ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 10/2008

СЕМЕЙСТВА ДРОБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КОШИ В ШАРЕ

Е. С. ДУБЦОВ

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Июнь 2008

Аннотация

Пусть B_n обозначает единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Для $\alpha > 0$ пусть $\mathcal{K}_\alpha(n)$ обозначает класс функций, задаваемых при $z \in B_n$ в виде интеграла от ядра $(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{-\alpha}$ по некоторой комплексной борелевской мере, определенной на сфере $\{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| = 1\}$. Семейства $\mathcal{K}_\alpha(1)$ интенсивно изучались многими авторами. В настоящей работе исследованы разнообразные свойства пространств $\mathcal{K}_\alpha(n)$ при $n \geq 2$. В частности, при $\alpha \geq 1$ доказано, что $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ тогда и только тогда, когда $f + \mathcal{R}f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$, где $\mathcal{R}f$ обозначает радиальную производную. Также получены соотношения между $\mathcal{K}_\alpha(n)$ и другими пространствами голоморфных функций в шаре. Изучены исключительные множества для пространств $\mathcal{K}_\alpha(n)$ при $0 < \alpha < n$. Наконец, исследованы пространства мультипликаторов для семейств дробных преобразований Коши.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 08-01-00358-а и Фондом содействия отечественной науке.

Содержание

1. Введение

Пусть $B = B_n$ обозначает единичный шар в $\mathbb{C}^n$ и пусть $\mathcal{M}(n)$ обозначает пространство комплексных борелевских мер, заданных на сфере ∂B_n.

1.1. **Дробные преобразования Коши.** Пусть $\alpha > 0$ и $\mu \in \mathcal{M}(n)$. Дробное преобразование Коши меры μ порядка α задается равенством

$$K_\alpha[\mu](z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^\alpha} \, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n. \tag{1.1}$$

Здесь и далее используется главная ветвь логарифма. Положим

$$\mathcal{K}_\alpha = \mathcal{K}_\alpha(n) = \left\{ K_\alpha[\mu] : \ \mu \in \mathcal{M}(n) \right\}. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathcal{H}ol(B_n)$ обозначает пространство голоморфных функций в шаре B_n. Напомним, что равенство $A(B) = \mathcal{H}ol(B) \bigcap C(\overline{B})$ определяет шар-алгебру $A(B)$. Если $z \in B$ и $\alpha > 0$, то $(1 - \langle z, \cdot \rangle)^{-\alpha} \in A(B)$. Следовательно,

$$1 = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^\alpha} \, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n,$$

где $\sigma = \sigma_n$ обозначает нормированную меру Лебега на сфере $\partial B = \partial B_n$. Таким образом, $1 \in \mathcal{K}_\alpha(n)$.

При $n \in \mathbb{N}$ обозначим символом $\mathcal{K}_0(n)$ семейство функций f, таких что

$$f(z) - f(0) = \int_{\partial B_n} \log \frac{1}{1 - \langle z, \zeta \rangle} \, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n, \tag{1.3}$$

для некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}(n)$.

1.2. **Исторические замечания.** Семейства $\mathcal{K}_\alpha(n)$ обобщают классические семейства интегралов Коши $\mathcal{K}_n(n)$. Исследования семейства $\mathcal{K}_1(1)$ с точки зрения теории банаховых пространств восходят к работам В. П. Хавина [17] и [18]. В недавней монографии [11] представлены дальнейшие результаты и ссылки. Пространства $\mathcal{K}_\alpha(1)$, $\alpha > 0$, были введены Т. Х. МакГрегором [24]. Разнообразные свойства семейств $\mathcal{K}_\alpha(1)$ собраны в недавней монографии [20]. Настоящая работа сфокусирована на изучении семейств $\mathcal{K}_\alpha(n)$ при $n \geq 2$. Некоторые свойства пространств $\mathcal{K}_n(n)$, $n \in \mathbb{N}$, доказаны в обзоре [4]. Насколько известно автору, при $n \geq 2$ семейства $\mathcal{K}_\alpha(n)$ не исследовались систематически.

1.3. **Смежные проблемы.** Отметим, что в течение последних лет многие авторы исследовали гибертовы пространства, которые состоят из функций, заданных в шаре B_n, и имеют воспроизводящие ядра

$$\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}, \quad \alpha > 0,\ z \in B_n,\ \zeta \in \partial B_n.$$

В качестве примера упомянем недавнюю статью [5], где исследованы операторы Тёплица на таких гильбертовых пространствах. Далее, если $n \geq 2$, то ядро

$$\frac{1}{1-\langle z,\zeta\rangle}, \quad z \in B_n,\ \zeta \in \partial B_n,$$

играет ключевую роль в многомерной теории операторов. Соответствующее гильбертово пространство называют пространством Арвесона [7] или пространством Друри [12] (см., например, [1], [6] и указанные в этих работах ссылки). Наконец, отметим, что преобразование Фантаппье

$$F\mu(z) = \int_B \frac{1}{1-\langle z,w\rangle}\, d\mu(w), \quad z \in B,$$

изучалось с указанной точки зрения в статье [25]. Здесь μ является комплексной мерой, заданной на шаре B.

1.4. **Мультипликаторы.** Функция $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ называется мультипликатором для семейства $\mathcal{K}_\alpha(n)$, если $fg \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ для всех $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$. Пусть символ $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ обозначает множество всех мультипликаторов для $\mathcal{K}_\alpha(n)$.

1.5. **Семейства $\mathcal{K}_\alpha(n)$ и $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ как банаховы пространства.** Если $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, то положим

$$\|f\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} = \inf\left\{\|\mu\|_{\mathcal{M}(n)} :\ f = K_\alpha[\mu]\right\}.$$

Стандартными методами проверяется, что соответствующий инфимум достигается, а пространство $\mathcal{K}_\alpha(n)$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)}$ является банаховым пространством. Далее, предположим, что $f = K_\alpha[\rho]$, где ρ является положительной мерой. Пусть $\mu \in \mathcal{M}(n)$ и $f = K_\alpha[\mu]$, тогда

$$\|\rho\| = K_\alpha[\rho](0) = K_\alpha[\mu](0) \leq \|\mu\|.$$

Таким образом, $\|f\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} = \|\rho\|_{\mathcal{M}(n)}$.

Если $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$, то положим

$$\|g\|_{\mathfrak{M}_\alpha(n)} = \sup\left\{\|fg\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} :\ \|f\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} \le 1\right\}.$$

Теорема о замкнутом графике гарантирует, что $\|g\|_{\mathfrak{M}_\alpha(n)} < \infty$. Семейство $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{M}_\alpha(n)}$ является банаховым пространством. Отметим также, что $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ является банаховой алгеброй.

1.6. **Общее замечание.** В настоящей работе предполагаются известными основные результаты теории функций в шаре (см. [29] или [36]).

2. Свойства вложения

2.1. **Свойства вложения для семейств дробных преобразований Коши.** Ниже будет использована следующая лемма.

Лемма 2.1. ([9], лемма 1) *Предположим, что $u, v \in B_1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда*

$$(1-u)^{-\alpha}(1-v)^{-\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}[1-(tu+(1-t)v)]^{-\alpha-\beta}\,dt.$$

Пусть $\mathcal{P}(n)$ обозначает множество всех вероятностных мер, заданных на сфере ∂B_n, $n \in \mathbb{N}$. При $n = 1$ следующий результат получен в статье [9].

Предложение 2.2. *Положим $\mathcal{F}_\alpha(n) = \{K_\alpha[\mu] :\ \mu \in \mathcal{P}(n)\}$, $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $\mathcal{F}_\alpha(n) \cdot \mathcal{F}_\beta(n) \subset \mathcal{F}_{\alpha+\beta}(n)$.*

(ii) *Если $0 < \alpha < \beta$, то $\mathcal{F}_\alpha(n) \subset \mathcal{F}_\beta(n)$.*

Доказательство. Прежде всего, покажем, как вывести часть (i) из следующего свойства:

$$(1-\langle z,\zeta\rangle)^{-\alpha}(1-\langle z,\xi\rangle)^{-\beta} \in \mathcal{F}_{\alpha+\beta}(n), \quad z \in B_n, \tag{2.1}$$

для всех фиксированных точек $\zeta, \xi \in \partial B_n$. Итак, пусть $f \in \mathcal{F}_\alpha(n)$ и $g \in \mathcal{F}_\beta(n)$. Тогда по определению

$$f(z)g(z) = \int_{\partial B_n \times \partial B_n} (1-\langle z,\zeta\rangle)^{-\alpha}(1-\langle z,\xi\rangle)^{-\beta}\,d\rho(\zeta,\xi), \quad z \in B_n,$$

где ρ является вероятностной мерой на произведении $\partial B_n \times \partial B_n$. Приблизим меру ρ в слабой* топологии вероятностными мерами ρ_j, каждая из которых является конечной суммой атомных нагрузок. Множество $\mathcal{F}_{\alpha+\beta}(n)$ является выпуклым, поэтому, с одной стороны, имеем

$$\int_{\partial B_n \times \partial B_n} (1-\langle z,\zeta\rangle)^{-\alpha}(1-\langle z,\xi\rangle)^{-\beta}\,d\rho_j(\zeta,\xi) \in \mathcal{F}_{\alpha+\beta}(n).$$

С другой стороны, сходимость

$$\int_{\partial B_n \times \partial B_n} (1-\langle z,\zeta\rangle)^{-\alpha}(1-\langle z,\xi\rangle)^{-\beta}\,d\rho_j(\zeta,\xi) \to f(z)g(z)$$

является равномерной на компактных подмножествах шара B_n при $j \to \infty$. Остается заметить, что множество $\mathcal{F}_{\alpha+\beta}(n)$ замкнуто в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах шара.

Теперь докажем свойство (2.1). Лемма 2.1 гарантирует, что

$$\begin{aligned}(1-\langle z,\zeta\rangle)^{-\alpha}&(1-\langle z,\xi\rangle)^{-\beta}\\ &=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}[1-\langle z,w(t)\rangle]^{-\alpha-\beta}\,dt,\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $z \in B_n$ и $w(t) = t\zeta + (1-t)\xi$. Так как

$$\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)^{-1}\Gamma(\beta)^{-1}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

является вероятностной мерой на отрезке $[0,1]$, то достаточно показать, что

$$[1-\langle z,w(t)\rangle]^{-\alpha-\beta} \in \mathcal{F}_{\alpha+\beta}(n), \quad z \in B_n, \tag{2.3}$$

для каждого фиксированного параметра $t \in [0,1]$. Если $t=0$ или $t=1$, то свойство (2.3) имеет место по определению. Итак, предположим, что $0<t<1$. Тогда имеем $w(t) \in B_n$. Далее, заметим, что $[1-\langle z,\cdot\rangle]^{-\alpha-\beta}$ является гармонической функцией в замкнутом шаре $\overline{B}_n$. Следовательно,

$$\frac{1}{[1-\langle z,w\rangle]^{\alpha+\beta}} = \int_{\partial B_n}\frac{1-|w|^2}{|w-\eta|^{2n}}\frac{1}{[1-\langle z,\eta\rangle]^{\alpha+\beta}}\,d\sigma_n(\eta). \tag{2.4}$$

Если точка $w \in B_n$ зафиксирована, то $(1-|w|^2)|w-\eta|^{-2n}\,d\sigma_n(\eta)$ является вероятностной мерой. Поэтому для доказательства свойства (2.3) достаточно положить $w = w(t)$, $0 < t < 1$. Доказательство свойства (i) завершено.

Пусть $\beta > \alpha > 0$. Напомним, что $1 = K_{\beta-\alpha}[\sigma_n]$. Иными словами, $1 \in \mathcal{F}_{\beta-\alpha}(n)$, поэтому (ii) следует из (i) . □

Следствие 2.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $\mathcal{K}_\alpha(n)\cdot\mathcal{K}_\beta(n) \subset \mathcal{K}_{\alpha+\beta}(n)$.*
(ii) *Если $0 < \alpha < \beta$, то $\mathcal{K}_\alpha(n) \subset \mathcal{K}_\beta(n)$.*

Доказательство. Пусть $f = K_\alpha[\mu]$ и $g = K_\beta[\rho]$, где $\mu, \rho \in \mathcal{M}(n)$ и $\alpha, \beta > 0$. Рассматривая разложения по Жордану мер μ, ρ и применяя часть (i) предложения 2.2, получаем свойства (i) и (ii). □

2.2. **Свойства вложения для семейств мультипликаторов.** Напомним, что $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ обозначает пространство мультипликаторов для семейства $\mathcal{K}_\alpha(n)$.

Доказательство следующей леммы практически совпадает с рассуждениями, приведенными в работе [35] для случая $n = \alpha = 1$ (см. также [19], где рассмотрен случай $n = 1$, $\alpha > 0$).

Лемма 2.4. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Тогда следующие свойства равносильны:*

(i) *$g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$;*

(ii) $g(z)(1-\langle z,\zeta\rangle)^{-\alpha} \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ *для всех* $\zeta \in \partial B_n$, *и*

$$\sup\left\{\left\|\frac{g(z)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}\right\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} : \ \zeta \in \partial B_n\right\} < \infty. \tag{2.5}$$

При $n = 1$ следующее предложение доказано в статье [19].

Предложение 2.5. *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \alpha < \beta$, *то* $\mathfrak{M}_\alpha(n) \subset \mathfrak{M}_\beta(n)$.

Доказательство. Пусть $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$. В силу леммы 2.4 существуют константа $C > 0$ и меры $\mu_\zeta \in \mathcal{M}(n)$, $\zeta \in \partial B_n$, такие что $\|\mu_\zeta\| \le C$ и

$$\frac{g(z)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha} = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha}\, d\mu_\zeta(\xi), \quad z \in B_n.$$

Следовательно,

$$\frac{g(z)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\beta} = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha}\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\beta-\alpha}}\, d\mu_\zeta(\xi).$$

В силу (2.2) и (2.4) для каждой пары точек $\zeta, \xi \in \partial B_n$ существует вероятностная мера $\rho_{\zeta,\xi} \in \mathcal{M}(n)$, такая что

$$\frac{1}{(1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha}\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\beta-\alpha}} = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z,\eta\rangle)^\beta}\, d\rho_{\zeta,\xi}(\eta).$$

Таким образом,

$$\frac{g(z)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\beta} = \int_{\partial B_n}\int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z,\eta\rangle)^\beta}\, d\rho_{\zeta,\xi}(\eta)\, d\mu_\zeta(\xi).$$

Зафиксируем точку $\zeta \in \partial B_n$. Приблизим меру $\mu = \mu_\zeta$ в слабой* топологии мерами μ_k, такими что $\|\mu_k\| \le C$ и $\mu_k = \sum_{j=1}^{J(k)} a_{j,k}\delta_{\xi_{j,k}}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Пусть $\lambda = \lambda_\zeta$ обозначает предельную точку последовательности $\lambda_k = \sum_{j=1}^{J(k)} a_{j,k}\rho_{\xi_{j,k}}$ в слабой* топологии. Имеем

$$\frac{g(z)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\beta} = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^\beta}\, d\lambda_\zeta(w),$$

где $\|\lambda_\zeta\| \le C$. Поэтому лемма 2.4 гарантирует, что $g \in \mathfrak{M}_\beta(n)$. □

3. Семейства $\mathcal{K}_\alpha$ и дифференцирование

3.1. **Радиальные производные.** Пусть $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$. Радиальная производная $\mathcal{R}f$ определяется с помощью равенства

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z).$$

Напомним, что

$$f(z) - f(0) = \int_0^1 \frac{\mathcal{R}f(tz)}{t}\,dt, \quad z \in B. \tag{3.1}$$

Предложение 3.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f \in \mathcal{K}_0(n)$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{R}f \in \mathcal{K}_1(n)$.*

Доказательство. Предположим, что имеет место равенство (1.3). Тогда

$$\mathcal{R}f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{\langle z, \zeta\rangle}{1 - \langle z, \zeta\rangle}\,d\mu(\zeta) = K_1[\rho](z),$$

где $\rho = \mu - \mu(\partial B_n)\sigma_n$.

