

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

# Геометрия корневых элементов в группах типа $E_6$

И. М. Певзнер

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет

## Аннотация

Пусть  $G$  — односвязная группа Шевалле типа  $E_6$  над произвольным полем  $K$ . В работе рассматриваются корневые элементы в группе  $G$  в минимальном 27-мерном представлении. Мы доказываем, что существует естественная биекция между множеством корневых подгрупп и множеством шестимерных сингулярных подпространств, согласованная с действием на обоих множествах группы  $G$ . В работе показано, как по взаимному расположению двух шестимерных сингулярных подпространств определить угол между соответствующими корневыми подгруппами. Также мы описываем, как определить, какую группу в  $SO(2n, K)$  или в  $G$  порождают три корневые подгруппы, две из которых противоположны, по взаимному расположению соответствующих двумерных изотропных или шестимерных сингулярных подпространств.

---

Настоящая работа выполнена в рамках совместного проекта DAAD и Министерства образования России «Михаил Ломоносов», а также проекта INTAS 03-51-3251.

## Введение

Пусть  $G = G_{\text{sc}}(E_6, K)$ , а  $V$  — минимальный 27-мерный модуль, на котором действует  $G$ . Несложно видеть, что для любого неединичного корневого элемента  $g \in G$  подпространство  $\text{Im}(g - E)$  является шестимерным. При этом элементам из одной корневой подгруппы соответствует одно и тоже шестимерное подпространство, а элементам из разных корневых подгрупп — разные подпространства. Это позволяет построить инъекцию из множества корневых подгрупп в множество шестимерных подпространств, согласованную с действием группы  $G$ , где под действием  $G$  на множество корневых подгрупп понимается сопряжение. Основной результат настоящей работы — доказательство того, что образ множества корневых элементов под действием этой инъекции совпадает с множеством шестимерных сингулярных подпространств. Точнее, нами доказана следующая теорема:

**Теорема.** *Пусть  $n = 1, 2, 3, 4$  или  $6$ ,  $\{u^i\}_{i=1}^n$  — некоторые сингулярные вектора, порождающие  $n$ -мерное сингулярное подпространство. Для произвольного набора сингулярных векторов  $\{v^i\}_{i=1}^n$ , порождающих  $n$ -мерное сингулярное подпространство, существует матрица  $g \in G_{\text{sc}}(E_6, K)$ , такая, что  $u^i = gv^i$  при  $i \leq n, 5$ . Если  $n = 6$ , то  $u^6 = agv^6$ , где  $a \in K^*$ .*

Из этой теоремы легко следует, что вышеописанное отображение из множества корневых подгрупп в множество шестимерных сингулярных подпространств является биекцией.

В статье Н. А. Вавилова и автора [20] перечислены все группы, порожденные тремя корневыми подгруппами в произвольной односвязной группе Шевалле над полем, две из которых противоположны. В настоящей работе мы описываем, на геометрическом языке, как по трем корневым подгруппам в  $SO(2n, K)$  и  $G_{\text{sc}}(E_6, K)$ , две из которых противоположны, понять, какую группу они порождают.

Напомним основные вехи в изучении геометрии групп Шевалле.

Едва появившись, теория групп Ли заняла одно из важнейших мест в геометрии: геометрия данного пространства определяется, в большой степени, группой его автоморфизмов и ее подгруппами, оставляющими некоторые конфигурации точек неподвижными или фиксирующими их поточечно. Это позволяет, во многих случаях, сводить вопросы о геометрии пространства к вопросам о структуре соответствующей группы и наоборот. Классическим примером такого соответствия являются проективное пространство и проективная линейная группа. Позднее похожие геометрии были найдены для симплектических и ортогональных групп. Геометрическая точка зрения на эти и многие другие пространства подробно изложена в книге [37].

Связь между этими геометриями и параболическими подгруппами позволила Ж. Титсу в 1953 году ввести подобные геометрии для исключительных групп. Из его работ выросла активно развивающаяся ныне теория билдингов (=билдингов Титса, геометрий Титса, систем Титса), впервые систематически изложенная в работе [90]. Теория билдингов уже давно вышла за рамки собственно теории алгебраических групп и активно используется в геометрии, теории графов и теории когомологий. Теорией билдингов занимались, в той или иной мере, множество талантливых математиков: Титс, К. Браун, М. Ронан, А. Коэн, Б. Куперстейн, П. Абраменко, Х. Ван Мальдегем и многие другие.

Одним из самых важных и, одновременно, самых простых объектов в группах Шевалле являются длинные корневые подгруппы. При этом, однако, исследование "вза-

имного расположения”, в том или ином смысле, нескольких длинных корневых подгрупп — чрезвычайно сложная и интересная задача, которой занималось и продолжает заниматься множество математиков. Над этими вопросами, а также тесно связанными с ними вопросами описания подгрупп, порожденных корневыми элементами, работали такие выдающиеся мастера, как Дж. Маклафлин, А. Вагнер, М. Ашбахер, Г. Зейтц, У. Кантор, Куперстейн, А. Е. Залесский и многие другие, см., в частности, [9], [27], [48], [52], [53], [58], [59], [60], [61], [62], [70], [72], [95] и дальнейшие ссылки в [12], [25], [26], [28], [71]. В середине 1990-х годов Либек и Зейтц предложили замечательно простые доказательства и обобщения результатов о порождении корневыми элементами в контексте теории алгебраических групп [73]. С другой стороны, чрезвычайно глубокую теорию абстрактных корневых подгрупп развил в своих работах Ф. Тиммесфельд и его ученики — А. Штайнбах, Х. Кюйперс и другие, см. [63], [64], [65], [66], [78], [79], [80], [81], [82], [83], [84], [85], [86], [87], [88], [89]. Необходимо также упомянуть замечательные работы Е. Л. Башкирова [1], [2], [3], [4], [5], [49], [50], [51] о аналогичных вопросах над телами.

Когда автор заинтересовался вопросом о том, что порождают три корневые подгруппы в  $G_{\text{sc}}(E_6, K)$ , оказалось, однако, что найти на него ответ в литературе очень непросто. С одной стороны, над *конечными* полями этот результат сформулирован в [60] и, по-видимому, действительно следует из работ Куперстейна [58], [59], [60], [61] и [62], однако он, во-первых, разбросан там на несколько десятков страниц, а во-вторых, не может быть обобщен на случай произвольного поля. С другой стороны, ответ на интересующий нас вопрос, без сомнения, содержится где-то в работах Тиммесфельда, однако, к сожалению, в этих работах доказываются гораздо более общие результаты, чем нам нужно. По-видимому, в работах Башкирова интересующий нас результат также содержится где-то в доказательствах, однако, снова, в гораздо большей общине.

Единственный найденный нами подобный результат с элементарным доказательством содержится в статье [69]. В ней обсуждается, что могут порождать три корневые подгруппы, среди которых есть две противоположных, в  $SL(n, K)$ . Недавно вышла статья Н.А. Вавилова и автора [20], посвященная аналогичному вопросу для произвольной односвязной группы  $G(\Phi, K)$  при  $\text{char } K \neq 2$ . В настоящей работе мы описываем, как в группах  $SO(2n, K)$  и  $G_{\text{sc}}(E_6, K)$  по трем корневым подгруппам, две из которых противоположны, определить, на инвариантном языке, какую именно группу они порождают.

Для работы с корневыми подгруппами в группе  $E_6$  полезно иметь хорошее геометрическое описание корневых подгрупп. Как известно, любой корневой подгруппе соответствует некоторое шестимерное сингулярное подпространство. Один из основных результатов настоящей работы утверждает, что верно и обратное — любому шестимерному сингулярному подпространству соответствует некоторая корневая подгруппа. Кроме этого, мы описываем, как по двум шестимерным сингулярным подпространствам определить угол между соответствующими корневыми подгруппами. Это было нетривиальной задачей при большинстве других возможных описаниях корневых подгрупп. При определении, какую группу порождают три корневые подгруппы, мы также используем именно геометрический язык.

Говоря про геометрию длинных корневых подгрупп, нельзя не упомянуть про геометрии коротких корневых подгрупп и торов. Эти геометрии и связанные с ними вопросы существенно сложнее и намного меньше изучены. Однако недавно появились замечательные работы В. В. Нестерова и Н. А. Вавилова [17], [18], [33], [34], [35], посвященные этим чрезвычайно интересным объектам. В частности, там обсуждаются списки орбит *пар* микровесовых торов (в [17] и [18]) и *пар* коротких корневых подгрупп (в [33], [34] и

[35]), причем в первом случае он получается примерно той же сложности, что и полученный в [20] список *троек* длинных корневых подгрупп, а во втором — еще сложнее.

Статья организована следующим образом. В §1 определяются основные обозначения. В §2 отмечаются базовые факты про корни, веса и сингулярные вектора. В §3 мы изучаем корневые элементы группы  $G_{\text{sc}}(E_6, K)$ . В частности, в этом параграфе показывается теорема 1, которая указывает 22 независимые переменные, однозначно определяющие корневой элемент (при условии, что некоторый матричный коэффициент ненулевой). Кроме этого, мы находим несколько уравнений на матричные коэффициенты корневых элементов. В §4 в теореме 2 доказывается, что естественное соответствие между корневыми подгруппами и шестимерными сингулярными подпространствами является биекцией, а также изучается связь между взаимным расположением двух шестимерных сингулярных пространств и углом между соответствующими корневыми подгруппами. Наконец, в §5 мы изучаем, как по взаимному расположению трех шестимерных сингулярных подпространств, два из которых противоположны, понять, какую группу порождают соответствующие им корневые подгруппы.

Автор выражает благодарность Николаю Александровичу Вавилову, без которого эта работа никогда не была бы написана, а также Энтони Баку за гостеприимство и всестороннюю поддержку.

## §1. Основные обозначения

### 1. Группы Шевалле

Все наши обозначения, относящиеся к корням, весам, алгебрам Ли, алгебраическим группам и представлениям вполне стандартны и следуют [6], [7], [8], [40], [41], см. также [13], [92], где можно найти много дальнейших ссылок. Мы не напоминаем определение групп Шевалле и основных подгрупп в них, которые можно найти, например, в [6], [40], [74], ... В настоящем параграфе мы лишь зафиксируем основные используемые в дальнейшем обозначения.

Прежде всего, пусть  $\Phi$  — приведенная неприводимая система корней ранга  $l$ ,  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  — фундаментальная система в  $\Phi$ ,  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$  — соответствующие множества положительных и отрицательных корней. Элементы  $\Pi$  называются *простыми* корнями, и мы всегда используем для них ту же нумерацию, что в [7]. Так как настоящая работа посвящена системе  $\Phi = E_6$  и, в какой-то мере, ее подсистемам, то нас будет интересовать главным образом случай, когда все корни  $\Phi$  имеют одинаковую длину — такие системы будут называться системами с *простыми связями* = simply-laced, в противоположность системам с *кратными связями* = multiply-laced. Как обычно,  $W = W(\Phi)$  обозначает группу Вейля системы  $\Phi$ ;  $w_\alpha$  — отражение относительно корня  $\alpha \in \Phi$  и  $w_i = w_{\alpha_i}$ ,  $1 \leq i \leq l$ , — фундаментальные отражения. Фундаментальная система  $\Pi$  фиксирует некоторый порядок на  $\Phi$ . Через  $\delta$  обозначим максимальный корень системы  $\Phi$  относительно этого порядка; для интересующего нас в первую очередь случая  $\Phi = E_6$  имеем  $\delta = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ & 2 \end{smallmatrix}$ .

Построение групп Шевалле основано на выборе базиса Шевалле в простой комплексной алгебре Ли  $L$  типа  $\Phi$ . Напомним, что выбор подалгебры Картана  $H$  в  $L$  определяет корневое разложение  $L = H \bigoplus \sum L_\alpha$ , где  $L_\alpha$  — одномерные корневые подпространства, инвариантные по отношению к  $H$ . Для каждого корня  $\alpha \in \Phi^+$  выберем какой-то ненулевой корневой вектор  $e_\alpha \in L_\alpha$  и отождествим корень  $\alpha$  с линейным функционалом на  $H$ , для которого  $[h, e_\alpha] = \alpha(h)e_\alpha$ . Ограничение формы Киллинга алгебры Ли  $L$  на  $H$  невырождено и, тем самым, устанавливает канонический изоморфизм  $H \cong H^*$ , так что мы можем даже считать, что  $\alpha \in H$ . Впрочем, обычно удобнее рассматривать кокорни  $h_\alpha = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ . Таким образом, любой выбор ненулевых  $e_\alpha \in L_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi^+$ , однозначно определяет  $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$ ,  $\alpha \in \Phi^+$ , такие, что  $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ . Множество  $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi; h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$  является базисом алгебры Ли  $L$ , называемым базисом Вейля. При этом  $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta}e_\beta$ , где  $A_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$  числа Картана. Структурные константы  $N_{\alpha\beta}$  определяются равенством  $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$ . Базис Вейля можно нормировать так, чтобы все структурные константы  $N_{\alpha\beta}$  были целыми, в этом случае он называется **базисом Шевалле**, а множество  $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi\}$  — **системой Шевалле**.

Для систем с простыми связями всегда  $N_{\alpha\beta} = 0, \pm 1$ , так что нам нужно только зафиксировать знаки структурных констант. Мы зафиксируем **положительный** базис Шевалле, который определяется тем свойством, что  $N_{\alpha\beta} > 0$  для всех экстра-специальных пар, см. [39], [42], [56]. Для систем с простыми связями это условие означает в точности, что  $N_{\alpha_i\beta} = +1$  каждый раз, как  $\alpha_i + \beta \in \Phi$  обладает тем свойством, что если  $\alpha_j + \gamma = \alpha_i + \beta$  для какого-то фундаментального корня  $\alpha_j$  и какого-то положительного корня  $\gamma$ , то  $j > i$ .

Обозначим через  $Q(\Phi)$  решетку корней системы  $\Phi$ , а через  $P(\Phi)$  — ее решетку весов. Напомним, что  $P(\Phi)$  состоит из целочисленных линейных комбинаций фундаментальных весов  $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ , которые образуют двойственный базис по отношению к базису

$h_{\alpha_1}, \dots, h_{\alpha_l}$ , где, как уже говорилось,  $h_\alpha = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ . В частности,  $Q(\Phi) \subseteq P(\Phi)$ . Пусть  $P$  — некоторая решетка, лежащая между  $Q(\Phi)$  и  $P(\Phi)$ . Как обычно,  $P_{++}(\Phi)$  обозначает конус *доминантных* целых весов, являющихся неотрицательными целочисленными линейными комбинациями фундаментальных весов  $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ .

Пусть, далее,  $R$  — коммутативное кольцо с 1. Как известно, по этим данным можно построить группу **Шевалле**  $G = G_P(\Phi, R)$ , являющуюся группой точек над  $R$  некоторой аффинной групповой схемы  $G = G_P(\Phi, -)$ , называемой **схемой Шевалле-Демазюра**. В интересующем нас случае  $\Phi = E_6$ , как хорошо известно,  $[P(\Phi) : Q(\Phi)] = 3$ , поэтому  $P$  равно  $P(\Phi)$  или  $Q(\Phi)$ . Таким образом, при  $\Phi = E_6$  существует две группы точек  $G = G_P(E_6, R)$ , а именно присоединенная группа  $G_{\text{ад}}(E_6, R) = G_{P(\Phi)}(E_6, R)$  и односвязная группа  $G_{\text{sc}}(E_6, R) = G_{Q(\Phi)}(E_6, R)$ .

Пусть теперь  $G = G(\Phi, R)$  есть группа Шевалле типа  $\Phi$  над кольцом  $R$ . Выбор базиса Шевалле задает, в частности, расщепимый максимальный тор  $T = T(\Phi, R)$  в группе  $G$  и параметризацию корневых унипотентных подгрупп  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ , относительно тора  $T$ . Фиксируем эту параметризацию, пусть  $x_\alpha(\xi)$  — элементарный корневой унипотент, отвечающий  $\alpha \in \Phi$ ,  $\xi \in R$ . При этом

$$X_\alpha = \{x_\alpha(\xi) \mid \xi \in R\}.$$

Для элементов  $x$  и  $y$  группы  $G$  через  $[x, y]$  обозначается их левонормированный коммутатор  $xyx^{-1}y^{-1}$ . Коммутационная формула Шевалле утверждает, что

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}\xi^i\eta^j),$$

для любых  $\alpha, \beta \in \Phi$  таких, что  $\alpha + \beta \neq 0$ , и  $\xi, \eta \in R$ . Произведение в правой части формулы берется по всем корням вида  $i\alpha + j\beta \in \Phi$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , в некотором фиксированном порядке. При этом структурные константы группы Шевалле  $N_{\alpha\beta ij}$  не зависят от  $\xi$  и  $\eta$ . Более того,  $N_{\alpha\beta 11} = N_{\alpha\beta}$  суть в точности структурные константы алгебры Ли  $L$  в соответствующем базисе Шевалле. Для системы с простыми связями единственная положительная линейная комбинация корней  $\alpha$  и  $\beta$ , которая может быть корнем, это их сумма  $\alpha + \beta$ . Таким образом в этом случае коммутационная формула Шевалле принимает вид  $[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = e$  в случае, если  $\alpha + \beta$  не является корнем, и вид

$$[x_\alpha(\xi), x_\beta(\eta)] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha\beta}\xi\eta),$$

если  $\alpha + \beta$  является корнем. Группа  $E(\Phi, R) = \langle X_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle$ , порожденная всеми элементарными корневыми подгруппами, называется **элементарной подгруппой** группы Шевалле  $G(\Phi, R)$ . В настоящей работе нас будет интересовать только случай, когда  $R = K$  — поле.

## 2. Модули Вейля

Обычно мы рассматриваем группу Шевалле  $G = G_P(\Phi, R)$  вместе с действием на **модуле Вейля**  $V = V(\omega)$  для некоторого доминантного веса  $\omega$ . Фиксируем вес  $\omega \in P_{++}(\Phi)$  и пусть  $V = V(\omega)$  — модуль Вейля группы  $G$  со старшим весом  $\omega$ . Соответствующее представление  $G \rightarrow GL(V)$  будет обозначаться через  $\pi = \pi(\omega)$ . Через  $\Lambda = \Lambda(\omega)$  обозначается набор весов модуля  $V = V(\omega)$  с учетом кратности. Для обозначения множества весов, рассматриваемых без кратности, мы обычно будем писать  $\bar{\Lambda}(\omega)$ . В настоящей работе нас будут интересовать, главным образом, только микровесовые модули, см. [54], [57], [55], [67] и содержащиеся там ссылки. Для микровесового представления

все веса экстремальны и, значит, имеют кратность 1, так что в этом случае  $\Lambda = \bar{\Lambda}(\omega)$  совпадает с Вейлевской орбитой старшего веса,  $\Lambda = W\omega$ .

В дальнейшем мы фиксируем **допустимый** базис  $v^\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , модуля  $V$ . Напомним, что базис называется допустимым, если выполняются два следующих условия.

- Каждый вектор  $v^\lambda$  действительно является вектором веса  $\lambda$ , если рассматривать  $\lambda$  как вес *без кратности*.

- Действие корневых унипотентов  $x_\alpha(\xi)$ ,  $\alpha \in \Phi$ ,  $\xi \in R$  в базисе  $v^\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda(\omega)$ , задается матрицами, элементы которых суть полиномы от  $\xi$  с целыми коэффициентами.

Лемма Мацумото, см. [54], [57], утверждает, что для микровесовых представлений можно так нормировать допустимый базис, чтобы

$$x_\alpha(\xi)v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda+\alpha,\lambda}\xi v^{\lambda+\alpha},$$

где все структурные константы действия  $c_{\lambda+\alpha,\lambda}$  равны  $\pm 1$ . Обычно эти константы обозначаются  $c_{\lambda\alpha}$ , однако нам будет удобнее использовать обозначение  $c_{\lambda+\alpha,\lambda}$ . В дальнейшем мы всегда выбираем **кристаллический** базис, в котором все структурные константы  $c_{\lambda+\alpha,\lambda}$  равны  $+1$  для простых и отрицательных простых корней, т.е.  $c_{\lambda+\alpha,\lambda} = +1$ , если  $\alpha \in \pm\Pi$ . При этом  $c_{\lambda+\delta,\lambda}$  будет равно  $+1$  для всех  $\lambda, \lambda + \delta \in \Lambda$ . Существование такого базиса вытекает из общих результатов Дж.Люстига и М.Кашивара, элементарные доказательства приведены в [28] и [67].

