpha_2}}$, то есть $\angle(V_3, gV_3) = 0$ или $\pi/3$, то матрица $\overline{g}$ нулевая; если $gV_3 = V^{X_{\alpha_1}}$, то есть $\angle(V_3, gV_3) = \pi/2$, то $\mathrm{rk}\,\overline{g} = 1$; если $gV_3 = V^{X_{\alpha_2}}$, то есть $\angle(V_3, gV_3) = 2\pi/3$, то $\mathrm{rk}\,\overline{g} = 3$; наконец, если $gV_3 = V_1$, то есть $\angle(V_3, gV_3) = \pi$, то $\mathrm{rk}\,\overline{g} = 6$. Пусть W — произвольное шестимерное сингулярное подпространство, такое, что $\angle(W, gW) = \pi$, и $fW = V_3$, где $f \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$. Тогда угол между W и gW равен углу между $V_3 = fW$ и $f(gW) = fgf^{-1}V_3$. Таким образом, утверждение теоремы равносильно существованию шестимерного сингулярного подпространства W, образующего угол π с gW.

Поскольку матрица g нецентральная, то существует сингулярный вектор, чей образ не кратен ему. Тогда по лемме 6.1 можно перевести сам вектор в e^{22} или e^{23}, а его образ в e^1 и, таким образом, получить угол между V_3 и gV_3 не менее $\pi/2$. Нам нужно сделать этот угол, сопрягая матрицу g, равным π; для этого мы разберем случаи угла, равного $\pi/2$ и $2\pi/3$, и покажем, что их можно увеличить. Напомним, что как уже упоминалось в §4, сопряжение g матрицей $A \in D$ соответствует сопряжению $\overline{g}$ матрицей $A_1 = A|_{V_1}$. Поскольку A_1 может быть произвольной матрицей из $SL(6, K)$, то в обоих случаях, то есть при угле, равном $\pi/2$ и $2\pi/3$, можно применить лемму 6.2.

2. Пусть угол между V_3 и gV_3 равен $\pi/2$. Приведем матрицу $\overline{g}$ к виду из леммы 6.2. Очевидно, что существует такое $i \in I_1$, что $g_{i,22} \neq 0$, поскольку $\operatorname{rk} \overline{g} = 1$. По лемме 6.3 можно считать, что $g_{it} = 0$ при $t \neq 22$. Если после этого g_{kj} стало не равно 0 при некоторых $1 \leq k \leq 6, 22 < j \leq 27$, то $\operatorname{rk} \overline{g} > 1$, что и требовалось (как мы уже говорили, если $\operatorname{rk} \overline{g} > 1$, то угол между V_3 и gV_3 больше $\pi/2$). Иначе, выбираем веса k и j согласно лемме 6.4. Пусть $i_1 = i, i_2, i_3$ — три веса из первых шести, близких к весу k и не совпадающих с $j + \delta$ (если $d(k, j) = 1$, то таких весов ровно три; иначе их четыре и мы выбираем какие-то три из них), а i_4, i_5, i_6 — оставшиеся три веса, причем $d(k, i_4) = 1$.

Положим $\alpha = i_4 - k \in \Phi$. По [утв. 4], $\angle(\alpha, \delta) = \pi/3$. Посмотрим, как изменится матрица g при сопряжении ее корневым элементом $x_\alpha(a)$. Заметим, что при умножении g на $x_\alpha(a)$ слева, то есть замене g на $x_\alpha(a)g$, к строкам с номерами ρ_l, такими, что $\rho_l - \alpha \in \Lambda$, прибавляются, с коэффициентом $\pm a$, строки с номерами $\rho_l - \alpha$. В частности, к строке с номером i_4 прибавляется, с коэффициентом $\pm a$, строка с номером k. Согласно [сл. из утв. 2], веса ρ_l, не равные i_4, далеки от k. Поскольку, по [утв. 4], существует ровно три веса ρ_l, принадлежащих I_1, то это веса i_4, i_5 и i_6. Далее, при умножении g на $x_\alpha(-a)$ справа, то есть замене g на $gx_\alpha(-a)$, к столбцам с номерами σ_l, такими, что $\sigma_l + \alpha \in \Lambda$, прибавляются, с коэффициентом $\pm a$, столбцы с номерами $\sigma_l + \alpha$. В частности, к столбцу с номером k прибавляется, с коэффициентом $\pm a$, столбец с номером i_4. Все веса σ_l, не равные k, должны быть, по [сл. из утв. 2], близки к k и далеки от i_4. Поскольку, согласно [утв. 4], существует ровно три веса σ_l, принадлежащих I_3, то, по [утв. 6], это веса $i_1 - \delta, i_2 - \delta$ и $i_3 - \delta$.