Для доказательства обратной импликации предположим, что

$$\mathcal{R}f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{1 - \langle z, \zeta\rangle}\,d\rho(\zeta),$$

где $\rho \in \mathcal{M}(n)$. Отметим, что $\mathcal{R}f(0) = 0$, поэтому $\rho(\partial B_n) = 0$. Используя равенство (3.1) и свойство $\rho(\partial B_n) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{1}{t(1 - t\langle z, \zeta\rangle)}\,d\rho(\zeta)\,dt \\ &= \int_0^1 \int_{\partial B_n} \left(\frac{1}{t} + \frac{\langle z, \zeta\rangle}{1 - t\langle z, \zeta\rangle}\right)\,d\rho(\zeta)\,dt \\ &= \int_{\partial B_n} \int_0^1 \frac{\langle z, \zeta\rangle}{1 - t\langle z, \zeta\rangle}\,dt\,d\rho(\zeta) \\ &= \int_{\partial B_n} \log\frac{1}{1 - \langle z, \zeta\rangle}\,d\rho(\zeta), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 3.2. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Тогда $f \in \mathcal{K}_0(n) + \mathcal{K}_\alpha(n)$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{R}f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$.*

Доказательство. Пусть $g \in \mathcal{K}_0(n)$ и $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, т.е.,

$$f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^\alpha}\,d\mu(\zeta), \quad z \in B_n.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathcal{R}f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{\alpha}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^{\alpha+1}}\,d\mu(\zeta) - \alpha f(z) \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n),$$

так как $\alpha f \in \mathcal{K}_\alpha(n) \subset \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$ в силу части (ii) следствия 2.3. С другой стороны, предложение 3.1 гарантирует, что $\mathcal{R}g \in \mathcal{K}_1(n) \subset \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$.

Доказательство обратной импликации удобно разбить на два шага.

Шаг 1: $\alpha = m \in \mathbb{N}$. По предположению имеем

$$\mathcal{R}f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^{m+1}}\, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n.$$

Следовательно,

$$f(z) - f(0) = \int_0^1 \frac{\mathcal{R}f(tz)}{t}\, dt = \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{1}{t(1-t\langle z, \zeta\rangle)^{m+1}}\, d\mu(\zeta)\, dt, \quad z \in B_n.$$

Если $w \in \mathbb{C}$ и $|w| < 1$, то

$$\frac{1}{t(1-tw)^{m+1}} = \frac{1}{t} + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{w}{(1-tw)^j}.$$

Так как $\mathcal{R}f(0) = 0$, то имеем $\mu(\partial B_n) = 0$. Используя последний факт и полагая $w = \langle z, \zeta\rangle$, получаем

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\partial B_n} \int_0^1 \frac{\langle z, \zeta\rangle}{(1-t\langle z, \zeta\rangle)^j}\, dt\, d\mu(\zeta) \\ &= -\int_{\partial B_n} \log(1-\langle z, \zeta\rangle)\, d\mu(\zeta) + \sum_{j=2}^{m+1} \int_{\partial B_n} \frac{1}{(j-1)(1-\langle z, \zeta\rangle)^{j-1}}\, d\mu(\zeta). \end{aligned}$$

Вложения $\mathcal{K}_{j-1}(n) \subset \mathcal{K}_m(n)$, $j = 2, \dots, m$, гарантируют, что $f \in \mathcal{K}_0(n) + \mathcal{K}_m(n)$.

Шаг 2: $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Повторяя рассуждения из шага 1 и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} f(z) - f(0) &= \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{1}{t(1-t\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha+1}}\, d\mu(\zeta)\, dt \\ &= \int_{\partial B_n} \int_0^1 \frac{\langle z, \zeta\rangle}{(1-t\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha+1}}\, dt\, d\mu(\zeta) + \int_0^1 \frac{1}{t} \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-t\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha}}\, d\mu(\zeta)\, dt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в первом слагаемом явно вычисляется. Поэтому рассмотрим второе слагаемое. Положим $[\alpha] = m \in \mathbb{N}$. Отметим, что $m+1 > \alpha$ и $\mu(\partial B_n) = 0$. Следовательно, в силу части (ii) следствия 2.3 существует мера $\rho \in \mathcal{M}(n)$, такая что $K_{m+1}[\rho] = K_\alpha[\mu]$. Также имеем $\rho(\partial B_n) = K_{m+1}[\rho](0) = K_\alpha[\mu](0) = \mu(\partial B_n) = 0$. Таким образом, вновь меняя порядок интегрирования, получаем

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{\alpha} \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha}}\, d\mu(\zeta) + \int_{\partial B_n} \int_0^1 \frac{1}{t(1-t\langle z, \zeta\rangle)^{m+1}}\, dt\, d\mu(\rho).$$

По определению первое слагаемое в полученной сумме принадлежит семейству $\mathcal{K}_\alpha(n)$. Наконец, в шаге 1 доказано, что второе слагаемое принадлежит сумме $\mathcal{K}_0(n) + \mathcal{K}_m(n) \subset \mathcal{K}_0(n) + \mathcal{K}_\alpha(n)$. $\square$

3.2. **Операторы дробного дифференцирования порядка** 1. Если $f \in \mathcal{H}ol(B)$, то положим по определению $R^1 f = f + \mathcal{R} f$. Оператор R^1 называется оператором дробного дифференцирования порядка 1. Отметим, что

$$f(z) = \int_0^1 R^1 f(tz)\, dt, \quad z \in B. \tag{3.2}$$

Теорема 3.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Если* $\alpha > 0$, *то из свойства* $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ *следует, что* $R^1 f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$.
(ii) *Если* $\alpha \geq 1$, *то из свойства* $R^1 f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$ *следует, что* $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, т.е., $f = K_\alpha[\mu]$. Тогда

$$f + \mathcal{R} f = \alpha K_{\alpha+1}[\mu] + (1-\alpha) f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n),$$

так как $(1-\alpha) f \in \mathcal{K}_\alpha(n) \subset \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$. Доказательство части (i) завершено.

Доказательство части (ii) удобно разбить на два шага.

Шаг 1: $\alpha = m \in \mathbb{N}$. По предположению имеем

$$R^1 f(tz) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - t\langle z, \zeta\rangle)^{m+1}}\, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n,\ t \in [0,1].$$

Следовательно, с помощью равенства (3.2) получаем

$$f(z) = \int_{\partial B_n} \int_0^1 \frac{1}{(1 - t\langle z, \zeta\rangle)^{m+1}}\, dt\, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n.$$

Пусть $I(z,\zeta)$ обозначает внутренний интеграл. Если $\langle z, \zeta\rangle = 0$, то $I(z,\zeta) = 1$. Если $\langle z, \zeta\rangle \neq 0$, то

$$I(z,\zeta) = \frac{1}{m} \frac{1 - (1 - \langle z, \zeta\rangle)^m}{\langle z, \zeta\rangle (1 - \langle z, \zeta\rangle)^m} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (1 - \langle z, \zeta\rangle)^{-j}.$$

Таким образом, в обоих случаях, имеем

$$I(z,\zeta) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (1 - \langle z, \zeta\rangle)^{-j}.$$

Следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^j}\, d\mu(\zeta).$$

Окончательно получаем $f \in \mathcal{K}_m(n)$, так как $\mathcal{K}_j(n) \subset \mathcal{K}_m(n)$ для $j = 1, \dots, m-1$.

Шаг 2: $\alpha > 1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Повторяя рассуждения из шага 1, имеем

$$f(z) = \int_{\partial B_n} \int_0^1 \frac{1}{(1-t\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+1}}\,dt\,d\mu(\zeta), \quad z \in B_n.$$

Представим внутренний интеграл в виде суммы двух слагаемых. Интегрируя по частям второе слагаемое, получаем

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(1-t\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+1}}\,dt &= \int_0^1 \frac{1}{(1-t\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha}}\,dt + \int_0^1 \frac{t\langle z,\zeta\rangle}{(1-t\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+1}}\,dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha}} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^1 \frac{1}{(1-t\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha}}\,dt.\end{aligned}$$

Следовательно, с помощью теоремы Фубини имеем

$$f(z) = \frac{1}{\alpha}\int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha}}\,d\mu(\zeta) + \frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^1\int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle tz,\zeta\rangle)^{\alpha}}\,d\mu(\zeta)\,dt.$$

По определению первое слагаемое в полученной сумме принадлежит семейству $\mathcal{K}_\alpha(n)$.

Рассмотрим второе слагаемое. Пусть $[\alpha] = m \in \mathbb{N}$. Отметим, что $m+1 > \alpha$. Следовательно, в силу части (ii) следствия 2.3 существует мера $\rho \in \mathcal{M}(n)$, такая что $K_{m+1}[\rho] = K_\alpha[\mu]$. Таким образом, второе слагаемое имеет следующий вид:

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^1\int_{\partial B_n} \frac{1}{(1-\langle tz,\zeta\rangle)^{m+1}}\,d\rho(\zeta)\,dt.$$

В шаге 1 доказано, что рассматриваемая функция принадлежит семейству $\mathcal{K}_m(n) \subset \mathcal{K}_\alpha(n)$. □

4. Дробные преобразования Коши, классы Харди и $\mathcal{K}_\infty$

4.1. **Оценки для интегральных средних.** При $f \in \mathcal{H}ol(B)$, $0 < p < +\infty$ и $0 < r < 1$ положим

$$M_p(f,r) = \left(\int_{\partial B} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, классическое пространство Харди $H^p(B)$ задается равенством

$$H^p(B) = \{f \in \mathcal{H}ol(B):\ M_p(f,r) \le C\}.$$

Напомним, что при фиксированных f и p интегральное среднее $M_p(f,r)$ является возрастающей функцией от переменной $r \in (0,1)$.

Пусть $\alpha \ge 0$ и $f \in \mathcal{K}_\alpha$. В данном разделе изучается рост интегральных средних $M_p(f,r)$ при $r \to 1-$. Для $n = 1$ соответствующие результаты получены в статье [14].

Следующая лемма будет использоваться в данном и в дальнейших разделах. Сокращение $a(z) \approx b(z)$ означает, что частное $a(z)/b(z)$ имеет конечный предел при $|z| \to 1-$.

Лемма 4.1. ([29], предложение 1.4.10) *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $c \in \mathbb{R}$. *Положим*

$$I_c(z) = \int_{\partial B_n} \frac{d\sigma_n(\zeta)}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^{n+c}}, \quad z \in \overline{B}_n.$$

(i) *Если* $c < 0$, *то функция* $I_c(z)$ *ограничена в замкнутом шаре* $\overline{B}_n$.
(ii) *Если* $c > 0$, *то* $I_c(z) \approx (1 - |z|^2)^{-c}$.
(iii) *Наконец,*

$$I_0(z) \approx \log \frac{1}{(1 - |z|^2)}.$$

Предложение 4.2. *Пусть* $\alpha \geq 0$ *и* $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$. *Следующие оценки имеют место при* $r \to 1-$.

Если $\alpha = 0$ *и* $0 < p < +\infty$, *то*

$$M_p^p(f, r) = \mathcal{O}(1). \tag{4.1}$$

Если $0 < \alpha \leq n$ *и* $0 < p < n/\alpha$, *то*

$$M_p^p(f, r) = \mathcal{O}(1). \tag{4.2}$$

Если $0 < \alpha \leq n$ *и* $p = n/\alpha$, *то*

$$M_p^p(f, r) = \mathcal{O}\left(\log \frac{1}{1 - r}\right). \tag{4.3}$$

Если $p > n/\alpha$ *и* $p \geq 1$, *то*

$$M_p^p(f, r) = \mathcal{O}\left[\frac{1}{(1 - r)^{\alpha p - n}}\right]. \tag{4.4}$$

Если $0 < p < 1$ *и* $\alpha \geq 2n$, *то*

$$M_p^p(f, r) = \mathcal{O}\left[\frac{1}{(1 - r)^{(\alpha - n)p}}\right]. \tag{4.5}$$

Доказательство. Хорошо известно, что $\mathcal{K}_n(n) \subset H^p(B_n)$ для всех $0 < p < 1$ ([29], теорема 6.2.3). Иными словами, оценка (4.2) имеет место при $\alpha = n$. Далее, предположим, что $p \geq 1$. Интегральное неравенство Минковского, теорема Фубини и лемма 4.1

гарантируют, что

$$\begin{aligned}
M_p^p(f,r) &= \int_{\partial B_n} |f(r\xi)|^p \, d\sigma(\xi) \\
&\le \int_{\partial B_n} \int_{\partial B_n} \frac{1}{|1-\langle r\xi,\zeta\rangle|^{\alpha p}} \, d\sigma(\xi)\, d|\mu|(\zeta) \\
&= \begin{cases} \mathcal{O}(1), & \text{если } \alpha p < n, \\ \mathcal{O}\left(\log \dfrac{1}{1-r}\right), & \text{если } \alpha p = n, \\ \mathcal{O}\left[\dfrac{1}{(1-r)^{\alpha p - n}}\right], & \text{если } \alpha p > n. \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом, оценки (4.3) и (4.4) доказаны. Свойство (4.2) проверено для $p \ge 1$. Напомним, что $H^q(B) \subset H^t(B)$ при $q > t > 0$. Следовательно, оценка (4.2) имеет место для всех $0 < p < n/\alpha$.

Если $\gamma > 0$, то имеем

$$-\log 2 \le \log \frac{1}{|1-\langle r\xi,\zeta\rangle|} \le C(\gamma) \frac{1}{|1-\langle r\xi,\zeta\rangle|^{\gamma}},$$

где $0 < r < 1$ и $\xi, \zeta \in \partial B$. Следовательно, оценка (4.1) имеет место для всех $p \in (0, +\infty)$.

Теперь предположим, что $0 < p < 1$ и $\alpha \ge 2n$. Заметим, что $(a+b)^p \le C(p)(a^p + b^p)$ при $a \ge 0$, $b \ge 0$. Следовательно, в силу теоремы о разложении Жордана можно предположить, что μ является вероятностной мерой. Таким образом, пользуясь определением (1.1), получаем

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\le \int_{\partial B_n} \frac{1}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha}} \, d\mu(\zeta) \\
&\le \frac{1}{(1-|z|)^{\alpha-2n}} \int_{\partial B_n} \frac{1}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}} \, d\mu(\zeta) \\
&\le \frac{1}{(1-|z|)^{\alpha-n}} \int_{\partial B_n} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}} \, d\mu(\zeta).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Заметим, что

$$u(z) = \int_{\partial B_n} \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}} \, d\mu(\zeta)$$

является положительной $\mathcal{M}$-гармонической функцией в шаре. Поэтому

$$\int_{\partial B_n} u(r\zeta) \, d\sigma(\zeta) = u(0)$$

при $0 < r < 1$ ([29], теорема 4.2.4). Далее, так как $1/p > 1$, то неравенство Минковского гарантирует, что

$$\left(\int_{\partial B} u^p(r\zeta)\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_{\partial B} u^{p\cdot\frac{1}{p}}(r\zeta)\, d\sigma(\zeta) = u(0) \tag{4.7}$$

для $0 < r < 1$.

Из оценок (4.6) и (4.7) следует, что

$$M_p^p(f,r) = \int_{\partial B_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) \le \frac{1}{(1-r)^{(\alpha-n)p}} u^p(0) = \frac{(\mu(\partial B_n))^p}{(1-r)^{(\alpha-n)p}}.$$

Таким образом, оценка (4.5) доказана при $\alpha \ge 2n$. □

Следствие 4.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Если $0 \le \alpha \le n$, то $\mathcal{K}_\alpha(n) \subset H^p(B_n)$ для $0 < p < n/\alpha$.*
(ii) *Если $f \in H^1(B_n)$, то $f \in \mathcal{K}_n(n)$; более того, $\|f\|_{\mathcal{K}_n(n)} \le \|f\|_{H^1(B_n)}$.*
(iii) *$\mathcal{K}_0(n) \subset \mathcal{K}_n(n)$.*

Доказательство. Часть (i) эквивалентна оценкам (4.1) и (4.2). Далее, если $f \in H^1(B_n)$, то $f = K_n[f^*]$, где $f^*(\zeta) = \lim_{r\to 1-} f(r\zeta)$, $\zeta \in \partial B_n$. Следовательно, $\|f\|_{\mathcal{K}_n(n)} \le \|f\|_{H^1(B_n)}$. Наконец, часть (iii) следует из (i) и (ii). □

Отметим, что часть (iii) будет усилена в следствии 5.5.

