

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

**Пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями.**

**Н.М. Боголюбов**

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН  
191023, С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27

Рассматривается точно решаемая пятивершинная модель на квадратной решетке с фиксированными граничными условиями. Применение алгебраического Бете анзаца позволяет представить статистическую сумму и граничные корреляционные функции неоднородной модели в виде определителей. Установлена связь однородной модели с плоскими разбиениями, что позволило вычислить ее статистическую сумму.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Изучение точно решаемых вершинных моделей классической статистической физики актуально уже в течение многих лет [1, 2]. Одной из основных моделей данного класса является шестивершинная модель, которая интенсивно изучалась как для периодических, так и для фиксированных граничных условий [1–7].

В последнее время выяснилось, что методы, используемые при исследовании интегрируемых моделей, можно эффективно применять к решению задач пересчетной комбинаторики [8, 9]. Так, например, шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки имеет отношение к пересчету упаковок азтекских "алмазов" и к пересчету альтернированных знаковых матриц [10–12], а четырехвершинная и фазовая модели к пересчету плоских упаковок (трехмерных диаграмм Юнга) [13–18]. Существенным в этом направлении является возможность детерминантного представления статистической суммы моделей и их граничных корреляционных функций.

Пятивершинная модель является частным случаем шестивершинной модели, в которой исключена одна вершина. В случае периодических граничных условий пятивершинная модель применялась, в частности, для исследования взаимодействующих доменных стенок [19, 20], задачи направленного протекания [21].

Пятивершинная модель на квадратной решетке определяется пятью различными конфигурациями стрелок, направленными как в сторону каждого узла решетки, так и от него. Статистический вес  $w_k$  ( $k = 2, 3, 4, 5, 6$ ) приписывается каждой допустимой конфигурации (Рис. 1). Изображая стрелки, направленные вверх или направо линиями, мы получим альтернативное описание вершин с помощью линий, протекающих сквозь узлы решетки. Так как грани решетки могут находиться лишь в двух состояниях, с линией или без нее, то существует взаимно однозначное соответствие между допустимыми конфигурациями стрелок на решетке и графами линий - наборами решеточных путей.

Для общего случая неоднородной модели значение вершинных весов  $w_k$  зависит от

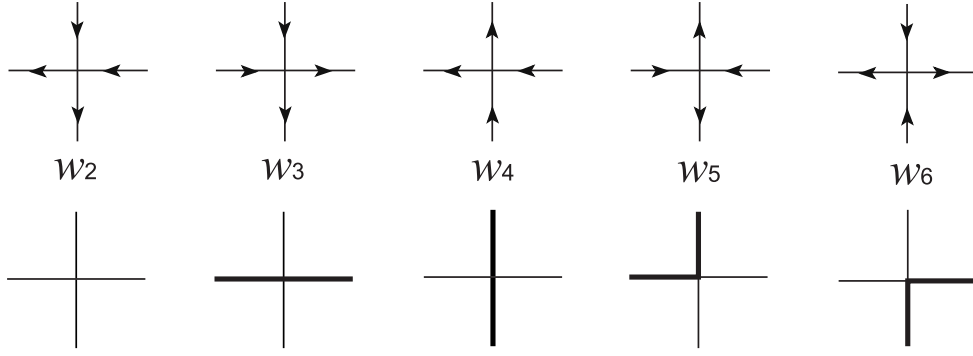


Рис. 1: Пять допустимых вершин в виде конфигураций стрелок и линий.

координат узла решетки  $(i, j)$ . Статистическая сумма модели равна

$$Z = \sum_{(config)} \prod_{(vertices)} w_2^{l_2}(i, j) w_3^{l_3}(i, j) w_4^{l_4}(i, j) w_5^{l_5}(i, j) w_6^{l_6}(i, j), \quad (1)$$

где произведение берется по всем вершинам решетки, а суммирование по всем допустимым конфигурациям стрелок. Каждая допустимая конфигурация определяет набор чисел  $l^k = 0, 1$ , причем в каждом узле решетки  $\sum_{k=2}^6 l^k = 1$ . Для однородной модели вершинные веса  $w_k$  не зависят от положения узла решетки.

В данной статье мы рассмотрим модель на квадратной решетке размерности  $2N \times (M+1)$  со следующими граничными условиями: все стрелки на правой и левой границе направлены налево, верхние и нижние стрелки первых  $N$  колонок (считая слева) направлены внутрь, а верхние и нижние стрелки последних  $N$  колонок направлены наружу. Данные условия мы будем называть фиксированными граничными условиями. Мы всегда будем считать, что  $(M+1 \geq 2N)$ .

Типичная конфигурация стрелок и соответствующий ей набор решеточных путей на решетке с фиксированными граничными условиями изображены на (Рис. 2).

Введенная нами неоднородная модель описывает распространение доменных стенок с закрепленными концами в анизотропной среде. Данные стенки удовлетворяют условию отталкивания, так как, согласно определению вершин (Рис. 1), их границы не соприкасаются.

Мы применим Квантовый Метод Обратной Задачи (КМОЗ) [22–24] к решению неоднородной пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями. Данный подход позволит представить статистическую сумму модели и ее граничные корреляционные функции в виде определителей и получить явные ответы для

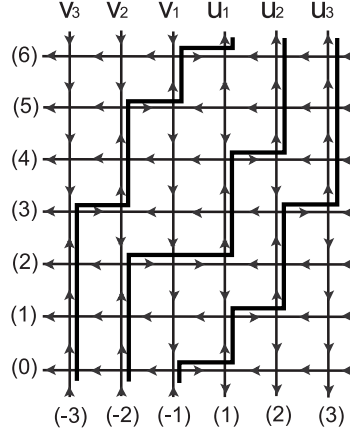


Рис. 2: Типичная конфигурация стрелок и набор решеточных путей.