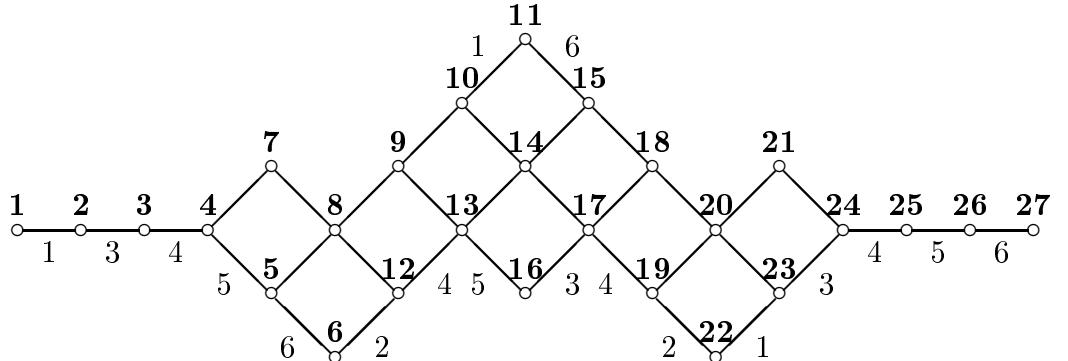
Мы мыслим вектор  $a \in V$ ,  $a = \sum v^\lambda a_\lambda$ , как *столбец* координат  $a = (a_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . При этом элемент  $b$  контраградиентного модуля  $V^*$  естественно представлять себе как *строку*  $b = (b_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Разумеется, по отношению к весам  $\Lambda^*$  контраградиентного модуля  $V^*$  картина обратная: элементы  $V^*$  представляются *столбцами*  $b = (b_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda^*$ , а элементы  $V$  — *строками*  $a = (a_\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Поэтому мы еще раз обращаем внимание на то, что мы индексируем как столбцы, так и строки весами модуля  $V$  — индексы  $\lambda, \mu, \nu$  и т.д. принадлежат  $\Lambda$ . Иными словами, нам удобно нумеровать координаты вектора из  $V^*$  весами модуля  $V$  и записывать их как строки — в то время как обычно они нумеруются весами самого модуля  $V^*$  и записываются как столбцы.

Один из принципиальных технических моментов состоит в том, что элементы этих строк являются не линейно упорядоченными, а лишь частично упорядоченными, в соответствии с порядком на  $\Lambda$ , задаваемым выбором системы простых корней  $\Pi$ . А именно, мы полагаем, что  $\lambda \geq \mu$ , если  $\lambda - \mu = \sum m_i \alpha_i$ , где  $m_i \geq 0$ . При описанной выше интерпретации элементов модуля  $V$  элементы группы Шевалле естественно мыслить как матрицы  $g = (g_{\lambda\mu})$ ,  $\lambda, \mu \in \Lambda$ , по отношению к базису  $v^\lambda$ . Как обычно, столбцами этой матрицы являются столбцы координат векторов  $gv^\mu$ ,  $\mu \in \Lambda$ , по отношению к базису  $v^\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Мы будем часто пользоваться следующим обозначением:  $\mu$ -й столбец матрицы  $g$  будет обозначаться через  $g_{*\mu}$ , а  $\lambda$ -я строка — через  $g_{\lambda*}$ .

В настоящей работе мы рассматриваем группу  $G_{sc}(E_6, R)$  вместе с действием на 27-мерном модуле  $V = V(\varpi_1)$ . Соответствующее представление является, как хорошо известно, микровесовым. К сожалению, чуть дальше нам потребуются некоторые свойства системы весов, не совсем очевидные из данного выше описания  $\Lambda$ . Поэтому сейчас мы приведем чуть другую конструкцию этого множества. А именно, рассмотрим систему корней  $\Delta = E_7$ . Очевидно, что подсистема, состоящая из корней, имеющих в разложении на простые корни коэффициент 0 при  $\alpha_7$ , канонически изоморфна  $\Phi = E_6$ . Пусть  $\Lambda_1$  — множество корней, имеющих в разложении на простые корни коэффициент 1 при  $\alpha_7$ . На них стандартным образом действует группа  $W_\Phi = \langle w_{\alpha_i}; 1 \leq i \leq 6 \rangle$ . Несложно

видеть, что это действие транзитивно. Пусть  $\bar{\phantom{x}}$  — ортогональная проекция на гиперплоскость, натянутую на корни  $\alpha_i$  при  $1 \leq i \leq 6$ . Рассмотрим корень  $\alpha = \frac{234321}{2}$ . Заметим, что  $\alpha$  ортогонален корням  $\alpha_i$  при  $2 \leq i \leq 6$  и образует угол  $\pi/3$  с  $\alpha_1$ . Иначе говоря,  $(\alpha, \alpha_1) = 1/2$  и  $(\alpha, \alpha_i) = 0$  при  $2 \leq i \leq 6$ . Отсюда, поскольку  $\alpha - \bar{\alpha} \perp \alpha_i$  при  $1 \leq i \leq 6$ , следует, что  $\bar{\alpha} = \varpi_1$  — первый фундаментальный вес. Поэтому получаем, что  $\Lambda = W\varpi_1 = W\bar{\alpha} = \bar{W}\alpha = \bar{\Lambda}_1$ . Несложно видеть, что проекция  $\bar{\phantom{x}}$ , ограниченная на  $\Lambda_1$ , является биекцией. При этом она, по очевидным соображениям, согласована с действием группы  $W$  и  $\bar{\phi} + \beta = \bar{\phi} + \bar{\beta}$  для произвольных  $\beta \in \Phi$  и  $\phi, \phi + \beta \in \Lambda_1$ . Таким образом, можно отождествить множества  $\Lambda$  и  $\Lambda_1$ . Намного более подробно, и на несколько другом языке, эта конструкция дана в [16]. Там же можно найти многочисленные дальнейшие ссылки на литературу.

Для удобства работы с интересующим нас 27-мерным представлением группы  $G_{sc}(E_6, R)$ , стоит занумеровать его веса. Как уже говорилось, на множестве весов естественным образом вводится частичный порядок; рассматривают обычно только те линейные порядки, которые согласованы с этим частичным. Однако таких порядков довольно много, и мы, чтобы избежать путаницы, попытались как можно меньше использовать конкретную нумерацию. А именно, всюду, кроме §5, нам достаточно того, чтобы порядок был согласован с  $A_5$ -ветвлением (см., например, [16]). Это означает, что  $i + 21 = i - \delta$  для всех  $1 \leq i \leq 6$  (здесь мы допускаем некоторую неточность, путая веса и их номера: имеется в виду, что если к весу с номером  $i + 21$  прибавить корень  $\delta$ , то получится вес с номером  $i$ ). Это условие однозначно определяет, учитывая имеющийся частичный порядок, первую и последнюю восьмерки весов. В пятом параграфе, к сожалению, нам приходится использовать всю нумерацию. Используемый нами порядок несколько отличается от порядков из [16]; соответствующая весовая диаграмма приведена на рис.:



Как обычно, вершины диаграммы соответствуют весам; две вершины соединены ребром с номером  $i$ , если разность соответствующих весов есть простой корень  $\alpha_i$ ; "параллельные" ребра соответствуют одинаковым простым корням. Более подробное описание весовых диаграмм вместе с исторической справкой и дальнейшими ссылками на литературу можно найти в [16]. Через  $e^i$ , где  $i \in \Lambda$ , в дальнейшем будут обозначаться базисные вектора пространства  $V$ ; соответственно, базисные ковектора будут обозначаться через  $e_i$ , где  $i \in \Lambda$ .

### 3. Трилинейная форма и 3-форма

Пусть  $V = V(\varpi_1)$  — 27-мерный модуль для группы Шевалле  $G = G_{sc}(E_6, R)$ . Тогда существует трилинейная форма  $F : V \times V \times V \rightarrow R$ , такая, что  $G$  является группой изометрий  $F$ , т.е., иными словами,  $G$  совпадает с группой всех  $g \in GL(V, R)$ , таких, что  $F(gu, gv, gw) = F(u, v, w)$  для всех  $u, v, w \in V$ .

Впервые форма  $F$  появилась в работах Диксона в 1901 году. В дальнейшем ее активно изучали и использовали Шевалле, Фрейденталь, Спрингер, Титс, Селигман, Джекобсон, Фельдкамп, Коэн, Куперстейн и многие другие (см. [16] и [15] для дальнейших ссылок). Вначале она изучалась над полями нулевой характеристики, а в дальнейшем была обобщена на произвольные поля с характеристикой не равной 2 и 3. Априори при необратимых 2 или 3 могут возникать проблемы, однако, как показал Ашбахер [42], [43], [44], [45], [46], [47] этого не происходит. Более того, как показано в [91], форму  $F$  можно рассматривать над произвольным коммутативным кольцом, но в настоящей работе нас интересует только случай поля.

В действительности, Ашбахер в своих работах использует 3-форму  $\mathfrak{F} = (T, Q, F)$ , где  $T$  — кубическая форма,  $Q$  — ее частичная поляризация, а  $F$  — ее полная поляризация. Более подробно, 3-форма  $\mathfrak{F}$  — это тройка  $(T, Q, F)$ , такая, что:

- (1)  $F$  — трилинейная форма;
- (2)  $Q : V \times V \rightarrow K$  линейно по первой переменной и удовлетворяет равенствам  $Q(x, ay) = a^2 Q(x, y)$  и  $Q(x, y + z) = Q(x, y) + Q(x, z) + F(x, y, z)$  для всех  $a \in K$  и  $x, y, z \in V$ ;
- (3)  $T : V \rightarrow K$  удовлетворяет равенствам  $T(ax) = a^3 T(x)$  и  $T(x + y) = T(x) + T(y) + Q(x, y) + Q(y, x)$  для всех  $a \in K$  и  $x, y \in V$ .

В частности, в своих работах Ашбахер показывает, что над произвольным полем группа  $G_{sc}(E_6, K)$  совпадает с группой изометрий 3-формы  $\mathfrak{F}$  и, кроме этого, с группами изометрий форм  $F$  и  $Q$ . В настоящей работе, кроме трилинейной формы  $F$ , мы используем, в определении сингулярных векторов, форму  $Q$ . Это сделано для того, чтобы единообразно рассматривать поля любой характеристики.

Точный вид формы  $T$  (понятно, что по  $T$  формы  $Q$  и  $F$  легко определяются) вычислен в работе [16], однако, поскольку в настоящей работе чуть другая нумерация весов, мы ее тоже приведем. А именно,

$$\begin{aligned} T(x) = & x_1x_{11}x_{27} - x_1x_{15}x_{26} + x_1x_{18}x_{25} - x_1x_{20}x_{24} + x_1x_{21}x_{23} \\ & - x_2x_{10}x_{27} + x_2x_{14}x_{26} - x_2x_{17}x_{25} + x_2x_{19}x_{24} - x_2x_{21}x_{22} \\ & + x_3x_9x_{27} - x_3x_{13}x_{26} + x_3x_{16}x_{25} - x_3x_{19}x_{23} + x_3x_{20}x_{22} \\ & - x_4x_8x_{27} + x_4x_{12}x_{26} - x_4x_{16}x_{24} + x_4x_{17}x_{23} - x_4x_{18}x_{22} \\ & + x_5x_7x_{27} - x_5x_{12}x_{25} + x_5x_{13}x_{24} - x_5x_{14}x_{23} + x_5x_{15}x_{22} \\ & - x_6x_7x_{26} + x_6x_8x_{25} - x_6x_9x_{24} + x_6x_{10}x_{23} - x_6x_{11}x_{22} \\ & + x_7x_{16}x_{21} - x_7x_{17}x_{20} + x_7x_{18}x_{19} - x_8x_{13}x_{21} + x_8x_{14}x_{20} \\ & - x_8x_{15}x_{19} + x_9x_{12}x_{21} - x_9x_{14}x_{18} + x_9x_{15}x_{17} - x_{10}x_{12}x_{20} \\ & + x_{10}x_{13}x_{18} - x_{10}x_{15}x_{16} + x_{11}x_{12}x_{19} - x_{11}x_{13}x_{17} + x_{11}x_{14}x_{16}. \end{aligned}$$

Для большинства интересующих нас вопросов, однако, достаточно знать, что  $T(x) = \sum \pm x_\rho x_\sigma x_\tau$ , где сумма берется по всем неупорядоченным триадам  $\{\rho, \sigma, \tau\}$  (триада — это тройка попарно далеких весов, см. §2). Соответственно,  $F(x, y, z) = \sum \pm x_\rho y_\sigma z_\tau$ , где сумма берется по всем упорядоченным триадам  $(\rho, \sigma, \tau)$ , а  $Q(x, y) = \sum \pm x_\rho y_\sigma y_\tau$ , где сумма берется по всем триадам  $(\rho, \{\sigma, \tau\})$ , в которых пара, состоящая из второго и третьего веса, неупорядочена. Более подробно об этом говорится в [16]. Наконец, необходимо отметить, что точно такая же форма действует и на двойственном модуле

$V^*$ , элементы которого мы обозначаем строками. Эту форму мы также будем обозначать через  $\mathfrak{F} = (T, Q, F)$ .

## §2. Корни, веса и сингулярность

### 1. Корни и веса

В этом пункте мы покажем несколько несложных фактов про взаимное расположение множеств  $\Lambda$  и  $\Phi$ . При этом мы будем активно пользоваться весовой диаграммой. Все утверждения, которые нам встретятся в этом пункте, имеют комбинаторный характер, поскольку и корней, и весов конечное число. Однако прямой перебор обычно довольно тяжел, поэтому мы воспользуемся некоторыми ухищрениями, основным из которых является использование группы Вейля. Как известно, группа Вейля  $W$  действует на  $\Lambda$  и  $\Phi$ . При этом, если  $\lambda, \lambda + \alpha \in \Lambda$  при некотором  $\alpha \in \Phi$ , то  $w(\lambda) + w(\alpha) = w(\lambda + \alpha) \in \Lambda$ . Иначе говоря, действия группы Вейля на множествах весов и корней согласованы. Мы постарались обойтись минимумом свойств группы Вейля: нам потребовалось только три свойства. А именно:

- (1) *Если  $\alpha \in \Phi$  и  $\lambda \in \Lambda$  — такой вес, что  $\lambda + \alpha, \lambda - \alpha \notin \Lambda$ , то  $w_\alpha(\lambda) = \lambda$ . Если же  $\lambda, \lambda + \alpha \in \Lambda$ , то  $w_\alpha(\lambda) = \lambda + \alpha$  и  $w_\alpha(\lambda + \alpha) = \lambda$ .* Это стандартное свойство микровесовых представлений. В интересующем нас случае 27-мерного представления  $\pi(\varpi_1)$  требуемое свойство становится очевидным при использовании изоморфизма  $\Lambda \cong \Lambda_1$ , описанного в §1.
- (2) *Любую пару корней при помощи группы Вейля можно перевести в любую другую с тем же углом между ними; в частности, любой корень можно перевести в любой другой.* Это простейшее свойство систем корней.
- (3) *Любой вес при помощи группы Вейля можно перевести в любой другой.* В предыдущем параграфе мы уже упоминали, что  $\Lambda$  совпадает с Вейлевской орбитой старшего веса,  $W\omega$ ; отсюда сразу следует требуемое. Впрочем, это столь же легко следует из первого свойства и связности весовой диаграммы.

В §4 нам также потребуется расширенная группа Вейля. А именно, пусть

$$w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t) \in G_{sc}(E_6, K)$$

и  $\widetilde{W} = \langle w_\alpha(1); \alpha \in \Phi \rangle$ . Несложно видеть, что  $w_\alpha(1)$  переводит множество  $\Lambda^\pm = \{\pm e^\rho; \rho \in \Lambda\}$  в себя. Элементы множества  $\Lambda^\pm$  нами называются плюс/минус весами. Отметим также, что существует естественная проекция из  $\Lambda^\pm$  в  $\Lambda$ , переводящее  $\pm e^\rho$  в вес  $\rho$ . Эта проекция согласована с действием  $\widetilde{W}$ . Более того, как можно видеть, действие  $w_\alpha(1) \in \widetilde{W}$  на  $\Lambda^\pm$  переходит, при этой проекции, в действие  $w_\alpha \in W$  на  $\Lambda$ ; соответственно,  $\widetilde{W}$  переходит в  $W$ . Несложно показать, что  $w_\alpha(1)x_\beta(a)w_\alpha(1)^{-1} = x_{w_\alpha\beta}(\pm a)$ . Подробное доказательство этого и множества других близких вопросов см. [40].

**Утверждение 1.** Для произвольного корня  $\alpha \in \Phi$  существует ровно шесть весов  $\lambda_i \in \Lambda$ , таких, что  $\lambda_i + \alpha \in \Lambda$ . Разность любых двух таких  $\lambda_i$  является корнем.

*Доказательство.* Требуемое утверждение сразу следует из того, что любой корень можно симметриями из группы Вейля перевести в любой другой.

**Утверждение 2.** Пусть  $\alpha, \beta \in \Phi$  — два произвольных корня, такие, что  $\beta \neq -\alpha$ . Тогда:

- (1) *не существует веса  $\rho$ , такого, что  $\rho + \alpha$  и  $\rho + 2\alpha$  — тоже веса;*
- (2) *не существует веса  $\rho$ , такого, что  $\rho + \alpha$ ,  $\rho + \alpha + \beta$  и  $\rho + 2\alpha + \beta$  — тоже веса.*

*Доказательство.* Требуемое утверждение следует из того, что любую пару корней можно симметриями из группы Вейля перевести в любую другую с тем же углом между ними.

Пусть  $I_1^\alpha = \{\rho; \rho, \rho - \alpha \in \Lambda\}$ ,  $I_2^\alpha = \{\rho; \rho \in \Lambda, \rho \pm \alpha \notin \Lambda\}$  и  $I_3^\alpha = \{\rho; \rho, \rho + \alpha \in \Lambda\}$ . Очевидно, что  $\Lambda$  есть объединение  $I_1^\alpha$ ,  $I_2^\alpha$  и  $I_3^\alpha$ , при этом  $I_2^\alpha$  не пересекается с остальными. По пункту (1) утверждения 2,  $I_1^\alpha$  и  $I_3^\alpha$  также не пересекаются. По утверждению 1, множества  $I_1^\alpha$  и  $I_3^\alpha$  состоят из 6 элементов каждое, поэтому в  $I_2^\alpha$  ровно 15 элементов. Наконец, несложно видеть, что при сопряжении при помощи  $w_\beta$  множества  $I_1^\alpha$ ,  $I_2^\alpha$  и  $I_3^\alpha$  переходят в  $I_1^{w_\beta(\alpha)}$ ,  $I_2^{w_\beta(\alpha)}$  и  $I_3^{w_\beta(\alpha)}$  соответственно. В основном, нас будет интересовать случай  $\alpha = \delta$ , поэтому, для краткости, положим  $I_1 = I_1^\delta$ ,  $I_2 = I_2^\delta$  и  $I_3 = I_3^\delta$ . При нашей нумерации весов получаем, что  $I_1 = \{i; 1 \leq i \leq 6\}$ ,  $I_2 = \{i; 6 < i < 22\}$  и  $I_3 = \{i; 22 \leq i \leq 27\}$ , что объясняет выбранную нами нумерацию множеств  $I_1^\alpha$ ,  $I_2^\alpha$  и  $I_3^\alpha$ .

Напомним, что по определению  $\Lambda$  является подмножеством решетки весов  $P(\Phi)$ . Поскольку  $\Lambda = W\varpi$ , то разность двух произвольных весов из  $\Lambda$  принадлежит решетке корней  $Q(\Phi)$ . Иначе говоря, разность двух произвольных весов из  $\Lambda$  является суммой нескольких корней (также это сразу следует из связности весовой диаграммы).

**Определение.** Расстояние между различными весами  $i$  и  $j$ , обозначаемое  $d(i, j)$  — это минимальное количество корней, сумма которых равна разности  $i - j$ . Если веса совпадают, то расстояние между ними считается равным 0.

Теперь можно дать следующую переформулировку пункта (2) утверждения 2:

**Следствие.** Пусть  $\rho \in I_1^\alpha$  и  $\sigma \in I_3^\alpha$ . Тогда если  $d(\rho, \sigma) = 1$ , то  $\rho = \sigma + \alpha$ .

*Доказательство.* Сразу следует из второго пункта утверждения 2.

**Утверждение 3.** Пусть  $\alpha \in \Phi$  — произвольный корень. Тогда:

- (1) условие  $\alpha = \delta$  равносильно тому, что в разложении  $\alpha$  на простые корни корень  $\alpha_2$  встречается с коэффициентом 2;
- (2) условие  $\angle(\alpha, \delta) = \pi/3$  равносильно тому, что в разложении  $\alpha$  на простые корни корень  $\alpha_2$  встречается с коэффициентом 1;
- (3) условие  $\angle(\alpha, \delta) = \pi/2$  равносильно тому, что в разложении  $\alpha$  на простые корни корень  $\alpha_2$  отсутствует;
- (4) условие  $\angle(\alpha, \delta) = 2\pi/3$  равносильно тому, что в разложении  $\alpha$  на простые корни корень  $\alpha_2$  встречается с коэффициентом -1;
- (5) условие  $\alpha = -\delta$  равносильно тому, что в разложении  $\alpha$  на простые корни корень  $\alpha_2$  встречается с коэффициентом -2.

