ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ - 07/2008

Нашему учителю М.С. Бирману

Асимптотика спектра оператора Максвелла на липшицевом многообразии с краем

М. Демченко, Н. Филонов [1]

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Апрель 2008

Аннотация

Рассматривается оператор Максвелла на компактном липшицевом многообразии с краем. Для спектра такого оператора обоснована вейлевская асимптотика.

[1]Второй автор поддержан грантом EPSRC GR/T25552/01

1 Введение

1.1. В начале XX века Г. Вейль показал, что собственные числа многих операторов математической физики подчиняются некоторым асимптотикам и разработал общую технику вычисления таких асимптотик. Одним из примеров является задача об электромагнитных колебаниях резонатора $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с идеально проводящей границей $\partial\Omega$. Частоты собственных колебаний соответствуют спектру стационарного оператора Максвелла $\mathcal{M}$, действующего на пару $\{E, H\}$ по формуле

$$\mathcal{M}\{E, H\} = \{i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H, -i\mu^{-1} \operatorname{rot} E\}, \tag{1.1}$$

где E, H обозначают электрическую и магнитную составляющие поля. При этом предполагается, что выполнены условия соленоидальности

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = \operatorname{div}(\mu H) = 0 \tag{1.2}$$

и граничные условия

$$E_\tau \mid_{\partial\Omega} = (\mu H)_\nu \mid_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ – матрицы-функции, описывающие диэлектрическую и магнитную проницаемости среды, заполняющей Ω, индексы τ и ν обозначают касательную и нормальную компоненты вектора на $\partial\Omega$. В 1912 г. Вейль [13] вычислил главный член асимптотики для случая пустого ($\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$) резонатора с гладкой границей:

$$m_k \sim \left(\frac{\operatorname{mes}\Omega}{3\pi^2}\right)^{-1/3} k^{1/3}, \quad k \to \infty, \tag{1.4}$$

где m_k – положительные собственные числа оператора Максвелла, занумерованные в порядке неубывания.

При нарушении гладкости границы $\partial\Omega$ и/или коэффициентов ε, μ задача существенно усложняется. Только в 1976 г. А. Б. Алексеев и М. Ш. Бирман в работах [1, 2] обосновали асимптотику спектра оператора Максвелла для негладких ε, μ (класса L_∞) и гладкой границы $\partial\Omega$. В этом случае асимптотическая формула усложняется по сравнению с (1.4), см. ниже (4.3), (5.2). В 1987 г. М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк в работе [7] доказали формулу (1.4) для случая области с липшицевой границей и $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$. Отметим, что в этой ситуации вейлевская вариационная техника не может быть применена непосредственно. Более того, само корректное определение самосопряженного оператора Максвелла при негладкой $\partial\Omega$ наталкивается на определенные трудности (подробнее об этом см. [6]).

Подходы работ [2] и [7] удалось объединить, и в статьях [9, 3] была получена вейлевская асимптотика для случая негладких (ограниченных, измеримых и положительно-определенных) коэффициентов ε, μ и липшицевой границы $\partial\Omega$. Целью настоящей статьи является перенос этого результата на случай липшицевых многообразий произвольной размерности с краем (см. ниже теорему 4.3). Оператор Максвелла на многообразиях рассматривался разными авторами, но вопрос об асимптотике его спектра в негладкой ситуации, насколько нам известно, ранее не изучался.

1.2. В работе [14] Вейль привел запись стационарной системы Максвелла в евклидовом пространстве произвольной размерности n на языке дифференциальных форм. Эта система была перенесена на гладкое риманово многообразие в работе [12]. Напряженности $\tilde{E}$ и $\tilde{H}$ при этом рассматриваются как дифференциальные формы степеней k и $k+1$ $(k < n)$, а коэффициенты $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ – как линейные преобразования на k-формах и $(k+1)$-формах соответственно. Действие оператора Максвелла выглядит следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{M}}\{\tilde{E}, \tilde{H}\} = \{-i\tilde{\varepsilon}^{-1}(-1)^{k(n-k-1)} * d * \tilde{H}, -i\tilde{\mu}^{-1}d\tilde{E}\},$$

где $*$ – оператор Ходжа. Мы предлагаем другое обобщение оператора Максвелла, которое не требует наличия римановой структуры на многообразии. В нашем случае E – это k-форма, H – $(n-k-1)$-форма, ε рассматривается как линейный оператор из пространства k-форм в пространство $(n-k)$-форм, а μ – из $(n-k-1)$-форм в пространство $(k+1)$-форм. Действие оператора M дается формулой

$$M\{E, H\} = \{(-1)^{k+1}\varepsilon^{-1}dH, \mu^{-1}dE\}.$$

Если многообразие обладает каким-либо метрическим тензором, то по заданным ε и μ, легко построить соответствующие тензоры $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mu}$ и оператор $\tilde{M}$. При этом операторы M и $\tilde{M}$ окажутся унитарно эквивалентны независимо от метрики. Поэтому нам кажется более разумным работать с оператором M, не зависящим от римановой структуры. Наш подход значительно менее требователен к гладкости многообразия.

Отметим, что области с такими особенностями границы, как экраны и конические точки, также могут рассматриваться как липшицевы многообразия (см. ниже п. 5.2). Поэтому основной результат данной работы (теорема 4.3) приводит к вейлевской асимптотике и для таких областей. Этот факт был известен ранее при дополнительных ограничениях (см. [9, п. 5]).

Схема доказательства основного результата выглядит следующим образом. Вопрос о спектральной асимптотике на многообразии с помощью локализации сводится к аналогичному вопросу для евклидовой области. Асимптотика для евклидовой области произвольной размерности может быть обоснована по схеме работы [9] (где был рассмотрен трехмерный случай); полное доказательство будет опубликовано отдельно в работе [10]. Отметим, что основные идеи, используемые при переходе от случая области к случаю многообразия, взяты из работы [7].

В §2 мы приведем ряд фактов из теории липшицевых многообразий. В §3 определим оператор Максвелла на многообразии. В §4 сформулируем основной результат. В §5 мы покажем, что в случае области в евклидовом пространстве наш результат совпадает с известными асимптотиками спектра для скалярных задач Дирихле и Неймана и для оператора Максвелла (1.1) – (1.3). В §6 переформулируем вопрос о спектре оператора Максвелла в терминах отношения квадратичных форм. В §7 докажем ряд лемм о покрытии многообразия, которые позволят локализовать задачу. В §8 мы докажем основной результат.

2 Липшицевы многообразия

2.1. Дифференциальные формы. В этом пункте мы напомним основные понятия теории липшицевых многообразий (см., например, [11]).

Введем обозначение $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^n \geq 0\}$. Всюду далее, говоря об открытых подмножествах $\mathbb{R}^n_+$, мы будем иметь в виду относительную топологию $\mathbb{R}^n_+$. Определенное на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n_+$ отображение $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ называется *локально липшицевым*, если его сужение на любой компакт $K \subset U$ липшицево. Биективное отображение $\phi : U \to V$ называется *локально билипшицевым*, если ϕ и ϕ^{-1} локально липшицевы. n-мерное топологическое многообразие X с краем ∂X называется *липшицевым*, если на нем фиксирован атлас $\{V_\alpha, \alpha\}$, такой что для любых двух карт $\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^n_+$ и $\gamma : V_\gamma \to \mathbb{R}^n_+$ сквозное отображение $\gamma \circ \alpha^{-1}$ локально билипшицево.

Для открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n_+$ через $\mathcal{L}^k_p(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим класс k-форм, имеющих в стандартном базисе комплексные коэффициенты из $L_{p,loc}(U)$. Липшицево отображение почти везде дифференцируемо, поэтому для локально билипшицевого отображения $\phi : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n_+$, определено индуцированное отображение форм, действующее по стандартным правилам. При этом выполнено $\phi^* \mathcal{L}^k_p(V) = \mathcal{L}^k_p(U)$.

Пусть X – липшицево многообразие с атласом $\{V_\alpha, \alpha\}$. Пусть также $\{\omega_\alpha\}$ – набор дифференциальных форм, определенных на множествах $\alpha(V_\alpha)$. Назовем $\omega = \{\omega_\alpha\}$ дифференциальной формой на X, если для любых двух карт (V_α, α) и (V_γ, γ) выполнено $(\alpha \circ \gamma^{-1})^* \omega_\alpha = \omega_\gamma$. Пространство k-форм $\omega = \{\omega_\alpha\}$ на X, таких что $\omega_\alpha \in \mathcal{L}^k_p(\alpha(V_\alpha))$, обозначим $\mathcal{L}^k_p(X)$. Ясно, что

$$\omega \in \mathcal{L}^k_p(X), \quad \theta \in \mathcal{L}^l_q(X) \quad \Rightarrow \quad \omega \wedge \theta \in \mathcal{L}^{k+l}_r(X), \quad 1/p + 1/q = 1/r.$$

Нам понадобится также обозначение

$$\mathcal{W}^k(X) = \{\omega \in \mathcal{L}^k_2(X) \ : \ d\omega \in \mathcal{L}^{k+1}_2(X)\}.$$

Отметим, что пространство $\mathcal{W}^0$ совпадает с пространством Соболева $H^1(X)$ скалярных функций, тогда как $\mathcal{W}^n = \mathcal{L}^n_2$.