предельных значений вершинных весов.

Однородная модель не укладывается в схему КМОЗ. Однако, будет показано, что статистическая сумма модели и ее корреляционные функции тесно связаны с теорией плоских разбиений, или трехмерных диаграмм Юнга, заключенных в ящик конечного размера.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы излагаем подход КМОЗ к решению модели с фиксированными граничными условиями. В разделе 3 граничные корреляционные функции модели представлены в виде определителей. В разделе 4 установлена связь однородной модели со строгими по столбцам плоскими разбиениями и вычислена статистическая сумма модели и граничные корреляционные функции. В приложении выводятся  $L$ -оператор и  $R$ -матрица модели из  $L$ -оператора и  $R$ -матрицы шестивершинной модели.

## II. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ

Для того чтобы применить КМОЗ для исследования неоднородной модели, мы воспользуемся спиновым описанием модели. Каждому вертикальному и каждому горизонтальному ребру решетки ставится в соответствие локальное пространство  $\mathbb{C}^2$ . Состояния со спином вверх и спином вниз образуют естественный базис в этом пространстве. Состояние со спином вверх на вертикальном ребре соответствует стрелке, направленной вверх, а состояние со спином вниз стрелке, направленной вниз. Состояние со спином вверх на  $i$ -том горизонтальном ребре  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i \equiv | \leftarrow \rangle_i$

соответствует стрелке, направленной налево, а состояние со спином вниз  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_i \equiv |\rightarrow\rangle_i$  стрелке, направленной направо. Вспомогательным пространством мы будем называть пространство, ассоциированное со всеми вертикальными ребрами решетки  $\mathcal{V} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ , а квантовым - пространство, ассоциированное со всеми горизонтальными ребрами решетки  $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ . В каждом узле решетки в пространстве  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$  действует оператор. Этот оператор, действующий нетривиально только в локальном вспомогательном  $\mathbb{C}^2$  и локальном квантовом  $\mathbb{C}^2$  пространствах, называется  $L$ -оператором.

$L$ -оператор пятивершинной модели запишем в виде [25]:

$$\begin{aligned} L(n|u) &= \begin{pmatrix} ue_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & uI - u^{-1}e_n \end{pmatrix} \\ &= ee_n + (I - e)(uI - u^{-1}e_n) + \sigma^- \sigma_n^+ + \sigma^+ \sigma_n^-, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр  $u \in \mathcal{C}$ ,  $\sigma^{z,\pm}$  это матрицы Паули, а проектор на состояние со спином вверх  $e = \frac{1}{2}(\sigma^z + 1)$ . Матрица с подстрочным индексом  $n$  действует нетривиально только в  $n$ -том квантовом пространстве:  $s_n = I \otimes \dots \otimes I \otimes s \otimes I \otimes \dots \otimes I$ .

Операторнозначная матрица (2) удовлетворяет сплетающему соотношению

$$R(u, v) (L(n|u) \otimes L(n|v)) = (L(n|v) \otimes L(n|u)) R(u, v), \quad (3)$$

в котором  $R(u, v)$  это  $4 \times 4$  матрица равная

$$R(u, v) = \begin{pmatrix} f(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v, u) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$f(v, u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}. \quad (5)$$

Вертикальная матрица монодромии определяется как произведение  $L$ -операторов

$$T(u) = L(M|u)L(M-1|u)\dots L(0|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Коммутационные соотношения матричных элементов матрицы монодромии задаются той же  $R$ -матрицей (4)

$$R(u, v) (T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u)) R(u, v), \quad (7)$$

наиболее важными из которых являются:

$$\begin{aligned} C(u)B(v) &= g(u, v) \{A(u)D(v) - A(v)D(u)\}, \\ A(u)B(v) &= f(u, v)B(v)A(u) + g(v, u)B(u)A(v), \\ D(u)B(v) &= f(v, u)B(v)D(u) + g(u, v)B(u)D(v), \\ [B(u), B(v)] &= [C(u), C(v)] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$L$ -оператор (2) удовлетворяет соотношению

$$e^{\zeta \sigma_n^z} L(n|u) e^{-\zeta \sigma_n^z} = e^{-\zeta \sigma^z} L(n|u) e^{\zeta \sigma^z}, \quad (9)$$

где  $\zeta$  это произвольный параметр. Из этого равенства и из определения матрицы монодромии (44) следует, что

$$e^{\zeta S^z} T(u) e^{-\zeta S^z} = e^{-\frac{\zeta}{2} \sigma^z} T(u) e^{\frac{\zeta}{2} \sigma^z}, \quad (10)$$

где  $S^z = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^M \sigma_i^z$  является оператором  $z$ -компоненты полного спина. Равенства

$$\begin{aligned} S^z B(u) &= B(u) (S^z - 1), \\ S^z C(u) &= C(u) (S^z + 1), \end{aligned} \quad (11)$$

являются следствием соотношения (10) и означают, что оператор  $B(u)$  понижает полный спин системы, а оператор  $C(u)$  повышает его.