*Доказательство.* Первый и пятый пункты настоящего утверждения очевидны. Заметим, что максимальный корень ортогонален всем простым, кроме  $\alpha_2$ , с которым он образует угол  $\pi/3$ . Отсюда сразу следует, что если в разложении  $\alpha$  на простые корни корень  $\alpha_2$  отсутствует, то  $\alpha \perp \delta$ . Далее, если в разложении  $\alpha$  на простые корни коэффициент при  $\alpha_2$  равен 1, то скалярное произведение  $\alpha$  и  $\delta$  равно  $\frac{1}{2}$ , поэтому  $\angle(\alpha, \delta) = \pi/3$ . Аналогично разбирается случай, если в разложении  $\alpha$  на простые корни коэффициент при  $\alpha_2$  равен -1. В обратную сторону требуемые утверждения сразу следуют из того, что возможные коэффициенты при  $\alpha_2$  в разложении корня  $\alpha$  — только 2, 1, 0, -1 и -2.

**Утверждение 4.** Пусть  $\alpha, \beta \in \Phi$  — произвольные корни и  $i, j \in \Lambda$  — веса, такие, что  $i + \beta = j$ . Тогда:

- (1) Условие  $\alpha = \beta$  равносильно тому, что  $i \in I_3^\alpha$ , а  $j \in I_1^\alpha$ .
- (2) Условие  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$  равносильно тому, что либо  $i \in I_3^\alpha$ , а  $j \in I_2^\alpha$ , либо  $i \in I_2^\alpha$ , а  $j \in I_1^\alpha$ . При этом оба случая встречаются по три раза.

- (3) Условие  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/2$  равносильно тому, что либо  $i, j \in I_1^\alpha$ , либо  $i, j \in I_2^\alpha$ , либо  $i, j \in I_3^\alpha$ . При этом первый и третий случаи встречаются один раз, а второй — четыре раза.
- (4) Условие  $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$  равносильно тому, что либо  $i \in I_2^\alpha$ , а  $j \in I_3^\alpha$ , либо  $i \in I_1^\alpha$ , а  $j \in I_2^\alpha$ . При этом оба случая встречаются по три раза.
- (5) Условие  $\alpha = -\beta$  равносильно тому, что  $i \in I_1^\alpha$ , а  $j \in I_3^\alpha$ .

*Доказательство.* Требуемое утверждение следует из того, что любую пару корней можно симметриями из группы Вейля перевести в любую другую с тем же углом между ними.

#### Утверждение 5.

- (1) В интересующем нас 27-мерном представлении расстояние между весами может быть равно только 0, 1 или 2. Для любого веса существует ровно 16 весов на расстоянии 1 от него и 10 весов на расстоянии 2 от него.
- (2) Для двух произвольных весов на расстоянии 2 существует ровно один вес на расстоянии 2 от них обоих.
- (3) Пусть  $\alpha \in \Phi$  — произвольный корень, а  $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in \Lambda$  — произвольная тройка весов, таких, что  $d(\phi_1, \phi_2) = d(\phi_1, \phi_3) = d(\phi_2, \phi_3) = 2$ . Тогда либо все  $\phi_i$  принадлежат  $I_2^\alpha$ , либо один из них принадлежит  $I_1^\alpha$ , один —  $I_2^\alpha$  и один —  $I_3^\alpha$ .

*Замечание.* В дальнейшем веса на расстоянии 2 называются *далекими*, а на расстоянии 1 — *близкими*. Тройки попарно далеких весов часто называются *триадами*.

*Доказательство.* Первые два пункта очевидны, если учесть, что преобразованиями из группы  $W$  можно любой вес перевести в любой другой. Докажем третий. По утверждению 1, нам достаточно доказать, что не существует тройки попарно далеких весов, такой, что два из них принадлежат  $I_2^\alpha$ , а один —  $I_1^\alpha$  (случай, когда два из них принадлежат  $I_2^\alpha$ , а один —  $I_3^\alpha$ , получается из этого заменой  $\alpha$  на  $-\alpha$ ). Предположим, что такая тройка существует. Применим к весам из нее  $w_\alpha$ . Тогда веса из  $I_2^\alpha$  останутся на месте, а веса из  $I_1^\alpha$  перейдут в веса из  $I_3^\alpha$ . Однако триада двумя своими весами, по второму пункту, определяется однозначно. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения.

#### Утверждение 6. Пусть $\alpha \in \Phi$ — произвольный корень.

- (1) Для произвольного корня  $\beta$ , ортогонального  $\alpha$ ,  $w_\beta$  переставляет местами какие-то два веса из  $I_1^\alpha$ , а прочие веса из  $I_1^\alpha$  оставляет неподвижными.
- (2) Для произвольного веса  $\rho \in I_2^\alpha$  существует ровно два веса  $\rho_1, \rho_2 \in I_1^\alpha$ , далеких от  $\rho$ .
- (3) Если два веса  $\rho \in I_2^\alpha$  и  $\rho_1 \in I_1^\alpha$  далеки, то веса  $\rho$  и  $\rho_1 - \alpha$  также далеки.
- (4) Для произвольной пары весов  $\rho_1, \rho_2 \in I_1^\alpha$ , существует ровно один вес  $\rho \in I_2^\alpha$ , далекий от них обоих.
- (5) Пусть  $\rho, \sigma \in I_2^\alpha$  — произвольные веса и  $\{\rho_1, \rho_2\}, \{\sigma_1, \sigma_2\}$  — соответствующие им, по пункту (2), пары весов из  $I_1^\alpha$ . Тогда  $d(\rho, \sigma) = 2$  равносильно тому, что  $\{\rho_1, \rho_2\} \cap \{\sigma_1, \sigma_2\} = \emptyset$ .

*Доказательство.* Первый пункт настоящего утверждения следует из пункта (3) утверждения 4. Как уже говорилось, преобразованиями из группы  $W$  можно любой вес перевести в любой другой. Отсюда, а также из утверждения 4, следует второй пункт. Докажем третий пункт. Предположим, что веса  $\rho$  и  $\rho_1 - \alpha$  близки. Тогда  $\rho - (\rho_1 - \alpha) = \beta \in \Phi$ .

По пункту (2) утверждения 4,  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ , следовательно,  $\alpha - \beta \in \Phi$ , однако  $\alpha - \beta = \rho_1 - \rho$  — противоречие.

Докажем четвертый пункт. Для этого достаточно показать единственность такого  $\rho$ , тогда существование (по второму пункту) будет следовать из равенства количества пар  $\{\rho_1, \rho_2\}$ , где  $\rho_1, \rho_2 \in I_1^\alpha$ , и весов в  $I_2^\alpha$ . Заметим, что вес  $\rho$  по третьему пункту далек от  $\rho_1$  и  $\rho_2 - \alpha$ . По следствию из утверждения 2,  $\rho_1$  и  $\rho_2 - \alpha$  являются далекими весами, поэтому  $\rho, \rho_1$  и  $\rho_2 - \alpha$  образуют триаду. Тогда по пункту (2) утверждения 5,  $\rho$  определяется  $\rho_1$  и  $\rho_2$  однозначно, что и требовалось.

Покажем, что если  $d(\rho, \sigma) = 2$ , то  $\{\rho_1, \rho_2\} \cap \{\sigma_1, \sigma_2\} = \emptyset$ . Предположим, что это не так. Тогда вес  $\chi \in \{\rho_1, \rho_2\} \cap \{\sigma_1, \sigma_2\}$  оказывается далек от  $\rho$  и  $\sigma$ , поэтому веса  $\rho, \sigma$  и  $\chi$  образуют триаду. При этом в ней два веса из  $I_2^\alpha$ , а один из  $I_1^\alpha$ , что противоречит пункту (3) утверждения 5. Осталось доказать, что если  $\{\rho_1, \rho_2\} \cap \{\sigma_1, \sigma_2\} = \emptyset$ , то  $d(\rho, \sigma) = 2$ . Совпадать  $\rho$  и  $\sigma$  по второму пункту не могут. Предположим, что  $\sigma - \rho = \beta \in \Phi$ . Тогда  $w_\beta$  должно переводить  $\rho$  в  $\sigma$  и, следовательно, пару  $\{\rho_1, \rho_2\}$  в пару  $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ , что, по первому пункту, противоречит предположению.

### Лемма 2.1.

- (1) Пусть  $\alpha, \beta \in \Phi$ , причем  $\alpha \perp \beta$ . Далее, пусть  $\rho$  — такой вес, что  $\rho + \alpha$  и  $\rho + \beta$  — также веса. Тогда

$$c_{\rho, \rho + \alpha} c_{\rho + \alpha, \rho + \alpha + \beta} = c_{\rho, \rho + \beta} c_{\rho + \beta, \rho + \alpha + \beta}.$$

В частности,  $\rho + \alpha + \beta$  тоже является весом.

- (2) Пусть  $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ , причем  $\alpha \perp \beta, \gamma$  и  $\angle(\beta, \gamma) = 2\pi/3$ . Далее, предположим, что существует такой вес  $\sigma$ , что  $\sigma + \alpha, \sigma + \beta, \sigma + \beta + \gamma \in \Lambda$ . Тогда

$$c_{\sigma, \sigma + \beta} c_{\sigma, \sigma + \beta + \gamma} c_{\sigma + \beta, \sigma + \beta + \gamma} = c_{\sigma + \alpha, \sigma + \alpha + \beta} c_{\sigma + \alpha, \sigma + \alpha + \beta + \gamma} c_{\sigma + \alpha + \beta, \sigma + \alpha + \beta + \gamma}. \quad (2.1)$$

В частности, все эти веса существуют.

*Доказательство.* Докажем первый пункт. То, что  $\rho + \alpha + \beta$  является весом, следует из утверждения 4. Как уже говорилось в предыдущем параграфе, для  $\gamma \in \Phi$  и  $\tau \in \Lambda$  получаем  $x_\gamma(a)e^\tau = e^\tau + c_{\tau + \gamma, \tau}ae^{\tau + \gamma}$ , если  $\tau + \gamma \in \Lambda$ , и  $x_\gamma(a)e^\tau = e^\tau$  иначе. По коммутационной формуле Шевалле (см. § 1) получаем, что  $x_\alpha(1)x_\beta(1) = x_\beta(1)x_\alpha(1)$ . Применяя обе части этого равенства к  $e^\rho$ , получим требуемое. Вес  $\rho$  определяется, по пункту (3) утверждения 4, однозначно. Докажем второй пункт. Существование всех требуемых весов также, как и в первом пункте, получается из утверждения 4. Для доказательства (2.1) достаточно перемножить равенства из первого пункта для пар корней  $\alpha$  и  $\beta$  (здесь  $\rho$  полагается равным  $\sigma$ ),  $\alpha$  и  $\gamma$  ( $\rho = \sigma + \beta$ ), и, наконец,  $\alpha$  и  $\beta + \gamma$  ( $\rho = \sigma$ ).

*Замечание.* Отметим, что в первом пункте корни  $\alpha$  и  $\beta$  образуют “квадрат” с вершинами  $\rho, \rho + \alpha, \rho + \beta$  и  $\rho + \alpha + \beta$ , и лемму можно трактовать как утверждение о том, что произведение знаков вдоль одной пары сторон равно произведению знаков вдоль другой пары. Аналогично во втором пункте корни  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\beta + \gamma$  образуют “правильную треугольную призму” с вершинами  $\sigma, \sigma + \beta, \sigma + \beta + \gamma, \sigma + \alpha, \sigma + \alpha + \beta$  и  $\sigma + \alpha + \beta + \gamma$ , и лемму можно трактовать как утверждение о том, что произведение знаков на одном треугольном основании равно произведению знаков на противоположном основании. Доказательство же трактуется как перемножение соответствующих равенств для боковых граней.

## 2. Сингулярные вектора: элементарные свойства

**Определение.** Вектор  $v$  называется сингулярным (относительно 3-формы  $\mathfrak{F}$ ), если для любого вектора  $x$  выполняется равенство  $Q(x, v) = 0$ . Подпространство называется сингулярным, если любой его вектор сингулярен.

**Замечание.** Иногда пространства, все вектора которых сингулярны, называются вполне сингулярными.

Теперь из определения 3-формы несложно вывести следующие свойства.

- (1) Если  $\text{char } K \neq 2$ , то в определении сингулярного вектора можно вместо равенства  $Q(x, v) = 0$  написать  $F(v, v, x) = 0$ . Если же  $\text{char } K = 2$ , то  $F(v, v, x) = 0$  для любых векторов  $v$  и  $x$ .
- (2) Пусть  $W$  — подпространство с базисом, состоящим из сингулярных векторов  $w^i$  при  $1 \leq i \leq n$ , где  $n > 1$ . Тогда  $W$  — сингулярно, если и только если  $F(w^i, w^j, x) = 0$  для всех векторов  $x$  и  $1 \leq i, j \leq n$ .
- (3) Пусть  $u, v$  и  $u + v$  — сингулярные вектора. Тогда двумерное подпространство, натянутое на них, тоже сингулярно.

**Определение.** Расстояние между двумя различными сингулярными векторами  $u$  и  $v$ , обозначаемое  $d(u, v)$ , полагается равным 1, если вектор  $u - v$  сингулярен, и 2 в противном случае. В первом случае вектора называются близкими, а во втором далекими. Если  $u = v$ , то расстояние между ними считается равным 0.

Напомним, что  $F(u, v, w) = \sum \pm u_\rho v_\sigma w_\tau$ , где сумма берется по всевозможным упорядоченным тройкам весов  $\rho, \sigma$  и  $\tau$ , таким, что  $d(\rho, \sigma) = d(\rho, \tau) = d(\sigma, \tau) = 2$ . Отсюда следует, что  $d(\phi, \psi) = n \Leftrightarrow d(e^\phi, e^\psi) = n$  для произвольных весов  $\phi, \psi \in \Lambda$ . В дальнейшем мы иногда будем заменять, для простоты, расстояние между базисными векторами на расстояние между соответствующими весами.

Поскольку любая матрица  $A \in G_{\text{sc}}(E_6, K)$  сохраняет форму  $F$ , то она сингулярные вектора переводят в сингулярные, а несингулярные — в несингулярные. Следовательно, матрица  $A$  сохраняет расстояние между векторами.

### Утверждение 7.

- (1) Пусть  $u$  — сингулярный вектор, и  $\rho$  — некоторый вес. Предположим, что для произвольного веса  $\sigma \in \Lambda$ , далекого от  $\rho$ , коэффициент  $u_\sigma$  равен 0. Тогда вектор  $u$  близок к  $e^\rho$ .
- (2) Пусть  $u$  — сингулярный вектор, близкий к базисному вектору  $e^\rho$ , и пусть  $\sigma \in \Lambda$  — произвольный вес, далекий от  $\rho$ . Тогда  $u_\sigma = 0$ .

**Доказательство.** Близость векторов  $u$  и  $e^\rho$ , по вышесказанному, равносильна тому, что  $F(u, e^\rho, x) = 0$  для произвольного вектора  $x$ . Отсюда и из вида формы  $F$  сразу следует первый пункт. Для доказательства второго пункта предположим, что  $u_\sigma \neq 0$ . Пусть  $\tau$  — вес, далекий от  $\rho$  и  $\sigma$ . Рассмотрим  $F(u, e^\rho, e^\tau) = 0$ . Из вида формы  $F$  получаем, что это равно  $\pm u_\sigma$  — противоречие.

Пусть  $\alpha \in \Phi$  — произвольный корень. Далее, пусть  $D_\alpha = \langle X_\beta; \beta \perp \alpha \rangle$ . По пункту (3) утверждения 4, пространство раскладывается в прямую сумму трех инвариантных под действием  $D_\alpha$  подпространств:  $V_k^\alpha = \langle e^\phi; \phi \in I_k^\alpha \rangle$ , где  $1 \leq k \leq 3$ . Рассмотрим ограничение  $D_\alpha$  на  $V_k^\alpha$ . Снова по утверждению 4, любое  $X_\beta$ , ограниченное на  $V_1^\alpha$ , является трансвекцией, поэтому  $D_\alpha$ , ограниченное на  $V_1^\alpha$ , совпадает с  $SL(V_1^\alpha, K)$ . Аналогичный факт верен для ограничения на  $V_3^\alpha$ .

В дальнейшем для краткости группу  $D_\delta$  будем обозначать просто  $D$ . Пространства  $V_k^\delta$  в дальнейшем также будут обозначаться через  $V_k$ . Несложно видеть, что для матрицы  $A \in D$  блоки  $A|_{V_1}$  и  $A|_{V_3}$  совпадают (или, более точно, для  $\phi, \psi \in I_1$  получаем  $A_{\phi-\delta, \psi-\delta} = A_{\phi\psi}$ ).

**Лемма 2.2.** *Пусть  $u$  и  $v$  — два близких сингулярных вектора, причем  $u \in V_1$ . Тогда  $u_\rho v_{\sigma-\delta} = u_\sigma v_{\rho-\delta}$  для всех  $\rho, \sigma \in I_1$ .*

*Доказательство.* Пусть  $A_1$  — матрица из  $SL(V_1, K)$ , переводящая  $u$  в  $e^1$ . Тогда, как мы уже упоминали, существует матрица  $A \in D$ , такая, что  $A|_{V_1} = A_1$ . По вышесказанному,  $Au = e^1$  и  $Av = v'$  близки, откуда, по утверждению 7,  $v'_\rho = 0$  при  $22 < \rho \leq 27$ . Из того, что  $A|_{V_1} = A|_{V_3}$ , сразу следует требуемое.

### §3. Корневые элементы

Пусть  $g$  — произвольный корневой элемент. Поскольку наше представление микр весовое, то  $g = e + x$ , где  $x$  — корневой элемент алгебры Шевалле  $L_K$ , т.е. элемент, сопряженный с  $ae_\alpha$ . Тогда  $x$  можно разложить по базису Шевалле в виде суммы (с некоторыми коэффициентами)  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi = E_6$ , и  $h_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ . Поскольку далее нам придется работать с этими коэффициентами более подробно, введем следующее обозначение.

**Определение.** Будем называть **координатой корневого элемента**  $g$  (или матрицы  $g$ ) **при корне**  $\alpha \in \Phi = E_6$  и обозначать через  $(\alpha)_g$  коэффициент при  $e_\alpha$  в разложении элемента  $g - e$  по базису Шевалле.

Таким образом, для корневого элемента  $g$  получается разложение  $g = e + \sum(\alpha)_g e_\alpha + \sum a_i h_i$ , где первая сумма берется по всем  $\alpha \in \Phi = E_6$ , а вторая — по  $1 \leq i \leq 6$ . У первой суммы,  $\sum(\alpha)_g e_\alpha$ , все диагональные коэффициенты равны 0, вторая сумма,  $\sum a_i h_i$ , напротив, полностью диагональна.

**Лемма 3.1.** *Пусть  $g$  — корневой элемент. Тогда*

- (1)  $g_{\phi\psi} = 0$  для любых  $\phi, \psi \in \Lambda$ , таких, что  $d(\phi, \psi) = 2$ ;
- (2)  $g_{\phi\psi} = c_{\phi\psi}(\phi - \psi)_g$  для любых  $\phi, \psi \in \Lambda$ , таких, что  $d(\phi, \psi) = 1$ .

*Доказательство.* Как уже говорилось,  $g = e + \sum(\alpha)_g e_\alpha + \sum a_i h_i$ , где первая сумма берется по всем  $\alpha \in \Phi = E_6$ , а вторая — по  $i = 1, \dots, 6$ . Более того, вторая сумма представляется диагональной матрицей, поэтому в дальнейшем можно рассматривать только первую сумму. Ясно, что если  $d(\phi, \psi) = 2$ , то матричные элементы всех  $e_\alpha$  в позиции  $(\phi, \psi)$  равны 0, что доказывает (1). С другой стороны, если  $d(\phi, \psi) = 1$ , то единственный элементарный корневой элемент  $e_\alpha$ , для которого матричный элемент в позиции  $(\phi, \psi)$  отличен от 0 — это  $e_{\phi-\psi}$ . Отсюда, по определению  $(\phi-\psi)_g$  и  $c_{\phi\psi}$ , следует пункт (2).