Если многообразие X компактно и ориентировано, то для формы $\omega \in \mathcal{L}^n_1(X)$ стандартным образом определяется интеграл $\int_X \omega$.

2.2. Граничные условия. Пусть X – ориентированное компактное многообразие с краем. Вложение края в многообразие обозначим через $j : \partial X \to X$. Сужение формы на край ∂X можно определить в обобщенном смысле. Мы определим только равенство $j^*\omega = 0$.

Определение 2.1. Пусть $\omega \in \mathcal{W}^k$, $k < n$. Условие $j^*\omega = 0$ означает, что

$$\int_X \omega \wedge d\theta = (-1)^{k+1} \int_X d\omega \wedge \theta \quad \forall \theta \in \mathcal{W}^{n-k-1}.$$

Для формы $\omega \in \mathcal{W}^n = \mathcal{L}^n_2$ всегда считаем условие $j^*\omega = 0$ выполненным.

Замечание 2.2. Ясно, что из $j^*\omega = 0$ следует $j^*(d\omega) = 0$.

2.3. Коэффициенты. Выберем в $\mathbb{R}^n$ стандартный базис и рассмотрим линейный оператор $\beta : \mathcal{F}^k(n) \to \mathcal{F}^{n-k}(n)$, где $\mathcal{F}^k(n)$ – пространство антисимметричных k-линейных комплекснозначных функций ω на $\mathbb{R}^n$. Будем писать $\beta \in M_+^k(n)$, если $\overline{\beta\omega} = \beta\overline{\omega}$ и функция $b(\omega)$, определяемая равенством $\omega \wedge \beta\overline{\omega} = b(\omega)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, положительна для любого $\omega \neq 0$. Равенство

$$\omega \wedge \beta\theta = \theta \wedge \beta\omega \quad \omega, \theta \in \mathcal{F}^k(n).$$

доказывается аналогично элементарному утверждению линейной алгебры о том, что вещественную квадратичную форму имеют только эрмитовские матрицы. Нам это равенство понадобится в виде:

$$\omega \wedge \beta\theta = (-1)^{k(n-k)}\beta\omega \wedge \theta, \quad \omega, \theta \in \mathcal{F}^k(n). \tag{2.1}$$

Ясно, что $\beta \in M_+^k(n)$ имеет обратный оператор

$$\beta^{-1} : \mathcal{F}^{n-k}(n) \to \mathcal{F}^k(n),$$

причем $(-1)^{k(n-k)}\beta^{-1} \in M_+^{n-k}(n)$. Распространим это определение на многообразие.

Определение 2.3. Линейное отображение $\beta : \mathcal{L}_2^k(X) \to \mathcal{L}_2^{n-k}(X)$ принадлежит классу $M_+^k(X)$, если для любой карты (V_α, α) существует такая функция $\beta_\alpha \in L_\infty(\alpha(V_\alpha), M_+^k(n))$, что выполнено

$$(\beta\omega)_\alpha = \beta_\alpha\omega_\alpha \quad \forall\omega \in \mathcal{L}_2^k(X),$$
$$(-1)^{k(n-k)}\beta_\alpha^{-1} \in L_\infty(\alpha(V_\alpha), M_+^{n-k}(n)).$$

Замечание 2.4. $\beta \in M_+^k(X) \Leftrightarrow (-1)^{k(n-k)}\beta^{-1} \in M_+^{n-k}(X)$.

В дальнейшем будем считать, что при каждом $k = 0, 1, ..., n$, фиксировано некоторое отображение $\beta_k \in M_+^k(X)$. Через $\mathcal{L}_2^k(\beta_k)$ будем обозначать гильбертово пространство $\mathcal{L}_2^k$ со скалярным произведением

$$(\omega, \theta)_{\beta_k} = \int_X \omega \wedge \beta_k\overline{\theta}. \tag{2.2}$$

2.4. Оператор дифференцирования. Введем оператор

$$d_k : \mathcal{L}_2^k(\beta_k) \to \mathcal{L}_2^{k+1}(\beta_{k+1}), \quad d_k\omega = d\omega, \quad \operatorname{Dom} d_k = \{\omega \in \mathcal{W}^k : j^*\omega = 0\}.$$

Легко видеть, что оператор d_k плотно определен.

Лемма 2.5. *Оператор d_k замкнут. Сопряженный оператор d_k^* действует по формуле*

$$d_k^*\theta = (-1)^{k+1}\beta_k^{-1}d(\beta_{k+1}\theta), \quad \operatorname{Dom} d_k^* = \{\theta \in \mathcal{L}_2^{k+1} : d(\beta_{k+1}\theta) \in \mathcal{L}_2^{n-k}\}.$$

Доказательство. Пространство $\operatorname{Dom} d_k$ является полным относительно скалярного произведения $\int d\omega \wedge \beta_{k+1}(\overline{d\omega}) + \int \omega \wedge \beta_k\overline{\omega}$, что непосредственно следует из [11]. Следовательно, d_k замкнут. Предположим, что $\theta \in \operatorname{Dom} d_k^*$ и $\eta = d_k^*\theta$, то есть

$$\int_X d\omega \wedge \beta_{k+1}\overline{\theta} = \int_X \omega \wedge \beta_k\overline{\eta} \qquad \forall\omega \in \mathcal{W}^k : j^*\omega = 0. \tag{2.3}$$

Тогда $(-1)^{k+1}d(\beta_{k+1}\theta) = \beta_k\eta$. Обратно, если $\theta \in \mathcal{L}_2^{k+1}$ и $d(\beta_{k+1}\theta) \in \mathcal{L}_2^{n-k}$, то для $\eta = (-1)^{k+1}\beta_k^{-1}d(\beta_{k+1}\theta)$ равенство (2.3) выполнено в силу определения 2.1. ∎

3 Оператор Максвелла

3.1. Функциональные пространства. В этом пункте мы введем ряд пространств k-форм. Во-первых, пусть

$$G^k = \{d\varphi : \varphi \in \mathcal{W}^{k-1}\}, \quad G_0^k = \{d\varphi : \varphi \in \mathcal{W}^{k-1}, j^*\varphi = 0\}$$

для $k \geq 1$, и положим $G_0^0 = G^0 = \{0\}$. Пусть также

$$J^k(\beta_k) = \{\omega \in \mathcal{L}_2^k : d(\beta_k\omega) = 0\}, \quad J_0^k(\beta_k) = \{\omega \in J^k(\beta_k) : j^*(\beta_k\omega) = 0\}.$$

Ясно, что $J_0^0 = J^0 = \mathcal{L}_2^0$. Учитывая определение (2.2) скалярного произведения в $\mathcal{L}_2^k(\beta_k)$, нетрудно видеть, что ортогональным дополнением к G_0^k является J^k, а ортогональным дополнением к G^k – пространство J_0^k:

$$\mathcal{L}_2^k(\beta_k) = G_0^k \oplus_{\beta_k} J^k = G^k \oplus_{\beta_k} J_0^k. \tag{3.1}$$

Это ортогональное разложение встречается в различных разделах теории дифференциальных уравнений в частных производных и известно как разложение Вейля-Гельмгольца-Ходжа.

Далее считаем $k \leq n-1$. Введем гильбертово пространство

$$F^k(\beta_k) = \{\omega \in \mathcal{W}^k : d(\beta_k\omega) \in \mathcal{L}_2^{n-k+1}\}$$

с нормой

$$\|\omega\|_{F^k}^2 = \int_X d\omega \wedge \beta_{k+1}(\overline{d\omega}) + \beta_{k-1}^{-1} d(\beta_k\omega) \wedge d(\overline{\beta_k\omega}) + \omega \wedge \beta_k\overline{\omega} \tag{3.2}$$

(в случае $k = 0$ среднее слагаемое отсутствует), и его подпространства "электрических"и "магнитных полей"

$$F_{el}^k(\beta_k) = \{\omega \in F^k(\beta_k) : j^*\omega = 0\}, \quad F_m^k(\beta_k) = \{\omega \in F^k(\beta_k) : j^*(\beta_k\omega) = 0\}.$$

Замечание 3.1. При $k = 0$ пространство F_{el}^0 совпадает с обычным пространством Соболева $\mathring{H}^1(X)$, пространство $F_m^0 = F^0$ – с пространством Соболева $H^1(X)$.

Положим

$$\Phi_{el}^k(\beta_k) = F_{el}^k(\beta_k) \cap J^k(\beta_k), \quad E_{el}^k(\beta_k) = F_{el}^k(\beta_k) \cap G_0^k,$$
$$\Phi_m^k(\beta_k) = F_m^k(\beta_k) \cap J_0^k(\beta_k), \quad E_m^k(\beta_k) = F_m^k(\beta_k) \cap G^k.$$

Ясно, что

$$F_{el}^k = \Phi_{el}^k \oplus_{\beta_k} E_{el}^k, \quad F_m^k = \Phi_m^k \oplus_{\beta_k} E_m^k, \tag{3.3}$$
$$\Phi_{el}^0 = \mathring{H}^1(X), \quad \Phi_m^0 = H^1(X), \quad E_{el}^0 = E_m^0 = \{0\}.$$

Пусть, наконец,

$$K_{el}^k(\beta_k) = \{\omega \in \Phi_{el}^k(\beta_k) : d\omega = 0\} = \{\omega \in \mathcal{L}_2^k : d\omega = 0, d(\beta_k\omega) = 0, j^*\omega = 0\}. \tag{3.4}$$

Пространство $K_{el}^k(\beta_k)$ конечномерно (может быть, тривиально), см. ниже следствие 7.6. Для оператора d_k, введенного в п. 2.4, имеем

$$\ker d_k = G_0^k \oplus_{\beta_k} K_{el}^k(\beta_k). \tag{3.5}$$

Замечание 3.2. Согласно замечанию 2.4 имеем

$$\beta_k \in M_+^k(X) \Leftrightarrow (-1)^{k(n-k)}\beta_k^{-1} \in M_+^{n-k}(X).$$

В дальнейшем мы будем работать с пространствами с весом $(-1)^{k(n-k)}\beta_k^{-1}$. Для краткости мы будем опускать знак, стоящий перед весом в обозначениях типа $J^{n-k}(\beta_k^{-1})$.