Производящим вектором квантового пространства  $\mathcal{H}$  является состояние со всеми спинами направленными вверх

$$|\Leftarrow\rangle = \otimes_{i=0}^M |\leftarrow\rangle_i = \otimes_{i=0}^M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i. \quad (12)$$

Данный вектор уничтожается оператором  $C(u)$

$$C(u) |\Leftarrow\rangle = 0 \quad (13)$$

и является собственным вектором операторов  $A(u)$  и  $D(u)$

$$A(u) |\Leftarrow\rangle = \alpha_{M+1}(u) |\Leftarrow\rangle; \quad D(u) |\Leftarrow\rangle = \delta_{M+1}(u) |\Leftarrow\rangle, \quad (14)$$

с собственными значениями

$$\alpha_{M+1}(u) = u^{M+1}, \quad \delta_{M+1}(u) = (u - u^{-1})^{M+1}. \quad (15)$$

Полный спин производящего вектора равен  $\frac{1}{2}(M+1)$ :

$$S^z | \Leftarrow \rangle = \frac{1}{2}(M+1) | \Leftarrow \rangle. \quad (16)$$

Из определений (2) и (44) следует представление

$$\begin{aligned} u^M B(u) &= u^{2M} \sum_{k=0}^M e_M \dots e_{k+1} \sigma_k^- + \dots + (-1)^M \sigma_M^- e_{M-1} \dots e_0, \\ u^M C(u) &= u^{2M} \sum_{k=0}^M \sigma_k^+ e_{k-1} \dots e_0 + \dots + (-1)^M e_M \dots e_2 \sigma_0^+. \end{aligned} \quad (17)$$

Одним из основных объектов дальнейшего рассмотрения будет состояние, полученное последовательным действием операторов  $B(u)$  на состояние  $| \Leftarrow \rangle$ :

$$| \Psi_n(u_1, u_2, \dots, u_N) \rangle = \prod_{i=1}^N B(u_i) | \Leftarrow \rangle. \quad (18)$$

Из равенства (11) следует, что полный спин этого вектора равен

$$S^z \prod_{i=1}^N B(u_i) | \Leftarrow \rangle = \frac{1}{2} (M+1 - 2N) \prod_{i=1}^N B(u_i) | \Leftarrow \rangle. \quad (19)$$

Сопряженный к (18) вектор определяется как

$$\langle \Psi_n(u_1, u_2, \dots, u_N) | = \langle \Leftarrow | \prod_{i=1}^N C(u_i). \quad (20)$$

Легко проверить, что  $\langle \Leftarrow | B(u) = 0$ .

Матричные элементы введенного  $L$ -оператора (2) можно представить в виде точек с примыкающими стрелками (Рис. 3). Матричный элемент  $L_{11}(n|u)$  соответствует

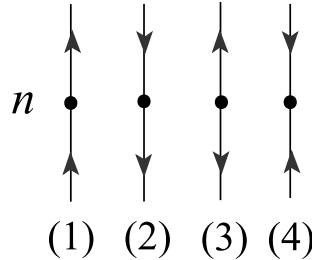


Рис. 3: Вершинное представление матричных элементов  $L$ -оператора.

вершине (1) (Рис. 3), где точкой обозначен оператор  $ue_n$ , действующий в локальном



квантовом пространстве. Единственный ненулевой элемент этого оператора  ${}_n\langle \leftarrow |ue_n| \leftarrow \rangle_n$  определяет вершину (4) (Рис. 1) с весом  $w_4 = u$ . Матричный элемент  $L_{22}(n|u)$  соответствует вершине (2) (Рис. 3) с точкой, обозначающей оператор  $uI - u^{-1}e_n$ , имеющий ненулевые элементы  ${}_n\langle \leftarrow |uI - u^{-1}e_n| \leftarrow \rangle_n$  и  ${}_n\langle \rightarrow |uI - u^{-1}e_n| \rightarrow \rangle_n$ , которые определяют вершины (2), (3) (Рис. 1) с весами равными  $w_2 = u - u^{-1}$  и  $w_3 = u$  соответственно. Матричные элементы  $L_{12}(n|u) = \sigma_n^-$  и  $L_{21}(n|u) = \sigma_n^+$  соответствуют вершинам (3) и (4) (Рис. 3), а ненулевые матричные элементы этих операторов  ${}_n\langle \rightarrow | \sigma_n^- | \leftarrow \rangle_n$  и  ${}_n\langle \leftarrow | \sigma_n^+ | \rightarrow \rangle_n$  определяют вершины (5), (6) (Рис. 1) с весами  $w_5 = w_6 = 1$ .

Матричные элементы матрицы монодромии (44) выражаются через суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с  $M + 1$  узлами (Рис. 4). Например, оператору  $B(u)$ , равному согласно определению (44):  $B(u) = \sum_{k_M, \dots, k_1=1}^2 L_{1k_M}(M|u) L_{k_M k_{M-1}}(M-1|u) \dots L_{k_1 2}(0|u)$ , соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены наружу (конфигурация (B)). Оператору  $C(u)$  соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены внутрь (конфигурация (C)). Операторам  $A(u)$  и  $D(u)$  соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены в одном направлении (конфигурации (A) и (D)).

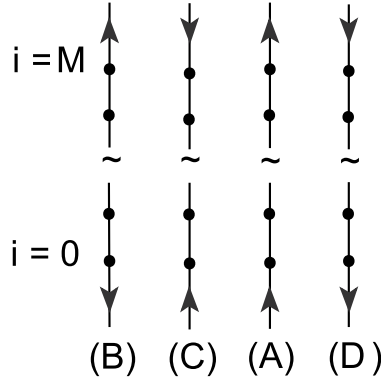


Рис. 4: Графическое представление матричных элементов матрицы монодромии

Рассмотрим скалярное произведение векторов состояния (18) и (20)

$$W_M(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) = \langle \leftarrow | C(v_1) \dots C(v_N) B(u_1) \dots B(u_N) | \leftarrow \rangle, \quad (21)$$

где  $\{u\}$  и  $\{v\}$  это наборы независимых параметров. Мы можем представить матричные элементы скалярного произведения (21) как двумерную квадратную