**Лемма 3.2.** *Пусть  $g$  — корневой элемент и  $x_\alpha(a)$  — элементарный корневой элемент. Далее, пусть  $g' = x_\alpha(a)gx_\alpha(-a)$ . Тогда если  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ , то  $(\beta)_{g'} = (\beta)_g + N_{\alpha\beta}a(\beta - \alpha)_g$ . Если же  $\angle(\alpha, \beta) > \pi/3$ , то  $(\beta)_{g'} = (\beta)_g$ .*

*Доказательство.* Как уже говорилось,  $g = e + \sum(\beta)_g e_\beta + \sum a_i h_i$ , где первая сумма берется по всем  $\beta \in \Phi$ , а вторая — по  $i = 1, \dots, 6$ . Поэтому

$$g' = x_\alpha(a)gx_\alpha(-a) = e + \sum(\beta)_g x_\alpha(a)e_\beta x_\alpha(-a) + \sum a_i x_\alpha(a)h_i x_\alpha(-a).$$

Несложно видеть, что последняя сумма равна  $\sum a_i h_i + x_\alpha(b)$  для некоторого  $b \in K$ , поэтому на интересующие нас коэффициенты она не влияет. Посмотрим на первую сумму. Если  $\angle(\alpha, \beta) < 2\pi/3$ , то  $(\beta)_g x_\alpha(a)e_\beta x_\alpha(-a) = (\beta)_g e_\beta$ ; если  $\angle(\alpha, \beta) = 2\pi/3$ , то  $(\beta)_g x_\alpha(a)e_\beta x_\alpha(-a) = (\beta)_g(e_\beta + N_{\alpha\beta}ae_{\beta+\alpha})$ ; если же  $\beta = -\alpha$ , то  $(\beta)_g x_\alpha(a)e_\beta x_\alpha(-a) = (\beta)_g(e_\beta + h_\alpha(ab) + ce_\alpha)$  для некоторых  $b, c \in K$ . Отсюда следует требуемое.

**Утверждение 8.**

- (1) *Пусть матрица  $g \in M(27, K)$  равна  $h_\alpha$  для некоторого  $\alpha \in \Phi = E_6$ . Тогда для произвольной тройки попарно далеких весов  $\rho, \sigma$  и  $\tau$  выполняется равенство  $g_{\rho\rho} + g_{\sigma\sigma} + g_{\tau\tau} = 0$ .*

- (2) Для произвольной диагональной матрицы  $g = e + \sum_{i=1}^6 a_i h_i \in M(27, K)$  и произвольной тройки попарно далеких весов  $\rho, \sigma$  и  $\tau$  выполняется равенство  $g_{\rho\rho} + g_{\sigma\sigma} + g_{\tau\tau} = 3$ .
- (3) Для произвольного корневого элемента  $g$  и произвольной тройки попарно далеких весов  $\rho, \sigma$  и  $\tau$  выполняется равенство  $g_{\rho\rho} + g_{\sigma\sigma} + g_{\tau\tau} = 3$ .

*Доказательство.* Несложно видеть, что если  $\phi \in I_1^\alpha$ , то  $g_{\phi\phi} = 1$ , если  $\phi \in I_2^\alpha$ , то  $g_{\phi\phi} = 0$ , а если  $\phi \in I_3^\alpha$ , то  $g_{\phi\phi} = -1$ . По пункту (3) утверждения 5, либо  $\rho, \sigma$  и  $\tau$  принадлежат  $I_2^\alpha$ , либо один из них принадлежит  $I_1^\alpha$ , один —  $I_2^\alpha$  и один —  $I_3^\alpha$ . Отсюда следует первый пункт. Второй сразу следует из первого. Для доказательства третьего пункта достаточно вспомнить, что, как уже говорилось, если  $g$  — корневой элемент, то  $g = e + \sum (\alpha)_g e_\alpha + \sum a_i h_i$ ; при этом первая сумма,  $\sum (\alpha)_g e_\alpha$ , на диагональные коэффициенты не влияет.

**Лемма 3.3.** Пусть дан корень  $\alpha$ . Тогда диагональная матрица  $g = e + \sum a_i h_i \in M(27, K)$  определяется пятнадцатью коэффициентами  $g_{\nu_k, \nu_k}$ , где  $\nu_k \in I_2^\alpha$ , однозначно с точностью до прибавления  $a h_\alpha$ .

*Доказательство.* Заметим, что, по линейности, достаточно показать, что если  $g_{\nu_k, \nu_k} = 1$  для всех  $\nu_k \in I_2^\alpha$ , то  $g = e + a h_\alpha$  для некоторого  $a$ . Предположим, что  $g_{\nu_k, \nu_k} = 1$  для всех  $\nu_k \in I_2^\alpha$ . Если  $\lambda \in I_1^\alpha$  и  $\mu \in I_3^\alpha$  — произвольные веса, причем  $\mu + \delta \neq \lambda$ , то, по предыдущему утверждению, сумма  $g_{\lambda\lambda} + g_{\mu\mu} = 2$ , поскольку, по пункту (3) утверждения 5, вес, далекий от  $\lambda$  и  $\mu$ , принадлежит  $I_2^\alpha$ . Отсюда, из-за произвольности выбора  $\lambda$  и  $\mu$ , следует утверждение леммы.

Перед тем, как перейти к теореме 1, напомним определение.

**Определение.** Вычет матрицы  $A$  — это ранг матрицы  $A - E$  (обозначается  $\text{res } A$ ).

Из свойств вычета нам потребуется два: 1) вычет не меняется при изменении базиса; 2)  $\text{res } AB \leq \text{res } A + \text{res } B$ .

**Теорема 1.** Пусть  $g$  — корневой элемент группы  $G_{sc}(E_6, K)$ ,  $\alpha \in \Phi = E_6$  — такой корень, что  $(\alpha)_g \neq 0$ , а  $\lambda$  такой вес, что  $\lambda, \lambda + \alpha \in \Lambda$ . Тогда переменные:  $(\alpha)_g$ , все  $(\beta)_g$ , такие, что  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$  (таких корней  $\beta$  ровно 20), и  $g_{\lambda\lambda}$ , являются независимыми и однозначно определяют  $g$ .

*Доказательство.* 1. Заметим, что вычет произвольного корневого элемента равен 6. Пусть  $\lambda_i \in I_1^\alpha$ ,  $\nu_k \in I_2^\alpha$  и  $\mu_i \in I_3^\alpha$  при  $1 \leq i \leq 6$  и  $1 \leq k \leq 15$ , причем  $\lambda_i = \mu_i + \alpha$ . Поскольку  $(\alpha)_g \neq 0$  и, по следствию из утверждения 2,  $d(\lambda_i, \mu_j) = 2$ , если  $i \neq j$ , то, по лемме 3.1, строки с номерами  $\lambda_i$  на пересечении со столбцами с номерами  $\mu_j$  образуют диагональную обратимую матрицу. Ранг матрицы  $h = g - E$  равен 6, поэтому любой ее столбец выражается через столбцы с номерами  $\mu_j$ . Следовательно, для  $s \in I_2^\alpha \cup I_3^\alpha$  и  $t \in I_1^\alpha \cup I_2^\alpha$  можно записать, что

$$h_{st} \prod_{i=1}^6 h_{\lambda_i, \mu_i} = \sum_{i=1}^6 \left( h_{\lambda_i, t} h_{s, \mu_i} \prod_{j \neq i} h_{\lambda_j, \mu_j} \right), \quad (3.1)$$

или, по определению матриц  $h$  и  $c$ ,

$$(g_{st} - \delta_{s,t})(\alpha)_g = \sum_{i=1}^6 ((g_{\lambda_i, t} - \delta_{\lambda_i, t})(g_{s, \mu_i} - \delta_{s, \mu_i}) c_{\lambda_i, \mu_i}). \quad (3.2)$$

Несложно видеть, по лемме 3.1, что эта формула верна для всех  $s$  и  $t$ ; более того, чуть далее мы докажем несложное утверждение, что она верна, даже если  $(\alpha)_g = 0$ .

2. Рассмотрим произвольный корень  $\gamma$ , перпендикулярный  $\alpha$ . Как следует из утверждения 4, существуют веса  $\nu_k, \nu_l \in I_2^\alpha$ , такие, что  $\nu_k = \nu_l + \gamma$ , откуда  $(\gamma)_g = c_{\nu_k, \nu_l} g_{\nu_k, \nu_l}$ . Далее, по первому пункту,  $g_{\nu_k, \nu_l}$  выражается через  $g_{\lambda_i, \nu_l}$ ,  $g_{\nu_k, \mu_i}$  и  $(\alpha)_g$ . Коэффициент  $g_{\lambda_i, \nu_l}$  равен либо  $c_{\lambda_i, \nu_l}(\beta)_g$ , если  $\beta = \lambda_i - \nu_l$ , либо 0, если  $\lambda_i - \nu_l \notin \Phi$ . Аналогично,  $g_{\nu_k, \mu_i}$  равен либо  $c_{\nu_k, \mu_i}(\beta)_g$ , если  $\beta = \nu_k - \mu_i$ , либо 0, если  $\nu_k - \mu_i \notin \Phi$ . При этом, по утверждению 4,  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ . Таким образом,  $(\gamma)_g$  выражается, причем полиномиально, если зафиксировать  $(\alpha)_g$ , через  $(\beta)_g$ , где  $\angle(\alpha, \gamma) = \pi/2$ ,  $\angle(\alpha, \beta) \leq \pi/3$ . Следовательно, через них же выражаются все коэффициенты  $g_{\mu_i, \mu_j}$  и  $g_{\lambda_i, \lambda_j}$  при  $i \neq j$ .

Покажем, что все диагональные коэффициенты также выражаются через требуемые 22 переменные. Подобно предыдущему,  $g_{\nu_k, \nu_k}$  выражается через  $(\beta)_g$ , где  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ . Тогда по лемме 3.3 остальные диагональные коэффициенты также определяются однозначно с точностью до прибавления к  $g_{\lambda_i, \lambda_i}$  и вычитания из  $g_{\mu_i, \mu_i}$  одного и тоже числа  $a \in K$ . Таким образом, все диагональные коэффициенты выражаются через  $(\beta)_g$ , где  $\angle(\alpha, \beta) \leq \pi/3$ , и  $g_{\lambda\lambda}$ . Осталось показать, что это выражение является, если зафиксировать  $(\alpha)_g$ , полиномиальным. Это ясно для коэффициентов  $g_{\nu_k, \nu_k}$ . Кроме этого, заметим, что  $g_{\rho\rho}$  для всех  $\rho \in \Lambda$  линейно выражаются через  $h_{\alpha_i}$ , где  $1 \leq i \leq 6$ . Следовательно,  $h_{\alpha_i}$  линейно выражаются через  $g_{\nu_k, \nu_k}$  и  $g_{\lambda\lambda}$ , то есть полиномиально выражаются, если зафиксировать  $(\alpha)_g$ , через  $(\beta)_g$ , где  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ , и  $g_{\lambda\lambda}$ . Поэтому и  $g_{\rho\rho}$  полиномиально выражаются, если зафиксировать  $(\alpha)_g$ , через те же самые переменные.

Таким образом, коэффициенты матрицы  $g$  вида  $g_{\lambda_i, *}$  и  $g_{*, \mu_i}$  выражаются, причем полиномиально, если зафиксировать  $(\alpha)_g$ , через  $(\beta)_g$ , где  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ , и  $g_{\lambda\lambda}$ . Отсюда, по формуле (3.2), следует, что все коэффициенты матрицы  $g$  выражаются, причем полиномиально, если зафиксировать  $(\alpha)_g$ , через те же самые переменные.

3. Осталось убедиться, что эти переменные могут принимать любые значения. Для этого достаточно сконструировать корневой элемент с данными значениями переменных. Пусть  $f$  — некоторый корневой элемент и  $\beta$  — произвольный корень, образующий угол  $\pi/3$  с  $\alpha$ . Сопряжем  $f$  корневым элементом  $h = x_{\beta-\alpha} \left( N_{\beta-\alpha, \alpha} \frac{(\beta)_g}{(\alpha)_g} \right)$ . Согласно лемме 3.2, при таком сопряжении могут измениться коэффициенты  $(\gamma)_f$  только при  $\angle(\gamma, \beta - \alpha) \leq \pi/3$ . Поскольку  $\angle(\alpha, \beta - \alpha) = 2\pi/3$ , то координата при корне  $\alpha$  не меняется, а из всех корней, образующих угол  $\pi/3$  с  $\alpha$ , меняется только координата при корне  $\beta$ :  $(\beta)_{hfh^{-1}} = (\beta)_f + \frac{(\beta)_g(\alpha)_f}{(\alpha)_g}$ . Положим  $f = x_\alpha((\alpha)_g)$  и сопряжем его элементом  $x_{\beta-\alpha} \left( N_{\beta-\alpha, \alpha} \frac{(\beta)_g}{(\alpha)_g} \right)$  для всех корней  $\beta$ , образующих угол  $\pi/3$  с  $\alpha$ . Несложно видеть, что после всех таких сопряжений  $(\gamma)_f = (\gamma)_g$  для любого корня  $\gamma$ , такого, что  $\angle(\gamma, \alpha) \leq \pi/3$ . Таким образом, первая 21 требуемая переменная уже получена.

Заметим, что, по лемме 3.2, при сопряжении  $f$  с помощью  $x_{-\alpha}(a)$  координаты при корне  $\alpha$  и корнях  $\beta$ , образующих угол  $\pi/3$  с  $\alpha$ , не меняются (то есть,  $(\alpha)_f = (\alpha)_{x_{-\alpha}(a)f x_{-\alpha}(-a)}$ ,  $(\beta)_f = (\beta)_{x_{-\alpha}(a)f x_{-\alpha}(-a)}$ ). При этом к сумме  $\sum a_i h_i$  прибавляется  $h_\alpha(ab)$ , где  $b$  от  $a$  не зависит. Поэтому для получения требуемого значения всех 22 переменных достаточно сопрячь то, что получилось в предыдущем абзаце, с  $x_{-\alpha}$  с подходящим коэффициентом.

*Замечание.* Несложно видеть, что для произвольного неединичного корневого элемента  $g$  существует корень  $\alpha$ , такой, что  $(\alpha)_g \neq 0$ . В самом деле,  $g$  сопряжен элементарному корневому элементу и, следовательно, все собственные числа  $g$  равны 1. Поэтому, если

$g$  диагонален, то он единичен.

Следующий технический факт пригодится нам в дальнейшем. Он, вообще говоря, следует из доказательства теоремы 1, однако написанное ниже доказательство существенно короче и понятнее **формального** вывода этой леммы из теоремы.

**Лемма 3.4.** *Пусть  $g$  — корневой элемент, а  $\alpha$  — корень, причем  $(\beta)_g = 0$  для всех  $\beta$ , таких, что  $\angle(\alpha, \beta) > \pi/3$ . Тогда  $g_{\rho\rho} = 1$  для всех  $\rho \in \Lambda$ .*

*Доказательство.* Предположим, что утверждение леммы не выполняется. Заметим, что  $g_{\phi\psi}$  может быть не равным 0, только если: 1)  $\phi \in I_1^\alpha$ , а  $\psi \in I_2^\alpha \cup I_3^\alpha$ ; 2)  $\phi \in I_2^\alpha$ , а  $\psi \in I_3^\alpha$ ; 3)  $\phi = \psi$ . Рассмотрим перестановочную матрицу  $f \in GL(27, K)$ , которая переводит  $I_1^\alpha$  в  $I_1$ ,  $I_2^\alpha$  в  $I_2$ , а  $I_3^\alpha$  в  $I_3$ . Тогда несложно видеть, что матрица  $f g f^{-1}$  будет верхнетреугольной. Поскольку  $g$  корневой элемент, то он сопряжен элементарному корневому элементу. Поэтому все собственные числа матрицы  $g$  (и  $f g f^{-1}$ ) равны 1. Отсюда сразу следует требуемое.

Обозначим через  $V^g$  шестимерное подпространство  $\text{Im}(g - E)$ . Иначе говоря, это подпространство, порожденное всеми столбцами матрицы  $g - E$ . В дальнейшем нам также понадобится шестимерное подпространство  $V_g < V^*$ , порожденное всеми строками матрицы  $g - E$ . Как известно (см., например, [92]),  $c_{\phi\psi} = c_{\psi\phi}$  для всевозможных весов  $\phi$  и  $\psi$ . Отсюда следует, что  $x_\alpha(a)^T = x_{-\alpha}(a)$ . Поэтому, если  $g$  является корневым элементом, то  $g^T$  — тоже, и если  $g \in G_{sc}(E_6, K)$ , то  $g^T$  — тоже. Таким образом, мы можем "транспонировать" все последующие утверждения вместе с их доказательствами, транспонируя все обозначения, равенства и т.п., и меняя местами слова "строки" и "столбцы". При этом корни будут переходить, естественно, в противоположные, а веса останутся на месте (поскольку мы отождествляем веса и ковеса). В частности, множества  $I_1^\alpha, I_2^\alpha$  и  $I_3^\alpha$  при "транспонировании" остаются на месте. Всюду в дальнейшем, упоминая  $V_g$ , мы полагаем, что нам известны все утверждения, "транспонированные" к уже доказанным утверждениям про  $V^g$ . В остальных случаях, если используется "транспонированное" утверждение, то мы упоминаем это.

**Лемма 3.5.** *Пусть  $g$  — корневой элемент и  $\alpha$  — произвольный корень. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1)  $(\alpha)_g \neq 0$ ;
- (2) шесть столбцов  $(g - E)_{*, \mu_i}$ , где  $\mu_i \in I_3^\alpha$  и  $1 \leq i \leq 6$ , порождают шестимерное пространство  $V^g$ ;
- (3) в  $V^g$  существует базис  $\{v^i\}_{i=1}^6$ , такой, что  $v_{\lambda_j}^i = \delta_{i,j}$ , где  $1 \leq i \leq 6$ ,  $\lambda_j \in I_1^\alpha$  и  $1 \leq j \leq 6$ .

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_i \in I_1^\alpha$ ,  $\nu_k \in I_2^\alpha$  и  $\mu_i \in I_3^\alpha$  при  $1 \leq i \leq 6$  и  $1 \leq k \leq 15$ , причем  $\lambda_i = \mu_i + \alpha$ . Пусть (1) выполняется. Как уже отмечалось в теореме 1, если  $(\alpha)_g \neq 0$ , то подматрица  $\{g_{\lambda_i, \mu_j}\}_{i,j=1}^6$  диагональна и обратима. Отсюда следуют пункты (2) и (3). Таким образом, мы показали переходы из (1) в (2) и (3). Покажем переход из (2) в (1). Пусть (1) не выполняется, то есть  $(\alpha)_g = 0$ . Тогда  $g_{\lambda_i, \mu_j} = 0$  для всех  $1 \leq i, j \leq 6$ . Далее, (2) выполняется, то есть столбцы  $(g - E)_{*, \mu_j}$ , где  $1 \leq j \leq 6$ , порождают подпространство  $V^g$ , в котором лежат все столбцы матрицы  $g - E$ . Поэтому все строки матрицы  $g - E$  с номерами  $\lambda_i$  при  $1 \leq i \leq 6$  — нулевые. В частности,  $g_{\lambda_j, \nu_k} = 0$  для всех  $1 \leq j \leq 6, 1 \leq k \leq 15$ . Поэтому  $(\beta)_g = 0$  для таких  $\beta$ , что  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$  и, следовательно,  $g_{\nu_k, \mu_i} = 0$  для всех  $1 \leq i \leq 6, 1 \leq k \leq 15$ . Отсюда, поскольку (2) выполняется,  $g_{\nu_k, \rho} = \delta_{\nu_k, \rho}$  для

произвольных  $1 \leq k \leq 15$  и  $\rho \in \Lambda$ . В частности,  $g_{\nu_k, \nu_l} = \delta_{\nu_k, \nu_l}$  для всех  $1 \leq k, l \leq 15$ . Кроме этого, как уже говорилось,  $g_{\lambda_i, \rho} = \delta_{\lambda_i, \rho}$  для произвольных  $1 \leq i \leq 6$  и  $\rho \in \Lambda$ , поэтому, по лемме 3.3,  $g_{\rho\rho} = 1$  для произвольного  $\rho \in \Lambda$ . Заметим, что для произвольных  $1 \leq i \neq j \leq 6$  существуют  $\nu_k \neq \nu_l \in I_2^\alpha$ , такие, что  $g_{\mu_i, \mu_j} = \pm g_{\nu_k, \nu_l}$ , что равно 0. Таким образом,  $g_{\rho, \mu_i} = \delta_{\rho, \mu_i}$ , что противоречит (2).