Рассмотрим, как влияет на $\overline{g}$ сопряжение матрицы g при помощи $x_\alpha(a)$. Вначале что-то прибавляется к строкам с номерами i_4, i_5 и i_6, причем к первой из них прибавляется, с коэффициентом $\pm a$, строка с номером k. После этого прибавления $g_{i_4,j}$ становится равным $\pm a g_{kj} \neq 0$ (по выбору k и j); по-прежнему $g_{it} = 0$ при $t \neq 22$. Далее что-то прибавляется к столбцам с номерами $i_1 - \delta, i_2 - \delta$ и $i_3 - \delta$. Таким образом, $g_{i_4,j} \neq 0$ (поскольку $j \neq i_1 - \delta, i_2 - \delta, i_3 - \delta$) и по-прежнему $g_{it} = 0$ при $t \neq 22$. Осталось заметить, что ранг полученной матрицы больше 1.

3. Пусть угол между V_3 и gV_3 равен $2\pi/3$. Приведем матрицу $\overline{g}$ к виду из леммы 6.2. Предположим, что матрица $\{g_{ij}\}$ при $1 \leq i \leq 3$ и $22 \leq j \leq 24$ обратима. Тогда, по лемме 6.5, можно так сопрячь g, чтобы g_{ij} стало равно 0 при $1 \leq i \leq 3$ и $j \neq 22, 23, 24$. Если существуют такие $i \in I_1$ и $25 \leq j \leq 27$, что g_{ij} стало не равно 0, то $\operatorname{rk} \overline{g} > 3$, что и требовалось. Иначе, поскольку матрица g обратима, то существуют ковектора x_1, x_2 и x_3, такие, что $x_i g = e_{i+24}$ при $1 \leq i \leq 3$. Они сингулярны, поскольку их образы сингулярны, и порождают вместе с e_1, e_2 и e_3 шестимерное сингулярное подпространство в V^*.

Применяя несколько раз "транспонированное" [утв. 7], получаем, что ковектора x_1, x_2 и x_3 могут иметь ненулевые коэффициенты только при весах с номерами 1 – 8 и 12. Из этого, по определению x_i, получаем, что, поскольку $g_{ij} = 0$ при $1 \leq i \leq 6$ и $25 \leq j \leq 27$, то матрица 3×3, лежащая на пересечении строк с номерами 7, 8 и 12 и последних трех столбцов, обратима.

Сопряжем g элементарным корневым элементом $x_{\alpha_2}(1)$. При умножении g на $x_{\alpha_2}(1)$ слева, то есть замене g на $x_\alpha(1)g$, строки с номерами 7, 8 и 12 прибавляются к четвертой, пятой и шестой строкам соответственно (нас интересуют только изменения в матрице $\overline{g}$). Поэтому после такого умножения по-прежнему $\det\{g_{ij}\} \neq 0$ при $1 \leq i \leq 3$ и $22 \leq j \leq 24$ и $g_{ij} = 0$ при $1 \leq i \leq 3$ и $25 \leq j \leq 27$, но при этом $\det\{g_{ij}\} \neq 0$ при $4 \leq i \leq 6$ и $25 \leq j \leq 27$. Осталось заметить, что при умножении $x_{\alpha_2}(1)g$ на $x_{\alpha_2}(-1)$ справа двадцать пятый, двадцать шестой и двадцать седьмой столбцы остаются прежними, а из двадцать второго, двадцать третьего и двадцать четвертого вычитаются девятнадцатый, двадцатый и двадцать первый столбцы соответственно. Понятно, что после этого по-прежнему $\det\{g_{ij}\} \neq 0$ при $1 \leq i \leq 3$ и $22 \leq j \leq 24$, $g_{ij} = 0$ при $1 \leq i \leq 3$ и $25 \leq j \leq 27$, и $\det\{g_{ij}\} \neq 0$ при $4 \leq i \leq 6$ и $25 \leq j \leq 27$. Очевидно, что ранг полученной матрицы равен 6, что и требовалось.