4.2. **Слабые классы Харди.** Оценку (4.2) можно уточнить в терминах слабых классов Харди $H^{p,\infty}(B_n)$.

Пусть $p > 0$. По определению $f \in H^{p,\infty}(B_n)$, если $f \in H^q(B_n)$ для некоторого $q > 0$ и

$$\sigma_n\{\zeta \in B_n :\ |f^*(\zeta)| > \tau\} \le C\tau^{-p}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Предложение 4.4. *Если $n \in \mathbb{N}$ и $n/\alpha \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{K}_\alpha(n) \subset H^{\frac{n}{\alpha},\infty}(B_n)$.*

Доказательство. Предположим, что $g \in \mathcal{K}_n(n)$. Хорошо известно, что

$$\sigma_n\{\zeta \in B_n :\ |g^*(\zeta)| > t\} \le Ct^{-1}. \tag{4.8}$$

Теперь предположим, что $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$. Так как $n/\alpha \in \mathbb{N}$, то повторное применение части (i) следствия 2.3 гарантирует, что $f^{n/\alpha} \in \mathcal{K}_n(n)$. Применим оценку (4.8) для $g = f^{n/\alpha}$ и $t = \tau^{n/\alpha}$. Получаем

$$\sigma_n\{\zeta \in B_n :\ |f^*(\zeta)| > \tau\} \le C\tau^{-\frac{n}{\alpha}},$$

что и требовалось доказать. □

4.3. **Семейство $\mathcal{K}_\infty(n)$.** Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mathcal{K}_\infty(n) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathcal{K}_\alpha(n).$$

По определению множество $A^{-\infty}(B_n)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)^\beta}, \quad z \in B_n,$$

для некоторых констант $C > 0$, $\beta > 0$.

При $n = 1$ следующий факт доказан в монографии [20] (теорема 2.11).

Предложение 4.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f \in \mathcal{K}_\infty(n)$ в том и только в том случае, когда $f \in A^{-\infty}(B_n)$.*

Доказательство. Если $f \in \mathcal{K}_\infty(n)$, то $f \in \mathcal{K}_\beta(n)$ для некоторого $\beta > 0$ в силу следствия 4.3. Таким образом,

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)^\beta}, \quad z \in B_n, \tag{4.9}$$

где $C = \|f\|_{\mathcal{K}_\beta}$, что и требовалось доказать.

Для доказательства обратной импликации предположим, что выполнена оценка (4.9). Предположим, не умаляя общности, что $\beta \notin \mathbb{N}$. Пусть $m = [\beta] + 1$. Положим $f^{(0)} = f$ и

$$f^{(j)}(z) = \int_0^1 f^{(j-1)}(tz)\, dt \tag{4.10}$$

для $j = 1, 2, \ldots, m$. Используем оценку (4.9) и повторно применим равенство (4.10). По индукции получаем

$$|f^{(j)}(z)| \leq \int_0^1 \frac{C(\beta)\, dt}{(1-t|z|)^{\beta+1-j}} \leq C(\beta) \leq \frac{C(\beta)}{(1-|z|)^{\beta-j}} \quad \text{при } |z| \leq 1/2,$$

$$|f^{(j)}(z)| \leq \int_0^1 \frac{C(\beta)\, dt}{(1-t|z|)^{\beta+1-j}} \leq \frac{C(\beta)}{(1-|z|)^{\beta-j}} \quad \text{при } 1/2 < |z| < 1,$$

где $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Последняя оценка имеет место в силу того, что $\beta > m-1 \geq j$. Итак, имеем

$$|f^{(m-1)}(z)| \leq \frac{C(\beta)}{(1-|z|)^{\beta+1-m}}, \quad z \in B_n,$$

где $\beta + 1 - m \in (0, 1)$. Следовательно, $|f^{(m)}(z)| \leq C(\beta)$ при $z \in B_n$. Иными словами, получаем

$$f^{(m)} \in H^\infty(B_n) \subset \mathcal{K}_n(n). \tag{4.11}$$

Напомним, что $R^1 = I + \mathcal{R}$. Из равенства (4.10) следует, что $R^1 f^{(j)} = f^{(j-1)}$ для $j = m, m-1, \ldots, 1$. Используем свойство (4.11) и применим предложение 3.2 и следствие 2.3.

По индукции получаем, что $f^{(m-s)} \in \mathcal{K}_{n+s}(n)$ для $s = 1, 2, \ldots, m$. Окончательно имеем $f = f^{(0)} \in \mathcal{K}_{n+m}(n) \subset \mathcal{K}_{\infty}(n)$. Доказательство обратной импликации завершено. $\square$

5. Семейства $\mathcal{K}_\alpha$ и голоморфные пространства Бесова

5.1. **Модифицированные операторы дробного дифференцирования.** Рассмотрим пару параметров $(\beta, t) \in \mathbb{R}^2$, таких что $n-1-\beta$ и $n-1-\beta+t$ не являются строго отрицательными целыми числами. Определим оператор

$$R^{\beta,t}: \mathcal{H}ol(B_n) \to \mathcal{H}ol(B_n)$$

следующим образом. Если

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \tag{5.1}$$

является однородным разложением функции $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, то

$$R^{\beta,t} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\beta)\Gamma(n+k-\beta+t)}{\Gamma(n-\beta+t)\Gamma(n+k-\beta)} f_k(z). \tag{5.2}$$

Обратный к $R^{\beta,t}$ оператор обозначается $R_{\beta,t}$ и задается формулой

$$R_{\beta,t} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\beta+t)\Gamma(n+k-\beta)}{\Gamma(n-\beta)\Gamma(n+k-\beta+t)} f_k(z).$$

Предположим, что $\beta < n$, $t > 0$ и имеет место равенство (5.1). Предположим также, что $r \in [0, 1]$ и $z \in B_n$. По определению оператора $R^{\beta,t}$ имеем

$$\frac{\Gamma(n-\beta+t)}{\Gamma(n-\beta)\Gamma(t)} R^{\beta,t} f(rz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k f_k(z)}{B(n+k-\beta, t)}.$$

Таким образом,

$$\frac{\Gamma(n-\beta+t)}{\Gamma(n-\beta)\Gamma(t)} \int_0^1 R^{\beta,t} f(rz) r^{n-\beta-1}(1-r)^{t-1}\, dr = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) = f(z). \tag{5.3}$$

Следующая лемма доказывается с помощью непосредственных вычислений.

Лемма 5.1. (ср. с [36], предложение 1.14) *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $n-1-\beta$ и $n-1-\beta+t$ не являются строго отрицательными целыми числами. Тогда*

$$R^{\beta,t}\left(\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n-\beta}}\right) = \frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n-\beta+t}}$$

для всех точек $z \in B_n$ и $\zeta \in \partial B_n$.

5.2. **Условие, достаточное для принадлежности семейству $\mathcal{K}_\alpha(n)$ при $\alpha > n$.** Для $n = 1$ следующий факт доказан в статье [16].

Предложение 5.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > n$. Предположим, что $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и*

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |g(r\zeta)|(1-r)^{\alpha-n-1}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr = V < +\infty.$$

Тогда $g \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ и $\|g\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} \le C(\alpha, n, V) = (\alpha - n)\dots(\alpha-1)V/(n-1)!$.

Доказательство. Положим $t = \alpha - n$ и $f = R_{0,t}g$. Тогда $g = R^{0,t} f$ и

$$f(z) = \frac{\Gamma(n+t)}{\Gamma(n)\Gamma(t)} \int_0^1 g(rz) r^{n-1}(1-r)^{t-1}\, dr$$

в силу равенства (5.3). Если $0 < s < 1$, то получаем

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(n)\Gamma(t)}{\Gamma(n+t)} \int_{\partial B_n} |f(s\zeta)|\, d\sigma_n(\zeta) &\le \int_0^1 \int_{\partial B_n} |g(sr\zeta)|\, d\sigma_n(\zeta)(1-r)^{t-1}\, dr \\ &\le \int_0^1 \int_{\partial B_n} |g(r\zeta)|\, d\sigma_n(\zeta)(1-r)^{t-1}\, dr = V < +\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, $f \in H^1(B_n) \subset \mathcal{K}_n(n)$ и $\|f\|_{\mathcal{K}_n(n)} \le \|f\|_{H^1(B_n)} \le C(\alpha, n, V)$. Иными словами,

$$f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^n}\, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n,$$

где $\|\mu\|_{\mathcal{M}(n)} \le C(\alpha, n, V)$. Поэтому с помощью леммы 5.1 получаем

$$g(z) = R^{0,t} f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^{n+t}}\, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n.$$

Следовательно, $\|g\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} \le C(\alpha, n, V)$. □

5.3. **Голоморфные пространства Бесова.** Если $j \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$, то пространство Бесова $\widetilde{\mathcal{B}}^j_\gamma(B_n)$ — это множество функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |R^j f(r\zeta)|(1-r)^{\gamma-1}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr < +\infty.$$

Предложение 5.3. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\alpha > n - j$.*

(i) *Пусть $\alpha \ge 1$. Если $f \in \widetilde{\mathcal{B}}^j_{\alpha-n+j}(B_n)$, то $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$.*
(ii) *Пусть $\beta > \alpha$. Если $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, то $f \in \widetilde{\mathcal{B}}^j_{\beta-n+j}(B_n)$.*

Доказательство. Докажем часть (i). Имеем $\alpha + j > n$, поэтому с помощью предложения 5.2 получаем $R^j f \in \mathcal{K}_{\alpha+j}(n)$. Так как $\alpha \ge 1$, то повторное применение теоремы 3.3 гарантирует, что $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$.

Теперь обратимся к части (ii). Пусть $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, $\alpha > n - j$. В силу теоремы 3.3 имеем $R^j f \in \mathcal{K}_{\alpha+j}(n)$, т.е.,

$$R^j f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{\alpha+j}}\, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n,$$

для некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}(n)$. Таким образом, если $0 \le r < 1$, то

$$\int_{\partial B_n} |R^j f(r\xi)|\, d\sigma_n(\xi) \le \int_{\partial B_n} \int_{\partial B_n} \frac{1}{|1 - r\langle \xi, \zeta \rangle|^{\alpha+j}}\, d\sigma_n(\xi)\, d|\mu|(\zeta).$$

Так как $\alpha + j > n$, то с помощью леммы 4.1 получаем

$$\int_{\partial B_n} |R^j f(r\xi)|\, d\sigma_n(\xi) \le C\|\mu\|_{\mathcal{M}(n)}(1-r)^{n-\alpha-j}.$$

Теперь предположим, что $\beta > \alpha$. Тогда полученная оценка гарантирует, что

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |R^j f(r\xi)|(1-r)^{\beta-n+j-1}\, d\sigma_n(\xi)\, dr \le C\|\mu\| \int_0^1 (1-r)^{\beta-\alpha-1} < +\infty.$$

Иными словами, $f \in \widetilde{\mathcal{B}}^j_{\beta-n+j}(B_n)$. □

Отметим, что более строгая версия части (i) предложения 5.3 имеет место при $n = 1$ ([16], лемма 2).

5.4. **Голоморфные пространства Бесова и $\mathcal{K}_0$.**

Лемма 5.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{K}_0(n) \subset \widetilde{\mathcal{B}}^n_\varepsilon(B_n)$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{K}_0(n)$. Напомним, что $\mathcal{K}_0(n) \subset \mathcal{K}_n(n)$ в силу части (iii) следствия 4.3. Далее, $\mathcal{R}^j f \in \mathcal{K}_j(n) \subset \mathcal{K}_n(n)$ для $j = 1, 2, \dots, n$ в силу предложений 3.1, 3.2 и следствия 2.3. Следовательно, $R^n f = (I + \mathcal{R})^n f \in \mathcal{K}_n(n)$, т.е.,

$$R^n f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^n}\, d\mu(\zeta), \quad z \in B_n,$$

для некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}(n)$. Следовательно, если $0 \le r < 1$, то

$$\int_{\partial B_n} |R^n f(r\xi)|\, d\sigma_n(\xi) \le \int_{\partial B_n} \int_{\partial B_n} \frac{1}{|1 - r\langle \xi, \zeta \rangle|^n}\, d\sigma_n(\xi)\, d|\mu|(\zeta).$$

С помощью леммы 4.1 имеем

$$\int_{\partial B_n} |R^n f(r\xi)|\, d\sigma_n(\xi) \le C \log \frac{1}{1-r}.$$

Из данного неравенства следует оценка

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |R^n f(r\xi)|(1-r)^{\varepsilon-1}\, d\sigma_n(\xi)\, dr \le C \int_0^1 (1-r)^{\varepsilon-1} \log \frac{1}{1-r} < +\infty,$$

что и требовалось доказать. □

5.5. **Свойство вложения для $\mathcal{K}_0(n)$.** Хорошо известно, что $\mathcal{K}_0(1) \subset \mathcal{K}_\alpha(1)$ для всех $\alpha > 0$. В случае произвольной размерности имеет место следующий факт.

Следствие 5.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{K}_0(n) \subset \mathcal{K}_1(n)$.*

Доказательство. Лемма 5.4 гарантирует, что $\mathcal{K}_0(n) \subset \widetilde{\mathcal{B}}_1^n(B_n)$. Остается заметить, что в силу части (i) предложения 5.3 имеем $\widetilde{\mathcal{B}}_1^n(B_n) \subset \mathcal{K}_1(n)$. □

5.6. **Радиальные производные и $\mathcal{K}_\alpha(n)$.** Имеет место следующее уточнение предложения 3.2.

Следствие 5.6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \geq 1$. Тогда $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ в том и только в том случае, когда $\mathcal{R}f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$.*

Доказательство. Применим предложение 3.2 и следствие 5.5. □

5.7. **Модифицированные голоморфные пространства Бесова и $\mathcal{K}_\alpha(n)$.** Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$. По определению модифицированное пространство Бесова $\mathcal{B}_\gamma^j(B_n)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\gamma^j(B_n)} = \sum_{|m|\leq j-1} \left| \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(0) \right| + \int_0^1 \int_{\partial B_n} |\mathcal{R}^j f(r\zeta)| (1-r)^{\gamma-1}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr < +\infty,$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и $|m| = m_1 + \cdots + m_n$. Пространство $\mathcal{B}_\gamma^j(B_n)$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\gamma^j(B_n)}$ является банаховым (ср. с [36], предложение 6.2).

Лемма 5.7. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\alpha > n - j$.*

(i) *Пусть $\alpha \geq 1$. Тогда $\mathcal{B}_{\alpha-n+j}^j(B_n) \subset \mathcal{K}_\alpha(n)$. Если $f \in \mathcal{B}_{\alpha-n+j}^j(B_n)$, то*
$$\|f\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{\alpha-n+j}^j(B_n)},$$
где константа $C > 0$ не зависит от функции f.

(ii) *Пусть $\beta > \alpha$. Тогда $\mathcal{K}_\alpha(n) \subset \mathcal{B}_{\beta-n+j}^j(B_n)$.*

Доказательство. Предположим, что $f \in \mathcal{B}_{\alpha-n+j}^j(B_n)$. Имеем

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |\mathcal{R}^j f(r\zeta)| (1-r)^{\alpha+j-n-1}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr < +\infty.$$

Так как $\alpha + j > n$, то предложение 5.2 гарантирует, что $\mathcal{R}^j f \in \mathcal{K}_{\alpha+j}(n)$. По предположению $\alpha \geq 1$, следовательно, повторно применяя следствие 5.6, получаем, что $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$.