3.2. Определение оператора Максвелла. Мы хотим построить самосопряженный дифференциальный оператор первого порядка. Это можно сделать, исходя из блоков вида βd. Ясно, что пространства точных форм G^k и G_0^k попадут в ядро соответствующих операторов. Поэтому мы будем работать в ортогональном дополнении к ним: J_0^k, J^k (см. (3.1)).

При $k \leq n-1$ введем оператор (см. замечание 3.2)

$$R_k(\beta_k, \beta_{k+1}) : J^k(\beta_k) \to J_0^{n-k-1}(\beta_{k+1}^{-1}),$$

$$R_k\omega = \beta_{k+1} d\omega, \quad \operatorname{Dom} R_k = \Phi_{el}^k(\beta_k).$$

Оператор R_k замкнут, его ядро $\ker R_K = K_{el}^k(\beta_k)$. Описание сопряженного оператора может быть получено аналогично доказательству леммы 2.5:

$$R_k(\beta_k, \beta_{k+1})^* : J_0^{n-k-1}(\beta_{k+1}^{-1}) \to J^k(\beta_k),$$

$$R_k^*\theta = (-1)^{k+1}\beta_k^{-1} d\theta, \quad \operatorname{Dom} R_k^* = \Phi_m^{n-k-1}(\beta_{k+1}^{-1}).$$

Определение 3.3. Оператором Максвелла $M_k(\beta_k, \beta_{k+1})$, $k = 0, 1, ..., n-1$, будем называть блочный оператор в гильбертовом пространстве $J^k(\beta_k) \oplus J_0^{n-k-1}(\beta_{k+1}^{-1})$

$$M_k(\beta_k, \beta_{k+1}) = \begin{pmatrix} 0 & R_k^* \\ R_k & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_k \begin{pmatrix} \omega \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1}\beta_k^{-1} d\theta \\ \beta_{k+1} d\omega \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Dom} M_k(\beta_k, \beta_{k+1}) = \Phi_{el}^k(\beta_k) \oplus \Phi_m^{n-k-1}(\beta_{k+1}^{-1}).$$

Оператор $M_k(\beta_k, \beta_{k+1})$ самосопряжен, его ядро конечномерно. Спектр $\sigma(M_k)$, как мы увидим ниже, дискретен. Из тождества

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R_k^* \\ R_k & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & R_k^* \\ R_k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

вытекает, что операторы M_k и $-M_k$ унитарно эквивалентны, так что $\sigma(M_k)$ симметричен относительно нуля.

Для самосопряженного оператора A с дискретным спектром обозначим через $N(\lambda, A)$ количество собственных значений A (с учетом их кратностей) в интервале $(0, \lambda)$. Нашим основным результатом будет асимптотика функции $N(\lambda, M_k(\beta_k, \beta_{k+1}))$ при $\lambda \to \infty$.

Замечание 3.4. Ясно, что

$$M_k^2 = \begin{pmatrix} R_k^* R_k & 0 \\ 0 & R_k R_k^* \end{pmatrix}.$$

Операторы $R_k^* R_k$ и $R_k R_k^*$ унитарно эквивалентны в ортогональных дополнениях к своим ядрам, поэтому

$$N(\lambda, M_k(\beta_k, \beta_{k+1})) = N(\lambda^2, R_k(\beta_k, \beta_{k+1})^* R_k(\beta_k, \beta_{k+1})), \tag{3.6}$$

причем в правой части, согласно нашему определению считающей функции, нулевое собственное значение $R_k^* R_k$ не учитывается.

4 Асимптотика спектра

Главный член асимптотики $N(\lambda, M_k)$ при $\lambda \to \infty$ имеет довольно сложный вид, запись соответствующего выражения требует рассмотрения специальной алгебраической задачи, приведенной в п. 4.1. Асимптотика $N(\lambda, M_k)$ выписана в п. 4.2.

4.1. Алгебраическая задача. В каждой точке $x \in X$ рассмотрим вспомогательную конечномерную спектральную задачу. Фиксируем точку x в карте (V_α, α) и вещественную 1-форму $\xi \in \mathcal{F}^1(n)$. Рассмотрим алгебраическую задачу

$$\xi \wedge \beta_{k+1,\alpha}(x)(h \wedge \xi) = \Lambda \beta_{k,\alpha}(x) h, \tag{4.1}$$

где неизвестными являются $h \in \mathcal{F}^k(n)$ и $\Lambda \in \mathbb{C}$. Домножая (4.1) на $\overline{h}$ слева, получаем

$$(\overline{h} \wedge \xi) \wedge \beta_{k+1,\alpha}(h \wedge \xi) = \Lambda \overline{h} \wedge \beta_{k,\alpha} h,$$

откуда с учетом положительности β_k и β_{k+1} следует, что все собственные числа Λ неотрицательны. Пусть $0 < \Lambda_1(x, \xi) \le \Lambda_2(x, \xi) \le \cdots$ суть ненулевые собственные значения задачи (4.1), занумерованные с учетом кратности. Введем считающую функцию $N_{k,\alpha}(\Lambda; x, \xi) = \#\{j : \Lambda_j(x, \xi) < \Lambda\}$. Определим n-форму

$$\nu_{k,\alpha}(\Lambda; x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} N_{k,\alpha}(\Lambda; x, \xi) d^n \xi; \tag{4.2}$$

здесь использовано каноническое отождествление вещественных 1-форм с $\mathbb{R}^n$. Мы получили набор n-форм $\{\nu_{k,\alpha}(\Lambda)\}$ на множествах $\alpha(V_\alpha)$.

Лемма 4.1. *При всех $\Lambda > 0$ набор (4.2) форм $\{\nu_{k,\alpha}(\Lambda)\}$ определяет n-форму $\nu_k(\Lambda)$ на многообразии X, причем $\nu_k(\Lambda) \in \mathcal{L}_\infty^n(X)$.*

Доказательство. Проверим согласованность набора $\{\nu_{k,\alpha}(\Lambda)\}$. Пусть (V_α, α), (V_γ, γ) – две пересекающиеся карты, $\phi = \alpha \circ \gamma^{-1}$ – сквозное отображение. Если параметры ξ_α и ξ_γ связаны по правилу преобразования 1-форм, то есть $\xi_\gamma = \phi^* \xi_\alpha$, то решения (4.1) связаны следующим образом: $h_\gamma = \phi^* h_\alpha$, $\Lambda_{j,\gamma} = \Lambda_{j,\alpha}$, откуда

$$N_{k,\alpha}(\Lambda; x, \xi_\alpha) = N_{k,\gamma}(\Lambda; \phi^{-1}(x), \xi_\gamma)$$

(для гладкого многообразия можно было бы сказать, что $N_k(\Lambda)$ – скаляр на кокасательном расслоении). Следовательно,

$$\nu_{k,\alpha}(\Lambda;x) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} N_{k,\alpha}(\Lambda;x,\xi_\alpha)\,d^n\xi_\alpha$$
$$= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} N_{k,\gamma}(\Lambda;\phi^{-1}(x),\xi_\gamma)|\partial\phi/\partial x|\,d^n\xi_\gamma = |\partial\phi/\partial x|\,\nu_\gamma(\Lambda;\phi^{-1}(x)).$$

Полученное равенство и означает, что $\{\nu_{k,\alpha}(\Lambda)\}$ – n-форма на X. Легко видеть, что формы $\nu_{k,\alpha}(\Lambda)$ измеримы и ограничены, то есть $\nu_k(\Lambda)\in\mathcal{L}^n_\infty(X)$. ∎

4.2. Формулировка результата. Покажем сперва, что формы $\nu_k(\Lambda)$ однородны порядка $n/2$ по Λ. Снова фиксируем точку x в карте (V_α,α). Собственные числа Λ_j задачи (4.1) однородны второго порядка по ξ, $\Lambda_j(x,r\xi)=r^2\Lambda_j(x,\xi)$ при всех $r>0$. Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} N_{k,\alpha}(\Lambda;x,\xi)\,d^n\xi = \sum_j \operatorname{mes}\{\xi:\Lambda_j(x,\xi)<\Lambda\}$$
$$= \sum_j\int_{|\xi|=1}\int_0^{(\Lambda/\Lambda_j(x,\xi))^{1/2}} r^{n-1}dr\,dS(\xi) = \frac{\Lambda^{n/2}}{n}\int_{|\xi|=1}\sum_j\Lambda_j(x,\xi)^{-n/2}dS(\xi),$$

где $dS(\xi)$ – мера Лебега на единичной сфере. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Форма $\nu_k(\Lambda)$, определенная (4.2), однородна по Λ степени $n/2$, $\nu_k(\Lambda)=\Lambda^{n/2}\nu_k$, где $\nu_k=\nu_k(1)\in\mathcal{L}^n_\infty(X)$. В локальных координатах форма ν_k выражается следующим образом:*

$$\nu_k(x) = \frac{1}{n(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1}\sum_j\Lambda_j(x,\xi)^{-n/2}dS(\xi).$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 4.3. *Пусть X – компактное ориентированное липшицево многообразие с краем, $\beta_k\in M^k_+(X)$, $\beta_{k+1}\in M^{k+1}_+(X)$. Пусть $M_k(\beta_k,\beta_{k+1})$ – оператор Максвелла, определенный в пункте 3.2. Тогда для считающей функции положительных собственных значений $M_k(\beta_k,\beta_{k+1})$ имеет место асимптотика*

$$N(\lambda,M_k(\beta_k,\beta_{k+1}))\sim\int_X\nu_k(\lambda^2)=\lambda^n\int_X\nu_k,\quad \lambda\to\infty, \tag{4.3}$$

где $\nu_k(\Lambda)$ и ν_k – формы, определенные выше.