4. Осталось рассмотреть случай, когда угол между V_3 и gV_3 равен $2\pi/3$ и матрица $\{g_{ij}\}$ при $1 \leq i \leq 3$ и $22 \leq j \leq 24$ необратима. Напомним, что матрица $\{g_{ij}\}$ при $4 \leq i \leq 6$ и $22 \leq j \leq 24$ обратима по лемме 6.2. По лемме 6.5, можно считать, что $g_{ij} = 0$ при $4 \leq i \leq 6$ и $j \neq 22, 23, 24$. Рассмотрим подгруппу $D' = \langle X_\alpha; \alpha \perp \delta, \alpha_2\rangle$. Понятно, что $D' < D$ и $D' \cong SL(3,K) \times SL(3,K)$, поскольку $SL(3,K) = G_{\mathrm{sc}}(A_2,K)$ совпадает, как мы упоминали в введении, с $E_{sc}(A_2,K)$, то есть порождается трансвекциями. Пусть $A \in D'$ и $A_1 = A|_{V_1}$. Тогда $A_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 & 0 \\ 0 & A_1^2 \end{pmatrix}$, где A_1^1 и A_1^2 — матрицы из $SL(3,K)$. Пусть $\overline{g} = \begin{pmatrix} X^1 & X^3 \\ X^2 & X^4 \end{pmatrix}$, где X^i — матрицы размера 3×3. Тогда при сопряжении g матрицей A подматрица X^1 сопрягается подматрицей A_1^1, а X^4 — A_1^2. При этом подматрица X^2 умножается слева на A^2, а справа на $(A_1^1)^{-1}$; наконец, подматрица X^3 умножается слева на A_1^1, а справа на $(A_1^2)^{-1}$. В интересующем нас случае $X^3 = X^4 = 0$, $\det X^2 \neq 0$, а $\det X^1 = 0$. Тогда, как хорошо известно, существует $A_1^1 \in SL(3,K)$, такая, что первая строка матрицы X^1 становится нулевой. Рассмотрим первые шесть базисных ковекторов. Они порождают шестимерное сингулярное подпространство в V^*, поэтому их образы также порождают шестимерное сингулярное подпространство. Используя несколько раз [утв. 7], получаем, что если ковектор близок к e_{22}, e_{23} и e_{24}, то ненулевые координаты он может иметь только при седьмом, восьмом, двенадцатом и последних шести весах. В частности, $g_{1j} = 0$ при $j \neq 7, 8, 12$. Далее, пусть X^5 — это матрица $\{g_{ij}\}$, где $1 \leq i \leq 3, j = 7, 8, 12$. Тогда при сопряжении g той же матрицей A подматрица X^5 умножается слева на A_1^1, а справа на $(A_1^2)^{-1}$. Несложно видеть, что можно подобрать A_1^1 и A_1^2 так, чтобы:

(1) первая строка матрицы X^1 осталась нулевой;
(2) матрица X^2 стала диагональной;
(3) коэффициент $g_{1,7}$ стал неравен 0.

Рассмотрим шестимерное сингулярное подпространство $W = \langle e_1, e_5, e_6, e_{16}, e_{17}, e_{19}\rangle < V^*$ и его образ. Пусть $e_1 g = ae_7 + be_8 + ce_{12}$; по нашей конструкции, $e_5 g = ke_{23}$ и $e_6 g = le_{24}$. По вышесказанному, $e_{19}g$ может иметь ненулевые координаты при 7, 8, 12 и последних шести весах; при этом, по обратимости g, хотя бы одна из координат при последних трех весах — ненулевая. Заметим, что первый и девятнадцатый веса близки, поэтому $e_{19}g$ близко к $e_1 g = ae_7 + be_8 + ce_{12}$. Используя вид формы F, получаем, что

$$e_{19}g = m(ae_7 + be_8 + ce_{12}) + n(ae_{25} + be_{26} + ce_{27}) + g_{19,22}e_{22} + g_{19,23}e_{23} + g_{19,24}e_{24}.$$

При этом $n \neq 0$. Заметим, что, по [утв. 7], существует ровно один, с точностью до умножения на константу, ковектор в W, близкий к e_{23}; аналогичное утверждение верно про e_{24}. Более того, можно убедиться, что это утверждение верно для $ae_7 + be_8 + ce_{12}$ и для $e_{19}^T g$. В последнем случае, впрочем, проще это проверять для ковектора $n(ae_{25} + be_{26} + ce_{27}) + g_{19,22}e_{22}$, также лежащего в подпространстве Wg. Отсюда, по "транспонированному" [утв. 12], следует, что подпространства W и Wg противоположны, или, что тоже самое, угол между ними равен π. Из этого, согласно "транспонированным" рассуждениям из пункта 1, следует требуемое.