решетку размерности  $2N \times (M + 1)$ . Первые  $N$  вертикальных линий решетки (с номерами  $(-N, \dots, -1)$ ) ассоциируются с операторами  $C(v_j)$ , а последние  $N$  вертикальных линий (с номерами  $(1, \dots, N)$ ) с операторами  $B(u_j)$ . Горизонтальные линии ассоциируются с локальными квантовыми пространствами, причем, линия с номером  $i$  ( $0 \leq i \leq M$ ) соответствует квантовому пространству с индексом  $i$ . Из графического представления операторов  $B(u)$  и  $C(u)$  следует, что матричный элемент (21) равен сумме всех допустимых конфигураций стрелок на решетке с фиксированными граничными условиями (Рис. 2). Отсюда следует, что скалярное произведение (21) равно статистической сумме анизотропной пятивершинной модели с вершинными весами, задаваемыми матричными элементами  $L$ -оператора (2) и зависящими от номера столбца решетки:

$$\begin{aligned} Z_M(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) &= W_M(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) \\ &= \sum_{(config)} \prod_{k=-1}^{-N} (v_{-k} - v_{-k}^{-1})^{l_k^2} (v_{-k})^{l_k^3 + l_k^4} \prod_{j=1}^N (u_j - u_j^{-1})^{l_j^2} (u_j)^{l_j^3 + l_j^4}, \end{aligned} \quad (22)$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке.

Скалярное произведение (21) при произвольном значении параметров  $u_j, v_j$  вычисляются с помощью перестановочных соотношений (8) [13, 23]:

$$W_M(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) = \left\{ \prod_{N \geq j > k \geq 1} g(v_j, v_k) \prod_{N \geq l > n \geq 1} g(u_m, u_l) \right\} \det Q_M. \quad (23)$$

Матричные элементы  $N \times N$  матрицы  $Q_M$  равны

$$\begin{aligned} &(Q_M(v_j, u_k))_{jk} \\ &= \left\{ \alpha_{M+1}(v_j) \delta_{M+1}(u_k) \left( \frac{u_k}{v_j} \right)^{N-1} - \alpha_{M+1}(u_k) \delta_{M+1}(v_j) \left( \frac{u_k}{v_j} \right)^{-N+1} \right\} \times \frac{1}{\frac{u_k}{v_j} - \left( \frac{u_k}{v_j} \right)^{-1}} \\ &= \left\{ [v_j(u_k - u_k^{-1})]^{M+1} \left( \frac{u_k}{v_j} \right)^{N-1} - [u_k(v_j - v_j^{-1})]^{M+1} \left( \frac{u_k}{v_j} \right)^{-N+1} \right\} \times \frac{1}{\frac{u_k}{v_j} - \left( \frac{u_k}{v_j} \right)^{-1}}, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\alpha_{M+1}(u)$  и  $\delta_{M+1}(u)$  определены в (15).

Таким образом, мы получили представление статистической суммы пятивершинной неоднородной модели в виде определителя.

Рассмотрим специальный случай, когда основной вклад в статистическую сумму дают вершины (2), (3), (4) (Рис. 1). В этом пределе веса  $w_2, w_3, w_4$  стремятся к

бесконечности. Если  $v_j \rightarrow \infty$  при  $1 \leq j \leq N$ , то статистическая сумма равна:

$$Z_M^{(\infty, u)} = \lim_{\{v\} \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N v_i^{-M} W(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N). \quad (25)$$

Вычислив предел, получим

$$Z_M^{(\infty, u)} = \prod_{k=1}^N u_k^{M+1} \prod_{N \geq l > n \geq 1} \frac{1}{u_l^2 - u_n^2} \det V, \quad (26)$$

где  $V$  это  $N \times N$  матрица с матричными элементами равными

$$\begin{aligned} V_{jk} &= \sum_{n=0}^{j-1} (-1)^n \binom{M}{n} u_k^{2(j-1-n)}, \quad 1 \leq j \leq N-1; \\ V_{Nk} &= - \sum_{n=N-1}^M (-1)^n \binom{M}{n} u_k^{-2(n-N+1)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Когда все веса  $u_j, v_j \rightarrow \infty$  определитель (23) вычисляется, и статистическая сумма (22) равна комбинаторному коэффициенту:

$$Z_M^{(\infty)} = \lim_{\{u, v\} \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N (u_k v_k)^{-M} W(u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N) = \frac{(M+1)!}{N!(M+1-N)!}. \quad (28)$$

### III. ГРАНИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим корреляционные функции, описывающие вероятностное поведение локальных состояний на границе. Вероятность того, что в нижней строке решетки стрелка между  $k-1$  и  $k$  столбцами направлена вправо, определяется одноточечной корреляционной функцией:

$$P_k = \frac{1}{Z_M} \langle \Leftarrow | C(v_N) \dots C(v_1) B(u_1) \dots B(u_{k-1}) g_0 B(u_k) \dots B(u_N) | \Leftarrow \rangle, \quad (29)$$

где  $g_0 = 1 - e_0$  - это проектор на состояние со спином вниз, а  $Z_M$  это статистическая сумма (22).