Замечание 4.4. Здесь и всюду в дальнейшем знак $\sim$ означает, что отношение величин, стоящих в левой и правой частях, стремится к 1.

В терминах собственных значений $0<m_1\le m_2\le\cdots$ оператора $M_k(\beta_k,\beta_{k+1})$ эта асимптотическая формула означает, что существует предел

$$\lim_{j\to\infty} j^{-1/n}m_j = \left(\int_X\nu_k\right)^{-1/n}.$$

Замечание 4.5. Утверждение теоремы 4.3 справедливо и в случае, когда X не имеет края. При этом определение оператора Максвелла упрощается: граничные условия исчезают, а некоторые функциональные пространства совпадают,

$$G_0^k = G^k, \quad J_0^k = J^k, \quad F_{el}^k = F_m^k = F^k, \quad \Phi_{el}^k = \Phi_m^k, \quad E_{el}^k = E_m^k.$$

Доказательство теоремы 4.3 не зависит от наличия края многообразия.

5 Область в евклидовом пространстве

В этом параграфе рассмотрим в качестве примера частный случай липшицева многообразия X : мы будем предполагать, что $X = \overline{\Omega}$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей (то есть в окрестности каждой точки границы $\partial\Omega$ существует локальная система координат в $\mathbb{R}^n$, в которой область является подграфиком липшицевой функции).

Теорема 5.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей, $\beta_k \in M_+^k(\overline{\Omega})$, $\beta_{k+1} \in M_+^{k+1}(\overline{\Omega})$, $M_k(\beta_k, \beta_{k+1})$ – оператор Максвелла. Тогда его считающая функция $N(\lambda, M_k(\beta_k, \beta_{k+1}))$ подчиняется асимптотике* (4.3).

В случае $n = 3$, $k = 1$ (см. также п. 5.2. ниже) эта теорема доказана в работах [9, 3]. Для произвольных размерности n и степени k доказательство, в целом, аналогично и будет опубликовано в [10].

5.1. Скалярные задачи. Обсудим случай $k = 0$. Естественно отождествить $\beta_0(x)$ со скалярной положительной функцией, $\beta_1(x)$ – с $(n\times n)$-матричнозначной положительно-определенной функцией; $\beta_o, \beta_1 \in L_\infty(\Omega)$. Оператор $R_0^* R_0$ – это не что иное, как оператор

$$A_0 = -\beta_0(x)^{-1} \operatorname{div}(\beta_1(x)\nabla\ \cdot)$$

задачи Дирихле в весовом пространстве $L_2(\Omega, \beta_0(x)d^n x)$. Задача (4.1) переписывается как

$$\langle \beta_1(x)\xi, \xi\rangle h = \Lambda\beta_0(x)h, \quad h \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

где ξ отождествлено с вектором в $\mathbb{R}^n$. Существует ровно одно собственное значение $\Lambda(x,\xi) = \beta_0(x)^{-1}\langle\beta_1(x)\xi,\xi\rangle$. Следовательно,

$$\nu_0(\Lambda, x) = (2\pi)^{-n} \operatorname{mes}\{\xi : \Lambda(x,\xi) < \Lambda\} = \frac{\kappa_n \Lambda^{n/2}\beta_0(x)^{n/2}}{(2\pi)^n(\det\beta_1(x))^{1/2}},$$

где κ_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Принимая во внимание замечание 3.4, асимптотическую формулу (4.3) можно переписать в виде

$$N(\lambda, A_0) \sim \frac{\lambda^{n/2}\kappa_n}{(2\pi)^n}\int_\Omega \frac{\beta_0(x)^{n/2} d^n x}{(\det\beta_1(x))^{1/2}}, \quad \lambda \to \infty. \tag{5.1}$$

Вполне аналогично, задача Неймана для уравнения второго порядка получается при рассмотрении случая $k = n-1$ и оператора $R_{n-1}R_{n-1}^*$, для которых также имеет место асимптотика типа (5.1). Эти результаты для областей в евклидовом пространстве хорошо известны, см., например, [4] (где асимптотика для задачи Дирихле получена не только для липшицевой, но и для произвольной ограниченной области). Отметим, что вейлевская асимптотика спектра скалярных задач на липшицевом многообразии может быть просто выведена из соответствующих результатов для области в евклидовом пространстве при помощи так называемой "вилки Дирихле-Неймана".

5.2. Оператор Максвелла. Пусть теперь $n = 3$, $k = 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с липшицевой границей. Естественно отождествить 1-формы ω, θ с вектор-функциями E, H, коэффициенты β_1 и β_2 – с (3×3)-матричнозначными функциями; положим еще $\varepsilon = \beta_1$, $\mu = \beta_2^{-1}$. Функциональные пространства выглядят так:

$$J^1(\varepsilon) = \{E \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{div}(\varepsilon E) = 0\},$$
$$J_0^1(\mu) = \{H \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{div}(\mu H) = 0, (\mu H)_\nu \mid_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$\Phi_{el}^1(\varepsilon) = \{E \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} E \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3), \operatorname{div}(\varepsilon E) = 0,\ E_\tau \mid_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$\Phi_m^1(\mu) = \{H \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} H \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3), \operatorname{div}(\mu H) = 0,\ (\mu H)_\nu \mid_{\partial\Omega} = 0\},$$

и таким образом, условия (1.2), (1.3) включены в определение пространств $\Phi_{el}^1(\varepsilon)$, $\Phi_m^1(\mu)$. Оператор Максвелла действует в пространстве $J^1(\varepsilon) \oplus J_0^1(\mu)$ на области определения $\Phi_{el}^1(\varepsilon) \oplus \Phi_m^1(\mu)$ по формуле

$$M_1 \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \\ \mu^{-1} \operatorname{rot} E \end{pmatrix}.$$

Оператор Максвелла $\mathcal{M}$, определенный в работах [5, 6] и отвечающий формулам (1.1) – (1.3), отличается от вышеприведенного наличием мнимой единицы:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \\ -i\mu^{-1} \operatorname{rot} E \end{pmatrix}.$$

Ясно, что операторы M_1 и $\mathcal{M}$ унитарно эквивалентны. Теорема 4.3 в данном случае означает, что

$$N(\lambda, \mathcal{M}) \sim \frac{\lambda^3}{24\pi^3} \int_\Omega \int_{|\xi|=1} \left(\Lambda_1(x,\xi)^{-3/2} + \Lambda_2(x,\xi)^{-3/2}\right) dS(\xi) d^3x, \quad \lambda \to \infty, \tag{5.2}$$

где $\Lambda_{1,2}$ – ненулевые собственные значения задачи

$$\left[\xi, \mu(x)^{-1}[h,\xi]\right] = \Lambda \varepsilon(x) h, \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \quad h \in \mathbb{C}^3, \quad \Lambda \in \mathbb{C},$$

$[\,.\,,\,.\,]$ – векторное произведение. Асимптотическая формула (5.2) является основным результатом работы [9].

Теперь в качестве X мы можем взять не только области с липшицевой границей, но и более "экзотические"области.

Пример 1. Рассмотрим шар $\{x = (r, \varphi, \theta) : r < 1\}$ с вырезанным полудиском $\{x = (r, \varphi, \theta) : r < 1, \varphi = 0, \theta \in [0, \pi]\}$, где (r, φ, θ) – стандартные сферические координаты в

$\mathbb{R}^3$. Через Ω обозначим пополнение описанной области по своей внутренней метрике. Это позволяет различать стороны разреза $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$.

Отображение $(r, \varphi, \theta) \mapsto (r, \varphi/2, \theta)$ является билипшицевым и взаимнооднозначно переводит Ω в замкнутый полушар. Таким образом, Ω является липшицевым многообразием. Точно так же *области с экранами* (см. [8]) являются липшицевыми многообразиями. Асимптотика спектра оператора Максвелла в областях с экранами получена в [8] при $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$ и в [9, 3] для произвольных ε, μ. Однако, в этих работах предполагалось, что граница области вне "края"экрана (то есть сами экраны и "внешняя"часть границы) – C^2-гладкие. Наш результат охватывает и случай "липшицевых"экранов.