Теперь рассмотрим оператор $I : \mathcal{B}_{\alpha-n+j}^j(B_n) \to \mathcal{K}_\alpha(n)$, заданный равенством $If = f$. Если последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ сходится в пространстве $\mathcal{B}_{\alpha-n+j}^j(B_n)$ или в пространстве $\mathcal{K}_\alpha(n)$, то она равномерно сходится на компактных подмножествах шара B_n. Следовательно, график оператора I замкнут. Таким образом, теорема о замкнутом графике гарантирует, что

$$\|f\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)} \leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{\alpha-n+j}^j(B_n)}$$

для всех $f \in \mathcal{B}^j_{\alpha-n+j}(B_n)$. Часть (i) доказана.

Часть (ii). Пусть $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, $\alpha > n-j$. В силу предложения 3.2 имеем $\mathcal{R}^j f \in \mathcal{K}_{\alpha+j}(n)$. Для завершения рассуждения достаточно повторить доказательство части (ii) предложения 5.3. $\square$

6. Дробные преобразования Коши и внутренние функции

6.1. **Пространства Дирихле.** Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$. Обозначим символом $\mathcal{D}^j_\gamma(B_n)$ пространство функций $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |\mathcal{R}^j f(r\zeta)|^2 (1-r)^{\gamma-1}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr < +\infty.$$

Лемма 6.1. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ и $\beta > \alpha > n-j$. Тогда*

$$H^\infty(B_n) \bigcap \mathcal{K}_\alpha(n) \subset \mathcal{D}^j_{\beta-n+2j}(B_n).$$

Доказательство. Пусть $f \in H^\infty(B_n) \bigcap \mathcal{K}_\alpha(n)$. Так как $f \in H^\infty(B_n)$, то

$$f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{f^*(\zeta)}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^n}\, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n,$$

где значения $f^*(\zeta) = \lim_{r\to 1-} f(r\zeta)$ определены σ_n-п.в. Таким образом,

$$\mathcal{R}f(z) = \int_{\partial B_n} \frac{\langle z, \zeta\rangle f^*(\zeta)}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^{n+1}}\, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n.$$

Следовательно, с помощью леммы 4.1 получаем

$$|\mathcal{R}f(z)| \le \int_{\partial B_n} \frac{C}{|1-\langle z, \zeta\rangle|^{n+1}}\, d\sigma_n(\zeta) \le \frac{C}{(1-|z|)}, \quad z \in B_n.$$

Аналогично проверяется, что

$$|\mathcal{R}^j f(z)| \le \frac{C}{(1-|z|)^j}, \quad z \in B_n. \tag{6.1}$$

Так как $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, то предложение 3.2 гарантирует, что $\mathcal{R}^j f \in \mathcal{K}_{\alpha+j}(n)$. Имеем $\alpha + j > n$ и $\beta > \alpha$, поэтому, применяя часть (ii) леммы 5.7, получаем

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |\mathcal{R}^j f(r\zeta)| (1-r)^{\beta-n+j-1}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr < \infty.$$

Следовательно, используя неравенство (6.1), имеем

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |\mathcal{R}^j f(r\zeta)| (1-r)^j \cdot |\mathcal{R}^j f(r\zeta)| (1-r)^{\beta-n+j-1}\, d\sigma(\zeta)\, dr < +\infty,$$

что и требовалось доказать. $\square$

6.2. **Внутренние функции.** Непостоянная функция $f \in H^\infty(B_n)$ называется внутренней, если равенство $|f^*| = 1$ имеет место σ_n-п.в. С одной стороны, семейства $\mathcal{K}_\alpha(n)$ при $\alpha \ge n$ содержат все внутренние функции, потому что $H^\infty(B_n) \subset H^1(B_n) \subset \mathcal{K}_n(n) \subset \mathcal{K}_\alpha(n)$. С другой стороны, при $n \ge 2$ верно следующее утверждение.

Предложение 6.2. *Пусть $n \ge 2$. Если $0 \le \alpha < n - 1/2$, то семейство $\mathcal{K}_\alpha(n)$ не содержит внутренних функций.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ является внутренней функцией. В силу части (ii) следствия 2.3 и в силу следствия 5.5, можно предположить, не умаляя общности, что $\alpha \in (n-1, n-1/2)$.

Пусть $\rho \in [1/2, 1)$ и $f_\rho(\zeta) = f(\rho\zeta)$, $\zeta \in \partial B$. Для $\zeta \in \partial B$ и $\lambda \in B_1$ положим $f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta)$. Заметим, что $\mathcal{R}f(\lambda\zeta) = \lambda f'_\zeta(\lambda)$, следовательно,

$$|f^*(\zeta) - f_\rho(\zeta)| \le 2\int_\rho^1 |\mathcal{R}f(r\zeta)|\, dr, \tag{6.2}$$

если значение $f^*(\zeta)$ корректно определено. Применяя оценку (6.2), неравенство Гёльдера и теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
\|f_\rho - f^*\|^2_{L^2(\partial B)} &\le C\int_{\partial B}\left(\int_\rho^1 |\mathcal{R}f(r\zeta)|(1-r)^{\frac14}(1-r)^{-\frac14}\, dr\right)^2 d\sigma(\zeta)\\
&\le C(1-\rho)^{\frac12}\int_{\partial B}\int_\rho^1 |\mathcal{R}f(r\zeta)|^2(1-r)^{\frac12}\, dr\, d\sigma(\zeta)\\
&= \circ(1-\rho)^{\frac12} \quad \text{при } \rho \to 1-
\end{aligned}$$

в силу леммы 6.1. М. Тамм [32] доказал, что любая внутренняя функция не удовлетворяет оценке $\|f_\rho - f^*\|^2_{L^2(\partial B_n)} = \circ(1-\rho)^{\frac12}$ при $\rho \to 1-$, если $n \ge 2$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. □

7. Граничное поведение: базовые результаты

7.1. **Направления максимального радиального роста.** Из определения нормы в пространстве $\mathcal{K}_\alpha$, $\alpha > 0$, следует, что

$$|f(z)| \le \frac{\|f\|_{\mathcal{K}_\alpha}}{(1-|z|)^\alpha}, \quad z \in B.$$

Предложение 7.1 показывает, что соответствующий максимальный рост возможен для не более, чем счетного числа радиальных направлений. Если $n = 1$, то данное утверждение доказано в статье [14].

Пусть $\xi \in \partial B$ и $C > 1$. Напомним, что соответствующая область Кораньи $D_C(\xi)$ задается равенством

$$D_C(\xi) = \{z \in B : \ |1 - \langle z, \xi\rangle| < C(1-|z|)\}.$$

Предложение 7.1. *Предположим, что* $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}(n)$, $\alpha > 0$ *и* $f = K_\alpha[\mu]$. *Если* $\xi \in \partial B$, *то*

$$\lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in D_C(\xi)}} (1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha f(z) = \mu(\{\xi\})$$

для всех $C > 1$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \partial B$. Имеем

$$\lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in B}} \frac{(1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha} = \delta_{\zeta,\xi},$$

где $\delta_{\zeta,\xi} = 0$ при $\zeta \neq \xi$ и $\delta_{\xi,\xi} = 1$. Если $z \in D_C(\xi)$, то

$$\left|\frac{1-\langle z,\xi\rangle}{1-\langle z,\zeta\rangle}\right|^\alpha \le \frac{|1-\langle z,\xi\rangle|^\alpha}{(1-|z|)^\alpha} \le C^\alpha.$$

Следовательно, если $f = K_\alpha[\mu]$, то

$$\lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in D_C(\xi)}} (1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha f(z) = \lim_{\substack{z\to\xi \\ z\in D_C(\xi)}} \int_{\partial B} \frac{(1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}\, d\mu(\zeta) = \mu(\{\xi\})$$

по теореме Лебега о мажорированной сходимости. □

7.2. **Радиальное поведение функций из** $\mathcal{K}_\alpha(n)$ **при** $\alpha > n$**.** Напомним, что пространство Блоха $\mathfrak{B}(B)$ сотоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B)$, таких что

$$|\mathcal{R}f(z)| \le \frac{C}{1-|z|}, \quad z \in B,$$

для некоторой константы $C > 0$ (эквивалентные определения можно найти в главе 3 монографии [36]).

Предложение 7.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha > n$. *Тогда* $\mathfrak{B}(B_n) \subset \mathcal{K}_\alpha(n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{B}(B_n)$, т.е., $|\mathcal{R}f(r\zeta)| \le C(1-r)^{-1}$ для всех $\zeta \in \partial B$ и $r \in [0,1)$. Условие $\alpha > n$ гарантирует, что

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |\mathcal{R}f(r\zeta)|(1-r)^{(\alpha+1)-n-1}\, d\sigma_n(\zeta)\, dr < +\infty.$$

Так как $\alpha + 1 > n$, то имеем $\mathcal{R}f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$ в силу предложения 5.2. Наконец, применяя следствие 5.6, получаем $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$. □

Следствие 7.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует функция* $f \in \bigcap_{\alpha>n} \mathcal{K}_\alpha(n)$, *такая что конечный предел* $\lim_{r\to 1-} f(r\zeta)$ *не существует при всех* $\zeta \in \partial B_n$.

Доказательство. Д. К. Уллрич [33] построил функцию $f \in \mathfrak{B}(B_n)$, которая нигде не имеет конечных радиальных пределов. Остается применить предложение 7.2. □

Отметим, что количественные усиления следствия 7.3 для отдельных пространств $\mathcal{K}_\alpha(1)$ при $\alpha > 1$ получены в статье [14].

8. Граничное поведение: исключительные множества

8.1. **Исключительные множества.** Пусть функция f задана в шаре B. Исключительное множество $E(f)$ по определению состоит из всех точек $\zeta \in \partial B$, в которых функция f не имеет допустимого предела. Напомним, что f имеет допустимый предел в точке $\zeta \in \partial B$, если для всех $\gamma > 1$ функция $f(z)$ имеет конечный предел, когда точка z стремится к ζ, оставаясь в области Кораньи

$$D_\gamma(\zeta) = \{z \in B: \ |1 - \langle z, \zeta\rangle| < \gamma(1 - |z|)\}.$$

С одной стороны, если $\alpha > n$, то в силу следствия 7.3 существует функция $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, такая что $E(f) = \partial B_n$. С другой стороны, если $0 \le \alpha \le n$, то в силу оценок (4.1) и (4.2) имеет место вложение $\mathcal{K}_\alpha(n) \subset H^p(B_n)$ для всех $0 < p < 1$. Следовательно, если $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, $0 \le \alpha \le n$, то функция f имеет допустимые пределы почти везде, иными словами, $\sigma_n(E(f)) = 0$. В настоящем разделе последнее наблюдение будет усилено в случае $0 \le \alpha < n$.

Для оценки размеров исключительных множеств $E(f) \subset \partial B$ при $f \in \mathcal{K}_\alpha$ естественно использовать неизотропные охваты по Хаусдорфу, определяемые равенствами

$$H_m(E, \partial B_n) = \inf\left\{\sum_k \delta_k^m: \ E \subset \bigcup_k B(\zeta_k, \delta_k)\right\}, \tag{8.1}$$

где $\zeta_k \in \partial B_n$ и $B(\zeta, \delta) = \{\xi \in \partial B_n: \ |1 - \langle \zeta, \xi\rangle| < \delta\}$. Если $\zeta \in \partial B_1$, то $B(\zeta, \delta) = \{\xi \in \partial B_1: \ |\zeta - \xi| < \delta\}$. Иными словами, если $n = 1$, то равенство (8.1) задает стандартный m-мерный охват по Хаусдорфу множества E, если E рассматривается как подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, наделенной стандартной метрикой.

Исключительные множества для семейств $\mathcal{K}_\alpha(1)$ исследовались в статье [15]. В частности, имеет место следующий результат.

Теорема 8.1. (Д. Дж. Халленбек и Т. Х. МакГрегор [15].) *Если $f \in \mathcal{K}_\alpha(1)$ и $0 < \alpha < 1$, то α-ёмкость множества $E(f)$ равна нулю. Если $f \in \mathcal{K}_0(1)$, то логарифмическая ёмкость множества $E(f)$ равна нулю.*

В случае произвольной размерности ниже будет использован несколько иной подход. А именно, для всех $n \in \mathbb{N}$ будут получены подобные результаты в терминах охватов по Хаусдорфу H_m. Изначальная проблема будет сведена к вопросам об исключительных множествах для пространств Харди–Соболева и их модификаций.

8.2. **Пространства Харди–Соболева.** Пусть функция $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ имеет однородное разложение $f = \sum_k f_k$. Тогда дробная производная порядка $\beta > 0$ задается с помощью формулы

$$R^\beta f(z) = \sum_k (k+1)^\beta f_k(z).$$

Как и ранее, $R^1 f = f + \mathcal{R} f$. При $0 < p < \infty$ пространства Харди–Соболева определяются равенствами

$$H^p_\beta(B) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(B) : \sup_{0<r<1} \int_{\partial B} |R^\beta f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) = \|f\|^p_{p,\beta} < \infty \right\}.$$

Напомним, что $E(f)$ обозначает исключительное множество для функции f. Следующая теорема доказана в статье [2].

Теорема 8.2. (П. Ахерн и У. Кон [2].) *Пусть $n - \beta p \geq 0$. Если $f \in H^p_\beta(B_n)$, то $H_{n-\beta p+\varepsilon}(E(f))$ =0 для всех $\varepsilon > 0$.*

С помощью теоремы 3.3 и предложения 3.1 можно найти соотношения между семействами $\mathcal{K}_\alpha(n)$ и пространствами Харди–Соболева при $0 \leq \alpha \leq n-1$.

Предложение 8.3. *Пусть $n \geq 2$, $j \in \mathbb{N}$ и $0 \leq n-j-1 < \alpha \leq n-j$. Тогда $\mathcal{K}_\alpha(n) \subset H^p_j(B_n)$ при $0 < p < \frac{n}{\alpha+j}$.*

Доказательство. Предположим, что $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $0 < \alpha \leq n-j$ и $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$. Повторное применение теоремы 3.3 показывает, что $R^j f \in \mathcal{K}_{\alpha+j}(n)$. Так как $\alpha + j \leq n$, то предложение 4.2 гарантирует, что $R^j f \in H^p(B_n)$ при $0 < p < \frac{n}{\alpha+j}$. $\square$

Следствие 8.4. *Предположим, что $n \geq 2$, $j \in \mathbb{N}$ и $0 \leq n-j-1 < \alpha \leq n-j$. Если $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, то $H_\gamma(E(f)) = 0$ для всех $\gamma > \frac{\alpha n}{\alpha+j}$.*

Доказательство. Применим предложение 8.3 и теорему 8.2. $\square$

Предложение 8.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mathcal{K}_0(n) \subset H^p_1(B_n)$ для всех $0 < p < n$.*

Доказательство. Предположим, что $f \in \mathcal{K}_0(n)$. Тогда $\mathcal{R} f \in \mathcal{K}_1(n)$ в силу предложения 3.1. Наконец, предложение 4.2 гарантирует, что $R^1 f \in H^p(B_n)$ для всех $0 < p < n$. $\square$

Следствие 8.6. *Если $f \in \mathcal{K}_0(n)$, то $H_\varepsilon(E(f)) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Применим предложение 8.5 и теорему 8.2. $\square$

8.3. **Модифицированные пространства Харди–Соболева.** В настоящем пункте будет получено усиление следствия 8.4 в случае $\alpha \in (0, n) \setminus \mathbb{N}$.