Вероятность того, что в  $K+1$  нижних строках решетки все стрелки между  $-1$  и  $1$  столбцами направлены влево определяется корреляционной функцией

$$G^{(K)} = \frac{1}{Z_M} \langle \Leftarrow | C(v_N) \dots C(v_1) e_0 \dots e_K B(u_1) \dots B(u_N) | \Leftarrow \rangle. \quad (30)$$

Для вычисления корреляционных функций представим матрицу монодромии (44) в виде

$$T(u) = \begin{pmatrix} A_M(u) & B_M(u) \\ C_M(u) & D_M(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ue_0 & \sigma_0^- \\ \sigma_0^+ & uI - u^{-1}e_0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Отсюда следует, что матричные элементы матрицы монодромии, заданной на  $M + 1$  узлах решетки, связаны с матричными элементами матрицы монодромии, заданной на  $M$  узлах:

$$\begin{aligned} A(u) &= uA_M(u)e_0 + B_M(u)\sigma_0^+, \\ B(u) &= A_M(u)\sigma_0^- + uB_M(u) - u^{-1}B_M(u)e_0, \\ C(u) &= uC_M(u)e_0 + D_M(u)\sigma_0^+, \\ D(u) &= C_M(u)\sigma_0^- + uD_M(u) - u^{-1}D_M(u)e_0. \end{aligned}$$

Из этих равенств следуют перестановочные соотношения вида

$$\begin{aligned} e_0B(u) &= (u - u^{-1})B_M(u)e_0, \\ C(u)e_0 &= ue_0C_M(u), \end{aligned} \quad (32)$$

и

$$\begin{aligned} g_0B(u) &= A_M(u)\sigma_0^- + uB_M(u)g_0, \\ B(u)\sigma_0^- &= u\sigma_0^-B_M(u), \\ C(u)\sigma_0^- &= e_0D_M(u). \end{aligned} \quad (33)$$

Напомним, что согласно определению (2), операторы с различными индексами коммутируют между собой.

Перейдем теперь к вычислению функции (30) при  $K = 1$ . Воспользовавшись свойством проектора на состояние со спином вверх  $e_0 = e_0^2; e_0 | \Leftarrow \rangle = | \Leftarrow \rangle, \langle \Leftarrow | e_0 = \langle \Leftarrow |$ , получим:

$$\begin{aligned} G^{(1)} &= \frac{1}{Z_M} \langle \Leftarrow | C(v_N) \dots C(v_1) e_0 B(u_1) \dots B(u_N) | \Leftarrow \rangle \\ &= \frac{1}{Z_M} \langle \Leftarrow | C(v_N) \dots C(v_1) e_0^2 B(u_1) \dots B(u_N) | \Leftarrow \rangle \\ &= \frac{1}{Z_M} \prod_{j=1}^N v_j (u_j - u_j^{-1}) \langle \Leftarrow | e_0 C_M(v_N) \dots C_M(v_1) B_M(u_1) \dots B_M(u_N) e_0 | \Leftarrow \rangle \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{Z_M} \prod_{j=1}^N v_j (u_j - u_j^{-1}) \langle \Leftarrow |C_M(v_N) \dots C_M(v_1) B_M(u_1) \dots B_M(u_N)| \Leftarrow \rangle \\
&= \prod_{j=1}^N v_j (u_j - u_j^{-1}) \frac{Z_{M-1}}{Z_M}.
\end{aligned}$$

Статистическая сумма  $Z_{M-1}$  модели на квадратной решетке размерности  $2N \times M$  дается выражением (23), в котором матрица  $Q_M$  заменена на матрицу  $Q_{M-1}$  (24).

Данный результат легко обобщается на функцию (30) с произвольным  $K$ :

$$G^{(K)} = \prod_{j=1}^N [v_j (u_j - u_j^{-1})]^K \frac{Z_{M-K}}{Z_M},$$

где  $Z_{M-K}$  это статистическая сумма модели на квадратной решетке размерности  $2N \times M - K$ .

Корреляционная функция  $P_1$  (29) связана с корреляционной функцией  $G^{(1)}$  (30):

$$P_1 = 1 - G^{(1)}. \quad (35)$$

Для вычисления корреляционной функции  $P_N$  (29) воспользуемся соотношениями (32), (33), свойством (14) и условием  $g_0 | \Leftarrow \rangle = 0$ :

$$\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{Z_M} \langle \Leftarrow |C(v_N) \dots C(v_1) B(u_1) \dots B(u_{N-1}) g_0 B(u_N)| \Leftarrow \rangle \\
&= \frac{1}{Z_M} \langle \Leftarrow |C(v_N) \dots C(v_1) B(u_1) \dots B(u_{N-1}) \sigma_0^- A_M(u_N)| \Leftarrow \rangle \\
&= \frac{1}{Z_M} \alpha_M(u_N) \langle \Leftarrow |C(v_N) \dots C(v_1) B(u_1) \dots B(u_{N-1}) \sigma_0^- | \Leftarrow \rangle \\
&= \frac{1}{Z_M} \alpha_M(u_N) \prod_{j=1}^{N-1} u_j \langle \Leftarrow |C(v_N) \dots C(v_1) \sigma_0^- B_M(u_1) \dots B_M(u_{N-1})| \Leftarrow \rangle \\
&= \frac{1}{Z_M} \alpha_M(u_N) \prod_{j=1}^{N-1} u_j \langle \Leftarrow |C(v_N) \dots C(v_2) e_0 D_M(v_1) B_M(u_1) \dots B_M(u_{N-1})| \Leftarrow \rangle \\
&= \frac{1}{Z_M} \alpha_M(u_N) \prod_{j=1}^{N-1} u_j \prod_{k=2}^N v_k \langle \Leftarrow |C_M(v_N) \dots C_M(v_2) D_M(v_1) B_M(u_1) \dots B_M(u_{N-1})| \Leftarrow \rangle
\end{aligned} \quad (36)$$

Подставляя одну из основных формул алгебраического анзаца Бете [22, 24], которая выводится путем последовательного применения коммутационных соотношений (8),

$$\begin{aligned}
D(v) \prod_{j=1}^N B(u_j) | \Leftarrow \rangle &= \delta_{M+1}(v) \prod_{j=1}^N f(u_j, v) \prod_{j=1}^N B(u_j) | \Leftarrow \rangle \\
&+ \sum_{n=1}^N \delta_{M+1}(u_n) g(v, u_n) \prod_{j=1, j \neq n}^N f(u_j, u_n) B(v) \prod_{j=1, j \neq n}^N B(u_j) | \Leftarrow \rangle
\end{aligned} \quad (37)$$