Осталось доказать переход из (3) в (1). Предположим, что (3) выполняется, а (1) — нет. Тогда  $g_{\lambda_i, \mu_j} = 0$  для всех  $1 \leq i, j \leq 6$ . По (3), если  $u \in V^g$  и  $u_{\lambda_j} = 0$  для всех  $1 \leq j \leq 6$ , то вектор  $u$  выражается через  $v^i$  с нулевыми коэффициентами, то есть  $u = 0$ . Поэтому  $g_{\rho, \mu_j} = \delta_{\rho, \mu_j}$ . Отсюда следует, что  $(\gamma)_g = 0$  для всех  $\gamma$ , таких, что  $\angle(\gamma, -\alpha) > \pi/3$ , поэтому мы находимся в условиях предыдущей леммы. Поэтому  $g_{\rho\rho} = 1$  для всех  $\rho \in \Lambda$ . Отсюда следует, что  $g_{\lambda_j, \rho} = \delta_{\lambda_j, \rho}$ , поэтому (3) не выполняется — противоречие.

В теореме 1 и лемме 3.5 у нас появилось отображение из множества корневых подгрупп в множество шестимерных подпространств, переводящее элемент  $g$  в подпространство  $V^g$ . В следующем следствии показывается, что это инъекция. Далее, в §4, мы покажем, что при ограничении множества шестимерных подпространств до множества сингулярных шестимерных подпространств это отображение становится биекцией.

**Следствие.** *Каждой корневой подгруппе соответствует шестимерное подпространство; корневым элементам из разных корневых подгрупп соответствуют разные подпространства.*

*Доказательство.* Надо доказать, что если  $V^g = V^h$ , где  $g$  и  $h$  — корневые элементы, то  $g$  и  $h$  лежат в одной корневой подгруппе; иначе говоря,  $g' = g - E$  кратно  $h' = h - E$ . Пусть  $\alpha$  — корень, такой, что  $(\alpha)_g \neq 0$ . Следовательно, выполняется пункт (3) предыдущей леммы, поэтому  $(\alpha)_h \neq 0$ . Ясно, что базис  $\{v^i\}_{i=1}^6$  из того же пункта определяется однозначно. Заметим, что  $g'_{*, \mu_i} = (\alpha)_g c_{\lambda_i, \mu_i} v^i$  для всех  $1 \leq i \leq 6$  и, аналогично,  $h'_{*, \mu_i} = (\alpha)_h c_{\lambda_i, \mu_i} v^i$ . Отсюда, по теореме 1,  $g' = \frac{(\alpha)_g}{(\alpha)_h} h'$ , что доказывает следствие.

Закончим мы этот параграф двумя несложными, но, на наш взгляд, интересными и полезными утверждениями.

**Утверждение 9.** *Пусть  $g \in G_{sc}(E_6, K)$ ,  $\alpha$  — произвольный корень. Тогда существует такой корень  $\beta$ , что матрица  $\{g_{\lambda^\beta, \mu^\alpha}\}_{\lambda^\beta \in I_1^\beta, \mu^\alpha \in I_3^\alpha}$  обратима.*

*Доказательство.* Рассмотрим корневой элемент  $f = gx_{-\alpha}(a)g^{-1}$ . Заметим, что  $V^{x_{-\alpha}(a)}$  порождено столбцами  $(x_{-\alpha}(a))_{*, \lambda^\alpha} = \pm ae^{\lambda^\alpha - \delta}$ , где  $\lambda^\alpha$  пробегает  $I_1^\alpha$ . Тогда  $V^f$  порождено шестью столбцами  $g_{*, \mu^\alpha}$ , где  $\mu^\alpha \in I_3^\alpha$ . Поскольку корневой элемент  $f$  — не единичный, то, по замечанию после теоремы 1, существует такой корень  $\beta$ , что  $(\beta)_f \neq 0$ . Следовательно, выполняется пункт (3) леммы 3.5, из которого следует требуемое утверждение.

**Утверждение 10.** *Пусть  $g$  — корневой элемент. Если  $(\alpha)_g = 0$ , то условие (3.2) выполняется.*

*Доказательство.* Поскольку для единичной матрицы условие (3.2) выполняется, то, по замечанию после теоремы 1, можно считать, что существует такой корень  $\beta$ , что  $(\beta)_g \neq 0$ . Тогда, по теореме 1, все коэффициенты матрицы  $g$  выражаются через  $(\beta)_g, (\gamma)_g$ , где  $\angle(\beta, \gamma) = \pi/3$  и  $g_{\rho\rho}$ , где  $\rho, \rho - \beta \in \Lambda$ . Следовательно, (3.2) можно рассматривать как равенство многочленов от 22 переменных. Более того, коэффициенты этих многочленов целые и от поля не зависят, а нам необходимо доказать равенство

многочленов в левой и правой части (3.2). Следовательно, вместо произвольного поля можно рассматривать, например, поле комплексных чисел. Тогда условие, что  $(\alpha)_g = 0$ , определяет подмногообразие на единицу меньшей размерности. Однако над полем комплексных чисел из равенства многочленов везде, кроме подмногообразия на единицу меньшей размерности, следует равенство коэффициентов. Поэтому многочлены тождественно равны над любым полем.

## §4. Корневые элементы и сингулярные подпространства

В настоящем параграфе мы исследуем сингулярные подпространства и их связь с корневыми элементами. В частности, мы докажем, что любому шестимерному сингулярному подпространству соответствует некоторая корневая подгруппа (обратное отмечалось в §3), а также обсудим, как по двум данным шестимерным сингулярным подпространствам определить угол между соответствующими корневыми подгруппами.

### 1. Сингулярные подпространства

Напомним определение, данное нами в §2. А именно, вектор  $v$  называется сингулярным, если для любого вектора  $x$  выполняется равенство  $Q(x, v) = 0$ . Подпространство называется сингулярным, если любой его вектор сингулярен.

#### Утверждение 11.

- (1) Пусть  $g$  — произвольный элемент из  $G_{sc}(E_6, K)$ , а  $\alpha$  — произвольный корень. Тогда шестимерное подпространство  $\langle g_{*\phi} : \phi \in I_3^\alpha \rangle$  сингулярно.
- (2) Если  $g$  — корневой элемент, то шестимерное подпространство  $V^g \leq V$  сингулярно.

*Доказательство.* Как уже упоминалось в §2,  $g$  переводит сингулярные вектора в сингулярные. Заметим, что все  $e^\rho$  сингулярны, поэтому и все столбцы матрицы  $g$  сингулярны. Далее, из вида формы  $F$  следует, что для двух различных весов  $\rho$  и  $\sigma$  равенство  $F(e^\rho, e^\sigma, x) = 0$  выполняется для любого  $x$  если и только если разность весов  $\rho$  и  $\sigma$  является корнем. По утверждению 1, отсюда следует пункт (1).

Для доказательства второго пункта подберем элемент  $g' \in G_{sc}(E_6, K)$  и корень  $\alpha$ , такие, что  $\langle g'_{*\phi} : \phi \in I_3^\alpha \rangle = V^g$ . Пусть  $\alpha$  — корень, такой, что  $(\alpha)_g \neq 0$ . Далее, положим  $f = x_{-\alpha} \left( -\frac{1}{(\alpha)_g} \right)$  и рассмотрим матрицу  $g' = f g f^{-1}$ . Несложно убедиться, что этот элемент нам подходит.

Цель этого пункта — доказать, что каждое шестимерное сингулярное подпространство соответствует какой-то корневой подгруппе. Начнем мы со следующей леммы:

#### Лемма 4.1.

- (1) Пусть  $1 \leq n \leq 6$ . Тогда множество упорядоченных наборов из  $n$  попарно близких весов под действием группы Вейля имеет, при  $n \neq 5$ , одну орбиту, а при  $n = 5$  — две.
- (2) Пусть  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ . Тогда упорядоченный набор из  $n$  базисных векторов, порождающих  $n$ -мерное сингулярное подпространство, может быть переведен группой  $\widetilde{WT} < G_{sc}(E_6, K)$ , в первые  $n$  базисных векторов.

*Замечание.* В первом пункте при  $n = 5$  одна орбита — это пятерки попарно близких весов, вкладывающиеся в какую-нибудь шестерку. В качестве примера можно указать первые пять весов. Вторая орбита — это исключительные пятерки попарно близких весов, не вкладывающиеся ни в какую шестерку попарно близких весов. В качестве примера можно взять седьмой и первые четыре веса.

*Доказательство.* Пусть  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  — попарно близкие веса. Посмотрим, куда мы их сможем перевести при помощи группы  $W$ ; для наглядности будем действовать только элементами  $w_i = w_{\alpha_i}$  и образы весов  $\rho_j$  обозначать теми же буквами. Поскольку весовая диаграмма связна, то вес  $\rho_1$  можно перевести в первый вес. Далее, несложно видеть, что после удаления из весовой диаграммы ребер, соответствующих  $\alpha_1$ , веса на

расстоянии 1 от первого веса образуют связный подграф (таких весов ровно 16). Это означает, что мы можем, оставляя на месте первый вес, перевести  $\rho_2$  (если, конечно,  $n > 1$ ) во второй вес, поскольку из всех  $w_i$  только  $w_1$  меняет первый вес. Аналогично, после удаления из весовой диаграммы ребер, соответствующих  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$ , веса на расстоянии 1 от первого и второго весов образуют связный подграф (таких весов ровно 10). Это позволяет нам перевести  $\rho_3$  (если  $n > 2$ ) в третий вес, оставляя первые два без изменений. Далее, после удаления из весовой диаграммы ребер, соответствующих  $\alpha_1, \alpha_3$  и  $\alpha_4$ , веса на расстоянии 1 от первого, второго и третьего весов также образуют связный подграф (таких весов 6). Это позволяет перевести  $\rho_4$  (если  $n > 3$ ) в четвертый вес, оставив первые три без изменений. Наконец, существует ровно три веса, а именно пятый, шестой и седьмой, близких к первым четырем весам. При этом пятый и шестой веса близки друг к другу, а седьмой — далек от них. Поэтому, если  $n = 5$ , то, оставляя первые четыре веса на месте, вес  $\rho_5$  можно перевести в пятый или в седьмой вес. Если же  $n = 6$ , то, оставляя первые четыре веса на месте, можно вес  $\rho_5$  перевести в пятый, а  $\rho_6$  — в шестой вес.

Как мы уже отмечали в §2, действие группы Вейля  $W$  на множестве весов  $\Lambda$  соответствует действию расширенной группы Вейля  $\widetilde{W}$  на множестве плюс/минус весов  $\Lambda^\pm = \{\pm e^\rho; \rho \in \Lambda\}$ . Там же, в §2, мы упоминали, что расстояние между базисными векторами равно расстоянию между соответствующими весами. Таким образом,  $n$  попарно близким базисным векторам соответствует  $n$  попарно близких весов. В частности, в предыдущем абзаце мы показали, что если  $n = 1, 2, 3, 4$  или 6, то набор  $a^1, a^2, \dots, a^n$ , где  $a^i$  — попарно близкие веса и  $\dim \langle a^1, a^2, \dots, a^n \rangle = n$ , можно перевести действием группы  $\widetilde{W}$  в набор  $(\pm e^1, \pm e^2, \dots, \pm e^n)$ . Несложно видеть, что для любого полученного набора базисных векторов существует матрица из  $D$ , переводящая его в нужный ("положительный"). Отсюда следует требуемое.

Перед доказательством основного утверждения этого раздела, докажем две вспомогательные леммы.

**Лемма 4.2.** *Пусть  $n = 1, 2, 3, 4$  или 6,  $\{u^i\}_{i=1}^n$  — некоторые сингулярные вектора, образующие  $n$ -мерное сингулярное подпространство. Далее, пусть существует такой корень  $\alpha$ , что  $u_{\lambda_j}^i = c_{\lambda_j, \lambda_j - \alpha} \delta_{i,j}$ , где  $\lambda_j \in I_1^\alpha$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq 6$ . Тогда существует такой корневой элемент  $h$ , что  $h_{*, \lambda_i - \alpha} = u^i$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_i \in I_1^\alpha$ ,  $\nu_k \in I_2^\alpha$  и  $\mu_i \in I_3^\alpha$  при  $1 \leq i \leq 6$  и  $1 \leq k \leq 15$ , причем  $\lambda_i = \mu_i + \alpha$ . Мы хотим сконструировать требуемый корневой элемент  $h$ . По теореме 1 корневой элемент  $h$  существует и однозначно определен, если определены  $(\alpha)_h \neq 0$ ,  $(\beta)_h$  при  $\angle(\beta, \alpha) = \pi/3$  и  $h_{\lambda_1, \lambda_1}$ . Несложно видеть из доказательства теоремы 1, что вместо  $h_{\lambda_1, \lambda_1}$  можно определять  $h_{\mu_1, \mu_1}$ . Положим  $(\alpha)_h$  равным 1,  $(\beta)_h$  при  $\angle(\beta, \alpha) = \pi/3$  равным  $u_{\nu_k}^i c_{\nu_k, \mu_i}$ , если  $\nu_k - \mu_i = \beta$ , и  $h_{\mu_1, \mu_1} = u_{\mu_1}^1$ . Если остались незадокументированные  $(\beta)_h$  (это может быть, если  $n < 4$ ), то их можно приравнять произвольному числу. Нам необходимо проверить корректность этого определения (заметим, что  $(\beta)_h$  определены, вообще говоря, неоднозначно), а также то, что  $u^i = h_{*, \mu_i}$ .

Как говорилось в §3, столбцы с номерами  $\mu_i$  матрицы корневого элемента  $g$  выглядят следующим образом:

- (1)  $g_{\lambda_i, \mu_i} = c_{\lambda_i, \mu_i} (\alpha)_g$  для всех  $1 \leq i \leq 6$ ;
- (2)  $g_{\lambda_j, \mu_i} = 0$  для всех  $1 \leq j \neq i \leq 6$ ;
- (3)  $g_{\nu_k, \mu_i} = 0$  для всех  $1 \leq i \leq 6$  и  $1 \leq k \leq 15$ , если  $d(\nu_k, \mu_i) = 2$ ;

- (4) для всех  $1 \leq i, j \leq 6$  коэффициент  $g_{\mu_j, \mu_i}$  однозначно выражается через  $g_{\nu_k, \mu_i}$  и  $g_{\lambda_i, \mu_i}$  при  $1 \leq k \leq 15$ ;
- (5)  $g_{\nu_k, \mu_i} = c_{\nu_k, \mu_i}(\nu_k - \mu_i)_g$  для всех  $1 \leq i \leq 6$  и  $1 \leq k \leq 15$ , таких, что  $\nu_k - \mu_i \in \Phi$ ;
- (6) для всех  $1 \leq i, j \leq 6$  коэффициент  $g_{\mu_i, \mu_i}$  однозначно выражается через  $g_{\nu_k, \mu_i}$ ,  $g_{\lambda_i, \mu_i}$ ,  $g_{\mu_j, \mu_j}$  и  $g_{\nu_k, \mu_j}$  при  $1 \leq k \leq 15$ .

Далее мы проверим, что столбцы  $u^i$  удовлетворяют этим условиям. Из этого сразу следует и корректность вышеописанного определения  $h$ , и то, что  $u^i = h_{*, \mu_i}$  (поскольку столбцы  $h_{*, \mu_i}$  при  $1 \leq i \leq n$  также образуют  $n$ -мерное сингулярное подпространство по утверждению 11).

Заметим, что первые два условия для столбцов  $u^i$  выполняются, ибо по условию  $u_{\lambda_j}^i = c_{\lambda_j, \lambda_j - \alpha} \delta_{i,j}$ . Докажем, что  $u_{\nu_k}^i = 0$ , если  $d(\nu_k, \mu_i) = 2$  (это условие (3) для столбцов  $u^i$ ). Для этого рассмотрим, чему может быть равно  $Q(e_{\mu_j}, u^i)$ , где  $i \neq j$  и  $d(\mu_j, \nu_k) = 2$  (такой вес  $\mu_j$  существует по пункту (4) утверждения 6). С одной стороны, это сумма пяти слагаемых, в каждое из которых входит в качестве сомножителя какое-то  $\lambda_l$ ,  $l \neq j$ . Поэтому все слагаемые, кроме  $\pm u_{\nu_k}^i u_{\lambda_j}^i$ , равны 0. Поскольку вектор  $u^i$  сингулярен, то вся сумма должна равняться нулю, поэтому  $u_{\nu_k}^i = 0$ . Аналогично, рассматривая  $Q(e_{\nu_m}, u^i)$ , где  $d(\nu_m, \mu_i) = d(\nu_m, \mu_j) = 2$ , несложно убедиться, что  $u_{\mu_j}^i$  при  $i \neq j$  однозначно выражается через  $u_{\nu_k}^i$ ,  $1 \leq k \leq 15$  (это условие (4)).

Далее, пусть  $n > 1$ . Мы хотим доказать, что  $u_{\mu_j}^j$  однозначно выражается через  $u_{\mu_i}^i$ ,  $u_{\nu_k}^i$  и  $u_{\nu_k}^j$ ,  $1 \leq k \leq 15$  (условие (6)), а также, что  $u_{\nu_k}^i c_{\nu_k, \mu_i} = u_{\nu_l}^j c_{\nu_l, \mu_j}$ , если  $\nu_k - \mu_i = \nu_l - \mu_j$  (это условие (5) и, заодно, корректность определения  $h$ ). Пусть  $u = u^i + u^j$ . Вектор  $u$  по предположению сингулярен, поэтому  $Q(x, u) = 0$  для всех  $x \in V$ . Для доказательства первого утверждения рассмотрим  $x = e_{\nu_k}$ , где  $d(\nu_k, \mu_i) = d(\lambda_j, \nu_k) = 2$ . Тогда  $Q(x, u)$  является суммой пяти слагаемых:  $\pm u_{\mu_j} u_{\lambda_i}$ ,  $\pm u_{\mu_i} u_{\lambda_j}$ , а также трех слагаемых вида  $\pm u_{\nu_l} u_{\nu_m}$ . Из равенства этой суммы 0 следует первое утверждение.

Пусть  $\nu_k - \mu_i = \nu_l - \mu_j$ . Тогда  $\nu_k - \nu_l = \mu_i - \mu_j \in \Phi$ , то есть  $d(\nu_k, \nu_l) = 1$ . По следствию из утверждения 2,  $d(\mu_i, \nu_l) = d(\mu_j, \nu_k) = 2$ . Поэтому нам необходимо доказать, что  $u_{\nu_k} c_{\nu_k, \mu_i} = u_{\nu_l} c_{\nu_l, \mu_j}$ . По пункту (5) утверждения 6, если  $d(\nu_k, \nu_l) = 1$ , то существует вес  $\mu_m$ , такой, что  $d(\nu_k, \mu_m) = d(\nu_l, \mu_m) = 2$ . Тогда  $m \neq i, j$ . Отсюда, по следствию из утверждения 2,  $d(\lambda_i, \mu_m) = d(\lambda_j, \mu_m) = 2$ . Поскольку  $u_{\lambda_s} = 0$  при  $s \neq i, j$ , то  $Q(e_{\mu_m}, u)$  есть сумма только двух слагаемых:  $\pm u_{\nu_k} u_{\lambda_j}$  и  $\pm u_{\nu_l} u_{\lambda_i}$ . Таким образом,  $u_{\nu_k} = \pm u_{\nu_l}$ . Знак  $\pm$  в этом выражении можно не считать, достаточно того, что он определен однозначно и не зависит от  $u$ . В самом деле, столбцы с номерами  $\mu_i$  и  $\mu_j$  корневого элемента  $h$  образуют двумерное сингулярное подпространство, поэтому равенство  $u_{\nu_k} = \pm u_{\nu_l}$  выполняется для  $u = h_{*, \mu_i} + h_{*, \mu_j}$ . Поскольку для  $u = h_{*, \mu_i} + h_{*, \mu_j}$  требуемое равенство  $u_{\nu_k} c_{\nu_k, \mu_i} = u_{\nu_l} c_{\nu_l, \mu_j}$  выполняется, то  $\pm 1 = c_{\nu_k, \mu_i} c_{\nu_l, \mu_j}$ , и, поэтому, требуемое равенство выполняется и для произвольного  $u$ .

**Лемма 4.3.** Пусть  $n = 1, 2, 3, 4$  или  $6$ ,  $\{u^i\}_{i=1}^n$  — некоторые сингулярные вектора, образующие  $n$ -мерное сингулярное подпространство. Далее, пусть существует такой корень  $\alpha$ , что матрица  $\{u_{\lambda_j}^i\}$ , где  $\lambda_j \in I_1^\alpha$ ,  $1 \leq i \leq n$  и  $1 \leq j \leq 6$ , имеет ранг  $n$ . Тогда существует матрица  $g \in G_{sc}(E_6, K)$ , что  $g_{*i} = u^i$  при  $i \leq n, 5$ . Если  $n = 6$ , то  $g_{*6} = au^6$ ,  $a \in K^*$ .