Предположим, что $(\beta, t) \in \mathbb{R}^2$, а также $n-1-\beta$ и $n-1-\beta+t$ не являются строго отрицательными целыми числами. Таким образом, оператор $R^{\beta,t}$ корректно определен с помощью формулы (5.2). При $0 < p < \infty$ модифицированные пространства Харди–Соболева задаются с помощью равенств

$$H^p_{\beta,t}(B_n) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(B_n) : \sup_{0<r<1} \int_{\partial B} |R^{\beta,t} f(r\zeta)|^p \, d\sigma_n(\zeta) = \|f\|^p_{p,\beta,t} < \infty \right\}.$$

Доказательство следующего аналога теоремы 8.2 будет дано ниже, в пункте 8.5.

Теорема 8.7. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $p > 1$, $t > 0$, $n - tp > 0$ и $\beta \in (-\infty, n)$. Если $f \in H^p_{\beta,t}(B_n)$, то $H_{n-tp+\varepsilon}(E(f)) = 0$ для всех $\varepsilon > 0$.*

Отметим, что при выполнении условий сформулированной теоремы $n-1-\beta$ и $n-1-\beta+t$ не являются строго отрицательными целыми числами. Поэтому пространства $H^p_{\beta,t}(B_n)$ корректно определены.

Следствие 8.8. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in(0,n)$. Если $f\in\mathcal{K}_\alpha(n)$, то $H_{\alpha+\varepsilon}(E(f))=0$ для всех $\varepsilon>0$.*

Доказательство. Положим $\beta=n-\alpha\in(0,n)$ и $t=\beta-\varepsilon$, где число $\varepsilon>0$ является достаточно малым, в частности, $\varepsilon<\beta$. По условию $f\in\mathcal{K}_\alpha(n)$, т.е.,

$$f(z)=\int_{\partial B_n}\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n-\beta}}\,d\mu(\zeta),\quad z\in B_n,$$

где $\mu\in\mathcal{M}(n)$. Меняя порядок интегрирования и дифференцирования и используя лемму 5.1, получаем

$$R^{\beta,\beta-\varepsilon}f(z)=\int_{\partial B_n}\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n-\varepsilon}}\,d\mu(\zeta),\quad z\in B_n.$$

Так как $0<n-\varepsilon<n$, то в силу предложения 4.2 имеем $R^{\beta,\beta-\varepsilon}f\in H^p(B_n)$ для некоторого $p=p(\varepsilon)>1$. Теперь теорема 8.7 гарантирует, что $H_{n-\beta+2\varepsilon}(E(f))=0$ для всех $\varepsilon>0$. Иными словами, $H_{\alpha+\varepsilon}(E(f))=0$ для всех $\varepsilon>0$, что и требовалось доказать. □

8.4. **Примеры компактных исключительных множеств.** Следующий результат соответствует предложению 8.8.

Предложение 8.9. *Предположим, что $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,n)$, $0\le m<\alpha$, $E\subset\partial B_n$ является компактом, $H_m(E)=0$ и $C>1$. Тогда $E=E_{1,C}(f)$ для некоторой функции $f\in\mathcal{K}_\alpha(n)$.*

Доказательство. Зафиксируем $p_0>1$, такое что $m=n-(n-\alpha)p_0$. Имеем $H_m(E)=0$, следовательно, теорема 1.2 из статьи [2] гарантирует, что $E=E_{1,C}(f)$ для некоторой функции $f\in H^{p_0}_{n-\alpha}(B_n)$. Остается заметить, что $H^{p_0}_{n-\alpha}(B_n)=\mathcal{K}_\alpha(L^{p_0}(\sigma_n))\subset\mathcal{K}_\alpha(n)$ в силу теоремы 2.1 из статьи [10]. □

8.5. **Исключительные множества для модифицированных классов Харди–Соболева.** Для доказательства теоремы 8.7 в данном пункте будут адаптированы некоторые рассуждения из статьи [2].

Прежде всего, введем неизотропные потенциалы. Положим

$$k_t(\xi,\zeta)=|1-\langle\xi,\zeta\rangle|^{-n+t},$$

где $\xi,\zeta\in\partial B_n$ и $0<t<n$. Если мера $\mu\in\mathcal{M}(n)$ является положительной, то по определению

$$(k_t*\mu)(\xi)=\int_{\partial B_n}k_t(\xi,\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Как обычно, если $\mu=fd\sigma_n$, где $f\in L^1(\sigma_n)$, то мы идентифицируем μ и f и полагаем

$$(k_t*f)(\xi)=(k_t*\mu)(\xi).$$

Если $f \in L^1(\sigma_n)$, то равенство

$$P[f](z) = \int_{\partial B_n} f(\zeta) \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}}\, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n,$$

задает инвариантный интеграл Пуассона функции f.

Лемма 8.10. (ср. с [2], лемма 1.7.) *Предположим, что $f \in H^p_{\beta,t}(B_n)$, где $t \in (0,n)$, $\beta \in (-\infty, n)$ и $p > 1$. Тогда существует функция $g \in L^p(\partial B_n)$, такая что $\|g\|_p = \|f\|_{p,\beta,t}$ и*

$$|f(z)| \le C(n,\beta,t) P[k_t * |g|](z), \quad z \in B_n,$$

где $C(n,\beta,t)$ является константой.

Доказательство. В силу равенства (5.3) имеем

$$f(z) = C(n,\beta,t) \int_0^1 g(rz) r^{n-\beta-1}(1-r)^{t-1}\, dr, \quad z \in B_n,$$

где $g = R^{\beta,t} f \in H^p(B_n)$ и $\|g\|_p = \|f\|_{p,\beta,t}$. Так как $\beta < n$ и $t \in (0,n)$, то излагаемые ниже рассуждения фактически совпадают с доказательством леммы 1.7 из статьи [2].

А именно, представим $g(rz)$ в виде интеграла Коши по сфере ∂B_n, внесем знаки абсолютной величины внутрь рассматриваемых интегралов и поменяем порядок интегрирования. Тогда получаем неравенство

$$|f(z)| \le C(n,\beta,t) \int_{\partial B_n} |g(\zeta)| \int_0^1 r^{n-\beta-1}(1-r)^{t-1} \frac{dr}{|1-r\langle z,\zeta\rangle|^n}\, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n.$$

Имеем $\beta < n$ и $t \in (0,n)$, поэтому, оценивая внутренний интеграл, получаем

$$|f(z)| \le C(n,\beta,t) \int_{\partial B_n} \frac{|g(\zeta)|}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{n-t}}\, d\sigma_n(\zeta), \quad z \in B_n. \tag{8.2}$$

Для фиксированной точки $\zeta \in \partial B_n$, имеем $(1-\langle z,\zeta\rangle)^{t-n} \in H^1(B_n)$, следовательно,

$$|1-\langle z,\zeta\rangle|^{t-n} = \left|P[(1-\langle \cdot,\zeta\rangle)^{t-n}](z)\right| \le P[k_t(\cdot,\zeta)](z), \quad z \in B_n.$$

Используя полученное неравенство и оценку (8.2), получаем

$$|f(z)| \le C(n,\beta,t) \int_{\partial B_n} |g(\zeta)| P[k_t(\cdot,\zeta)](z)\, d\sigma_n(\zeta) = C(n,\beta,t) P[k_t * |g|](z)$$

при $z \in B_n$, что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 8.7. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть K является произвольным компактным подмножеством множества $E(f)$. Достаточно доказать, что $H_{n-tp+\varepsilon}(K) = 0$.

Предположим, что $H_{n-tp+\varepsilon}(K) > 0$. В силу предложения 1.1 из статьи [2] существует положительная мера $\mu \in \mathcal{M}(n)$, такая что компакт K содержит носитель меры μ, а также

$$\mu(B(\zeta,\delta)) = \mathcal{O}(\delta^{n-tp+\varepsilon}) \tag{8.3}$$

для всех $\zeta \in \partial B_n$ и $\delta > 0$. Лемма 8.10 гарантирует, что существует функция g, такая что

$$\int |M_\gamma f|^p \, d\mu \le C \int |M_\gamma P[k_t * |g|]|^p \, d\mu,$$

где M_γ обозначает максимальный оператор, соответствующий областям $D_\gamma(\zeta)$, $\gamma > 1$. В силу леммы 1.8 из статьи [2] существует константа $C = C(\gamma, t)$, такая что

$$\int |M_\gamma P[k_t * |g|]|^p \, d\mu \le C \int (k_t * |g|)^p \, d\mu.$$

Наконец, так как имеет место свойство (8.3), то теорема 1.9 из статьи [2] гарантирует, что

$$\int (k_t * |g|)^p \, d\mu \le C\|g\|_p^p = C\|f\|_{p,\beta,t}^p.$$

В итоге получаем

$$\int |M_\gamma f|^p \, d\mu \le C\|f\|_{p,\beta,t}^p$$

для всех $\gamma > 1$. Как отмечено в работе [2], из полученного неравенства следует, что функция f имеет допустимые пределы μ-a.e. Это противоречит предположению о том, что $K \subset E(f)$. Следовательно, $H_{n-tp+\varepsilon}(K) = 0$ и доказательство окончено. □

9. Касательно исключительные множества

9.1. **Определения и мотивировка.** Предположим, что $0 < \tau \le 1$ и $\zeta \in \partial B$. Положим

$$D_{\tau,C}(\zeta) = \{z \in B : \ |1 - \langle z, \zeta\rangle| < C(1 - |z|)^\tau\},$$

где $C > 1$ при $\tau = 1$ и $C > 0$ при $\tau \in (0,1)$. Отметим, что множества $D_{1,C}(\zeta)$ совпадают с допустимыми областями Кораньи $D_C(\zeta)$, которые рассматривались в разделе 8. В данном разделе изучается случай $0 < \tau < 1$. Отметим также, что порядок касания между множеством $D_{\tau,C}(\zeta)$ и сферой ∂B возрастает при убывании параметра τ.

Рассмотрим функцию $f : B \to \mathbb{C}$. По определению касательно исключительное множество $E_{\tau,C}(f)$, $0 < \tau < 1$, состоит из таких точек $\zeta \in \partial B$, что функция $f(z)$ не имеет предела в точке ζ, если z стремится ζ, оставаясь в множестве $D_{\tau,C}(\zeta)$.

Результаты этого раздела мотивированы следующей теоремой (дальнейшие утверждения в этом направлении можно найти в статье [13]).

Теорема 9.1. (Д. Дж. Халленбек [13], следствие 1.) *Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $C > 0$. Если $f \in \mathcal{K}_\alpha(1)$, то $\sigma_1(E_{\alpha,C}(f)) = 0$.*

9.2. **Пространства Харди–Соболева.** Для произвольной размерности $n \in \mathbb{N}$ аналоги теоремы 9.1 можно получить с помощью следующего результата о пространствах Харди–Соболева $H^p_\beta(B_n)$.

Теорема 9.2. (К. Касканте и Х. М. Ортега [10], следствие 2.1; см. также [31].) *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$, $0 < \beta < n/p$, $0 < \tau < 1$ и $m = (n - \beta p)/\tau$. Если $f \in H^p_\beta(B_n)$, то $H_m(E_{\tau,C}(f)) = 0$ для всех $C > 0$.*

Следствие 9.3. *Пусть* $f \in \mathcal{K}_0(n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $H_\varepsilon(E_{\tau,C}(f)) = 0$ *всех* $\varepsilon > 0$, $\tau \in (0,1)$ *и* $C > 0$.

Доказательство. Применим предложение 8.5 и теорему 9.2. □

Следствие 9.4. *Предположим, что* $n \geq 2$, $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq n-j-1 < \alpha \leq n-j$ *и* $\frac{\alpha}{\alpha+j} < \tau < 1$. *Если* $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, *то* $H_m(E_{\tau,C}(f)) = 0$ *для всех* $m > \frac{\alpha n}{\tau(\alpha+j)}$ *и* $C > 0$.

Доказательство. Применим предложение 8.3 и теорему 9.2. □

Отметим, что заключение $H_m(E_{\tau,C}(f)) = 0$ в последнем следствии не является тривиальным, так как $\tau > \frac{\alpha}{\alpha+j}$.

9.3. **Необходимые условия.** В этом пункте следствие 9.4 будет усилено для $\alpha \in (0,n) \setminus \mathbb{N}$.

Предложение 9.5. *Предположим, что* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,n)$, $\tau \in (\alpha/n, 1)$ *и* $m > \alpha/\tau$. *Если* $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, *то* $H_m(E_{\tau,C}(f)) = 0$ *для всех* $C > 0$.

Доказательство. По предположению $f = K_\alpha[\mu]$ для некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}(n)$. Положим $g = K_n[\mu]$, тогда $g \in H^p(B_n)$ для всех $p \in (0,1)$. В силу леммы 5.1 и равенства (5.3) имеем

$$f(z) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 g(rz) r^{\alpha-1}(1-r)^{n-\alpha-1}\, dr, \quad z \in B_n. \tag{9.1}$$

Зафиксируем константу $C > 0$. Для доказательства предложения достаточно проверить, что $H_m(K) = 0$ для любого компакта $K \subset E_{\tau,C}(f)$. Предположим, что это не так и $H_m(K) > 0$. Тогда в силу предложения 1.1 из статьи [2] существует положительная мера $\rho \in \mathcal{M}(n)$, такая что множество K содержит носитель меры ρ и

$$\rho(B(\zeta,\delta)) = \mathcal{O}(\delta^m), \quad \zeta \in \partial B. \tag{9.2}$$

Так как $m > \alpha/\tau$, то существует $p_0 \in (0,1)$, такое что $m = (n-(n-\alpha)p_0)/\tau$. Имеем $g \in H^{p_0}(B_n)$, следовательно, формулы (9.1) и (9.2) гарантируют, что предел

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D_{\tau,C}(\zeta)}} f(z)$$

существует для ρ-почти всех точек $\zeta \in \partial B$ (см. замечания после теоремы 6 в статье [22]). Это противоречит предположению о том, что $K \subset E_{\tau,C}(f)$. Таким образом, $H_m(K) = 0$ и доказательство предложения завершено. □

9.4. **Примеры касательно исключительных множеств.** Следующий факт соответствует предложению 9.5.

Предложение 9.6. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,n)$, $\tau \in [\alpha/n, 1)$, $m < \alpha/\tau$ *и* $C > 0$. *Предположим, что* $E \subset \partial B$ *является компактным множеством и* $H_m(E) = 0$. *Тогда* $E = E_{\tau,C}(f)$ *для некоторой функции* $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$.

Доказательство. Для $p \geq 1$ положим

$$\mathcal{K}_\alpha(L^{p_0}(\sigma_n)) = \{K_\alpha[g\sigma_n] : \; g \in L^p(\sigma_n)\}.$$

Так как $m < \alpha/\tau$, то существует $p_0 > 1$, такое что

$$m = (n - (n-\alpha)p_0)/\tau.$$

Так как $p_0 > 1$ и $H_m(E) = 0$, то имеем $E = E_{\tau,C}(f)$ для некоторой функции $f \in \mathcal{K}_\alpha(L^{p_0}(\sigma_n))$ ([31], замечание после следствия 3.11). Для завершения доказательства отметим, что вложение $\mathcal{K}_\alpha(L^{p_0}(\sigma_n)) \subset \mathcal{K}_\alpha(n)$ имеет место по определению. □

10. Мультипликаторы: базовые результаты

В данном и следующем разделах изучаются пространства $\mathfrak{M}_\alpha(n)$, состоящие из мультипликаторов для семейств $\mathcal{K}_\alpha(n)$. Отметим, что некоторые общие свойства пространств $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ получены в разделе 2. Напомним также, что семейства дробных преобразований Коши тесно связаны с голоморфными пространствами Бесова. Поэтому заметим, что мультипликаторы для голоморфных пространств Бесова исследовались в статье [26]; см. также [27]. Наконец, напомним, что некоторые свойства семейств $\mathcal{K}_\alpha(n)$ весьма близки к свойствам пространств Харди–Соболева. В связи с этим отметим, что мультипликаторы для пространств Харди–Соболева изучались в недавних работах [28] и [8]; см. также приведенные в этих статьях ссылки.

10.1. **Необходимые условия.** При $n = 1$ результаты данного пункта получены в статье [19].