в форм-фактор оператора  $D_M(v_1)$

$$\mathcal{D}_M(v_1) = \langle \leftarrow | C_M(v_N) \dots C_M(v_2) D_M(v_1) B_M(u_1) \dots B_M(u_{N-1}) | \leftarrow \rangle \quad (38)$$

получим с помощью формулы (23):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M(v_1) = & \delta_M(v_1) \prod_{j=1}^{N-1} f(u_j, v_1) \left[ \prod_{N \geq j > k \geq 2} g(v_j, v_k) \prod_{N-1 \geq l > m \geq 1} g(u_m, u_l) \right] \\ & \left\{ \det Q_{M-1} + \sum_{n=1}^N \det Q_{M-1}^{(n)} \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

где матрица  $Q_{M-1}$  определена в (24), а матрица  $Q_{M-1}^{(n)}$  равна

$$\begin{aligned} (Q_{M-1})_{jk}^{(n)} &= Q_{M-1}(v_j, u_k) \text{ for } k \neq n, \\ (Q_{M-1})_{jn}^{(n)} &= -\frac{\delta_M(u_n)}{\delta_M(v_1)} \left( \frac{u_n}{v_1} \right)^N Q_{M-1}(v_j, v_1). \end{aligned}$$

Равенство можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M(v_1) = & \delta_M(v_1) \prod_{j=1}^{N-1} f(u_j, v_1) \left[ \prod_{N \geq j > k \geq 2} g(v_j, v_k) \prod_{N-1 \geq l > m \geq 1} g(u_m, u_l) \right] \\ & \det \{Q_{M-1} + H\}, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $N \times N$  ранга один матрица  $H$  равна

$$H_{jk} = -\frac{\delta_M(u_n)}{\delta_M(v_1)} \left( \frac{u_n}{v_1} \right)^N Q_{M-1}(v_j, v_1).$$

Окончательное выражение для корреляционной функции (36) имеет вид

$$P_N = \frac{1}{Z_M} \alpha_M(u_N) \prod_{j=1}^{N-1} u_j \prod_{k=2}^N v_k \mathcal{D}_M(v_1). \quad (41)$$

Детерминантные представления для корреляционных функций  $P_k$  (36) с  $1 < k < N$  выводятся с помощью коммутационных соотношений (8) и формулы (23) и имеют более громоздкий вид, чем ответы, приведенные выше.

Из (28) следует, что в пределе, когда все веса  $u_j, v_j \rightarrow \infty$ , корреляционная функция

$$G^{(K)} = \frac{Z_{M-K}^{(\infty)}}{Z_M^{(\infty)}} = \frac{(M-K+1)!(M+1-N)!}{(M-K+1-N)!(M+1)!}.$$

В этом же пределе из представления (17) следует, что  $P_N = P_1$ . Тогда, согласно (35), имеем

$$P_N = P_1 = 1 - G^{(1)} = \frac{N}{M+1}.$$

#### IV. ОДНОРОДНАЯ МОДЕЛЬ И ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

Рассмотрим однородную модель, в которой все вершинные веса равны между собой:  $w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = w_6 \equiv w$ . Отметим, что данный случай не укладывается в общую схему КМОЗ, описанную в предыдущих разделах. Статистическая сумма модели равна

$$Z = w^{2N(M+1)} \sum_{(config)} 1, \quad (42)$$

где суммирование, как и в (1), ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок а решетке.

Для того чтобы перечислить все допустимые конфигурации стрелок на  $2N \times (M+1)$  квадратной решетке с фиксированными граничными условиями, значительно удобнее использовать описание модели в терминах линий, протекающих сквозь узлы решетки, и представлять эти конфигурации как наборы решеточных путей. Путь начинается в одной из  $N$  нижних левых вершин и завершается в одной из  $N$  верхних правых и всегда идет на восток или север вдоль стрелок, направленных вверх или вправо. Пути не соприкасаются, причем несколько последовательных шагов допустимы как в вертикальном направлении, так и в горизонтальном. Если первые  $N$  колонок решетки имеют номера  $(-N, \dots, -1)$ , а последние  $(1, \dots, N)$ , если нижняя строка имеет номер 0, а верхняя - номер  $M$ , тогда путь с номером  $t$  будет идти из вершины  $(-N+t-1; 0)$  к вершине  $(t; M)$ ,  $1 \leq t \leq N$ . Типичный набор путей изображен на (Рис. 5).

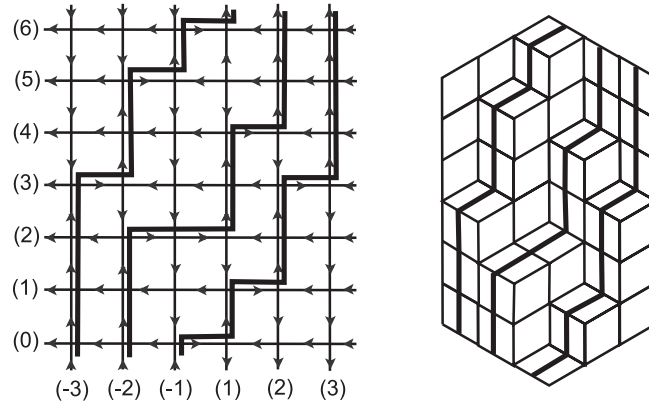


Рис. 5: Типичная конфигурация допустимых решеточных путей на решетке с фиксированными граничными условиями и соответствующая ей трехмерная диаграмма Юнга.