§10. Основная теорема

В этом параграфе мы докажем основную теорему настоящей работы:

Основная теорема. *Предположим, что поле K 6-замкнуто, то есть в K любой многочлен степени не выше шести имеет корень. Тогда любой элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(E_6, K)$ представляется в виде произведения не более восьми корневых элементов.*

Доказательство. 1. Как мы говорили в §1, $G_{\mathrm{ad}}(E_6, L) = G_{\mathrm{sc}}(E_6, L)/\mu_3$ для произвольного 3-замкнутого поля L. Таким образом, любому элементу группы $G_{\mathrm{ad}}(E_6, K)$ соответствуют три элемента группы $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$, получающиеся друг из друга умножением на $\sqrt[3]{1}$. Пусть $g \in G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ — произвольный элемент, соответствующий интересующему нас элементу из $G_{\mathrm{ad}}(E_6, K)$. Согласно теореме 6, можно считать, что $\det \overline{g} \neq 0$. Далее, по следствию из теоремы 5, существует элемент h, являющийся произведением пяти корневых элементов и такой, что $\overline{h} = \overline{g}$. По теореме 3, $g = v_1 A' w_1$ и $h = v_2 B' w_2$, где $v_1, w_1, v_2, w_2 \in U^-$, а $A', B' \in L'$. Далее, как несложно видеть, $\overline{A'} = \overline{g} = \overline{h} = \overline{B'}$.

2. Пусть $A = A'J^{-1}$ и $B = B'J^{-1}$, где $J = x_\delta(1)x_{-\delta}(-1)x_\delta(1)$. Тогда, по определению, A и B принадлежат L. При этом, по определению L, матрица A (соответственно, B) является блочно-диагональной с тремя блоками: $A_1 = A|_{V_1}$ (соответственно, $B_1 = B|_{V_1}$), $A_2 = A|_{V_2}$ ($B_2 = B|_{V_2}$) и $A_3 = A|_{V_3}$ ($B_3 = B|_{V_3}$). Поэтому A' и B' состоят из трех блоков, расположенных на побочной диагонали, при этом $A_1 = \overline{A'} = \overline{B'} = B_1$ (здесь мы, как и раньше, допускаем некоторую вольность речи, неявно используя стандартный изоморфизм $V_3 \to V_1$, см. §4). Используя теорему 1, получаем, что либо $A = B$, и, следовательно, $A' = B'$, либо существует такой $\xi = \sqrt[3]{1}$, что $B_2 = \xi A_2$ и $B_3 = \xi^2 A_3$. Предположим, что $A' \neq B'$. Сопряжем h диагональной матрицей f, такой, что $f_{\rho\rho} = \xi^2$ при $\rho \in I_1$, $f_{\rho\rho} = 1$ при $\rho \in I_2$ и $f_{\rho\rho} = \xi$ при $\rho \in I_3$. Заметим, что f принадлежит $G_{\mathrm{sc}}(E_6, K)$ по лемме 3.1 и [утв. 5]. Несложно видеть, что $v_3 = f v_2 f^{-1}$ и $w_3 = f w_2 f^{-1}$ по-прежнему принадлежат U^-, а $C' = f B' f^{-1}$ — L'. Пусть $C = C'J^{-1}$. Тогда, как несложно понять, $C_1 = C|_{V_1} = \xi B_1 = \xi A_1$, $C_2 = C|_{V_2} = B_2 = \xi A_2$ и $C_3 = C|_{V_3} = \xi^2 B_3 = \xi A_3$. Отсюда $C = \xi A$ и $C' = \xi A'$. Далее, поскольку нас интересует элемент из группы $G_{\mathrm{ad}}(E_6, K)$, то можно g заменить на $\xi g = v_1(\xi A')w_1 = v_1 C' w_1$. Таким образом, можно считать, что $A' = B'$.

3. Из первого и второго пунктов доказательства следует, что $g = v_1 A' w_1$ и $h = v_2 B' w_2 = v_2 A' w_2$, причем h, по-прежнему, является произведением пяти корневых элементов. Сопрягая g унипотентом w_1, а h — унипотентом w_2, можно считать, что $g = v_1 A'$, а $h = v_2 A'$. Тогда $gh^{-1} = v_1 v_2^{-1} \in U^-$, то есть, по теореме 2, является произведением трех корневых элементов. Поэтому g является произведением восьми корневых элементов, что и требовалось.