Лемма 10.1. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ и $f \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$. Тогда $f \in H^\infty(B_n)$; более того, $\|f\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}$.*

Доказательство. Зафиксируем точку $\zeta \in \partial B$ и зафиксируем константу K, такую что $\|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha} < K$. Так как $\|(1 - \langle \cdot, \zeta\rangle)^{-\alpha}\|_{\mathcal{K}_\alpha} = 1$, то существует мера $\mu_\zeta \in \mathcal{M}$, такая что $\|\mu_\zeta\| < K$ и

$$\frac{f(z)}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^\alpha} = \int_{\partial B} \frac{1}{(1 - \langle z, \xi\rangle)^\alpha}\, d\mu_\zeta(\xi).$$

Иными словами,

$$f(z) = \int_{\partial B} \left(\frac{1 - \langle z, \zeta\rangle}{1 - \langle z, \xi\rangle}\right)^\alpha \, d\mu_\zeta(\xi).$$

Положим $z = r\overline{\zeta}$, $0 \leq r < 1$. Тогда имеем

$$|f(r\overline{\zeta})| \leq \int_{\partial B} \left(\frac{1 - r}{1 - r|\langle \overline{\zeta}, \xi\rangle|}\right)^\alpha \, d\mu_\zeta(\xi) \leq \|\mu_\zeta\| < K.$$

Точка $\zeta \in \partial B$ и константа $K > \|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ являются произвольными, следовательно, $\|f\|_{H^\infty} \leq \|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}$. □

Лемма 10.2. *Предположим, что $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ и $f \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$. Тогда $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$; более того, $\|f\|_{\mathcal{K}_\alpha} \leq \|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}$.*

Доказательство. Положим $I(z)=1$ для $z\in B$. Напомним, что $I=K_\alpha[\sigma]$. Так как мера Лебега σ является положительной, то выполнены равенства $\|I\|_{\mathcal{K}_\alpha}=\|\sigma\|=1$. Из предположения $f\in\mathfrak{M}_\alpha$ следует, что $f=fI\in\mathcal{K}_\alpha$. Более того, имеем $\|f\|_{\mathcal{K}_\alpha}=\|fI\|_{\mathcal{K}_\alpha}\le\|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}\|I\|_{\mathcal{K}_\alpha}=\|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}$. □

Предложение 10.3. *Пусть $\alpha>0$. Тогда существует константа C_α, такая что для любой функции $f\in\mathfrak{M}_\alpha(n)$, $n\in\mathbb{N}$, радиальная вариация в направлении $\xi\in S$ удовлетворяет оценке $V(f,\xi)\le C_\alpha\|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}$ для всех $\xi\in\partial B$.*

Доказательство. Предположим, что $f\in\mathfrak{M}_\alpha$, $\xi\in\partial B$ и $\varepsilon>0$. По определению пространства $\mathfrak{M}_\alpha$ существует мера μ_ξ, такая что $\|\mu_\xi\|\le\|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}+\varepsilon$ и

$$f(z)=\int_{\partial B}\frac{(1-\langle z,\xi\rangle)^\alpha}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}\,d\mu_\xi(\zeta),\quad z\in B.$$

Пусть $\lambda\in B_1$. Положим $z=\lambda\xi$ и $f_\xi(\lambda)=f(\lambda\xi)$. Тогда

$$f_\xi(\lambda)=\int_{\partial B}\frac{(1-\lambda)^\alpha}{(1-\lambda\langle\xi,\zeta\rangle)^\alpha}\,d\mu_\xi(\zeta),$$

$$f'_\xi(\lambda)=\alpha\int_{\partial B}\frac{(1-\lambda)^{\alpha-1}(\langle\xi,\zeta\rangle-1)}{(1-\lambda\langle\xi,\zeta\rangle)^{\alpha+1}}\,d\mu_\xi(\zeta).$$

Теперь положим $\lambda=r$, $0\le r<1$. Теорема Фубини гарантирует, что

$$\int_0^1|f'_\xi(r)|\,dr\le\alpha\int_{\partial B}\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha-1}|1-\langle\xi,\zeta\rangle|}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^{\alpha+1}}\,dr\,d|\mu_\xi|(\zeta). \tag{10.1}$$

Положим $w=\langle\xi,\zeta\rangle$ и $b=|1-\langle\xi,\zeta\rangle|$. Отметим, что

$$|1-rw|^2=(1-r)(1-r|w|^2)+r|1-w|^2\ge(1-r)^2+r^2b^2.$$

Следовательно,

$$\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha-1}b}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^{\alpha+1}}\,dr\le\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha-1}b}{((1-r)^2+r^2b^2)^{(\alpha+1)/2}}\,dr:=I(\alpha,b).$$

Если $b=0$, то доказательство завершено. Иначе, как показано в доказательстве теоремы 2.6 из статьи [19], имеем $I(\alpha,b)\le C_\alpha<\infty$. Таким образом, из оценки (10.1) следует, что $V(f,\xi)\le C_\alpha\|f\|_{\mathfrak{M}_\alpha}$. Доказательство предложения завершено. □

Напомним, что ограниченная непостоянная функция $f\in\mathcal{H}ol(B)$ называется внутренней, если $|f^*|=1$ σ-п.в. Полное описание внутренних функций из пространства $\mathfrak{M}_1(1)$ получено в работе [21]. При произвольном $\alpha>0$ внутренние функции из семейства $\mathfrak{M}_\alpha(1)$ исследовались в статье [16]. При $n\ge 2$ ответ на соответствующий вопрос немедленно следует из предложения 10.3.

Следствие 10.4. *Предположим, что $n\ge 2$ и $\alpha>0$. Если f является внутренней функцией в шаре B_n, то $f\notin\mathfrak{M}_\alpha(n)$.*

Доказательство. Хорошо известно, что при $n\ge 2$ любая внутренняя функция не имеет радиальных пределов на плотном подмножестве сферы ∂B_n ([30], раздел 1). □

10.2. **Мультипликаторы и семейство $\mathcal{K}_0(n)$.**

Предложение 10.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Тогда*

$$\mathfrak{M}_\beta(n) \bigcap \mathcal{K}_0(n) = \mathfrak{M}_\alpha(n) \bigcap \mathcal{K}_0(n)$$

для всех $\beta \geq \alpha \geq 1$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha \leq \beta \leq \widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\beta} - \alpha \in \mathbb{N}$. Имеем $\mathfrak{M}_\alpha(n) \subset \mathfrak{M}_\beta(n) \subset \mathfrak{M}_{\widetilde{\beta}}(n)$ в силу предложения 2.5. Поэтому достаточно доказать искомое равенство, дополнительно предполагая, что $\beta - \alpha \in \mathbb{N}$. Следовательно, можно считать, не умаляя общности, что $\beta = \alpha + 1$.

Итак, предположим, что $g \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}(n) \bigcap \mathcal{K}_0(n)$. Требуется проверить, что $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$. Иными словами, для любой функции $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ необходимо доказать, что $fg \in \mathcal{K}_\alpha(n)$. В силу следствия 5.6 свойство $fg \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f\mathcal{R}g + g\mathcal{R}f = \mathcal{R}(fg) \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$.

С одной стороны, в силу предложения 3.1 из условия $g \in \mathcal{K}_0(n)$ следует, что $\mathcal{R}g \in \mathcal{K}_1(n)$. Таким образом, следствие 2.3 гарантирует, что $f\mathcal{R}g \in \mathcal{K}_\alpha(n) \cdot \mathcal{K}_1(n) \subset \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$.

С другой стороны, в силу следствия 5.6 свойство $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ влечет, что $\mathcal{R}f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$. Таким образом, $g\mathcal{R}f \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}(n) \cdot \mathcal{K}_{\alpha+1}(n) \subset \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$ по определению пространства мультипликаторов.

Окончательно получаем $\mathcal{R}(fg) \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$ и $fg \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, что и требовалось доказать. $\square$

Пусть $\alpha > 0$ и $f \in \mathcal{H}ol(B_1)$. Напомним, что условия $f \in \mathcal{K}_\alpha(1)$ и $f' \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(1)$ равносильны (см. [24]). Таким образом, изложенное выше рассуждение показывает, что

$$\mathfrak{M}_\beta(1) \bigcap \mathcal{K}_0(1) = \mathfrak{M}_\alpha(1) \bigcap \mathcal{K}_0(1)$$

для всех $\beta \geq \alpha > 0$.

10.3. **Достаточные условия.** Напомним, что $A(B)$ обозначает шар-алгебру. Если $f \in A(B)$, то положим $f^* = f|_{\partial B}$. Комплексный модуль непрерывности функции f^* определяется с помощью равенства

$$\omega_{\mathbb{C}}(f^*, \delta) = \sup_{\zeta, \xi \in \partial B} \left\{ |f^*(\zeta) - f^*(\xi)| : \ d(\zeta, \xi) \leq \delta \right\},$$

где $\delta \in (0, 2]$ и $d(\zeta, \xi) = |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|$. Отметим, что $d(\zeta, \xi)$ является квази-метрикой на сфере.

Пусть $\nu = \nu_n$ обозначает меру Лебега на $B = B_n$, нормированную условием $\nu_n(B_n) = 1$. Предположим, что $n \geq 2$. Если $f : B_1 \to \mathbb{C}$ является борелевской функцией, то хорошо известно, что равенство

$$\int_{\partial B_n} f(\langle \xi, \zeta \rangle)\, d\sigma_n(\xi) = (n-1) \int_{B_1} f(z)(1 - |z|^2)^{n-2}\, d\nu_1(z) \tag{10.2}$$

имеет место, если корректно определена его левая или правая часть.

Аналог следующего утверждения для $n = 1$ доказан в статье [35].

Предложение 10.6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $\alpha \geq n$. Предположим, что функция $g \in A(B_n)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$(n-1)\int_{B_1} \frac{(1-|z|^2)^{n-2}\omega_{\mathbb{C}}(g^*, |1-z|)}{|1-z|^n}\, d\nu_1(z) = C_\omega < +\infty. \tag{10.3}$$

Тогда $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Доказательство. В силу леммы 2.4 и предложения 2.5 достаточно проверить, что функция g удовлетворяет условию (2.5) при $\alpha = n$.

Зафиксируем точку $\zeta \in \partial B_n$. Тогда

$$\frac{g(w)}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^n} = \frac{g(w)-g(\zeta)}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^n} + \frac{g(\zeta)}{(1-\langle w,\zeta\rangle)^n} := h_1(w) + h_2(w), \quad w \in B_n.$$

С одной стороны, отметим, что $\|h_2\|_{\mathcal{K}_n(n)} \leq \|g\|_{A(B_n)}$.

С другой стороны, имеем $g(\cdot) - g(\zeta) \in H^\infty(B_n)$ и $(1-\langle\cdot,\zeta\rangle)^{-n} \in H^p(B_n)$ для всех $0<p<1$. Следовательно, $h_1 \in H^p(B_n)$ для всех $0<p<1$. Пусть $h_1^*(\xi) = \lim_{r\to 1-} h_1(r\xi)$, $\xi \in \partial B_n$, $\xi \neq \zeta$. Формула (10.2) и условие (10.3) гарантируют, что $\|h^*\|_{L^1(\partial B_n)} \leq C_\omega$. Таким образом, $h_1 \in H^1(B_n)$; также получаем $\|h_1\|_{\mathcal{K}_n(n)} \leq \|h_1\|_{H^1(B_n)} \leq C_\omega$. Поэтому имеет место свойство (2.5). □

Следствие 10.7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и $1 \leq \alpha < n$. Предположим, что функция $g \in \mathcal{K}_0(n) \bigcap A(B_n)$ удовлетворяет условию (10.3). Тогда $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.*

Доказательство. Применим предложения 10.6 и 10.5. □

Предположим, что $0 < \beta < 1$. По определению стандартное пространство Липшица $\Lambda^\beta(\partial B_n)$ состоит из функций $f : \partial B_n \to \mathbb{C}$, таких что

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leq C_f |\zeta - \xi|^\beta$$

для всех $\zeta, \xi \in \partial B_n$. Иными словами, $\Lambda^\beta(\partial B_n)$ — это пространства Липшица относительно евклидовой метрики на сфере. Элементы этих пространств могут быть использованы для построения функций из семейств $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ при $\alpha \geq n$.

Следствие 10.8. *Предположим, что $n \geq 2$, $0 < \beta < 1/2$ и $f \in \Lambda^\beta(\partial B_n)$. Тогда $K_n[f] \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$ для $\alpha \geq n$.*

Доказательство. Пусть $f \in \Lambda^\beta(\partial B_n)$. Хорошо известно, что $\omega_{\mathbb{C}}(K_n[f]^*, \delta) = \mathcal{O}(\delta^\beta)$ (см. [3]). Следовательно, условие (10.3) выполнено. □

Явные примеры функций из семейств $\mathfrak{M}_\alpha(n)$ при $\alpha \geq 1$ можно получить с помощью следующего утверждения.

Предложение 10.9. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ и $\alpha \geq n - j$. Предположим, что производная $\mathcal{R}^j g \in A(B_n)$ удовлетворяет условию (10.3). Тогда $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.*

Доказательство. Проведем рассуждение по индукции. В качестве базы индукции предположим, что предложение доказано для $j = 0$. Это верно в силу предложения 10.6.

Теперь предположим, что рассматриваемая импликация доказана для некоторого $j-1$ из множества $\{0, 1, \dots, n-2\}$.

Пусть $j \in \{1, \dots, n-1\}$ и $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$, $\alpha \geq n - j$. В качестве индукционного перехода необходимо доказать, что $fg \in \mathcal{K}_\alpha(n)$. Так как $\alpha \geq n-j \geq 1$, то в силу теоремы 3.3 свойство $fg \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $R^1(fg) \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$. Напомним, что $R^1 = \mathcal{R} + I$, следовательно,

$$R^1(fg) = f\mathcal{R}g + gR^1 f.$$

С одной стороны, имеем $f \in \mathcal{K}_\alpha(n) \subset \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$, а также функция $\mathcal{R}^{j-1}(\mathcal{R}g) \in A(B_n)$ удовлетворяет условию (10.3). Так как $\alpha + 1 \geq n - (j-1)$, то получаем $\mathcal{R}g \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}(n)$ в силу индукционного предположения. Таким образом, $f\mathcal{R}g \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$ по определению пространства мультипликаторов.

С другой стороны, $f \in \mathcal{K}_\alpha(n)$ тогда и только тогда, когда $R^1 f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$. Далее, функция $\mathcal{R}^{j-1}g \in A(B_n)$ удовлетворяет условию (10.3). По индукционному предположению имеем $g \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}(n)$, поэтому $gR^1 f \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$.

Следовательно, $R^1(fg) \in \mathcal{K}_{\alpha+1}(n)$ и $fg \in \mathcal{K}_\alpha(n)$.

Индукционный переход завершен и предложение доказано. □

При $\alpha \in (1, n) \setminus \mathbb{N}$ предложение 10.9 будет усилено ниже в следствии 11.4.

11. Мультипликаторы: основные результаты

11.1. **Вещественные и комплексные пространства Липшица.** Зафиксируем $\beta \in (0,1)$. По определению функция $f : \overline{B}_n \to \mathbb{C}$ принадлежит вещественному пространству Липшица $\mathrm{Lip}^{\mathbb{R}}_\beta(B_n)$, если существует константа $C > 0$, такая что

$$|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|^\beta, \quad z, w \in \overline{B}_n.$$

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1/2)$. По определению функция $f : \overline{B}_n \to \mathbb{C}$ принадлежит комплексному пространству Липшица $\mathrm{Lip}^{\mathbb{C}}_\alpha(B_n)$, если существует константа $C > 0$, такая что

$$|f(z) - f(w)| \leq C|1 - \langle z, w\rangle|^\alpha, \quad z, w \in \overline{B}_n.$$

Лемма 11.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $0 < \beta < 1$, $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и*

$$|\mathcal{R}f(r\zeta)| \leq \frac{C}{(1-r)^{1-\beta}}, \quad r \in [0,1),\ \zeta \in \partial B_n. \tag{11.1}$$

Тогда $f \in \mathrm{Lip}^{\mathbb{C}}_\gamma(B_n)$, где $0 < \gamma < \min\{1/2, \beta\}$.