Каждый набор допустимых решеточных путей может быть представлен в виде матрицы  $\pi_{ij}$  размерности  $N \times N$ . Путь с номером  $m$  соответствует  $m$ -й колонке этой матрицы с матричными элементами  $\pi_{jm}$  равными числу ячеек в последующих колонках  $j$  решетки (начиная с правой) под путем с номером  $m$ . Матрица

$$\pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

соответствует набору путей на (Рис. 2).

Набор  $\pi_{ij}$  неотрицательных целых чисел, расположенных в порядке нестрогого убывания по индексам  $i$  и  $j$  ( $i, j = 1, 2, \dots$ ), называется плоским разбиением  $\pi$  [8]. Числа  $\pi_{ij}$  называются частями плоского разбиения. У плоского разбиения есть трехмерная диаграмма, представляющая множество столбцов из единичных кубов - трехмерная диаграмма Юнга. Число  $|\pi| = \sum \pi_{ij}$  называется ее объемом или весом плоского разбиения. Высота колонки с координатами  $(i, j)$  равна части плоского разбиения  $\pi_{ij}$ . Если  $i \leq r, j \leq s$  и  $\pi_{ij} \leq t$  для всех частей плоского разбиения, то такое плоское разбиение называется плоским разбиением, заключенным внутри ящика со сторонами  $r, s, t$ . Если при этом  $\pi_{ij} > \pi_{ij+1}$ , т.е. если части плоского разбиения убывают вдоль каждой строки, то такое  $\pi$  называется строгим по строкам плоским разбиением. Трехмерная диаграмма Юнга, которая соответствует плоскому разбиению (43), изображена на (Рис. 2).

Статистическая сумма рассматриваемой модели (42) пропорциональна числу допустимых решеточных путей, а следовательно, числу всех строгих по строкам (столбцам) плоских разбиений в ящике  $N \times N \times M$ . Воспользовавшись формулой МакМагона для числа строгих по строкам плоских разбиений в ящике  $L \times N \times M$

$$S(L, N, M) = \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^L \frac{M+1+j-k}{j+k-1}, \quad (44)$$

получим

$$Z_M^h = w^{2N(M+1)} \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{M+1+j-k}{j+k-1}. \quad (45)$$

Из анализа допустимых решеточных путей следует, что вероятность того, что в  $K+1$  нижних строках решетки все стрелки между  $-1$  и  $1$  столбцами направлены влево (т.е.



не являются сегментами решеточных путей), есть отношение числа строгих по строкам плоских разбиений в ящике  $L \times N \times (M - K)$  к числу строгих по строкам плоских разбиений в ящике  $L \times N \times M$ :

$$G^{(K)} = \prod_{j=1}^N \prod_{k=1}^N \frac{M - K + 1 + j - k}{M + 1 + j - k}. \quad (46)$$

Вероятность того, что в нижней строке решетки стрелка между  $N - 1$  и  $N$  столбцом направлена вправо (т.е. данное ребро является сегментом решеточного пути) есть отношение числа строгих по строкам плоских разбиений в ящике  $(N - 1) \times N \times M$  к числу строгих по строкам плоских разбиений в ящике  $N \times N \times M$ :

$$P_N = \prod_{j=1}^N \frac{N - 1 + j}{M - N + 1 + j} = \frac{(2N - 1)!(M - N + 1)!}{(N - 1)1(M + 1)!}. \quad (47)$$

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что хотя рассмотренная пятивершинная модель и является частным случаем шестивершинной модели, однако, детерминантные представления для статистической суммы и граничные корреляционные функции неоднородной модели на решетке с фиксированными граничными условиями нельзя получить простым пределом, так как подобный ответ для шестивершинной модели неизвестен.

Квантовым гамильтонианом, коммутирующим с матрицей перехода пятивершинной модели, является неэрмитов гамильтониан, используемый для описания простого полностью асимметричного процесса с исключением [26–28] неравновесной статистической физики. Описанный в статье подход позволит получить детерминантные представления для различных корреляционных функций соответствующей квантовой модели.

## VI. БЛАГОДАРНОСТИ

Данная работа частично поддержана проектом РФФИ 07-01-00358.

## VII. ПРИЛОЖЕНИЕ

$L$ -оператор шестивершинной модели

$$L_{6v}(n|u) = \begin{pmatrix} ue^{\gamma\sigma_n^z} - u^{-1}e^{-\gamma\sigma_n^z} & \sigma_n^- (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}) \\ \sigma_n^+ (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}) & ue^{-\gamma\sigma_n^z} - u^{-1}e^{\gamma\sigma_n^z} \end{pmatrix} \quad (48)$$

удовлетворяет сплетающему соотношению (3) с  $R$ -матрицей вида

$$\tilde{R}(u, v) = \begin{pmatrix} \tilde{f}(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}(v, u) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \tilde{g}(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}(v, u) \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где

$$\tilde{f}(v, u) = \frac{u^2 e^{2\gamma} - v^2 e^{-2\gamma}}{u^2 - v^2}, \quad \tilde{g}(v, u) = \frac{uv}{u^2 - v^2} (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}). \quad (50)$$

Рассмотрим следующее преобразование  $L$ -оператора (48):

$$\check{L}(n|u) = e^{x\sigma_n^z} L_{6v}(n|u) e^{-\omega\sigma^z}. \quad (51)$$

Этот  $L$ -оператор сплетается преобразованной  $R$ -матрицей

$$\begin{aligned} \check{R}(u, v) &= (1 \otimes e^{-x\sigma^z}) \tilde{R}(u, v) (1 \otimes e^{x\sigma^z}) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{f}(v, u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{g}(v, u) & e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-2x} & \tilde{g}(v, u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f}(v, u) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (52)$$