Пример 2. Пусть $\Omega = \{x = rs : r \in [0, 1],\ s \in \overline{\Xi}\}$, где Ξ – открытое односвязное подмножество единичной сферы с гладкой границей. На Ω снова легко ввести структуру липшицева многообразия, хотя в окрестности точки 0 граница $\partial\Omega$ может не являться липшицевой.

6 Вариационные формулировки

6.1. Квадратичные формы. При изучении асимптотик собственных чисел удобно работать со спектром отношения квадратичных форм. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы две положительные квадратичные формы a, b, причем форма a задает в $\mathcal{H}$ некоторое скалярное произведение, а форме b отвечает компактный самосопряженный оператор B. Рассмотрим отношение

$$b[x]/a[x], \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{6.1}$$

Через $n(\lambda, (6.1))$ будем обозначать считающую функцию последовательности максимумов отношения (6.1), иначе говоря, $n(\lambda, (6.1)) = \#\{j : b_j > \lambda\}$, где b_j суть собственные значения оператора B, пронумерованные с учетом кратности. Следующая лемма доказана в [7] в некотором конкретном случае. Доказательство в абстрактной ситуации практически ничем не отличается.

Лемма 6.1. *Пусть $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства, $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ – плотно определенный замкнутый оператор. Предположим, что вложение области определения $\operatorname{Dom} A$ в $\mathcal{H}_1$ компактно относительно нормы графика оператора A, введенной в $\operatorname{Dom} A$. Рассмотрим отношения квадратичных форм*

$$\|y\|^2_{\mathcal{H}_1}/\|Ay\|^2_{\mathcal{H}_2}, \quad y \in \operatorname{Dom} A, \quad y \perp \ker A, \tag{6.2}$$

$$\|Ax\|^2_{\mathcal{H}_2}/\|A^*Ax\|^2_{\mathcal{H}_1}, \quad x \in \operatorname{Dom}(A^*A), \quad x \perp \ker A. \tag{6.3}$$

Тогда $n(\lambda, (6.2)) = n(\lambda, (6.3))$.

Доказательство. Для оператора A имеем полярное разложение $A = U|A|$, где U – изометрический изоморфизм пространства $\mathcal{H}_1 \ominus \ker A$ в $\mathcal{H}_2 \ominus \ker A^*$. При этом

$$\operatorname{Dom}|A| = \operatorname{Dom} A, \quad \ker|A| = \ker A, \quad A^* = |A|U^* \quad \text{и} \quad A^*A = |A|^2.$$

Для $x \in \operatorname{Dom} A$, $x \perp \ker A$, положим $y = |A|x$. Тогда $\|y\|_{\mathcal{H}_1} = \|Ax\|_{\mathcal{H}_2}$. Далее, $x \in \operatorname{Dom}(A^*A)$ тогда и только тогда, когда $y \in \operatorname{Dom}|A| = \operatorname{Dom} A$, и

$$\|A^*Ax\|_{\mathcal{H}_1} = \||A|y\|_{\mathcal{H}_1} = \|Ay\|_{\mathcal{H}_2}.$$

Следовательно, спектры задач (6.2) и (6.3) совпадают. ∎

Поведение максимумов отношения (6.1) описывается асимптотическими функционалами:

$$\delta_q(6.1) = \delta_q\left(\frac{b[x]}{a[x]}\right) = \liminf_{\lambda\to 0} \lambda^q n(\lambda, (6.1)),$$
$$\Delta_q(6.1) = \Delta_q\left(\frac{b[x]}{a[x]}\right) = \limsup_{\lambda\to 0} \lambda^q n(\lambda, (6.1)),$$

где $n(\lambda, (6.1))$ – считающая функция последовательных максимумов отношения (6.1). Нам понадобятся следующие факты из [4].

$$\delta_q\left(\frac{b_1[x]+b_2[x]}{a[x]}\right)^{1/(q+1)} \le \delta_q\left(\frac{b_1[x]}{a[x]}\right)^{1/(q+1)} + \Delta_q\left(\frac{b_2[x]}{a[x]}\right)^{1/(q+1)}, \tag{6.4}$$

$$\Delta_q\left(\frac{b_1[x]+b_2[x]}{a[x]}\right)^{1/(q+1)} \le \Delta_q\left(\frac{b_1[x]}{a[x]}\right)^{1/(q+1)} + \Delta_q\left(\frac{b_2[x]}{a[x]}\right)^{1/(q+1)}.$$

А также

$$\delta_q\left(\frac{b[x]}{a_1[x]}\right) = \delta_q\left(\frac{b[x]}{a_2[x]}\right), \quad \Delta_q\left(\frac{b[x]}{a_1[x]}\right) = \Delta_q\left(\frac{b[x]}{a_2[x]}\right) \tag{6.5}$$

если форма $a_1[x] - a_2[x]$ компактна относительно формы $a_1[x]$.

6.2. Вариационные отношения. Вместо M_k мы будем работать с оператором $R_k^* R_k$, см. замечание 3.4. Удобно перейти к обратному оператору в ортогональном дополнении к ядру $\ker R_k = K_{el}^k$. Ему соответствует отношение квадратичных форм

$$\frac{\|\omega\|^2_{\mathcal{L}_2^k(\beta_k)}}{\|R_k(\beta_k,\beta_{k+1})\omega\|^2_{\mathcal{L}_2^{n-k-1}(\beta_{k+1}^{-1})}} = \frac{\int_X \omega\wedge\beta_k\overline{\omega}}{\int_X d\omega\wedge\beta_{k+1}(\overline{d\omega})}, \quad \omega \in \Phi_{el}^k(\beta_k), \tag{6.6}$$
$$\int_X \omega\wedge\beta_k\overline{\eta} = 0 \ \forall\eta \in K_{el}^k.$$

Ясно, что

$$N(\lambda^2, R_k(\beta_k,\beta_{k+1})^* R_k(\beta_k,\beta_{k+1})) = n(\lambda^{-2}, (6.6)). \tag{6.7}$$

Отношение форм (6.6) неудобно технически, так как функции из класса $\omega \in \Phi_{el}^k$ не выдерживают умножения на срезку (нарушается условие $d(\beta_k\omega) = 0$). Поэтому нам понадобится еще отношение

$$\frac{\int_X \theta\wedge\beta_k\overline{\theta}}{\int_X d\theta\wedge\beta_{k+1}(\overline{d\theta}) + \beta_{k-1}^{-1}(d(\beta_k\theta))\wedge d(\overline{\beta_k\theta})}, \quad \theta \in F_{el}^k(\beta_k), \int_X \theta\wedge\beta_k\overline{\eta} = 0 \ \forall\eta \in K_{el}^k, \tag{6.8}$$

(при $k=0$ второе слагаемое в знаменателе должно быть опущено). Сужение отношения (6.8) на подпространство Φ^k_{el} совпадает с отношением (6.6), однако пространство F^k_{el} инвариантно относительно умножения на липшицеву срезку.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 4.3 играет рекуррентное соотношение (6.10) для считающей функции $n(\lambda, (6.6))$. Для того, чтобы его сформулировать, перепишем (6.6), заменив k на $k-1$:

$$\frac{\int_X \omega \wedge \beta_{k-1}\overline{\omega}}{\int_X d\omega \wedge \beta_k(\overline{d\omega})}, \quad \omega \in \Phi^{k-1}_{el}(\beta_{k-1}), \int_X \omega \wedge \beta_{k-1}\overline{\eta} = 0 \ \forall \eta \in K^{k-1}_{el} \tag{6.9}$$

($k \geq 1$). Доказательство следующей теоремы опирается на ортогональное разложение $F^k_{el} = \Phi^k_{el} \oplus_{\beta_k} E^k_{el}$ (см. (3.3)).

Теорема 6.2. *Во введенных выше обозначениях при $k=0$ имеем $n(\lambda, (6.8)) = n(\lambda, (6.6))$, а при $k \geq 1$*

$$n(\lambda, (6.8)) = n(\lambda, (6.6)) + n(\lambda, (6.9)). \tag{6.10}$$

Доказательство. При $k=0$ утверждение очевидно. Пусть $k \geq 1$. Слагаемые в разложении $F^k_{el} = \Phi^k_{el} \oplus E^k_{el}$ ортогональны как относительно формы числителя (6.8), так и относительно знаменателя (6.8). Сужение отношения (6.8) на Φ^k_{el} совпадает с отношением (6.6), а сужение на E^k_{el} – с отношением

$$\frac{\int_X d\psi \wedge \beta_k(\overline{d\psi})}{\int_X \beta^{-1}_{k-1}(d(\beta_k d\psi)) \wedge d(\overline{\beta_k d\psi})}, \quad \psi \in \mathcal{W}^{k-1}, \quad j^*\psi = 0, \tag{6.11}$$

$$d(\beta_k d\psi) \in \mathcal{L}^{n-k+1}_2, \quad \int_X \psi \wedge \beta_{k-1}\overline{\eta} = 0 \ \forall \eta \in \mathcal{W}^{k-1} : d\eta = 0.$$