Список литературы

[1] *Борель А.* Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам. — М., 1973. — С. 9–59.

[2] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы IV – VI. — М.: Мир, 1972. — 334 С.

[3] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Главы I – III. — М.: Мир, 1976. — 496 С.

[4] *Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р.* A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7 // *Алгебра и Анализ.* — 2004. — Т. 16, №4. — С. 54–87.

[5] *Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., Николенко С. И.* Строение групп Шевалле: доказательство из книги // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* — 2006. — Т. 330. — С. 36–76.

[6] *Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю.* Нормализатор группы Шевалле типа E_6 // *Алгебра и Анализ.* — 2007. — Т. 19, №5. — С. 35–62.

[7] *Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М.* Группа Шевалле типа E_6 в 27-мерном представлении // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* — 2006. — Т. 338. — С. 5–68.

[8] *Вавилов Н. А., Певзнер И. М.* Тройки длинных корневых подгрупп // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* — 2007. — Т. 343. — С. 54–83.

[9] *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988. — 344 С.

[10] *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // *Успехи мат. наук.* — 1986. — Т. 41, №1. — С. 57–96.

[11] Коуровская тетрадь: Нерешенные проблемы теории групп, 16 издание. — Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006.

[12] *Лузгарев А. Ю.* О надгруппах $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)$ и $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ в минимальных представлениях // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2004. — Т. 319. — С. 216–243.

[13] *Лузгарев А. Ю.* Надгруппы $E(\mathrm{F}_4, R)$ в $G(\mathrm{E}_6, R)$ // *Алгебра и Анализ.* — 2008. — Т. 20, №5. — См. также препринт ПОМИ 2008, №2, С. 1–37.

[14] *Мазуров В. Д.* О порождении спорадических простых групп тремя инволюциями, две из которых перестановочны // *Сибирский мат. журнал.* — 2003. — Т. 44, №1. — С. 193–198.

[15] *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // *Алгебра и логика.* — 1990. — Т. 29, №2. — С. 192–206.

[16] *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций знакопеременных групп // *Мат. заметки.* — 1990. — Т. 4. — С. 91–95.

[17] *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем нечетной характеристики, I // *Алгебра и логика.* — 1997. — Т. 36, №1. — С. 77–96.

[18] *Нужин Я. Н.* Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем нечетной характеристики, II // *Алгебра и логика.* — 1997. — Т. 36, №4. — С. 422–440.

[19] *О'Мира О.* Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. — М.: Мир, 1976. — С. 57–167.

[20] *Певзнер И. М.* Геометрия корневых элементов в группах типа E_6 // *Препринт ПОМИ.* — 2008. — №12. — С. 1–41.

[21] *Спрингер Т. А.* Линейные алгебраические группы // Итоги науки и техн., сер. совр. проблемы Мат., Фундамент. направл. — М., 1989. — Т. 55. — С. 5–136.

[22] *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975. — 262 С.

[23] *Хамфри Д.* Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980. — 399 С.

[24] *Aschbacher M.* The 27-dimensional module for E_6. I // *Invent. Math.* — 1987. — Vol. 89, no. 1. — Pp. 159–195.