*Доказательство.* Поскольку матрица  $\{u_{\lambda_j}^i\}$ , где  $1 \leq i \leq n$  и  $1 \leq j \leq 6$ , имеет ранг  $n$ , то ее можно дополнить до обратимой матрицы  $A$  размером  $6 \times 6$ . Далее, найдем такую матрицу  $B$ , что  $AB_{ij} = c_{\lambda_j, \mu_j} \delta_{i,j}$ , где  $\mu_j = \lambda_j - \alpha \in I_3^\alpha$ ,  $1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6$ . Если

$n < 6$ , то можно считать, что  $B$  принадлежат  $SL(6, K)$ . Если же  $n = 6$ , то того же можно добиться, умножая  $u^6$  на скаляр. В дальнейшем, поэтому, мы всегда полагаем, что  $B \in SL(6, K)$ . Далее, рассмотрим матрицу  $C \in D_\alpha$ , такую, что  $C_{\lambda_i, \lambda_j} = B_{ij}$  при  $1 \leq i, j \leq 6$ . Заметим, что тогда столбцы  $v^i = Cu^i$  попадают в условия предыдущей леммы, поэтому существует такой корневой элемент  $h$ , что  $h_{*, \mu_i} = v^i = Cu^i$ , при  $\mu_i = \lambda_i - \alpha \in I_3^\alpha$  и  $1 \leq i \leq n$ . По лемме 4.1, существует матрица  $X$ , такая, что  $Xe_i = e_{\mu_i}$  для  $1 \leq i \leq 6$ . Следовательно,  $u^i = C^{-1}h_{*, \mu_i} = \{C^{-1}h\}_{*, \mu_i} = \{C^{-1}hX\}_{*, i}$ . Если обозначить  $g := C^{-1}hX$  и вспомнить, что  $u^6$  мы делили на некоторый определитель, неравный 0, то получим требуемое равенство.

**Теорема 2.** *Пусть  $n = 1, 2, 3, 4$  или  $6$ ,  $\{u^i\}_{i=1}^n$  — некоторые сингулярные вектора, порождающие  $n$ -мерное сингулярное подпространство. Для произвольного набора сингулярных векторов  $\{v^i\}_{i=1}^n$ , порождающих  $n$ -мерное сингулярное подпространство, существует матрица  $g \in G_{sc}(E_6, K)$ , такая, что  $u^i = gv^i$  при  $i \leq n, 5$ . Если  $n = 6$ , то  $u^6 = agv^6$ , где  $a \in K^*$ .*

*Доказательство.* Заметим, что нам достаточно доказать теорему для  $\{v^i\}_{i=1}^n = \{e^i\}_{i=1}^n$ . Пусть  $n = 1$ . Тогда существует вес  $\rho$ , такой, что  $u_\rho^1 \neq 0$ . Если взять корень  $\alpha$  такой, что  $\rho - \alpha \in \Lambda$ , то мы можем применить предыдущую лемму.

Пусть  $1 < n < 5$ . По уже доказанному, можно перевести все  $u^i$ ,  $1 \leq i < n$ , в  $e^i$ . Рассмотрим образ при таком переводе вектора  $u^n$ , который мы назовем  $u$ . Покажем, что  $u_\rho = 0$ , если для какого-то  $i$ ,  $1 \leq i < n$ ,  $d(i, \rho) = 2$ . В самом деле, пусть  $\sigma$  — вес, далекий от  $i$  и  $\rho$ , и рассмотрим  $F(e^i, u, e^\sigma) = \pm u_\rho$ . Понятно, что это равно 0, поскольку вектора  $u$  и  $e^i$  близки. Поэтому  $u_\rho = 0$ . Следовательно, существует вес  $\rho$ , такой, что  $d(i, \rho) = 1$ ,  $1 \leq i < n$ , и  $u_\rho \neq 0$ . Воспользовавшись первым пунктом леммы 4.1, несложно убедиться, что если  $d(i, \rho) = 1$  при  $1 \leq i < n$ , то, при  $n < 5$ , существует корень  $\alpha$ , такой, что  $\rho - \alpha, i - \alpha \in \Lambda$ ,  $1 \leq i < n$ . Тогда, по выбору  $\rho$ , мы снова находимся в условиях предыдущей леммы.

Пусть  $n = 6$ . По уже доказанному, можно перевести все  $u^i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , в  $e^i$ ; для образов векторов  $u^5$  и  $u^6$  при этом преобразовании мы будем использовать прежние обозначения. Тогда, также как и в предыдущем случае,  $u_\rho^5 = 0$  и  $u_\rho^6 = 0$ , если для какого-то  $i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $d(i, \rho) = 2$ . Далее, можно считать, что  $u_i^5, u_i^6 = 0$  при  $1 \leq i \leq 4$ . Тогда у векторов  $u^5$  и  $u^6$  могут быть ненулевыми только три координаты: при 5-ом, 6-ом и 7-ом весах. При этом если хоть у одного вектора координата при 7-ом весе не равна 0, то координаты при 5-ом и 6-ом весах у них обоих должны равняться нулю (поскольку оба вектора сингулярны и их сумма тоже сингулярна), что невозможно. Поэтому у обоих векторов могут быть не равными 0 только первые 6 координат, и мы снова находимся в условиях предыдущей леммы при  $\alpha = \delta$ .

**Следствие.** *Любое шестимерное сингулярное подпространство соответствует некоторому корневому элементу. Любые четырех-, трех-, двух- и одномерные сингулярные подпространства лежат в каком-то шестимерном, однако существуют исключительные пятимерные сингулярные подпространства, не лежащие ни в одном шестимерном сингулярном подпространстве.*

*Доказательство.* Пусть  $V$  — шестимерное сингулярное подпространство. По теореме 2, существует матрица  $g$ , переводящая  $V$  в подпространство, порожденное первыми шестью базисными векторами. Пусть  $h = g^{-1}x_\delta(1)g$ . Несложно видеть, что тогда  $V = V^h$ . Вторая часть сразу вытекает из теоремы 2.

## 2. Угол между корневыми элементами

В этом пункте мы докажем несколько хорошо известных фактов про геометрию двух длинных корневых подгрупп. Единственный новый, хотя и тривиальный, факт — это описание углов в терминах шестимерных сингулярных подпространств (утверждение 12). Мы постарались выдержать ниже написанные доказательства в духе §3, на уровне элементов, и без внешних фактов. А именно, в этом пункте используются только теорема 1, лемма 3.4 и, в следствии из утверждения 12, неявно используется следствие из теоремы 2.

Напомним, что  $X_\alpha = \{x_\alpha(a); a \in K\}$  — элементарная корневая подгруппа группы  $G(E_6, K)$ . Если нам не важно, какой именно (неединичный) элемент взят из элементарной корневой подгруппы  $X_\alpha$ , то будем писать  $x_\alpha(\cdot)$ .

**Лемма 4.4.** *Любая пара корневых элементов сопряжена некоторой паре элементарных корневых элементов.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную пару корневых элементов. По определению, можно считать, что один из них равен  $x_\alpha(\cdot)$ . Пусть второй —  $g$ .

Предположим, что координата  $(-\alpha)_g$  — не ноль. Тогда из пункта 3 доказательства теоремы 1 следует, что  $g = fx_{-\alpha}(\cdot)f^{-1}$ , где  $f$  — произведение элементарных корневых элементов  $x_\alpha(\cdot)$  и  $x_\beta(\cdot)$ ,  $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$ . Поэтому  $x_{-\alpha}(\cdot) = f^{-1}gf$ . Осталось заметить, что  $x_\alpha(\cdot) = f^{-1}x_\alpha(\cdot)f$ , поскольку  $x_\alpha(\cdot)$  коммутирует с каждым сомножителем  $f$ .

Далее, предположим, что  $(-\alpha)_g = 0$ , но существует корень  $\gamma$ ,  $\angle(\alpha, \gamma) = 2\pi/3$ , такой, что  $(\gamma)_g \neq 0$ . Тогда  $g = fx_\gamma(\cdot)f^{-1}$ , при этом  $f$  — произведение элементарных корневых элементов  $x_\beta(\cdot)$ , где  $\angle(\alpha, \beta) = 0, \pi/3$  или  $\pi/2$ , а также  $x_{-\alpha-\gamma}\left(\frac{(-\alpha)_g}{(\gamma)_g}\right)$ . Однако, поскольку  $(-\alpha)_g = 0$ , то множитель  $x_{-\alpha-\gamma}(\cdot)$  в  $f$  не входит, и, поэтому,  $x_\alpha(\cdot)$  опять коммутирует с каждым сомножителем  $f$ .

Случай, когда все коэффициенты при корнях, образующих с  $\alpha$  углы  $\pi$  и  $2\pi/3$ , равны 0, однако существует ортогональный к  $\alpha$  корень, коэффициент при котором не равен 0, разбирается аналогично.

В случае же, когда для любого  $\beta$ , такого что  $\angle(\omega, \beta) > \pi/3$ ,  $(\beta)_g = 0$ , но существует корень  $\gamma \neq \alpha$ , такой что  $(\gamma)_g \neq 0$ , мы аналогичными рассуждениями можем показать, что в  $f$  ненулевые координаты имеются только при корнях  $\beta$ , такие, что  $\angle(\omega, \beta) \leq \pi/2$ , и  $-\gamma$ . Из леммы 3.4 следует, что диагональные коэффициенты матрицы  $g$  равны 1. Из этого, по теореме 1, следует, что координата  $f$  при  $-\gamma$  также равна 0, поэтому  $x_\alpha(\cdot)$  и в этом случае коммутирует с каждым сомножителем  $f$ .

**Лемма 4.5.** *Если  $\angle(\beta_1, \gamma_1) = \angle(\beta_2, \gamma_2)$ , то существует матрица  $g \in G(E_6, K)$ , такая, что  $gX_{\beta_1}g^{-1} = X_{\beta_2}$  и  $gX_{\gamma_1}g^{-1} = X_{\gamma_2}$ .*

*Доказательство.* Как мы уже говорили в §2, сопряжение при помощи  $w_\alpha(1)$  переводит  $X_\beta$  в  $X_{w_\alpha\beta}$ . Поэтому из того, что любую пару корней с помощью группы Вейля можно перевести в любую другую с тем же углом между ними, следует требуемое.

**Определение.** Пусть пара корневых элементов  $g$  и  $h$  сопряжена паре элементарных корневых элементов  $x_\alpha(\cdot)$  и  $x_\beta(\cdot)$ . Тогда угол между корневыми элементами  $g$  и  $h$  называется углом между корнями  $\alpha$  и  $\beta$ .

Корректность этого определения мы докажем вместе с несложным, но полезным утверждением, что угол между корневыми элементами определяется однозначно по взаимному расположению шестимерных сингулярных подпространств, соответствующих этим корневым элементам.

**Утверждение 12.** Пусть даны два корневых элемента  $g$  и  $h$ . Тогда понятие угла определено корректно и выполняется ровно один из следующих случаев:

- (1) если  $V^g = V^h$ , то  $\angle(g, h) = 0$ ;
- (2) если  $\dim(V^g \cap V^h) = 3$ , то  $\angle(g, h) = \pi/3$ ;
- (3) если  $\dim(V^g \cap V^h) = 1$ , то  $\angle(g, h) = \pi/2$ ;
- (4) если  $V^g \cap V^h = 0$  и существует шестимерное сингулярное подпространство  $W$ , такое, что  $\dim(V^g \cap W) = \dim(V^h \cap W) = 3$ , то  $\angle(g, h) = 2\pi/3$ ;
- (5) если  $V^g \cap V^h = 0$  и для произвольного вектора  $v \in V^g$  существует ровно один, с точностью до кратности, вектор  $u \in V^h$ , такой, что  $v + u$  сингулярен, то  $\angle(g, h) = \pi$ .

*Доказательство.* Заметим, прежде всего, что условия всех пунктов инвариантны под действием сопряжения. Далее, переведем корневые элементы  $g$  и  $h$  в элементарные корневые согласно лемме 4.4. После этого, по лемме 4.5, можно перевести, например,  $g$  в  $x_\delta(\cdot)$ , а  $h$  в  $x_\delta(\cdot), x_{\alpha_2}(\cdot), x_{\alpha_1}(\cdot), x_{-\alpha_2}(\cdot)$  или  $x_{-\delta}(\cdot)$ . Несложно видеть, что для каждого из этих случаев выполняется ровно один из пунктов утверждения, для каждого свой. Поэтому понятие угла определено корректно. Отсюда следует доказательство утверждения.

**Следствие 1.** Взаимное расположение шестимерных сингулярных подпространств может быть только таким, как сказано в утверждении 12.

*Доказательство.* Очевидно.

Следующая теорема — последний интересующий нас факт про пары корневых элементов, объединяющий несколько предыдущих.

**Теорема 3.** Одну пару корневых подгрупп можно перевести сопряжением при помощи элемента из  $G(E_6, K)$  в другую пару, если и только если углы между элементами каждой пары равны.

*Доказательство.* Необходимость равенства углов следует из утверждения 12, а достаточность — из лемм 4.4 и 4.5.

## §5. Тройки корневых подгрупп

В работе Н.А. Вавилова и автора [20] изучался вопрос о том, что порождают три корневые подгруппы, две из которых противоположны, в произвольной односвязной группе  $G(\Phi, K)$  при  $\text{char } K \neq 2$ . Цель настоящего параграфа — дать, на геометрическом языке, ответ на вопрос, как по трем корневым подгруппам в  $SO(2n, K)$  (в [20] изучение произвольной группы  $G(\Phi, K)$  сводилось именно к этому случаю) и  $G_{\text{sc}}(E_6, K)$  определить, какую группу из найденного в [20] списка они порождают.

### 1. Тройки корневых подгрупп в $SO(2n, K)$

Напомним основной результат работы [20]. Рассмотрим группу Гейзенберга

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ . & 1 & . & b \\ . & . & 1 & -a \\ . & . & . & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in K \right\}.$$

Это в точности унипотентный радикал стандартной параболической подгруппы  $P_1$  симплектической группы  $Sp(4, K)$ . Действие подгруппы Леви на унипотентном радикале  $P_1$  индуцирует действие  $SL(2, K)$  на  $H_1$ . Именно это действие имеется в виду в пункте (5) следующей теоремы.

Пример в пункте (8) абсолютно аналогичен, но при этом нужно рассматривать действие подгруппы Леви на унипотентном радикале  $H_2$  параболической подгруппы  $P_2$  в группе Шевалле типа  $G_2$ .

**Теорема 4.** *Пусть  $X, Y, Z$  — корневые подгруппы в  $G(\Phi, K)$ , причем  $X$  и  $Y$  противоположны. Далее, пусть  $H = \langle X, Y, Z \rangle$ . Предположим, что  $\text{char } K \neq 2$ . Тогда имеет место одна из следующих возможностей:*

- (1)  $H \cong SL(2, K)$ ,
- (2)  $H \cong SL(2, K) \times K$ ,
- (3)  $H \cong SL(2, K).K^2$ ,
- (4)  $H \cong (SL(2, K).K^2) \times K$ ,
- (5)  $H \cong SL(2, K).H_1$ ,
- (6)  $H \cong SL(3, K)$ ,
- (7)  $H \cong (SL(2, K).K^4) \times K$ ,
- (8)  $H \cong SL(2, K).H_2$ ,
- (9)  $H \cong SU(3, L)$ , где  $[L : K] = 2$ .

В работе [20] использовался следующий результат:

**Теорема 5.** *Пусть  $G = G(\Phi, K)$  — группа Шевалле,  $X, Y, Z$  — три длинных корневых подгруппы. Тогда существует подсистема  $\Delta \subset \Phi$ , являющаяся скручиванием подсистемы корней системы типа  $D_4$  и такой  $u \in G(\Phi, K)$ , что*

$$\langle X, Y, Z \rangle \leq uG(\Delta, K)u^{-1}.$$

*Все возможности для  $\Delta$  перечислены в следующем списке*

$$\Delta = A_1, A_2, A_3, B_2, B_3, D_4, G_2.$$

Эта редукция была доказана в [10], [11] для индивидуальных длинных полупростых корневых элементов, а потом в [22], [23], [38] в окончательной форме для длинных корневых торов. С технической точки зрения речь здесь идет о борелевских орбитах группы  $B(\Phi \setminus \{\alpha_i\}, K)$  в некоторых представлениях, где  $\alpha_i$  — простой корень, связанный с максимальным корнем в расширенной диаграмме Дынкина. Эту редукцию в близкой ситуации независимо открыл Рерле [75]. Стоит отметить также ключевую роль групп типа  $D_4$  в работах Евгения Башкирова [3], [4], [5], [49], [50], [51], которая, конечно, должна в конечном счете объясняться теми же фундаментальными причинами.

Теорема 5 позволила в дальнейшем ограничиться рассмотрением только группы  $SO(8, K)$ . Положим, в этом и следующем пункте, что  $G = SO(8, K)$ , а  $V = K^8$ . Зафиксируем также базис Витта  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_{-4}, e_{-3}, e_{-2}, e_{-1}$ , и пусть  $X, Y$  и  $Z$  — три корневые подгруппы, причем  $X$  и  $Y$  противоположны. Напомним, что на  $V$  есть невырожденная симметричная билинейная форма  $B$ , которую сохраняет группа  $G$ ; в выбранном базисе она имеет вид  $B(u, v) = u_1v_{-1} + \dots + u_{-1}v_1$ . Вектор  $u$  называется изотропным, если  $B(u, u) = 0$ ; соответственно, подпространство  $U$  называется вполне изотропным, если любой вектор в нем изотропен. Так как группа  $G$  транзитивно действует на парах противоположных корневых подгрупп, то не теряя общности можно считать, что  $X = X_{1,-2}$ ,  $Y = X_{-2,1}$ . Как известно, корневым подгруппам в  $SO(2n, K)$  соответствуют двумерные вполне изотропные подпространства. Пусть  $U = \text{Im}(Z - E)$ , и  $(u, v)$  — некоторый базис  $U$ .

Далее, пусть  $F$  — нормализатор подгруппы  $\langle X, Y \rangle$ . Ясно, что

$$F = SO(4, K) \times SO(4, K)$$

является прямым произведением двух экземпляров группы  $SO(4, K)$ , первый из которых действует на подпространстве  $V_1 = \langle e_1, e_2, e_{-2}, e_{-1} \rangle$ , а второй — на дополнительном подпространстве  $V_2 = \langle e_3, e_4, e_{-4}, e_{-3} \rangle$ . Понятно также, что  $V$  раскладывается в ортогональную прямую сумму  $V_1$  и  $V_2$ .

После этого мы указывали орбиты у ненулевых изотропных векторов под действием  $F$ :

**Лемма 5.1.** *Под действием  $F$  каждый ненулевой изотропный вектор  $u \in V$  приводится к одному из следующих видов:*

$$e_1, \quad e_3, \quad e_1 + e_3, \quad e_1 + e_3 - ae_{-3} + ae_{-1},$$

для некоторого  $a \neq 0$ .

Далее, в работе [20] доказывались следующие 4 леммы.

**Лемма 5.2.** *Пусть  $Z = X_U$ , причем  $U \cap V_1 \neq \emptyset$ . Тогда, с точностью до сопряженности элементом из  $F$  и выбора базиса  $U = \langle u, v \rangle$ , можно считать, что:*

- (A)  $u = e_1, v = e_2,$
- (B)  $u = e_1, v = e_{-2},$
- (C)  $u = e_1, v = e_3,$
- (D)  $u = e_1, v = e_2 + e_3,$
- (E)  $u = e_1, v = e_{-2} + e_3,$
- (F)  $u = e_1, v = e_2 + e_3 - ae_{-3} + ae_{-2},$  для некоторого  $a \neq 0.$

*Замечание.* В случае (F) в работе [20] была сделана опечатка.