Следовательно,

$$n(\lambda, (6.8)) = n(\lambda, (6.6)) + n(\lambda, (6.11)).$$

Остается доказать, что $n(\lambda, (6.11)) = n(\lambda, (6.9))$. Для этого воспользуемся леммой 6.1, полагая

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}^{k-1}_2(\beta_{k-1}), \quad \mathcal{H}_2 = \mathcal{L}^k_2(\beta_k), \quad A = d_{k-1}.$$

Согласно (3.5) имеем $\mathcal{H}_1 \ominus \ker A = J^{k-1} \ominus K^{k-1}_{el}$, то есть отношение (6.9) совпадает с отношением (6.2). Далее, из леммы 2.5 вытекает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} A^*A &= \{\psi \in \operatorname{Dom} d_{k-1} : d\psi \in \operatorname{Dom} d^*_{k-1}\} \\ &= \{\psi \in \mathcal{W}^{k-1} : j^*\psi = 0, \ d(\beta_k d\psi) \in \mathcal{L}^{n-k+1}_2\}, \end{aligned}$$

и $A^*A\psi = (-1)^k \beta^{-1}_{k-1} d(\beta_k d\psi)$, поэтому отношение (6.11) совпадает с (6.3). ∎

6.3. Схема доказательства основного результата. Из теорем 6.2 и 5.1 мы легко получим асимптотику отношения (6.8) для евклидовой области:

Лемма 6.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей. Тогда*

$$n(\lambda, (6.8)) \sim \lambda^{-n/2} \int_\Omega \nu_k(\beta_k, \beta_{k+1}) + \nu_{k-1}(\beta_{k-1}, \beta_k), \quad \lambda \to +0, \tag{6.12}$$

где подразумевается $\nu_{-1} = 0$.

Доказательство. Из теоремы 5.1 и формул (3.6) и (6.7) вытекает, что

$$n(\lambda, (6.6)) \sim \lambda^{-n/2} \int_\Omega \nu_k(\beta_k, \beta_{k+1}), \quad \lambda \to +0.$$

Поскольку отношение (6.9) совпадает с отношением (6.6) после замены k на $k-1$, имеем

$$n(\lambda, (6.9)) \sim \lambda^{-n/2} \int_\Omega \nu_{k-1}(\beta_{k-1}, \beta_k), \quad \lambda \to +0.$$

Остается сослаться на теорему 6.2. ∎

В оставшихся двух параграфах мы обобщим асимптотическую формулу (6.12) на случай липшицева многообразия. В доказательстве мы воспользуемся тем, что к отношению (6.8) применимы приемы, стандартные для работы с многообразиями: замена координат и умножение на срезку.

Наконец, в п. 8.3 мы получим асимптотику для отношения (6.6) в случае липшицева многообразия с помощью индукции по k. Здесь мы вновь используем рекуррентное соотношение (6.10). Отметим, что идея перехода от отношения типа (6.6) к отношению типа (6.8) заимствована из [7].

7 Компактность вложения $F^k_{el} \subset \mathcal{L}^k_2$

7.1. Леммы о покрытии. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 7.1. *Пусть X – компактное липшицево многообразие. Существует конечный набор открытых множеств $\{U_j\}_{j=1}^m$, такой что $X = \cup_{j=1}^m U_j$, каждое множество U_j вместе с замыканием лежит в одной карте, $\overline{U}_j \subset V_{\alpha_j}$, и образ $\alpha_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n_+$ – это шар или полушар.*

Хорошо известен также следующий факт.

Лемма 7.2. *a) Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $Y \subset M$, такое что $\partial Y \in C^\infty$ и $\operatorname{mes}(M \setminus Y) < \varepsilon$.*

b) Пусть $N \subset V \subset \mathbb{R}^n_+$, N – замкнутое, V – открытое множества. Для любого $\varepsilon > 0$ существует Z – открытое множество, такое что $N \subset Z \subset V$, $\partial Z \in C^\infty$ и $\operatorname{mes}(Z \setminus N) < \varepsilon$.

Лемма 7.3. *Пусть X – компактное ориентированное липшицево многообразие. Существует натуральное число m, зависящее только от X, такое что для любых $\rho \in \mathcal{L}^n_\infty(X)$, $\sigma > 0$ найдутся Y, $\{Z_j\}_{j=1}^m$ – открытые подмножества X, обладающие свойствами*

- $X = Y \cup \left(\cup_{j=1}^m Z_j\right)$;
- $Y \cap \partial X = \emptyset$;
- *Y липшиц-гомеоморфно открытому ограниченному (возможно, несвязному) множеству в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей;*

- *каждое Z_j липшиц-гомеоморфно открытому ограниченному (возможно, несвязному) множеству в $\mathbb{R}^n_+$ с гладкой границей;*

- $\left|\int_{Z_j} \rho\right| < \sigma$ *при всех j.*

Доказательство. Пусть $\{U_j\}_{j=1}^m$ – покрытие X из леммы 7.1, $\overline{U}_j \subset V_{\alpha_j}$. В каждой карте (V_{α_j}, α_j) n-форма ρ представляется ограниченной функцией $\rho_j \in L_\infty(\alpha_j(V_{\alpha_j}))$. Обозначим $\hat{\rho} = \max_j \|\rho_j\|_{L_\infty}$. Выберем открытое множество $Y_1 \subset U_1 \setminus \partial X$ так, чтобы $\partial(\alpha_1(Y_1)) \in C^\infty$ и $\operatorname{mes} \alpha_1(U_1 \setminus Y_1) < \sigma/(2\hat{\rho})$. Выберем далее открытое множество Z_1, $\overline{U}_1 \setminus Y_1 \subset Z_1 \subset V_{\alpha_1}$, так, чтобы $\partial(\alpha_1(Z_1)) \in C^\infty$ и $\operatorname{mes} \alpha_1(Z_1) < \sigma/\hat{\rho}$. Множества Y_1, Z_1 с такими свойствами существуют в силу леммы 7.2. Повторим аналогичную процедуру m раз: на $(l+1)$-м шаге строим открытые множества Y_{l+1}, Z_{l+1} так, что

$$Y_{l+1} \subset U_{l+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{l} \overline{Y}_j \setminus \partial X, \quad \partial(\alpha_{l+1}(Y_{l+1})) \in C^\infty, \quad \operatorname{mes} \alpha_{l+1}\left(U_{l+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{l+1} Y_j\right) < \frac{\sigma}{2\hat{\rho}},$$

$$\overline{U}_{l+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{l+1} Y_j \subset Z_{l+1} \subset V_{\alpha_{l+1}}, \quad \partial(\alpha_{l+1}(Z_{l+1})) \in C^\infty, \quad \operatorname{mes} \alpha_{l+1}(Z_{l+1}) < \sigma/\hat{\rho}.$$

Полученный набор $Y = \cup_{j=1}^m Y_j$, $\{Z_j\}_{j=1}^m$ удовлетворяет всем требованиям. ∎

7.2. Компактность вложения $F_{el}^k \subset \mathcal{L}_2^k$. Через $\operatorname{Lip}(X)$ будем обозначать пространство скалярных липшицевых функций на X. Ясно, что если $\zeta \in \operatorname{Lip}(X)$, то $d\zeta \in \mathcal{L}_\infty^1(X)$.

Лемма 7.4. *Пусть Ξ – открытое подмножество X, причем $\overline{\Xi}$ – липшицево подмногообразие. Пусть $\omega \in F_{el}^k(X)$, $\zeta \in \operatorname{Lip}(X)$, $\operatorname{supp} \zeta \subset \Xi$. Тогда $\zeta\omega \in F_{el}^k(\overline{\Xi})$.*

Доказательство. Ясно, что $\zeta\omega \in \mathcal{L}_2^k(\overline{\Xi})$, $d(\zeta\omega) \in \mathcal{L}_2^{k+1}(\overline{\Xi})$ и

$$d(\beta_k(\zeta\omega)) = \zeta d(\beta_k\omega) + d\zeta \wedge \beta_k\omega \in \mathcal{L}_2^{n-k+1}(\overline{\Xi}).$$

Остается проверить граничное условие. Пусть $\theta \in \mathcal{W}^{n-k-1}(\overline{\Xi})$. В силу условий $j^*\omega = 0$, $\operatorname{supp} \zeta \subset \Xi$ имеем $\int_\Xi \omega \wedge d(\zeta\theta) = (-1)^{k+1} \int_\Xi d\omega \wedge \zeta\theta$. Следовательно,

$$\int_\Xi \zeta\omega \wedge d\theta = \int_\Xi \omega \wedge d(\zeta\theta) - \int_\Xi \omega \wedge d\zeta \wedge \theta$$
$$= (-1)^{k+1} \int_\Xi d\omega \wedge \zeta\theta - \int_\Xi \omega \wedge d\zeta \wedge \theta = (-1)^{k+1} \int_\Xi d(\zeta\omega) \wedge \theta.$$

∎

Лемма 7.5. *Вложение $F_{el}^k(\beta_k) \subset \mathcal{L}_2^k(\beta_k)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{U_j\}_{j=1}^m$ – покрытие из леммы 7.1, $\{\zeta_j\}_{j=1}^m$ – подчиненное ему разбиение единицы. С учетом предыдущей леммы оператор вложения $I_{F_{el}^k \to \mathcal{L}_2^k}$ может быть записан в виде

$$I_{F_{el}^k(X) \to \mathcal{L}_2^k(X)} = \sum_{j=1}^m I_{F_{el}^k(\overline{U}_j) \to \mathcal{L}_2^k(X)}(\zeta_j \cdot).$$

Нетрудно убедиться, что пространства $K_{el}^k(\overline{U}_j)$ тривиальны. Вместе с леммой 6.3 это дает компактность операторов вложения $I_{F_{el}^k(\overline{U}_j) \to \mathcal{L}_2^k(\overline{U}_j)}$. Следовательно, и оператор $I_{F_{el}^k(X) \to \mathcal{L}_2^k(X)}$ компактен. ∎

Следствие 7.6. *Пространство* $K_{el}^k(\beta_k)$ *конечномерно,* $\dim K_{el}^k(\beta_k) < \infty$.