[25] *Aschbacher M.* The 27-dimensional module for E_6. II // *J. London Math. Soc.* — 1988. — Vol. 37. — Pp. 275–293.
[26] *Aschbacher M.* The 27-dimensional module for E_6. III // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1990. — Vol. 321. — Pp. 45–84.
[27] *Aschbacher M.* The 27-dimensional module for E_6. IV // *J. Algebra.* — 1990. — Vol. 131. — Pp. 23–39.
[28] *Aschbacher M.* Some multilinear forms with large isometry groups // *Geom. Dedicata.* — 1988. — Vol. 25, no. 1–3. — Pp. 417–465.
[29] *Aschbacher M.* The geometry of trilinear forms // Finite Geometries, Buildings and Related topics. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1990. — Pp. 75–84.
[30] *Aschbacher M., Seitz G. M.* Involutions in Chevalley groups over fields of even order // *Nagoya Math. J.* — 1976. — Vol. 63. — Pp. 1–91.
[31] *Austin P.* Products of involutions in the groups of Lie type $F_4(K)$ // *Comm. Algebra.* — 1999. — Vol. 27, no. 2. — Pp. 557–575.
[32] *Ballantine C. S.* Products of Involutory Matrices I // *Linear and Multilinear Algebra.* — 1977–1978. — Vol. 5, no. 1. — Pp. 53–62.
[33] *Brown A., Pearcy C.* Multiplicative commutators of operators // *Canad. J. Math.* — 1966. — Vol. 18. — Pp. 737–749.
[34] *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. — London: Wiley, 1989. — 364 Pp.
[35] *Chevalley C., Schafer R. D.* The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6 // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* — 1950. — Vol. 36. — Pp. 137–141.
[36] *Cohen A. M., Cushman R. H.* Gröbner bases and standard monomial theory // Computational algebraic geometry. — Basel: Birkha"user, 1993. — Vol. 18. — Pp. 41–60.
[37] The Local Maximal Subgroups of Exceptional Groups of Lie Type, Finite and Algebraic /*Cohen A. M., Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M.* // *Proc. London Math. Soc.* — 1992. — Vol. s3-64, no. 1. — Pp. 21–48.
[38] *Dalla Volta F.* Gruppi sporadici generati da tre involuzioni // *RILS.* — 1985. — Vol. A119. — Pp. 65–87.
[39] *Dalla Volta F.* Generazione mediante tre involuzioni di gruppi ortogonali di indice di Witt minimale in caratteristica 2 // Dip. Matematica, Politecnio di Milano. — 1990.
[40] *Dalla Volta F.* Gruppi ortogonali di indice di Witt minimale generati da tre involuzioni // *Geom. Dedicata.* — 19. — Vol. 18, no.. — Pp..
[41] *Dalla Volta F., Tamburini M. C.* Generazione di $PSp(4,q)$ mediante tre involuzioni // *Boll. Un. Mat. Ital. A (7).* — 1989. — Vol. 3, no. 3. — Pp. 285–289.
[42] *Dalla Volta F., Tamburini M. C.* Generation of some orthogonal groups by a set of three involutions // *Arch. Math. (Basel).* — 1991. — Vol. 56, no. 5. — Pp. 424–432.
[43] *Dennis R. K., Vaserstein L. N.* On a question of M. Newman on the number of commutators // *J. Algebra.* — 1988. — Vol. 118, no. 1. — Pp. 150–161.
[44] *Dennis R. K., Vaserstein L. N.* Commutators in linear groups // *K-Theory.* — 1989. — Vol. 2, no. 6. — Pp. 761–767.
[45] *Deriziotis D. I., Fakiolas A. P.* The Maximal Tori in The Finite Chevalley Groups of Type E_6, E_7 And E_8 // *Communications in Algebra.* — 1991. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 889–903.
[46] *Dieudonné J.* Sur les générateurs des groupes classiques // *Summa Brasil. Math.* — 1955. — Vol. 3. — Pp. 149–179.
[47] *Đoković D. Ž., Malzan J. G.* Products of reflections in the general linear group over a division ring // *Linear Algebra Appl.* — 1979. — Vol. 28. — Pp. 53–62.
[48] *Đoković D. Ž., Malzan J. G.* Products of reflections in $U(p,q)$. — Providence, RI: Amer.