**Лемма 5.3.** Пусть  $Z = X_U$ , причем  $U \cap V_1 = \emptyset$ , но  $U \cap V_2 \neq \emptyset$ . Тогда с точностью до сопряженности элементом из  $F$  и выбора базиса  $U = \langle u, v \rangle$ , можно считать, что:

- (G)  $u = e_3, v = e_4,$
- (H)  $u = e_3, v = e_{-4},$
- (I)  $u = e_3, v = e_1 + e_4,$
- (J)  $u = e_3, v = e_1 + e_{-4},$
- (K)  $u = e_3, v = e_1 + e_4 - ae_{-4} + ae_{-1},$  для некоторого  $a \neq 0.$

**Лемма 5.4.** Пусть  $Z = X_U$ , причем  $U \cap V_1 = U \cap V_2 = \emptyset$ , но  $U$  содержит вектор, проекция которого в  $V_1$  изотропна. Тогда с точностью до сопряженности элементом из  $F$  и выбора базиса  $U = \langle u, v \rangle$ , можно считать, что:

- (L)  $u = e_1 + e_3, v = e_{-1} - e_{-3},$
- (M)  $u = e_1 + e_3, v = e_2 + ae_4,$  для некоторого  $a \neq 0,$
- (N)  $u = e_1 + e_3, v = e_2 + ae_{-4},$  для некоторого  $a \neq 0,$
- (O)  $u = e_1 + e_3, v = e_{-2} + ae_4,$  для некоторого  $a \neq 0,$
- (P)  $u = e_1 + e_3, v = e_{-2} + ae_{-4},$  для некоторого  $a \neq 0,$
- (Q)  $u = e_1 + e_3, v = e_2 + be_4 + ce_{-4} - bce_{-2},$  для некоторых  $b, c \neq 0.$

**Лемма 5.5.** Предположим, что  $\text{char } K \neq 2$ . Пусть  $Z = X_U$ , причем  $U$  не содержит векторов, проекция которых в  $V_1$  изотропна. Тогда с точностью до сопряженности элементом из  $F$  и выбора базиса  $U = \langle u, v \rangle$ , можно считать, что

- (R)  $u = e_1 + e_3 - ae_{-3} + ae_{-1}, v = e_2 + be_4 + ce_{-4} - bce_{-2},$  для некоторых  $a, b, c \neq 0$  таких, что  $abc \notin K^2.$

После этого, в работе [20] отмечается, что в случаях (G) и (H), (I) и (J), (M) и (N), (O) и (P) получаются группы, которые не только изоморфны, но и переводятся одна в другую посредством внешнего автоморфизма  $SO(8, K)$ , хотя и не сопряжены в самой группе. Наконец, в конце доказательства теоремы 4 выясняется, какую группу порождают  $X, Y$  и  $Z$  в каждом случае. А именно, показано, что имеют место следующие изоморфизмы.

- В случае (A) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K).$
- В случае (B) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K) \times K.$
- В случае (C) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K).K^2.$
- В случае (D) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K).K^2.$
- В случае (E) группа  $H$  изоморфна  $(SL(2, K).K^2) \times K.$
- В случае (F) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K).H_1.$
- В случае (G)  $\sim$  (H) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K) \times K.$
- В случае (I)  $\sim$  (J) группа  $H$  изоморфна  $(SL(2, K).K^2) \times K.$
- В случае (K) группа  $H$  изоморфна  $(SL(2, K).K^4) \times K.$
- В случае (L) группа  $H$  изоморфна  $SL(3, K).$
- В случае (M)  $\sim$  (N) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K).H_1.$
- В случае (O)  $\sim$  (P) группа  $H$  изоморфна  $(SL(2, K).K^4) \times K.$

В случае (Q) группа  $H$  изоморфна  $SL(2, K).H_2$ .

В случае (R) группа  $H$  изоморфна  $SU(3, L)$ , где  $[L : K] = 2$ .

Для получения инвариантного геометрического описания вышеперечисленных случаев нужно несколько видоизменить описание этих случаев в леммах 5.2-5.5. Прежде всего, отметим, что в случаях (A) и (B) подпространство  $U$  лежит в  $V_1$ , в случаях (C), (D), (E) и (F) размерность их пересечения равна 1, а в случаях (G)  $\sim$  (H), (I)  $\sim$  (J), (K), (L), (M)  $\sim$  (N), (O)  $\sim$  (P), (Q) и (R) они пересекаются только по нулю.

Далее, рассмотрим пространство  $U'$ , являющееся проекцией  $U$  на  $V_1$ , и пусть  $U''$  — подпространство, порожденное всеми изотропными векторами  $U'$ . Тогда, как несложно видеть, в случае (G)  $\sim$  (H)  $\dim U' = 0$ , в случаях (C), (I)  $\sim$  (J) и (K) пространство  $U'$  одномерно, а во всех остальных случаях — двумерно. При этом в случаях (G)  $\sim$  (H), (K) и (R) пространство  $U''$  является нулевым, в случаях (C), (F), (I)  $\sim$  (J) и (Q) оно одномерно, а во всех остальных случаях — двумерно. Сведем полученные результаты в следующую таблицу.

	$\dim(U \cap V_1)$	$\dim U'$	$\dim U''$
(A)	2	2	2
(B)	2	2	2
(C)	1	1	1
(D)	1	2	2
(E)	1	2	2
(F)	1	2	1
(G) $\sim$ (H)	0	0	0
(I) $\sim$ (J)	0	1	1
(K)	0	1	0
(L)	0	2	2
(M) $\sim$ (N)	0	2	2
(O) $\sim$ (P)	0	2	2
(Q)	0	2	1
(R)	0	2	0

Таким образом, нам осталось научиться разделять пары случаев (A) и (B), (D) и (E), и тройку (L), (M)  $\sim$  (N) и (O)  $\sim$  (P); впрочем, в случае (L) в пространстве  $U''$  ровно два, с точностью до кратности, изотропных вектора, а во *всех* остальных случаях  $U''$  вполне изотропно, так что его мы также можем отделить. Для разделения оставшихся случаев необходимо посмотреть на расположение  $U' = U''$  (во всех этих случаях  $U'$  и  $U''$  совпадают) в  $V_1$ . Дело в том, что, как несложно видеть, в  $V_1$  двумерные изотропные подпространства под действием  $F$  имеют ровно две орбиты: соответствующие некоторым корневым элементам из  $\langle X, Y \rangle$ , и несоответствующие. Например,  $U'$  из случаев (A), (D) и (M)  $\sim$  (N) попадает в первую орбиту, а из случаев (B), (E) и (O)  $\sim$  (P) — во вторую. Для выяснения того, в какую именно орбиту попало пространство  $U'$  в нашем случае, проще всего посмотреть на размерность пересечения  $U'$  с  $V_X = \text{Im}(X - E)$ . Если  $U'$  принадлежит первой орбите, то эта размерность равна 0 или 2, а если второй, то 1. Это позволяет нам полностью описать классификацию из работы [20] на инвариантном геометрическом языке. Это описание, очевидно, практически без изменений переносится на случай группы  $G = SO(2n, K)$ .

*Замечание.* Стоит пояснить, почему в  $V_1$  двумерные изотропные подпространства под действием  $F$  имеют ровно две орбиты. Дело в том, что неявно используемое отображе-

ние  $\langle X, Y \rangle \rightarrow \langle V_X, V_Y \rangle$ , где  $X$  и  $Y$  — корневые элементы, а  $V_X$  и  $V_Y$  — соответствующие им двумерные изотропные подпространства, является корректно определенным, но не однозначным. А именно, для произвольной группы  $\langle X, Y \rangle$  существует еще ровно одна группа  $\langle X', Y' \rangle$ , такая, что  $\langle V_X, V_Y \rangle = \langle V_{X'}, V_{Y'} \rangle$ . В частности, для интересующего нас случая  $\langle X_{1,-2}, X_{-2,1} \rangle$  существует группа  $\langle X_{1,2}, X_{2,1} \rangle$ , которой соответствует то же самое четырехмерное пространство  $V_1$ . Корневым элементам из первой группы соответствуют двумерные изотропные подпространства вида  $\langle \alpha e_1 + \beta e_{-2}, \alpha e_2 - \beta e_{-1} \rangle$ , а корневым элементам из второй группы —  $\langle \alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_{-2} - \beta e_{-1} \rangle$

## 2. Тройки корневых подгрупп в $G_{\text{sc}}(E_6, K)$

В этом пункте у нас опять  $G = G_{\text{sc}}(E_6, K)$ , а  $V$  — 27-мерное пространство, на котором действует  $G$  (как описано в §1). Далее, пусть  $X, Y$  и  $Z$  — тройка корневых подгрупп в  $G$ , причем  $X$  и  $Y$  противоположны. Согласно теореме 5, существует подсистема  $\Delta \subset E_6$  типа  $D_4$  и такой  $u \in G$ , что  $\langle X, Y, Z \rangle \leq uG(\Delta, K)u^{-1}$ . Поскольку, как известно, все такие группы  $G(\Delta, K)$  сопряжены в  $G$  между собой, то можно считать, что  $\langle X, Y, Z \rangle \in G_1 = \langle X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}, X_{\alpha_4}, X_{\alpha_5} \rangle$ . Отметим, что  $G_1$  является спинорной группой. Под действием  $G_1$  27-мерное пространство  $V$  распадается на шесть инвариантных подпространств: три одномерных, а именно  $\langle e^1 \rangle$ ,  $\langle e^{11} \rangle$  и  $\langle e^{27} \rangle$ , и три восьмимерных, а именно

$$\begin{aligned} V^1 &= \langle e^2, e^3, e^4, e^5, e^7, e^8, e^9, e^{10} \rangle, \\ V^2 &= \langle e^6, e^{12}, e^{13}, e^{14}, e^{16}, e^{17}, e^{19}, e^{22} \rangle, \\ V^3 &= \langle e^{15}, e^{18}, e^{20}, e^{21}, e^{23}, e^{24}, e^{25}, e^{26} \rangle. \end{aligned}$$

Действие  $G_1$  на одномерных подпространствах тождественно, а на  $V^1, V^2$  и  $V^3$  образует три хорошо известных восьмимерных представления спинорной группы — естественное и два полуспинорных, которые переводятся друг в друга внешними автоморфизмами. Эти представления не являются точными, их ядра изоморфны  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Фактор  $G_1$  по каждому из этих ядер есть группа  $SO(8, K)$ ; чтобы различать ее образы, действующие на  $V^1, V^2$  и  $V^3$ , будем их обозначать через  $SO(V^1), SO(V^2)$  и  $SO(V^3)$ . Подробно о этих представлениях и их *тройственности* написано, например, в [77].

Несложно видеть, что трилинейная форма  $F$  на  $V$  порождает билинейную форму  $f$  на  $V^1$ :  $f(x, y) = F(x, y, e^{27})$ , где  $x, y \in V^1$ ; аналогично,  $Q$  порождает квадратичную форму  $q$ :  $q(x) = Q(e^{27}, x)$ , где  $x \in V^1$ . Для того, чтобы эти формы в точности совпали с нужными, надо правильно выбрать базис пространства  $V^1$ . А именно, положим  $e_1 = e^2, e_2 = e^3, e_3 = e^4, e_4 = e^5, e_{-4} = -e^7, e_{-3} = e^8, e_{-2} = -e^9$  и  $e_{-1} = e^{10}$ , где  $e^i$  есть базисные вектора, пришедшие из  $V$ , а  $e_i$  образуют новый базис  $V_1$ . В  $V^2$  и  $V^3$  базисы выбираются совершенно аналогично. Таким образом, в  $V^i$  сингулярные вектора (относительно  $Q$ ) совпадают с изотропными (относительно  $q$ ).

Несмотря на то, что каждому элементу из  $SO(V^1)$  соответствует два элемента из  $G_1$ , корневой элемент из  $G_1$  легко восстанавливается по его проекции в  $SO(V^1)$ . Пусть  $E^i$  — тождественное действие на  $V^i$ . Тогда корневой элемент  $g \in G_1$  задается шестимерным сингулярным подпространством  $U = \text{Im}(g - E)$ , а его ограничения  $g^i = g|_{V^i}$  при  $1 \leq i \leq 3$  задаются, соответственно, двумерными изотропными подпространствами  $U^i = \text{Im}(g^i - E^i)$ , причем  $U = U^1 \oplus U^2 \oplus U^3$ . При этом для данного двумерного изотропного подпространства  $U^1 \in V^1$  существует ровно одно шестимерное сингулярное подпространство  $U$ , такое, что  $U^1 \in U$  и  $\dim U \cap V^1 = \dim U \cap V^2 = \dim U \cap V^3 = 2$ .

Все вышесказанное позволяет нам воспользоваться изложенными в предыдущем пункте результатами работы [20], то есть, свести изучение троек корневых подгрупп,

две из которых противоположны, к одному из 18 случаев. При этом элементы  $X_{1,-2}$  и  $X_{-2,1}$  из предыдущего пункта перейдут в  $X_\alpha$  и  $X_{-\alpha}$ , где  $\alpha = \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} 1210$ ; четырехмерное подпространство  $V_1$  перейдет в двенадцатимерное, которое мы будем обозначать через  $W$ :  $W = \langle e^2, e^3, e^6, e^9, e^{10}, e^{12}, e^{15}, e^{18}, e^{19}, e^{22}, e^{25}, e^{26} \rangle$ . Перечислим, для каждого из 18 случаев, шестимерное сингулярное подпространство  $V^Z$ . В каждом случае первые два элемента базиса лежат в  $V^1$ , вторые — в  $V^2$ , а два последних — в  $V^3$ .

- (A)  $V^Z = \langle e^2, e^3, e^6, e^{12}, e^{15}, e^{18} \rangle$ ;
- (B)  $V^Z = \langle e^2, e^9, e^{13}, e^{16}, e^{20}, e^{23} \rangle$ ;
- (C)  $V^Z = \langle e^2, e^4, e^6, e^{13}, e^{15}, e^{20} \rangle$ ;
- (D)  $V^Z = \langle e^2, e^3 + e^4, e^6, e^{12} + e^{13}, e^{15}, e^{18} + e^{20} \rangle$ ;
- (E)  $V^Z = \langle e^2, e^4 - e^9, e^6 + e^{16}, e^{13}, e^{15} + e^{23}, e^{20} \rangle$ ;
- (F)  $V^Z = \langle e^2, e^3 + e^4 + ae^8 + ae^9, e^6 - ae^{16}, e^{12} + e^{13}, e^{15} - ae^{23}, e^{18} + e^{20} \rangle$ ;
- (G)  $V^Z = \langle e^4, e^5, e^6, e^{19}, e^{20}, e^{21} \rangle$ ;
- (H)  $V^Z = \langle e^4, e^7, e^{13}, e^{14}, e^{15}, e^{25} \rangle$ ;
- (I)  $V^Z = \langle e^2 + e^5, e^4, e^6, e^{13} - e^{19}, e^{15} + e^{21}, e^{20} \rangle$ ;
- (J)  $V^Z = \langle e^2 - e^7, e^4, e^6 - e^{14}, e^{13}, e^{15}, e^{20} + e^{25} \rangle$ ;
- (K)  $V^Z = \langle e^2 + e^5 + ae^7 + ae^{10}, e^4, e^6 + ae^{14}, e^{13} - e^{19}, e^{15} + e^{21}, e^{20} - ae^{25} \rangle$ ;
- (L)  $V^Z = \langle e^2 + e^4, -e^8 + e^{10}, e^{12} - e^{14}, e^{16} + e^{19}, e^{18} - e^{21}, e^{23} + e^{25} \rangle$ ;
- (M)  $V^Z = \langle e^2 + e^4, e^3 + ae^5, e^6, e^{12} - e^{14} + ae^{16} + ae^{19}, e^{15} - ae^{20}, e^{18} - e^{21} \rangle$ ;
- (N)  $V^Z = \langle e^2 + e^4, e^3 - ae^7, e^6 + ae^{13}, e^{12} - e^{14}, e^{15}, e^{18} - e^{21} - ae^{23} - ae^{25} \rangle$ ;
- (O)  $V^Z = \langle e^2 + e^4, ae^5 - e^9, ae^6 - e^{13}, e^{16} + e^{19}, ae^{18} - ae^{21} + e^{23} + e^{25}, e^{20} \rangle$ ;
- (P)  $V^Z = \langle e^2 + e^4, ae^7 + e^9, ae^{12} - ae^{14} - e^{16} - e^{19}, e^{13}, ae^{15} + e^{20}, e^{23} + e^{25} \rangle$ ;
- (Q)  $V^Z = \langle e^2 + e^4, e^3 + be^5 - ce^7 + bce^9, e^6 + ce^{13}, e^{12} - e^{14} + be^{16} + be^{19}, e^{15} - be^{20}, e^{18} - e^{21} - ce^{23} - ce^{25} \rangle$ ;
- (R)  $V^Z = \langle e^2 + e^4 - ae^8 + ae^{10}, e^3 + be^5 - ce^7 + bce^9, e^6 + ce^{13} - ae^{17} + ace^{22}, e^{12} - e^{14} + be^{16} + be^{19}, e^{15} - be^{20} - ae^{24} - abe^{26}, e^{18} - e^{21} - ce^{23} - ce^{25} \rangle$ .

Понятно, что кроме этих случаев, связанных с представлением группы  $G_1$  в  $V^1$ , можно также рассматривать случаи, связанные с представлениями в  $V^2$  и  $V^3$ . Часто эти случаи совпадают, однако иногда они оказываются различными. Отметим также, что группы  $\langle X, Y, Z \rangle$  в этих случаях должны быть одинаковы; более того, с геометрической точки зрения эти случаи также будут неразличимы. Это позволяет нам объединять такие тройки случаев. Таким образом, мы, из 18 случаев, получаем всего 10: (A), (B)  $\sim$  (G)  $\sim$  (H), (C), (D), (E)  $\sim$  (I)  $\sim$  (J), (F)  $\sim$  (M)  $\sim$  (N), (K)  $\sim$  (O)  $\sim$  (P), (L), (Q), (R).

Нахождение инвариантного геометрического описания этих случаев начнем, как и в предыдущем пункте, с нахождения размерности пересечения  $W \cap V^Z$ . Мы получаем, что в случае (A) пространство  $V^Z$  лежит в  $W$ , в случае (B)  $\sim$  (G)  $\sim$  (H) пространство  $W \cap V^Z$  оказывается двумерным, в случаях (C) и (D) — трехмерным, в случаях (E)  $\sim$  (I)  $\sim$  (J) и (F)  $\sim$  (M)  $\sim$  (N) — одномерным, а в случаях (K)  $\sim$  (O)  $\sim$  (P), (L), (Q) и (R) пространства  $W$  и  $V^Z$  пересекаются только по 0.

В  $V$ , к сожалению, нет естественно определенной проекции на произвольное подпространство. Оказывается, однако, что для пространства  $W$  можно, на геометрическом языке, определить "стандартное" дополнительное подпространство (то есть, его выбор не связан с выбором базиса) и, следовательно, проекцию произвольного подпространства на  $W$ . Прежде чем переходить к этому определению, нужно показать несколько несложных фактов.

**Утверждение 13.** Пусть  $u$  — сингулярный вектор в  $V$ , а  $\rho \in \Lambda$  — некоторый вес.

Предположим, что  $u_\rho \neq 0$ , а  $u_\sigma = 0$  для всех весов  $\sigma$ , близких к  $\rho$ . Тогда  $u = u_\rho e^\rho$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $u_\sigma \neq 0$  для некоторого веса  $\sigma$ , далекого от  $\rho$ . Тогда пусть  $\tau$  — вес, далекий от  $\rho$  и  $\sigma$ . Поскольку  $u$  сингулярен, то  $Q(e^\tau, u) = 0$ . С другой стороны, по определению  $Q$ , это равно  $\sum \pm u_\phi u_\psi$ , где сумма берется по всем парам  $\{\phi, \psi\}$ , образующим вместе с  $\tau$  триаду. По выбору  $u$  и пунктам (1) и (2) утверждения 5 получаем, что эта сумма равна  $\pm u_\rho u_\sigma$ , откуда  $u_\sigma = 0$  — противоречие.

Обозначим через  $W_k$  пространства  $\langle e^\phi; \phi \in I_k \rangle$  при  $1 \leq k \leq 3$ .

*Замечание.* В §2 такие пространства назывались  $V_k$ , но в этом параграфе, чтобы избежать накладок, мы несколько изменили это обозначение.

**Лемма 5.6.** *Все ненулевые сингулярные вектора из  $W_2$  образуют, под действием подгруппы Леви  $L$ , одну орбиту.*

*Доказательство.* Отметим, прежде всего, что все базисные вектора  $e^i$  при  $i \in I_2$  лежат в одной орбите, поскольку после выбрасывания второго корня из диаграммы Дынкина веса из  $I_2$  оказываются в одной компоненте связности. Далее, если  $i, j \in I_2$  и  $i - j \in \pm\Pi$ , то, умножая  $e^j$  на  $x_{j-i}(-\frac{1}{a})x_{i-j}(a)$ , получаем, что вектора  $a e^i$  для любого  $i \in I_2$  и всех ненулевых  $a \in K$  лежат в той же самой орбите.

Пусть  $v$  — произвольный сингулярный вектор из  $W_2$ , а  $i \in I_2$  — такой вес, что  $v_i \neq 0$ . Достаточно показать, что можно подобрать такой элемент  $g \in L$ , что  $gv$  имеет ненулевой коэффициент при весе  $i$  и нулевые коэффициенты при всех весах, близких к  $i$ ; тогда из утверждения 13 следует требуемое. Пусть  $j \in I_2$  — вес, близкий к  $i$ , и такой, что  $v_j \neq 0$ . Умножим  $v$  на  $x_{j-i}(\frac{-c_{ij}v_j}{v_i})$ ; после этого коэффициент  $v_j$  станет равным 0. При этом, по утверждению 2 и следствию из него,  $v_i$  и все  $v_k$ , такие, что  $d(k, i) = 1$  и  $k \neq j$ , не изменятся. Повторяя эту операцию для всех весов  $j \in I_2$ , близких к  $i$ , получаем требуемое.