Доказательство. По определению (3.4) пространства $K_{el}^k(\beta_k)$, норма $\|\cdot\|_{F_{el}^k(\beta_k)}$ (см. (3.2)) совпадает с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2^k(\beta_k)}$ на $K_{el}^k(\beta_k)$. Доказываемое утверждение справедливо в силу компактности вложения $F_{el}^k(\beta_k) \subset \mathcal{L}_2^k(\beta_k)$. ∎

Следствие 7.7. *Спектр оператора Максвелла дискретен.*

Доказательство. Из компактности вложения $F_{el}^k(\beta_k) \subset \mathcal{L}_2^k(\beta_k)$ немедленно следует компактность вложения

$$\operatorname{Dom} R_k(\beta_k, \beta_{k+1}) = \Phi_{el}^k(\beta_k) \subset \mathcal{L}_2^k(\beta_k)$$

(поскольку $\Phi_{el}^k(\beta_k)$ является подпространством $F_{el}^k(\beta_k)$). Это означает, что спектр оператора $R_k^* R_k$ дискретен. Остается сослаться на замечание 3.4. ∎

7.3. Преобразование вариационной задачи (6.8)**.** В этом пункте мы преобразуем вариационное отношение (6.8) к более удобной форме. Если добавить слагаемое $\int_X \theta \wedge \beta_k \overline{\theta}$ в знаменатель (6.8), мы получим отношение

$$\frac{\int_X \theta \wedge \beta_k \overline{\theta}}{\int_X d\theta \wedge \beta_{k+1}(\overline{d\theta}) + \beta_{k-1}^{-1}(d(\beta_k \theta)) \wedge d(\overline{\beta_k \theta}) + \theta \wedge \beta_k \overline{\theta}}, \quad \theta \in F_{el}^k(\beta_k), \tag{7.1}$$
$$\int_X \theta \wedge \beta_k \overline{\eta} = 0 \quad \forall \eta \in K_{el}^k.$$

В терминах последовательных максимумов $\{b_j\}$ это преобразование соответствует замене $b_j \mapsto b_j/(1+b_j)$. Поэтому

$$n(\lambda, (6.8)) \sim n(\lambda, (7.1)), \quad \lambda \to +0.$$

Опустив теперь условия ортогональности в (7.1), мы придем к вариационному отношению

$$\frac{\int_X \theta \wedge \beta_k \overline{\theta}}{\int_X d\theta \wedge \beta_{k+1}(\overline{d\theta}) + \beta_{k-1}^{-1}(d(\beta_k \theta)) \wedge d(\overline{\beta_k \theta}) + \theta \wedge \beta_k \overline{\theta}}, \quad \theta \in F_{el}^k(\beta_k). \tag{7.2}$$

В силу неравенств

$$n(\lambda, (7.1)) \leq n(\lambda, (7.2)) \leq n(\lambda, (7.1)) + \dim K^k_{el}(\beta_k)$$

и следствия 7.6, асимптотики функций $n(\lambda, (7.1))$ и $n(\lambda, (7.2))$ совпадают в главных членах. Так что пределы $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{n/2} n(\lambda, (7.2))$ и $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{n/2} n(\lambda, (6.8))$ существуют одновременно, и если существуют, то совпадают:

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{n/2} n(\lambda, (6.8)) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{n/2} n(\lambda, (7.2)). \tag{7.3}$$

8 Доказательство теоремы 4.3

8.1. Пространство F^k_0. Всюду далее в обозначении функционалов δ_q и Δ_q, введенных в п. 6.1, число q предполагается равным $n/2$ и не указывается явно. В этих же обозначениях мы будем уточнять гильбертово пространство, выступающее в (6.1) в качестве $\mathcal{H}$. Кроме того, если функционал вычисляется для отношения (7.2), мы опускаем ссылку на него, указывая только соответствующее подпространство.

Введем еще одно (честное слово, последнее) пространство k-форм $F^k_0(X)$ – замыкание множества $\{\omega \in F^k(\beta_k) : \operatorname{supp}\omega \cap \partial X = \emptyset\}$ по норме $\| \,.\, \|_{F^k}$. Легко видеть, что $F^k_0(X) \subset F^k_{el}(X)$.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству оценки сверху асимптотического функционала для отношения (12) в статье [7].

Лемма 8.1. *Пусть $X = \cup_{j=0}^m \Xi_j$, где Ξ_j – открытые множества, $\overline{\Xi}_j$ – липшицевы подмногообразия, причем $\Xi_0 \cap \partial X = \emptyset$. Тогда*

$$\delta(F^k_{el}(X))^{2/(n+2)} \leq \delta(F^k_0(\overline{\Xi}_0))^{2/(n+2)} + \sum_{j=1}^m \Delta(F^k_{el}(\overline{\Xi}_j))^{2/(n+2)}, \tag{8.1}$$

$$\Delta(F^k_{el}(X))^{2/(n+2)} \leq \Delta(F^k_0(\overline{\Xi}_0))^{2/(n+2)} + \sum_{j=1}^m \Delta(F^k_{el}(\overline{\Xi}_j))^{2/(n+2)}. \tag{8.2}$$

Доказательство. Мы приведем доказательство первого неравенства, поскольку второе доказывается вполне аналогично.

Нам понадобится квадратичное разбиение единицы, отвечающее покрытию $\{\Xi_j\}$:

$$\eta_j \in \operatorname{Lip}(X), \quad \operatorname{supp}\eta_j \subset \Xi_j, \quad \sum_{j=0}^m \eta_j^2 = 1. \tag{8.3}$$

Для построения набора $\{\eta_j\}$ достаточно взять стандартное липшицево разбиение единицы $\{\eta'_j\}$ и положить

$$\eta_j = \frac{\eta'_j}{\left(\sum_{j=0}^m (\eta'_j)^2\right)^{1/2}}.$$

В этих формулах подкоренное выражение не меньше $1/(m+1)^2$, поэтому $\eta_j \in \mathrm{Lip}(X)$. Обозначим знаменатель и числитель отношения (7.2) через $a[\theta]$ и $b[\theta]$ соответственно. Так как $b[\theta] = \sum_{j=0}^m b[\eta_j\theta]$, то по (6.4) имеем

$$\delta(F^k_{el}(X))^{2/(n+2)} \le \delta\left(\frac{b[\eta_0\theta]}{a[\theta]}, F^k_{el}(X)\right)^{2/(n+2)} + \sum_{j=1}^m \Delta\left(\frac{b[\eta_j\theta]}{a[\theta]}, F^k_{el}(X)\right)^{2/(n+2)}. \qquad (8.4)$$

Представим знаменатель (7.2) в виде $a[\theta] = \sum_{j=0}^m a[\eta_j\theta] + a_0[\theta]$. Используя тождество $\sum_{j=0}^m \eta_j d\eta_j = 0$, нетрудно показать, что форма $a_0[\theta]$ ограничена в $\mathcal{L}^k_2(X)$. По лемме 7.5 форма $a_0[\theta]$ компактна относительно $a[\theta]$, поэтому мы можем применить (6.5):

$$\delta\left(\frac{b[\eta_0\theta]}{a[\theta]}, F^k_{el}(X)\right) = \delta\left(\frac{b[\eta_0\theta]}{a[\theta]-a_0[\theta]}, F^k_{el}(X)\right) \le \delta\left(\frac{b[\eta_0\theta]}{a[\eta_0\theta]}, F^k_{el}(X)\right). \qquad (8.5)$$

Из условия $\Xi_0 \cap \partial X = \emptyset$ следует, что $\eta_0\theta \in F^k_0(\overline{\Xi}_0)$, поэтому

$$\delta\left(\frac{b[\eta_0\theta]}{a[\eta_0\theta]}, F^k_{el}(X)\right) \le \delta(F^k_0(\overline{\Xi}_0)),$$

что вместе с (8.5) дает

$$\delta\left(\frac{b[\eta_0\theta]}{a[\theta]}, F^k_{el}(X)\right) \le \delta(F^k_0(\overline{\Xi}_0)).$$

С другой стороны, по лемме 7.4 $\eta_j\theta \in F^k_{el}(\overline{\Xi}_j)$ для $j \ge 1$ и аналогичные рассуждения приводят к неравенству

$$\Delta\left(\frac{b[\eta_j\theta]}{a[\theta]}, F^k_{el}(X)\right) \le \Delta(F^k_{el}(\overline{\Xi}_j)).$$

Из (8.4) и двух последних неравенств следует (8.1). ∎

Покажем теперь, что в случае области в евклидовом пространстве асимптотика спектра отношения (7.2) не меняется, если его рассматривать не на $F^k_{el}(\overline{\Omega})$, а на $F^k_0(\overline{\Omega})$.