Math. Soc., 1982. — 82 Pp.
[49] *Dye R. H.* Scherk's theorem on orthogonalities revisited // *Geom. Dedicata.* — 1986. — Vol. 20, no. 3. — Pp. 349–356.
[50] *Ellers E. W.* Decomposition of Orthogonal, Symplectic, and Unitary Isometries into Simple Isometries // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* — 1977. — Vol. 46. — Pp. 97–127.
[51] *Ellers E. W.* Products of Involutions in Simple Chevalley Groups // *J. Geom.* — 2000. — Vol. 69, no. 1–2. — Pp. 68–72.
[52] *Ellers E. W., Frank R.* Products of quasireflections and transvections over local rings // *J. Geom.* — 1988. — Vol. 31, no. 1–2. — Pp. 69–78.
[53] *Ellers E. W., Ishibashi H.* Factorization of Transformations over a Local Ring // *Linear Algebra Appl.* — 1987. — Vol. 85. — Pp. 12–27.
[54] *Ellers E. W., Lausch H.* Length theorems for the general linear group of a module over a local ring // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* — 1989. — Vol. 46, no. 1. — Pp. 122–131.
[55] *Ellers E. W., Lausch H.* Generators for classical groups of modules over local rings // *J. Geom.* — 1990. — Vol. 39, no. 1–2. — Pp. 60–79.
[56] *Epstein D. B. A.* Commutators of C^∞-diffeomorphisms, appendix to "A curious remark concerning the geometric transfer map" by John N. Mather // *Comment. Math. Helv.* — 1984. — Vol. 59, no. 1. — Pp. 111–122.
[57] *Gillio B. M., Tamburini M. C.* Alcuni classi di gruppi generati da tre involuzioni // *RILS.* — 1982. — Vol. A116. — Pp. 191–209.
[58] *Goldstein R. Z., Turner E. G.* A note on commutators and squares in free products // *Contemp. Math.* — 1985. — Vol. 44. — Pp. 69–72.
[59] *Gordon B., Guralnick R. M., Miller M. D.* On cyclic commutator subgroups // *Aequationes Math.* — 1978. — Vol. 17, no. 2–3. — Pp. 241–248.
[60] *Götzky M.* Unverkürzbare Produkte und Relationen in unitären Gruppen // *Math. Z.* — 1968. — Vol. 104. — Pp. 1–15.
[61] *Götzky M.* Über die Erzeugenden der engeren unitären Gruppen // *Arch. Math. (Basel).* — 1968. — Vol. 19. — Pp. 383–389.
[62] *Guralnick R. M.* On groups with decomposable commutator subgroups // *Glasgow Math. J.* — 1978. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 159–162.
[63] *Guralnick R. M.* On cyclic commutator subgroups // *Aequationes Math.* — 1980. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 33–38.
[64] *Guralnick R. M.* Commutators and commutator subgroups // *Adv. in Math.* — 1982. — Vol. 45, no. 3. — Pp. 319–330.
[65] *Gustafson H., Halmos P. R., Radjavi H.* Products of involutions // *Linear Algebra and Appl.* — 1976. — Vol. 13, no. 1–2. — Pp. 157–162.
[66] *de la Harpe P., Skandalis G.* Déterminant associé à une trace sur une algébre de Banach // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* — 1984. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 241–260.
[67] *de la Harpe P., Skandalis G.* Produit finis de commutateurs dans les C^*-algèbres // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* — 1984. — Vol. 34, no. 4. — Pp. 169–202.
[68] *de la Harpe P., Skandalis G.* Sur la simplicité essentiele du groupe unitaire dans une C^*-algèbre simple // *J. Funct. Anal.* — 1985. — Vol. 62, no. 3. — Pp. 354–378.
[69] *Isaacs I. M.* Commutators and the commutator subgroup // *Amer. Math. Monthly.* — 1977. — Vol. 84, no. 9. — Pp. 720–722.
[70] *Ishibashi H.* Generators of Orthogonal Groups over a Local Valuation Domain // *J. Algebra.* — 1978. — Vol. 55, no. 2. — Pp. 302–307.
[71] *Ishibashi H.* Generators of $Sp_n(V)$ over a quasisemilocal semihereditary ring // *J. Pure*

Appl. Algebra. — 1981. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 121–129.

[72] *Ishibashi H.* Generators of Orthogonal Groups over Valuation Rings // *Canad. J. Math.* — 1981. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 116–128.

[73] *van der Kallen W.* $SL_3(\mathbb{C}[x])$ does not have bounded word length // *Springer Lecture Notes Math.* — 1982. — Vol. 966. — Pp. 357–361.

[74] *Knüpel F., Nielsen K.* $SL(V)$ is 4-reflectional // *Geom. Dedicata.* — 1991. — Vol. 38, no. 3. — Pp. 301–308.

[75] *Liebeck H.* A test for commutators // *Glasgow Math. J.* — 1976. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 31–36.

[76] *MacDonald I. D.* On cyclic commutator subgroups // *J. London Math. Soc.* — 1963. — Vol. 38. — Pp. 419–422.

[77] *Malle G., Saxl J., Weigel T. S.* Generation of classical groups // *Geom. Dedicata.* — 1994. — Vol. 49, no. 1. — Pp. 85–116.

[78] *Mather J. N.* Commutators of diffeomorphisms // *Comment. Math. Helv.* — 1974. — Vol. 49. — Pp. 512–528.