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ обладает свойством (11.1). Обозначим тем же символом непрерывное продолжение функции f на замкнутый шар $\overline{B}_n$. Такое продолжение существует в силу теоремы 6.4.10 из монографии [29]; более того, оценка (11.1) гарантирует, что $f \in \mathrm{Lip}_\beta^{\mathbb{R}}(B_n)$. Следовательно,

$$|f(z) - f(w)| \le C_\gamma |1 - \langle z, w\rangle|^\gamma, \quad z, w \in \overline{B}_n,$$

где $0 < \gamma < 1/2$ и $0 < \gamma \le \beta$ (см. [29], теорема 6.4.10 и [4], глава 3, следствие 3.2.4). $\square$

11.2. **Общие достаточные условия.** Результаты настоящего пункта мотивированы теоремой 1 из статьи [23], где исследованы семейства $\mathfrak{M}_\alpha(1)$ при $0 < \alpha < 1$.

Теорема 11.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \ge 2$. Предположим, что $j \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha > n - j$, $\alpha \ge 1$,*

$$g \in \mathcal{H}ol(B_n) \bigcap \mathrm{Lip}_\varepsilon^{\mathbb{C}}(B_n)$$

для некоторого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и

$$I_\alpha(g, j, k) = \sup_{\zeta \in \partial B_n} \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{|\mathcal{R}^k g(r\xi)| (1-r)^{\alpha+j-n-1}}{|1 - r\langle \xi, \zeta\rangle|^{\alpha+j-k}} \, d\sigma_n(\xi)\, dr < \infty$$

для $k = 1, \dots, j$. Тогда $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Доказательство. Прежде всего, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение. Для $\zeta \in \partial B_n$ положим

$$h_\zeta(z) = \frac{g(z) - g(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^\alpha}, \quad z \in B_n. \tag{11.2}$$

Тогда

$$\|h_\zeta\|_{\mathcal{K}_{\alpha(n)}} \le C, \tag{11.3}$$

где константа $C > 0$ не зависит от точки $\zeta \in \partial B_n$.

Доказательство утверждения. Из определения функции $h_\zeta(z)$ следует, что $\mathcal{R}^j h_\zeta(z)$, $z \in B_n$, является линейной комбинацией следующих выражений:

$$\begin{aligned} Q_k(\zeta, z) &= \mathcal{R}^k g(z) \cdot \mathcal{R}^{j-k} \left(\frac{1}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^\alpha} \right), \quad z \in B_n,\ k = 1, \dots, j, \\ Q_0(\zeta, z) &= (g(z) - g(\zeta)) \cdot \mathcal{R}^j \left(\frac{1}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^\alpha} \right), \quad z \in B_n. \end{aligned}$$

Ниже будут получены оценки для интегралов

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |Q_k(\zeta, r\xi)| (1-r)^{(\alpha+j-n)-1} \, d\sigma_n(\xi)\, dr, \quad k = 0, \dots, j. \tag{11.4}$$

1. По определению функции $Q_j(\zeta, z)$, $z \in B_n$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\partial B_n} |Q_j(\zeta, r\xi)|(1-r)^{(\alpha+j-n)-1}\, d\sigma_n(\xi)\, dr \\ \leq\ & \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{|\mathcal{R}^j g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}}{|1-r\langle \xi, \zeta\rangle|^\alpha}\, d\sigma_n(\xi)\, dr \\ \leq\ & I_\alpha(g, j, j). \end{aligned}$$

2. Отметим, что

$$\mathcal{R}\left(\frac{1}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^\alpha}\right) = \frac{-\alpha}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^\alpha} + \frac{\alpha}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, производная

$$\mathcal{R}^j\left(\frac{1}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^\alpha}\right)$$

является линейной комбинацией дробей

$$\frac{1}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha+m}}, \quad m = 0, \ldots, j.$$

Чтобы оценить интеграл (11.4) при $k = 0$, достаточно рассмотреть случай $m = j$, так как $|1 - \langle z, \zeta\rangle| \leq 2$.

Напомним, что $g \in \mathrm{Lip}_\varepsilon^{\mathbb{C}}(B_n)$. Предположим, не умаляя общности, что $\alpha + j - \varepsilon \neq n$. Тогда определение пространства $\mathrm{Lip}_\varepsilon^{\mathbb{C}}(B_n)$ и лемма 4.1 влекут следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{|g(r\xi) - g(\zeta)|}{|1-r\langle \xi, \zeta\rangle|^{\alpha+j}}\, d\sigma_n(\xi)(1-r)^{\alpha+j-n-1}\, dr \\ \leq\ & \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{C}{|1-r\langle \xi, \zeta\rangle|^{\alpha+j-\varepsilon}}\, d\sigma_n(\xi)(1-r)^{\alpha+j-n-1}\, dr \\ \leq\ & C \max\left\{\int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1}\, dr,\ \int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1-\alpha-j+\varepsilon+n}\, dr\right\} \\ \leq\ & C, \end{aligned}$$

так как $\alpha + j - n - 1 > -1$ и $-1 + \varepsilon > -1$.

Итак, получаем

$$\int_0^1 \int_{\partial B_n} |Q_0(\zeta, r\xi)|(1-r)^{(\alpha+j-n)-1}\, d\sigma_n(\xi)\, dr \leq C,$$

где константа $C > 0$ не зависит от точки $\zeta \in \partial B_n$.

3. Если $j \geq 2$, то необходимо рассмотреть интегралы (11.4) при $k = 1, \ldots, j-1$. Производная

$$\mathcal{R}^{j-k}\left(\frac{1}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^\alpha}\right)$$

является линейной комбинацией дробей

$$\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+m}},\quad m=0,\dots,j-k.$$

Как и выше, чтобы оценить интеграл (11.4), достаточно рассмотреть случай $m=j-k$.

Теперь заметим, что

$$\int_0^1\int_{\partial B_n}\frac{|\mathcal{R}^k g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^{\alpha+j-k}}\,d\sigma_n(\xi)\,dr\le I_\alpha(g,j,k).$$

Таким образом, имеем

$$\int_0^1\int_{\partial B_n}|Q_k(\zeta,r\xi)|(1-r)^{(\alpha+j-n)-1}\,d\sigma_n(\xi)\,dr\le C,\quad k=1,\dots,j-1,$$

где константа $C>0$ не зависит от точки $\zeta\in\partial B_n$.

Итак, все интегралы (11.4) ограничены универсальной константой $C>0$. Поэтому

$$\int_0^1\int_{\partial B_n}|\mathcal{R}^j h_\zeta(r\xi)|(1-r)^{(\alpha+j-n)-1}\,d\sigma_n(\xi)\,dr\le C,$$

где константа $C>0$ не зависит от точки $\zeta\in\partial B_n$. Также имеем

$$\sum_{|m|\le j-1}\left|\frac{\partial^m h_\zeta}{\partial z^m}(0)\right|\le C\left(\|g\|_{H^\infty(B_n)}+\sum_{|m|\le j-1}\left|\frac{\partial^m g}{\partial z^m}(0)\right|\right).$$

Следовательно, получаем оценку $\|h_\zeta\|_{\mathcal{B}^j_{\alpha+j-n}}\le C$. Наконец, так как $\alpha\ge 1$, то лемма 5.7 гарантирует оценку (11.3). □

Теперь вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\zeta\in\partial B_n$. Имеем

$$\frac{g(z)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}=\frac{g(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}+h_\zeta(z),\quad z\in B_n,$$

где функция $h_\zeta(z)$ задается равенством (11.2). Отметим, что

$$\left\|\frac{g(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}\right\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)}=|g(\zeta)|\le\|g\|_{H^\infty(B_n)}.$$

Следовательно, применяя доказанное утверждение, получаем

$$\left\|\frac{g(z)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^\alpha}\right\|_{\mathcal{K}_\alpha(n)}\le C,$$

где константа $C>0$ не зависит от точки $\zeta\in\partial B_n$. Наконец, лемма 2.4 гарантирует, что $g\in\mathfrak{M}_\alpha(n)$. □

Следствие 11.3. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и $n\ge 2$.*

(i) *Предположим, что $\alpha>n-1$ и $g\in\mathcal{H}ol(B_n)\bigcap\mathrm{Lip}^{\mathbb{C}}_\varepsilon(B_n)$ для некоторого $\varepsilon\in(0,1/2)$. Если $I_\alpha(g,1,1)<+\infty$, то $g\in\mathfrak{M}_\alpha(n)$.*

(ii) *Предположим, что* $j \in \{2, \dots, n\}$, $\alpha > n - j$, $\alpha \geq 1$, $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ *и* $\mathcal{R}^{j-1} g \in H^\infty(B_n)$. *Если* $I_\alpha(g, j, j) < +\infty$, *то* $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Доказательство. Часть (i). Применим теорему 11.2.

Часть (ii). В силу леммы 11.1 имеем $\mathcal{R}^k g \in H^\infty(B_n)$ для $k = 1, \dots, j-1$. Также лемма 11.1 гарантирует, что $g \in \mathrm{Lip}_\varepsilon^{\mathbb{C}}(B_n)$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Таким образом для доказательства части (ii) достаточно проверить, что $I_\alpha(g, j, k) < +\infty$ для $k = 1, \dots, j-1$.

Пусть $\zeta \in \partial B_n$. В силу леммы 4.1 имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{|\mathcal{R}^k g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}}{|1 - r\langle \xi, \zeta \rangle|^{\alpha+j-k}} \, d\sigma_n(\xi) \, dr \\
\leq \; & \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{\|\mathcal{R}^k g\|_{H^\infty(B_n)} \, d\sigma_n(\xi)}{|1 - r\langle \xi, \zeta \rangle|^{\alpha+j-k}} (1-r)^{\alpha+j-n-1} \, dr \\
\leq \; & C \max \left\{ \int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1} \, dr, \; \int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1-\alpha-j+k-\frac{1}{2}+n} \, dr \right\} \\
\leq \; & C,
\end{aligned}$$

так как $\alpha + j - n - 1 > -1$ и $k - 3/2 \geq -1/2$. Иными словами, $I_\alpha(g, j, k) < +\infty$; остается применить теорему 11.2. $\square$

11.3. **Условия гладкости и** $\mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Функции из пространств Липшица. Как обычно, ниже предполагается, что $\mathcal{R}^0 = I$. При $n = 1$ аналог следующего результата получен в статье [16] (следствие 4).

Следствие 11.4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $n \geq 2$. *Предположим, что* $j \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha > n - j$, $\alpha \geq 1$, $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ *и*

$$\mathcal{R}^{j-1} g \in \mathrm{Lip}_\beta^{\mathbb{R}}(B_n) \quad \text{для некоторого } \beta \in (\max\{0, n+1-j-\alpha\}, 1).$$

Тогда $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{R}^{j-1} g \in \mathrm{Lip}_\beta^{\mathbb{R}}(B_n)$, то получаем

$$|\mathcal{R}^j g(r\xi)| \leq \frac{C}{(1-r)^{1-\beta}}, \quad r \in [0, 1), \; \xi \in \partial B_n,$$

в силу теоремы 6.4.9 из монографии [29]. Таким образом, с одной стороны, лемма 11.1 гарантирует, что $g \in \mathrm{Lip}_\varepsilon^{\mathbb{C}}(B_n)$ для некоторого $\varepsilon \in (0, 1/2)$. С другой стороны, применяя лемму 4.1, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{|\mathcal{R}^j g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}}{|1-r\langle \xi,\zeta\rangle|^\alpha}\, d\sigma_n(\xi)\, dr \\
\le\ & \int_0^1 \int_{\partial B_n} \frac{C d\sigma_n(\xi)}{|1-r\langle \xi,\zeta\rangle|^\alpha}(1-r)^{\alpha+\beta+j-n-2}\, dr \\
\le\ & C \max\left\{ \int_0^1 (1-r)^{\alpha+\beta+j-n-2}\, dr,\ \int_0^1 (1-r)^{\alpha+\beta+j-n-2-\alpha+n}\, dr \right\} \\
\le\ & C,
\end{aligned}$$

так как $\alpha+\beta+j-n-2 > -1$ и $\beta+j-2 > -1$. Следовательно, $I_\alpha(g,j,j) < +\infty$. Итак, все предположения следствия 11.3 выполнены. Окончательно получаем $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$ в силу следствия 11.3. □

Функции из пространств Харди–Соболева. Напомним, что оператор дробного дифференцирования порядка 1 определяется равенством $R^1 = \mathcal{R} + I$. Также напомним, что пространства Харди–Соболева $H^p_j(B_n)$ состоят их функций $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$, таких что $R^j g \in H^p(B_n)$. Ниже потребуется следующая лемма.

Лемма 11.5. ([4], глава 2, теорема 1.3.3.) *Предположим, что* $n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2 \in (0,+\infty)$ *и*

$$\frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_1} = 1.$$

Если $f \in \mathcal{H}ol(B_n)$ *и* $R^1 f \in H^{p_2}(B_n)$, *то* $f \in H^{p_1}(B_n)$.

Хорошо известно, что из принадлежности производной g' классу Харди $H^1(B_1)$ следует, что $g \in \mathfrak{M}_\alpha(1)$ для всех $\alpha > 0$ (см. [34] и [19]). Для произвольной размерности n имееет место следующий результат данного типа.

Следствие 11.6. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $n \ge 2$. *Предположим, что* $j \in \{1,\dots,n\}$, $\alpha > n-j$, $\alpha \ge 1$ *и* $g \in H^p_j(B_n)$ *для некоторого* $p > n/j$. *Тогда* $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Доказательство. По условию имеем $R^j g \in H^{p_j}(B_n)$ для некоторого $p_j > n/j$. Используя индукцию и лемму 11.5, получаем, что $R^k g \in H^{p_k}(B_n)$ для некоторого $p_k > n/k$, где $k = j,\dots,1$. Также можно предполагать, не умаляя общности, что $p_k \ge p_{k+1}$ при $k = 1,\dots,j-1$, если $j \ge 2$. Таким образом, получаем

$$\mathcal{R}^k g \in H^{p_k}(B_n) \text{ для некоторого } p_k > n/k, \text{ где } k = 1,\dots,j.$$

1. Имеем $\mathcal{R}g \in H^p(B_n)$ для некоторого $p = p_1 > n$. Следовательно, с помощью теоремы 7.2.5 из монографии [29] получаем

$$|\mathcal{R}g(r\xi)| \le \frac{C}{(1-r)^{n/p}}, \quad r \in [0,1),\ \xi \in \partial B_n.$$

Так как $n/p < 1$, то лемма 11.1 гарантирует, что $g \in \mathrm{Lip}^{\mathbb{C}}_\varepsilon(B_n)$, где $0 < \varepsilon < \min\{1/2, 1 - n/p\}$.

2. Пусть $k \in \{1, \dots, j\}$. Если $p_k \in (n/k, +\infty)$, то будем предполагать, что $p_k^{-1} + q_k^{-1} = 1$. Тогда $1 < q_k < n/(n-k)$. Если $\mathcal{R}^k g \in H^{p_k}(B_n)$ для некоторого $p_k > n/k$, то $\mathcal{R}^k g \in H^{\widetilde{p}_k}(B_n)$ для всех $\widetilde{p}_k \in (n/k, p_k)$. Следовательно, не умаляя общности, можно предположить, что $\alpha q_k \neq n$.

Пусть $\zeta \in \partial B_n$. Положим

$$I(r, \alpha, q_k) = \left(\int_{\partial B_n} \frac{d\sigma_n(\xi)}{|1 - r\langle \xi, \zeta \rangle|^{(\alpha+j-k)q_k}} \right)^{1/q_k}.$$

Лемма 4.1 гарантирует, что

$$I(r, \alpha, q_k) \leq C \max \left\{ 1,\ (1-r)^{\frac{n}{q_k} - \alpha - j + k} \right\}.$$

Действительно, если $\alpha q_k < n$, то $I(r, \alpha, q_k) \leq C$; если $\alpha q_k > n$, то $I(r, \alpha, q_k) \leq C(1 - r)^{\frac{n}{q_k} - \alpha - j + k}$.