Лемма 8.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой границей. Тогда*

$$\begin{aligned}\exists \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{n/2} n(\lambda, (7.2), F^k_0(\overline{\Omega})) &= \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{n/2} n(\lambda, (7.2), F^k_{el}(\overline{\Omega})) \qquad (8.6)\\ &= \int_\Omega \nu_k(\beta_k, \beta_{k+1}) + \nu_{k-1}(\beta_{k-1}, \beta_k).\end{aligned}$$

Доказательство. Второе равенство следует из леммы 6.3 и формулы (7.3). Ясно также, что $n(\lambda, (7.2), F^k_0(\overline{\Omega})) \le n(\lambda, (7.2), F^k_{el}(\overline{\Omega}))$. Остается доказать, что $\delta(F^k_0(\overline{\Omega})) \ge \delta(F^k_{el}(\overline{\Omega}))$.

Пусть $\sigma > 0$ и $\Xi_0, \Xi_1 \subset \mathbb{R}^n$ – открытые множества с липшицевыми границами, такие что $\Omega = \Xi_0 \cup \Xi_1$, $\overline{\Xi}_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$ и $\mathrm{mes}\, \Xi_1 < \sigma$. Применяя формулу (8.1) с $m = 1$ в первой оценке и лемму 6.3 во второй, получим

$$\begin{aligned}\delta(F^k_{el}(\overline{\Omega}))^{2/(n+2)} &\le \delta(F^k_0(\overline{\Xi}_0))^{2/(n+2)} + \Delta(F^k_{el}(\overline{\Xi}_1))^{2/(n+2)}\\ &\le \delta(F^k_0(\overline{\Omega}))^{2/(n+2)} + \left(\int_{\Xi_1} \nu_k + \nu_{k-1}\right)^{2/(n+2)}.\end{aligned}$$

Последнее слагаемое в правой части может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора σ, следовательно, $\delta(F^k_{el}(\overline{\Omega})) \le \delta(F^k_0(\overline{\Omega}))$. ∎

Замечание 8.3. Формулу (8.6) можно перенести на многообразие, липшиц-гомеоморфное евклидовой области с липшицевой границей. В самом деле, как вариационное отношение (7.2), так и асимптотический коэффициент в правой части (8.6) инвариантны относительно замены переменных, поскольку выражены через интегралы n-форм.

8.2. Спектр (6.8) **на многообразии.**

Теорема 8.4. *Пусть X – компактное ориентированное липшицево многообразие с краем. Тогда*

$$n(\lambda, (6.8)) \sim \lambda^{-n/2} \int_X \nu_k(\beta_k, \beta_{k+1}) + \nu_{k-1}(\beta_{k-1}, \beta_k), \quad \lambda \to +0,$$

где подразумевается $\nu_{-1} = 0$.

Доказательство. Как и выше, в силу (7.3) достаточно рассмотреть отношение (7.2). Пусть $\sigma > 0, Y, Z_1, \dots, Z_m$ – покрытие X, гарантируемое леммой 7.3 при $\rho = \nu_k + \nu_{k-1}$.

Сперва получим оценку снизу для $\delta(F^k_{el}(X))$. В силу минимаксимального принципа

$$n\left(\lambda, (7.2), F^k_{el}(X)\right) \ge n\left(\lambda, (7.2), F^k_0(Y)\right),$$

поэтому $\delta(F^k_{el}(X)) \ge \delta(F^k_0(Y))$. Далее, по лемме 8.2 и замечанию 8.3 имеем $\delta(F^k_0(Y)) = \int_Y \nu_k + \nu_{k-1}$. В силу леммы 7.3 справедливо

$$\int_Y \nu_k + \nu_{k-1} \ge \int_X (\nu_k + \nu_{k-1}) - m\sigma.$$

Ввиду произвольной малости σ отсюда следует, что

$$\delta(F^k_{el}(X)) \ge \int_X \nu_k + \nu_{k-1}.$$

Теперь мы получим оценку сверху для $\Delta(F^k_{el}(X))$. Для этого воспользуемся неравенством (8.2) с $\Xi_j = Z_j$ при $j = 1, \dots, m$ и $\Xi_0 = Y$:

$$\Delta(F^k_{el}(X))^{2/(n+2)} \le \Delta(F^k_0(\overline{Y}))^{2/(n+2)} + \sum_{j=1}^m \Delta(F^k_{el}(\overline{Z}_j))^{2/(n+2)}.$$

Далее, вновь ссылаясь на лемму 8.2, замечание 8.3 и лемму 7.3, получаем

$$\Delta(F^k_0(\overline{Y})) = \int_Y \nu_k + \nu_{k-1} \le \int_X \nu_k + \nu_{k-1}, \quad \Delta(F^k_{el}(\overline{Z}_j)) = \int_{Z_j} \nu_k + \nu_{k-1} \le \sigma,$$

откуда

$$\Delta(F^k_{el}(X))^{2/(n+2)} \le \left(\int_X \nu_k + \nu_{k-1}\right)^{2/(n+2)} + m\sigma^{2/(n+2)}.$$

Остается снова воспользоваться произвольностью σ. ∎

8.3. Доказательство теоремы 4.3. Из формул (3.6) и (6.7) следует, что достаточно показать, что

$$n(\lambda,(6.6)) \sim \lambda^{-n/2} \int_X \nu_k(\beta_k,\beta_{k+1}), \quad \lambda \to +0. \tag{8.7}$$

Спектральная асимптотика для вариационного отношения (6.8) нами уже доказана (см. теорему 8.4). Напомним, что отношения (6.6) и (6.8) различаются лишь пространствами, на которых они рассматриваются. Мы установим (8.7) индукцией по k, используя рекуррентное соотношение (6.10) и теорему 8.4. Для этого необходимо предположить, что $\beta_j \in M^j_+(X)$ определены для всех j (мы всегда можем построить такой набор $\{\beta_j\}$, поскольку многообразие X ориентировано).

При $k=0$ (8.7) сразу вытекает из теоремы 8.4, так как $\Phi^0_{el}(X) = F^0_{el}(X)$.

Индукционный переход. Пусть (8.7) верно при $k-1$, то есть

$$n(\lambda,(6.9)) \sim \lambda^{-n/2} \int_X \nu_{k-1}(\beta_{k-1},\beta_k), \quad \lambda \to +0.$$

Тогда с учетом теорем 6.2 и 8.4 получаем

$$n(\lambda,(6.6)) = n(\lambda,(6.8)) - n(\lambda,(6.9)) \sim \lambda^{-n/2} \int_X \nu_k(\beta_k,\beta_{k+1}), \quad \lambda \to +0.$$

Формула (8.7) доказана. ■

Список литературы

[1] А. Б. Алексеев, *Спектральная асимптотика эллиптических краевых задач с разрешимыми связями*, кандидатская диссертация, ЛГУ (1977).

[2] А. Б. Алексеев, М. Ш. Бирман, *Асимптотика спектра эллиптических граничных задач с разрешимыми связями*, Докл. АН СССР, т. 230 (1976), 3, с. 505–507.

[3] А. Б. Алексеев, М. Ш. Бирман, Н. Д. Филонов, *Асимптотика спектра одной вариационной задачи с разрешимой связью*, Алгебра и Анализ, т. 18 (2006), вып. 5, с. 1–22.

[4] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории*, Труды Десятой математической школы, Ин-т Математики АН УкрССР, Киев (1974), с. 5–189.

[5] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Оператор Максвелла в областях с негладкой границей*, Сиб. мат. журнал, т. 28 (1987), 1, с. 23–36.

[6] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях*, Успехи мат. наук, т. 42 (1987), вып. 6, с. 61–76.

[7] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Вейлевская асимптотика спектра оператора Максвелла для областей с липшицевой границей*, Вестник ЛГУ, т. 3 (1987), сер.1, с. 23–28.

[8] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Главные особенности электрической составляющей электромагнитного поля в областях с экранами*, Алгебра и Анализ, т. 5 (1993), вып. 1, 143–159.

[9] М. Ш. Бирман, Н. Д. Филонов, *Weyl's asymptotics of the spectrum of the Maxwell operator with non-smooth coefficients in Lipschitz domains*, Amer. Math. Soc. Transl., Series 2, т. 220 (2007), с. 27–44. Nonlinear Boundary Value Problems. Spectral Theory.

[10] М. Демченко, Н. Филонов, *Вейлевская асимптотика спектра оператора Максвелла в липшицевых областях произвольной размерности*, готовится к печати

[11] В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов, *Дифференциальные формы на липшицевом многообразии*, Сибирский математический журнал, т. 23 (1982), с. 16–30.

[12] N. Weck, *Maxwell's Boundary Value Problem on Riemannian Manifolds with Nonsmooth Boundaries*, J. Math. Anal. and Appl., 46 (1974), p. 410–437.

[13] H. Weyl, *Uber das Spectrum der Hohlraumstrahlung*, J. Reine Angew. Math., 141 (1912), s. 163–181.

[14] H. Weyl, *Die natürlichen Randwertaufgaben im Außenraum für Strahlungsfelder beliebiger Dimension und beliebiger Ranges*, Math. Z., 56 (1952), s. 105–119.