[79] *Mather J. N.* Commutators of diffeomorphisms, II // *Comment. Math. Helv.* — 1975. — Vol. 50. — Pp. 33–40.

[80] *Mather J. N.* A curious remark concerning the geometric transfer map // *Comment. Math. Helv.* — 1984. — Vol. 59, no. 1. — Pp. 86–110.

[81] *Mather J. N.* Commutators of diffeomorphisms, III: A group which is not perfect // *Comment. Math. Helv.* — 1985. — Vol. 60, no. 1. — Pp. 122–124.

[82] *Matsumoto H.* Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés // *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème sér.* — 1969. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 1–62.

[83] *McDuff D.* On the group of volume-preserving diffeomorphisms of R^n // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1980. — Vol. 261, no. 1. — Pp. 103–113.

[84] *Newman M.* Unimodular commutators // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1987. — Vol. 101, no. 4. — Pp. 605–609.

[85] *O'Meara O. T.* Symplectic groups. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1978. — Vol. 18. — 122 Pp.

[86] *Ore O.* Some remarks on commutators // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1951. — Vol. 272. — Pp. 307–314.

[87] *Rodney D. M.* On Cyclic Derived Subgroups // *J. London Math. Soc.* — 1974. — Vol. s2-8, no. 4. — Pp. 642–646.

[88] *Rüpcke H.* The orthogonal group over a local ring is 4-reflectional // *Geom. Dedicata.* — 1994. — Vol. 49, no. 3. — Pp. 369–373.

[89] *Sivatski A. S., Stepanov A. V.* On the Word Length of Commutators in $GL_n(R)$ // *K-Theory.* — 1999. — Vol. 17, no. 4. — Pp. 295–302.

[90] *Spengler U., Wolff H.* Die Länge einer symplektischen Abbildung // *J. reine angew. Math.* — 1975. — Vol. 274–275. — Pp. 150–157.

[91] *Springer T. A.* Linear algebraic groups. — Second edition. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 1998. — Vol. 9 of *Progress in Mathematics.* — 334 Pp.

[92] *Stanley-Albarda C.* A comparison of length definitions for maps of modules over local rings // *J. Geom.* — 1995. — Vol. 53, no. 1–2. — Pp. 191–200.

[93] *Tamburini M. C., Zucca P.* Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // *J. Algebra.* — 1997. — Vol. 195, no. 2. — Pp. 650–661.

[94] *Thurston W., Vaserstein L. N.* On K_1-theory of the Euclidean space // *Topology Appl.* — 1986. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 145–148.

[95] *Vaserstein L. N.* On K_1-theory of topological spaces // *Contemp. Math.* — 1986. — Vol. 55. — Pp. 729–740.

[96] *Vaserstein L. N.* Reduction of a matrix depending on parameters to a diagonal form by addition operations // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1988. — Vol. 103, no. 3. — Pp. 741–746.

[97] *Vaserstein L. N., Wheland E.* Factorization of invertible matrices over rings of stable rank one // *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.* — 1990. — Vol. 48, no. 3. — Pp. 455–460.

[98] *Vavilov N. A.* A third look at weight diagrams // *Rendiconti del Seminario Matem. dell'Univ. di Padova.* — 2000. — Vol. 204. — Pp. 1–45.

[99] *Vavilov N. A.* An A_3-proof of structure theorems for Chevalley groups Of types E_6 and E_7 // *Int. J. Algebra and Computations.* — 2007. — Vol. 17, no. 5–6. — Pp. 1283–1298.

[100] *Wagner A.* The minimal number of involutions generating some finite three-dimensional groups // *Boll. Un. Mat. Ital. A (5).* — 1978. — Vol. 15, no. 2. — Pp. 431–439.

[101] *Weigel T. S.* Generation of exceptional groups of Lie-type // *Geom. Dedicata.* — 1992. — Vol. 41, no. 1. — Pp. 63–87.

[102] *Wonenburger M. J.* Transformations which are products of two involutions // *J. Math. Mech.* — 1966. — Vol. 16. — Pp. 327–338.

[103] *Wood J. W.* Bundles with totally disconnected structure group // *Comment. Math. Helv.* — 1971. — Vol. 46. — Pp. 257–273.

[104] *Zhou L. G.* Scherk's Theorem of Orthogonal Groups over a Local Ring I. Expressing orthogonal transformations as the product of symmetries and a semi-symmetry // *Dongbei Shida Xuebao.* — 1985. — Vol. 2. — Pp. 17–24.