Таким образом, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1} \int_{\partial B_n} \frac{|\mathcal{R}^k g(r\xi)|}{|1 - r\langle \xi, \zeta \rangle|^{\alpha+j-k}} \, d\sigma_n(\xi) \, dr \\
\leq \ & \int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1} \|\mathcal{R}^k g\|_{H^{p_k}(B_n)} I(r, \alpha, q_k) \, dr \\
\leq \ & C \max \left\{ \int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1} \, dr,\ \int_0^1 (1-r)^{\alpha+j-n-1+\frac{n}{q_k}-\alpha-j+k} \, dr \right\} \\
\leq \ & C,
\end{aligned}$$

так как $\alpha + j - n - 1 > -1$ и $\frac{n}{q_k} + k - n - 1 > -1$ соответственно. Иными словами, $I_\alpha(g, j, k) < +\infty$ при $k = 1, \dots, j$.

Для завершения доказательства остается применить теорему 11.2. □

11.4. **Срез-функции и $\mathfrak{M}_\alpha(n)$.** Аналог следующего результата для $n = 1$ получен в статье [23] (теорема 2).

Теорема 11.7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$. Предположим, что $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $n - j + 1 > \alpha > n - j$, $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и*

$$J_\alpha(g, j) = \sup_{\xi \in \partial B_n} \int_0^1 |\mathcal{R}^j g(r\xi)| r^{-1} (1-r)^{\alpha+j-n-1} \, dr < +\infty.$$

Тогда $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $\zeta \in \partial B_n$. Предположим, что $\xi \in \partial B_n$ и $\zeta \neq \xi$. Для $r \in [0, 1]$ положим

$$\begin{aligned}
u(r) &= \int_0^r |\mathcal{R}^j g(\rho\xi)| (1-\rho)^{\alpha+j-n-1} \, d\rho \quad \text{и} \\
v(r) &= |1 - r\langle \xi, \zeta \rangle|^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

С одной стороны, имеем $u'(r) = |\mathcal{R}^j g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}$. С другой стороны, $v(r) = |h(r)|$, где функция

$$h(\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda\langle\xi,\zeta\rangle)^\alpha}$$

является голоморфной в окрестности множества $B_1 \bigcup [0,1] \subset \mathbb{C}$. Так как $h(r) \neq 0$, то получаем

$$|v'(r)| = \left|\frac{\partial |h(\lambda)|}{\partial r}(r)\right| \le |h'(r)| \le \frac{C}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{|\mathcal{R}^j g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^\alpha}\,dr \\
\le\ & \frac{\int_0^1 |\mathcal{R}^j g(\rho\xi)|(1-\rho)^{\alpha+j-n-1}\,d\rho}{|1-\langle\xi,\zeta\rangle|^\alpha} + \int_0^1 \frac{\int_0^r |\mathcal{R}^j g(\rho\xi)|(1-\rho)^{\alpha+j-n-1}\,d\rho}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^{\alpha+1}}\,dr \\
\le\ & \frac{J_\alpha(g,j)}{|1-\langle\xi,\zeta\rangle|^\alpha} + J_\alpha(g,j)\int_0^1 \frac{dr}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Нами рассматриваются интегралы от неотрицательных функций, поэтому теорема Фубини и лемма 4.1 гарантируют, что

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_n}\int_0^1 \frac{|\mathcal{R}^j g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^\alpha}\,dr\,d\sigma_n(\xi) \\
\le\ & J_\alpha(g,j)\int_{\partial B_n}\frac{d\sigma_n(\xi)}{|1-\langle\xi,\zeta\rangle|^\alpha} + J_\alpha(g,j)\int_0^1\int_{\partial B_n}\frac{d\sigma_n(\xi)}{|1-r\langle\xi,\zeta\rangle|^{\alpha+1}}\,dr \\
\le\ & CJ_\alpha(g,j)\left(1+\max\left\{1, \int_0^1 (1-r)^{n-\alpha-1}\,dr\right\}\right) \\
\le\ & CJ_\alpha(g,j),
\end{aligned}$$

так как $n > \alpha$. Константа $C > 0$ в полученной оценке не зависит от точки $\zeta \in \partial B_n$, поэтому, применяя теорему Фубини, получаем

$$I_\alpha(g,j,j) < +\infty. \tag{11.5}$$

Теперь положим $h(z) = \mathcal{R}^{j-1}g(z)$, $z \in B_n$. Далее, при $\zeta \in \partial B_n$ положим $h_\zeta(w) = h(w\zeta)$, $w \in B_1$. Напомним, что h_ζ называют срез-функцией. Отметим, что $\mathcal{R}^j g(r\lambda\zeta) = \mathcal{R}h(r\lambda\zeta) = r\lambda h_\zeta'(r\lambda)$ для $r \in [0,1)$ и $\lambda \in \partial B_1$. Следовательно,

$$J_\alpha(h_\zeta) = \sup_{\lambda\in\partial B_1}\int_0^1 |h_\zeta'(r\lambda)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}\,dr \le J_\alpha(g,j) < +\infty. \tag{11.6}$$

В силу теоремы 6.13 из монографии [20] для каждой точки $\zeta \in \partial B_n$ функция h_ζ непрерывно продолжается на замкнутый круг $\overline{B_1}$ и h_ζ удовлетворяет условию Липшица

$$\left|h_\zeta(e^{i(\theta+h)}) - h_\zeta(e^{i\theta})\right| \le C(\alpha)J_\alpha(h_\zeta)h^{n+1-\alpha-j} \le C(\alpha)J_\alpha(g,j)h^{n+1-\alpha-j}$$

для $h > 0$ и $\theta \in \mathbb{R}$. Также из предположения $J_\alpha(g,j) < +\infty$ следует, что $\mathcal{R}^{j-1} \in H^\infty(B_n)$, так как $n+1-\alpha-j > 0$. Если $j \neq 1$, то применение следствия 11.3 завершает доказательство теоремы.

Если $j = 1$, то $g = h \in H^\infty(B_n)$ и условие (11.6) имеет место с заменой функции h на функцию g. Таким образом, теорема 6.4.9 из монографии [29] гарантирует, что

$$|\mathcal{R}g(r\xi)| \le \frac{C}{(1-r)^{\alpha+j-n}}, \quad r \in [0,1),\ \xi \in \partial B_n.$$

Следовательно, с помощью леммы 11.1 получаем, что $g \in \mathrm{Lip}_\varepsilon^{\mathbb{C}}(B_n)$ при $0 < \varepsilon < \min\{1/2, n+1-\alpha-j\}$. В силу условия (11.5) все предположения следствия 11.3 выполнены. Поэтому для завершения доказательства остается применить следствие 11.3. $\square$

Предположим, что $n \ge 2$, $j \in \{1,\dots,n-1\}$, $n-j+1 > \alpha > n-j$ и $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$. Отметим, что $J_\alpha(g,j) < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\xi\in\partial B_n} \int_0^1 |\mathcal{R}^j g(r\xi)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}\,dr < +\infty.$$

В последнем результате рассматриваются разности второго порядка для срез-функций. Пусть выдана функция $f : \partial B_1 \to \mathbb{C}$ и число $t \in \mathbb{R}$. Положим по определению

$$D(f,t) = f(e^{it}) - 2f(1) + f(e^{-it}).$$

Следствие 11.8. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \ge 2$. Предположим, что $j \in \{1,\dots,n-1\}$, $n-j+1 > \alpha > n-j$, $g \in \mathcal{H}ol(B_n)$ и $h = \mathcal{R}^{j-1}g \in H^\infty(B_n)$. Для $\xi \in \partial B_n$ положим $h_\xi(w) = h(w\xi)$, $w \in \overline{B}_1$. Если*

$$D_\alpha(h) = \sup_{\xi\in\partial B_n} \int_0^\pi \frac{|D(h_\xi,t)|}{t^{n+2-\alpha-j}}\,dt < +\infty,$$

то $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$.

Доказательство. Зафиксируем точку $\xi \in \partial B_n$. Отметим, что $h_\xi \in H^\infty(B_1)$. Следовательно, как показано в доказательстве теоремы 3 из статьи [23], имеем

$$\int_0^1 |h'_\xi(r)|(1-r)^{\alpha+j-n-1}\,dr \le C\int_0^\pi \frac{|D(h_\xi,t)|}{t^{n+2-\alpha-j}}\,dt.$$

Так как $|\mathcal{R}^j g(r\xi)| = |\mathcal{R}h(r\xi)| = |rh'_\xi(r)|$, то получаем

$$J_\alpha(g,j) = \sup_{\xi\in\partial B_n} \int_0^1 |\mathcal{R}^j g(r\xi)| r^{-1}(1-r)^{\alpha+j-n-1}\,dr \le CD_\alpha(h) < +\infty.$$

Окончательно получаем, что $g \in \mathfrak{M}_\alpha(n)$ в силу теоремы 11.7. $\square$

Список литературы

1. J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert function spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. MR 1882259 (2003b:47001)
2. P. Ahern and W. Cohn, *Exceptional sets for Hardy Sobolev functions, $p > 1$*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), no. 2, 417–453. MR 997390 (90m:32013)
3. P. Ahern and R. Schneider, *A smoothing property of the Henkin and Szegő projections*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 1, 135–143. MR 563371 (80i:32015)
4. A. B. Aleksandrov, *Function theory in the ball*, Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 8, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1985, pp. 115–190, 274 (Russian); English transl.: in: G. M. Khenkin and A. G. Vitushkin (Eds.), Several Complex Variables II, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 8, Springer–Verlag, Berlin, 1994, pp. 107–178. MR 850487 (88b:32002)
5. D. Alpay and H. T. Kaptanoğlu, *Toeplitz operators on Arveson and Dirichlet spaces*, Integral Equations Operator Theory **58** (2007), no. 1, 1–33. MR 2312443 (2008e:47070)
6. C.-G. Ambrozie, M. Engliš, and V. Müller, *Operator tuples and analytic models over general domains in $\mathbb{C}^n$*, J. Operator Theory **47** (2002), no. 2, 287–302. MR 1911848 (2004c:47013)
7. W. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras. III. Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), no. 2, 159–228. MR 1668582 (2000e:47013)
8. F. Beatrous and J. Burbea, *On multipliers for Hardy-Sobolev spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 6, 2125–2133. MR 2383518
9. L. Brickman, D. J. Hallenbeck, T. H. Macgregor, and D. R. Wilken, *Convex hulls and extreme points of families of starlike and convex mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **185** (1973), 413–428 (1974). MR 0338337 (49 #3102)
10. C. Cascante and J. M. Ortega, *Tangential-exceptional sets for Hardy-Sobolev spaces*, Illinois J. Math. **39** (1995), no. 1, 68–85. MR 1299649 (95j:32009)
11. J. A. Cima, A. L. Matheson, and W. T. Ross, *The Cauchy transform*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 125, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. MR 2215991 (2006m:30003)
12. S. W. Drury, *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **68** (1978), no. 3, 300–304. MR 480362 (80c:47010)
13. D. J. Hallenbeck, *Tangential limits of Cauchy-Stieltjes transforms*, Complex Variables Theory Appl. **33** (1997), no. 1-4, 129–136. MR 1624915 (99b:31001)
14. D. J. Hallenbeck and T. H. MacGregor, *Growth and zero sets of analytic families of Cauchy-Stieltjes integrals*, J. Anal. Math. **61** (1993), 231–259. MR 1253443 (95d:30078)
15. ———, *Radial limits and radial growth of Cauchy-Stieltjes transforms*, Complex Variables Theory Appl. **21** (1993), no. 3-4, 219–229. MR 1276578 (95d:30077)
16. D. J. Hallenbeck, T. H. MacGregor, and K. Samotij, *Fractional Cauchy transforms, inner functions and multipliers*, Proc. London Math. Soc. (3) **72** (1996), no. 1, 157–187. MR 1357091 (96j:30056)
17. V. P. Havin, *On analytic functions representable by an integral of Cauchy-Stieltjes type*, Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. **13** (1958), no. 1, 66–79 (Russian). MR 0095256 (20 #1762)
18. ———, *Relations between certain classes of functions regular in the unit circle*, Vestnik Leningrad. Univ. **17** (1962), no. 1, 102–110 (Russian). MR 0152660 (27 #2635)
19. R. A. Hibschweiler and T. H. MacGregor, *Multipliers of families of Cauchy-Stieltjes transforms*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), no. 1, 377–394. MR 1120775 (93g:30057)
20. ———, *Fractional Cauchy transforms*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 136, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. MR 2189294 (2007b:30001)

21. S. V. Hruščev and S. A. Vinogradov, *Inner functions and multipliers of Cauchy type integrals*, Ark. Mat. **19** (1981), no. 1, 23–42. MR 625535 (83c:30027)
22. V. G. Krotov, *On the tangential boundary behavior of functions of several variables*, Mat. Zametki **68** (2000), no. 2, 230–248 (Russian); English transl.: Math. Notes **68** (2000), no. 1–2, 201–216. MR 1822651 (2002b:46045)
23. D. Luo and T. MacGregor, *Multipliers of fractional Cauchy transforms and smoothness conditions*, Canad. J. Math. **50** (1998), no. 3, 595–604. MR 1629835 (99d:30040)
24. T. H. MacGregor, *Analytic and univalent functions with integral representations involving complex measures*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), no. 1, 109–130. MR 876994 (87m:30037)
25. J. E. McCarthy and M. Putinar, *Positivity aspects of the Fantappiè transform*, J. Anal. Math. **97** (2005), 57–82. MR 2274973
26. J. M. Ortega and J. Fàbrega, *Pointwise multipliers and decomposition theorems in analytic Besov spaces*, Math. Z. **235** (2000), no. 1, 53–81. MR 1785071 (2001i:46033)
27. ______, *Pointwise multipliers and decomposition theorems in $F_s^{\infty,q}$*, Math. Ann. **329** (2004), no. 2, 247–277. MR 2060362 (2005i:32007)
28. ______, *Multipliers in Hardy-Sobolev spaces*, Integral Equations Operator Theory **55** (2006), no. 4, 535–560. MR 2250162 (2007f:46034)
29. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of $\mathbf{C}^n$*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science], vol. 241, Springer-Verlag, New York, 1980. MR 601594 (82i:32002)
30. ______, *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of $\mathbf{C}^n$*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 63, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986. MR 840468 (87f:32013)
31. J. Sueiro, *Tangential boundary limits and exceptional sets for holomorphic functions in Dirichlet-type spaces*, Math. Ann. **286** (1990), no. 4, 661–678. MR 1045395 (91b:32008)
32. M. Tamm, *Sur l'image par une fonction holomorphe bornée du bord d'un domaine pseudoconvexe*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), no. 16, 537–540. MR 679938 (84g:32008)
33. D. C. Ullrich, *A Bloch function in the ball with no radial limits*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), no. 4, 337–341. MR 940289 (89k:32009)
34. S. A. Vinogradov, *Properties of multipliers of integrals of Cauchy-Stieltjes type, and some problems of factorization of analytic functions*, Mathematical programming and related questions (Proc. Seventh Winter School, Drogobych, 1974), Theory of functions and functional analysis (Russian), Central Èkonom.-Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1976, pp. 5–39; English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) **115** (1980) 1–32. MR 0586560 (58 #28518)
35. S. A. Vinogradov, M. G. Goluzina, and V. P. Havin, *Multipliers and divisors of Cauchy-Stieltjes type integrals*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **19** (1970), 55–78 (Russian); English transl.: Seminars in Math., V. A. Steklov Math. Inst., Leningrad **19** (1972) 29–42. MR 0291471 (45 #562)
36. K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005. MR 2115155 (2006d:46035)

E-mail address: `dubtsov@pdmi.ras.ru`