Из этой леммы, используя лемму 2.2, легко выводится два следствия:

**Следствие 1.**

- (1) *Все вектора из  $W_1$  являются сингулярными и близкими друг к другу.*
- (2) *Для любого сингулярного вектора  $v \in W_1 \oplus W_2$ , не лежащего в  $W_1$ , сингулярные векторы из  $W_1$ , близкие к нему, образуют четырехмерное подпространство.*
- (3) *Для любого сингулярного вектора  $v \notin W_1 \oplus W_2$  сингулярные векторы из  $W_1$ , близкие к нему, образуют одномерное подпространство.*

**Следствие 2.** *Пусть  $W = \langle V^X, V^Y \rangle$ , где  $X$  и  $Y$  — две противоположные подгруппы. Обозначим через  $\Omega$  множество сингулярных векторов  $v \in V$ , для которых сингулярные векторы в  $W$ , близкие к  $v$ , порождают восьмимерное подпространство. Тогда множество  $\Omega$  порождает пятнадцатимерное подпространство  $\overline{W}$ , и любой сингулярный вектор из  $\overline{W}$  лежит в  $\Omega$ . При этом любой вектор из  $V$  однозначно раскладывается в сумму вектора из  $\overline{W}$  и вектора из  $W$ .*

*Замечание 1.* Можно расширить понятие близких векторов, говоря, что вектора  $u$  и  $v$  близки, если  $F(au, bv, z) = 0$  для всех  $a, b \in K$  и  $z \in V$ . Тогда  $\overline{W}$  состоит из всех векторов  $v \in V$ , для которых вектора в  $W$ , близкие к  $v$ , образуют восьмимерное подпространство.

*Замечание 2.* Так же интересен вопрос, какова может быть размерность пространства, порожденного сингулярными векторами из  $W$ , близкими к некоторому вектору  $v \in V$ .

Из леммы 5.6 нетрудно вывести, что эта размерность бывает равна 2, 5, 7 или 8. Искомое инвариантное описание возможных случаев можно дать и на этом языке, поскольку набор соответствующих размерностей в разных случаях оказывается различным. Однако автору показалось, что даваемое чуть ниже описание несколько проще.

Следствие 2 позволяет нам говорить о проекции произвольных векторов на  $W$  (параллельно  $\overline{W}$ ). Пусть  $W'$  — проекция пространства  $V^Z$  на  $W$ ; посмотрим на ее размерность в каждом из 10 случаев. В случаях (A), (D), (F)  $\sim$  (M)  $\sim$  (N), (L), (Q) и (R) она равна 6, в (B)  $\sim$  (G)  $\sim$  (H) — 2, в (C) — 3, в (E)  $\sim$  (I)  $\sim$  (J) — 4, в (K)  $\sim$  (O)  $\sim$  (P) — 5. Наконец, как и в пункте 1, посмотрим, в каждом случае, на размерность подпространства  $W''$ , порожденного всеми сингулярными векторами из  $W'$ . В случае (A), (D) и (L) она равна 6, в (B)  $\sim$  (G)  $\sim$  (H) — 2, в (C) и (Q) — 3, в (E)  $\sim$  (I)  $\sim$  (J) и (K)  $\sim$  (O)  $\sim$  (P) — 4, в (F)  $\sim$  (M)  $\sim$  (N) — 5, в (R) — 0. Сведем полученные результаты в таблицу:

	$\dim(V^Z \cap W)$	$\dim W'$	$\dim W''$	$\langle X, Y, Z \rangle$
(A)	6	6	6	$SL(2, K)$
(B) $\sim$ (G) $\sim$ (H)	2	2	2	$SL(2, K) \times K$
(C)	3	3	3	$SL(2, K).K^2$
(D)	3	6	6	$SL(2, K).K^2$
(E) $\sim$ (I) $\sim$ (J)	1	4	4	$(SL(2, K).K^2) \times K$
(F) $\sim$ (M) $\sim$ (N)	1	6	5	$SL(2, K).H_1$
(K) $\sim$ (O) $\sim$ (P)	0	5	4	$(SL(2, K).K^4) \times K$
(L)	0	6	6	$SL(3, K)$
(Q)	0	6	3	$SL(2, K).H_2$
(R)	0	6	0	$SU(3, L), [L : K] = 2$

*Замечание.* Несложно видеть, что в отличии от первого пункта, подпространство  $W = \langle V^X, V^Y \rangle$  однозначно определяет подгруппу  $\langle X, Y \rangle$ .

Сравнивая результаты первого и второго пункта, можно отметить, что с геометрической точки зрения классификация подгрупп в  $E_6$ , порожденных тремя корневыми подгруппами, две из которых противоположны, оказывается проще, чем в  $D_4$  — в ней меньше различных случаев, и они больше различаются. С вычислительной точки зрения, разумеется, ситуация будет прямо противоположная — в  $D_4$  конкретные расчеты будут существенно проще.

## Список литературы

- [1] Башкиров Е. Л. О линейных группах, порожденных двумя длинными корневыми подгруппами // Сиб. мат. журнал. — 1993. — Т. 34, №2. — С. 15–23.
- [2] Башкиров Е. Л. Линейные группы, содержащие корневую подгруппу // Сиб. мат. журнал. — 1996. — Т. 37, №6. — С. 1238–1255.
- [3] Башкиров Е. Л. О подгруппах полной линейной группы степени 4 над телом кватернионов, содержащих специальную унитарную группу индекса 1 // Алгебра и Анализ. — 2001. — Т. 13, №3. — С. 18–42.
- [4] Башкиров Е. Л. Группа  $Spin_8$  и некоторые подгруппы унитарных групп степени 4 над телом кватернионов // Алгебра и Анализ. — 2001. — Т. 13, №3. — С. 43–64.
- [5] Башкиров Е. Л. Линейные группы над телами, содержащие подгруппы квадратичных унипотентных элементов // Док. Дис., Белорусский Гос. Ун-т Информатики и Радиоэлектроники. — 2006. — 270 С.
- [6] Борель А. Свойства и линейные представления групп Шевалле // Семинар по алгебраическим группам. — М., 1973. — С. 9–59.
- [7] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы IV – VI. — М.: Мир, 1972. — 334 С.
- [8] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы I – III. — М.: Мир, 1976. — 496 С.
- [9] Вавилов Н. А. О геометрии длинных корневых подгрупп в группах Шевалле // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1988. — Т. 1, №1. — С. 8–11.
- [10] Вавилов Н. А. Разложение Брюа длинных корневых элементов в группах Шевалле // Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. — Л., 1988. — С. 18–39.
- [11] Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых ортогональных групп над кольцом // Сиб. мат. журнал. — 1988. — Т. 29, №4. — С. 31–43.
- [12] Вавилов Н. А. Геометрия 1-торов в  $GL_n$  // Алгебра и Анализ. — 2007. — Т. 19, №3. — С. 120–151.
- [13] Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р. А<sub>2</sub>-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов  $E_6$  и  $E_7$  // Алгебра и Анализ. — 2004. — Т. 16, №4. — С. 54–87.
- [14] Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., Николенко С. И. Строение групп Шевалле: доказательство из книги // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2006. — Т. 330. — С. 36–76.
- [15] Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю. Нормализатор группы Шевалле типа  $E_6$  // Алгебра и Анализ. — 2007. — Т. 19, №5. — С. 35–62.
- [16] Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М. Группа Шевалле типа  $E_6$  в 27-мерном представлении // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2006. — Т. 338. — С. 5–68.
- [17] Вавилов Н. А., Нестеров В. В. Геометрия микровесовых торов // Владикавказский математический журнал. — 2008. — Т. 10, №1. — С. 10–23.
- [18] Вавилов Н. А., Нестеров В. В. Пары микровесовых торов в группе Шевалле типа  $E_6$  // Алгебра и Анализ. — готовится к публикации.
- [19] Вавилов Н. А., Николенко С. И. А<sub>2</sub>-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типа  $F_4$  // Алгебра и Анализ. — 2008. — Т. 20, №4. — С. 27–63.
- [20] Вавилов Н. А., Певзнер И. М. Тройки длинных корневых подгрупп // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2007. — Т. 343. — С. 54–83.
- [21] Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б., Степанов А. В. Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 40, №1. — С. 145–147.
- [22] Вавилов Н. А., Семенов А. А. Разложение Брюа длинных корневых торов в группах Шевалле // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1989. — Т. 175. — С. 12–23.

- [23] Вавилов Н. А., Семенов А. А. Длинные корневые полупростые элементы в группах Шевалле // *Докл. РАН*. — 1994. — Т. 338, №6. — С. 725–727.
- [24] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988. — 344 С.
- [25] Залесский А. Е. Линейные группы // *Успехи мат. наук*. — 1981. — Т. 36, №6. — С. 56–107.
- [26] Залесский А. Е. Линейные группы // Итоги науки. Фундаментальные исследования. Алгебра 4. — М., 1989. — С. 114–234.
- [27] Залесский А. Е., Сережкин В. Н. Линейные группы, порожденные трансвекциями // *Известия АН СССР*. — 1977. — Т. 10. — С. 25–46.
- [28] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // *Успехи мат. наук*. — 1986. — Т. 41, №1. — С. 57–96.
- [29] Лузгарев А. Ю. О надгруппах  $E(E_6, R)$  и  $E(E_7, R)$  в минимальных представлениях // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2004. — Т. 319. — С. 216–243.
- [30] Лузгарев А. Ю. Надгруппы  $E(F_4, R)$  в  $G(E_6, R)$  // *Алгебра и Анализ*. — 2008. — Т. 20, №5. — См. также препринт ПОМИ 2008, №2, С. 1–37.
- [31] Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М. Некоторые факты из жизни  $GL(5, \mathbb{Z})$  // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2003. — Т. 305. — С. 153–163.
- [32] Манин Ю. И. Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика. — М.: Наука, 1986. — 292 С.
- [33] Нестеров В. В. Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле // *Докл. РАН*. — 1997. — Т. 357. — С. 302–305.
- [34] Нестеров В. В. Пары коротких корневых подгрупп в группе Шевалле типа  $G_2$  // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 2001. — Т. 281. — С. 253–273.
- [35] Нестеров В. В. Порождение пар коротких корневых подгрупп в группе Шевалле // *Алгебра и Анализ*. — 2004. — Т. 16, №6. — С. 172–208.
- [36] О'Мира О. Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. — М.: Мир, 1976. — С. 57–167.
- [37] Розенфельд Б. А., Замаховский М. П. Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства. — М.: МЦНМО, 2003. — 560 С.
- [38] Семенов А. А. Разложение Брюа длинных корневых полупростых торов в группах Шевалле // Канд. Дис. СПб Гос. Ун-т. — 1991. — 143 С.
- [39] Спрингер Т. А. Линейные алгебраические группы // Итоги науки и техн., сер. совр. проблемы Мат., Фундамент. направл. — М., 1989. — Т. 55. — С. 5–136.
- [40] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975. — 262 С.
- [41] Хамфри Д. Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980. — 399 С.
- [42] Aschbacher M. The 27-dimensional module for  $E_6$ . I // *Invent. Math.*. — 1987. — Vol. 89, no. 1. — Pp. 159–195.
- [43] Aschbacher M. The 27-dimensional module for  $E_6$ . II // *J. London Math. Soc.*. — 1988. — Vol. 37. — Pp. 275–293.
- [44] Aschbacher M. The 27-dimensional module for  $E_6$ . III // *Trans. Amer. Math. Soc.*. — 1990. — Vol. 321. — Pp. 45–84.
- [45] Aschbacher M. The 27-dimensional module for  $E_6$ . IV // *J. Algebra*. — 1990. — Vol. 131. — Pp. 23–39.
- [46] Aschbacher M. Some multilinear forms with large isometry groups // *Geom. Dedicata*. — 1988. — Vol. 25, no. 1–3. — Pp. 417–465.
- [47] Aschbacher M. The geometry of trilinear forms // *Finite Geometries, Buildings and Re-*

- lated topics. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1990. — Pp. 75–84.
- [48] Aschbacher M., Seitz G. M. Involutions in Chevalley groups over fields of even order // *Nagoya Math. J.* — 1976. — Vol. 63. — Pp. 1–91.
- [49] Bashkirov E. L. Some completely reducible linear groups over a division ring, containing a root subgroup // *Comm. Algebra.* — 2003. — Vol. 31, no. 12. — Pp. 5727–5754.
- [50] Bashkirov E. L. Irreducible linear groups of degree 3 over a quaternion division ring, containing a root subgroup // *Comm. Algebra.* — 2004. — Vol. 32, no. 5. — Pp. 1747–1763.
- [51] Bashkirov E. L. Irreducible linear groups of degree 4 over a quaternion division algebra that contain a subgroup  $\text{diag}(T_3(K, \Phi_0), 1)$  // *J. Algebra.* — 2005. — Vol. 287, no. 2. — Pp. 319–350.
- [52] Brown R., Humphries S. P. Orbits under symplectic transvections. I, II// *Proc. London Math. Soc.* — 1986. — Vol. 52. — Pp. 517–531, 532–556.
- [53] Cameron P. J., Hall J. I. Some groups generated by transvection subgroups // *J. Algebra.* — 1991. — Vol. 140, no. 1. — Pp. 184–209.
- [54] Carter R. W. Simple groups of Lie type. — London: Wiley, 1989. — 364 Pp.
- [55] Chevalley C., Schafer R. D. The exceptional simple Lie algebras  $F_4$  and  $E_6$  // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* — 1950. — Vol. 36. — Pp. 137–141.
- [56] Cohen A. M., Cushman R. H. Gröbner bases and standard monomial theory // Computational algebraic geometry. — Basel: Birkha"user, 1993. — Vol. 18. — Pp. 41–60.
- [57] The Local Maximal Subgroups of Exceptional Groups of Lie Type, Finite and Algebraic /Cohen A. M., Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M. // *Proc. London Math. Soc.* — 1992. — Vol. s3-64, no. 1. — Pp. 21–48.
- [58] Cooperstein B. N. Subgroups of the group  $E_6(q)$  which are generated by root subgroups // *J. Algebra.* — 1977. — Vol. 46, no. 2. — Pp. 355–388.
- [59] Cooperstein B. N. The geometry of root subgroups in exceptional groups, I // *Geom. Dedicata.* — 1979. — Vol. 8. — Pp. 317–381.
- [60] Cooperstein B. N. Geometry of long root subgroups in groups of Lie type // *Proc. Symp. Pure Math.* — 1980. — Vol. 37. — Pp. 243–248.
- [61] Cooperstein B. N. Subgroups of exceptional groups of Lie type generated by long root subgroups, I, II// *J. Algebra.* — 1981. — Vol. 70, no. 1. — Pp. 270–282, 283–298.
- [62] Cooperstein B. N. The geometry of root subgroups in exceptional groups, II // *Geom. Dedicata.* — 1983. — Vol. 15. — Pp. 1–45.
- [63] Cuypers H. Symplectic geometries, transvection subgroups and modules // *J. Comb. Theory, Ser. A.* — 1994. — Vol. 65. — Pp. 39–59.
- [64] Cuypers H. The geometry of  $k$ -transvection groups // *J. Algebra.* — 2006. — Vol. 300, no. 2. — Pp. 455–471.
- [65] Cuypers H., Steinbach A. I. Linear transvection groups and embedded polar spaces // *Invent. Math.* — 1999. — Vol. 137, no. 1. — Pp. 169–198.
- [66] Cuypers H., Steinbach A. I. Special linear groups generated by transvections and embedded projective spaces// *J. London Math. Soc.* — 2001. — Vol. 64, no. 3. — Pp. 576–594.
- [67] Deriziotis D. I., Fakiolas A. P. The Maximal Tori in The Finite Chevalley Groups of Type  $E_6$ ,  $E_7$  And  $E_8$  // *Communications in Algebra.* — 1991. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 889–903.
- [68] Di Martino L., Vavilov N. A. (2, 3)-generation of  $\text{SL}(n, q)$ . I. Cases  $n = 5, 6, 7$  // *Comm. Algebra.* — 1994. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 1321–1347.
- [69] Di Martino L., Vavilov N. A. (2, 3)-generation of  $\text{SL}(n, q)$ . II. Cases  $n \geq 8$  // *Comm. Algebra.* — 1996. — Vol. 24, no. 2. — Pp. 487–515.

- [70] Kantor W. M. Subgroups of classical groups generated by long root elements // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1979. — Vol. 248, no. 2. — Pp. 347–379.
- [71] Kantor W. M. Generation of linear groups // The geometric Vein: Coxeter Festschrift. — Berlin et al.: Springer, 1981. — Pp. 497–509.
- [72] Li Shang Zhi Irreducible subgroups of  $\mathrm{SL}(n, K)$  generated by root subgroups // *Geom. Dedicata*. — 1989. — Vol. 31. — Pp. 41–44.
- [73] Liebeck M. W., Seitz G. M. Subgroups generated by root elements in groups of Lie type // *Ann. Math.* — 1994. — Vol. 139. — Pp. 293–361.
- [74] Matsumoto H. Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés // *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème sér.* — 1969. — Vol. 2, no. 1. — Pp. 1–62.
- [75] Röhrle G. E. On extraspecial parabolic subgroups // *Contemp. Math.* — 1993. — Vol. 153. — Pp. 143–155.
- [76] Springer T. A. Linear algebraic groups. — Second edition. — Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc., 1998. — Vol. 9 of *Progress in Mathematics*. — 334 Pp.
- [77] Springer T. A., Veldkamp F. D. Octonions, Jordan algebras and exceptional groups. — Berlin: Springer, 2000. — 208 Pp.
- [78] Steinbach A. I. Untergruppen von klassischen Gruppen, die von Transvektionen oder Siegel-Transvektionen erzeugt werden // Ph.-D. Thesis, Univ. of Gießen. — 1995. — 195 Pp.
- [79] Steinbach A. I. Subgroups of classical groups generated by transvections or Siegel transvections, I, II // *Geom. Dedicata*. — 1997. — Vol. 68. — Pp. 281–322, 323–357.
- [80] Steinbach A. I. Subgroups isomorphic to  $G_2(L)$  in orthogonal groups// *J. Algebra*. — 1998. — Vol. 205, no. 1. — Pp. 77–90.
- [81] Steinbach A. I. Groups of Lie type generated by long root elements in  $F_4(K)$ . — Gießen: Habilitationsschrift, 2000.
- [82] Steinbach A. I. Subgroups of the Chevalley groups of type  $F_4(K)$  arising from a polar space// *Adv. Geom.*. — 2003. — Vol. 3. — Pp. 71–100.
- [83] Timmesfeld F. G. Groups generated by  $k$ -transvections // *Invent. Math.* — 1990. — Vol. 100. — Pp. 167–206.
- [84] Timmesfeld F. G. Groups generated by  $k$ -root subgroups // *Invent. Math.* — 1991. — Vol. 106. — Pp. 575–666.
- [85] Timmesfeld F. G. Groups generated by  $k$ -root subgroups – a survey // Groups, Combinatorics and Geometry (Durham – 1990). — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. — Pp. 183–204.
- [86] Timmesfeld F. G. Moufang planes and the groups  $E_6^K$  and  $\mathrm{SL}_2(K)$ ,  $K$  a Cayley division algebra // *Forum Math.* — 1994. — Vol. 6, no. 2. — Pp. 209–231.
- [87] Timmesfeld F. G. Subgroups generated by root elements of groups generated by  $k$ -root subgroups // *Geom. Dedicata*. — 1994. — Vol. 49. — Pp. 293–321.
- [88] Timmesfeld F. G. Abstract root subgroups and quadratic actions. With an appendix by A. E. Zalesskii // *Adv. Math.* — 1999. — Vol. 142, no. 1. — Pp. 1–150.
- [89] Timmesfeld F. G. Abstract root subgroups and groups of Lie type. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2001. — 389 Pp.
- [90] Tits J. Building of spherical type and finite BN-pairs. — Belin: Springer-Verlag, 1974. — Vol. 386 of *Lecture Notes in Math.* — 299 Pp.
- [91] Vavilov N. A. Structure of Chevalley groups over commutative rings // Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990). — London et al.: World Sci. Publ., 1991. — Pp. 219–335.

- [92] Vavilov N. A. A third look at weight diagrams // *Rendiconti del Seminario Matem. dell'Univ. di Padova*. — 2000. — Vol. 204. — Pp. 1–45.
- [93] Vavilov N. A. An  $A_3$ -proof of structure theorems for Chevalley groups Of types  $E_6$  and  $E_7$  // *Int. J. Algebra and Computations*. — 2007. — Vol. 17, no. 5–6. — Pp. 1283–1298.
- [94] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // *Acta Applicandae Math.* — 1996. — Vol. 45. — Pp. 73–115.
- [95] Wagner A. Groups generated by elations // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*. — 1974. — Vol. 41. — Pp. 199–205.