Чтобы доказать это, заметим, что  $L$ -оператор удовлетворяет равенству (9)

$$e^{x\sigma_n^z} \check{L}(n|u) e^{-x\sigma_n^z} = e^{-x\sigma^z} \check{L}(n|u) e^{x\sigma^z},$$

а  $R$ -матрица коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} (e^{\omega\sigma^z} \otimes e^{\omega\sigma^z}) \check{R}(u, v) &= \check{R}(u, v) (e^{\omega\sigma^z} \otimes e^{\omega\sigma^z}) \\ e^{-x\sigma_n^z} \check{R}(u, v) &= \check{R}(u, v) e^{-x\sigma_n^z}. \end{aligned}$$

Имеем следующую цепочку равенств из которых и следует наше утверждение:

$$\check{R}(u, v) L_{6v}(n|u) \otimes L_{6v}(n|v) = L_{6v}(n|v) \otimes L_{6v}(n|u) \check{R}(u, v),$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}(u, v) e^{-x\sigma_n^z} \check{L}(n|u) e^{\omega\sigma^z} \otimes e^{-x\sigma_n^z} \check{L}(n|v) e^{\omega\sigma^z} \\
&= e^{-x\sigma_n^z} \check{L}(n|v) e^{\omega\sigma^z} \otimes e^{-x\sigma_n^z} \check{L}(n|u) e^{\omega\sigma^z} \tilde{R}(u, v), \\
& \tilde{R}(u, v) \check{L}(n|u) \otimes e^{x\sigma^z} \check{L}(n|v) e^{-x\sigma^z} = \check{L}(n|v) \otimes e^{x\sigma^z} \check{L}(n|u) e^{-x\sigma^z} \tilde{R}(u, v), \\
& \tilde{R}(u, v) (I \otimes e^{x\sigma^z}) \check{L}(n|u) \otimes \check{L}(n|v) (I \otimes e^{-x\sigma^z}) \\
&= (I \otimes e^{x\sigma^z}) \check{L}(n|v) \otimes \check{L}(n|u) (I \otimes e^{-x\sigma^z}) \tilde{R}(u, v).
\end{aligned}$$

Перепишем  $L$ -оператор (51) в матричном виде

$$\begin{aligned}
\check{L}(n|u) &= \begin{pmatrix} ue^{-\omega+(x+\gamma)\sigma_n^z} - u^{-1}e^{-\omega+(x-\gamma)\sigma_n^z} & e^{(\omega+x\sigma_n^z)}\sigma_n^- (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}) \\ e^{(-\omega+x\sigma_n^z)}\sigma_n^+ (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}) & ue^{\omega+(x-\gamma)\sigma_n^z} - u^{-1}e^{\omega+(x+\gamma)\sigma_n^z} \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} L_{11}(n|u) & L_{12}(n|u) \\ L_{21}(n|u) & L_{22}(n|u) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{11}(n|u) &= \begin{pmatrix} ue^{-\omega+x+\gamma} - u^{-1}e^{-\omega+x-\gamma} & 0 \\ 0 & ue^{-\omega-x-\gamma} - u^{-1}e^{-\omega-x+\gamma} \end{pmatrix}_n, \\
L_{22}(n|u) &= \begin{pmatrix} ue^{\omega+x-\gamma} - u^{-1}e^{\omega+x+\gamma} & 0 \\ 0 & ue^{\omega-x+\gamma} - u^{-1}e^{\omega-x-\gamma} \end{pmatrix}_n, \\
L_{12}(n|u) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{\omega-x} (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}) & 0 \end{pmatrix}_n, \\
L_{21}(n|u) &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-\omega+x} (e^{2\gamma} - e^{-2\gamma}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_n.
\end{aligned}$$

Матрица с подстрочным индексом  $n$  находится на  $n$ -том месте в прямом произведении:

$$s_n = I \otimes \dots \otimes I \otimes s \otimes I \otimes \dots \otimes I.$$

Положим  $x = \omega = \gamma$  в (51) и примем во внимание, что соотношение (3) инвариантно относительно преобразования  $u \rightarrow xu$ . Тогда  $L$ -оператор пятивершинной модели (2) определяется как предел:

$$L(n|u) = \lim e^{-2\gamma} \check{L}(n|e^\gamma u).$$

Соответствующий предел  $R$ -матрицы (52) есть (4).

- [2] E.H. Lieb, F.Y. Wu, *Phase Transitions and Critical Phenomena* vol. 1 (Academic Press, London, 1972) p. 321.
- [3] V.E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Comm. Math. Phys. **86**, 391 (1982).
- [4] V. Korepin, P. Zinn-Justin, *Thermodynamic limit of the Six-Vertex Model with Domain Wall Boundary Conditions*, J. Phys. A **33**, 7053 (2000).
- [5] N.M.Bogoliubov, A.G.Pronko, M.B.Zvonarev, *Boundary correlation functions of the six-vertex model*, J. Phys. A **35**, 5525 (2002).
- [6] D. Allison, N. Reshetikhin, *Numerical study of the 6-vertex model with domain wall boundary conditions*, Ann. Inst. Fourier(Grenoble) **55**, 1847 (2005).
- [7] O. Syljuåsen, M. Zvonarev, *Directed-loop monte carlo simulations of vertex models*, Phys. Rev. E **70**, 016118 (2004).
- [8] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, (Мир, Москва, 1985).
- [9] D.M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [10] G. Kuperberg, *Another proof of the alternating-sign matrix conjecture*, Int. Math. Res. Not. **1996**, 139 (1996).
- [11] F.Colomo, A.G.Pronko, *Square ice, alternating sign matrices, and classical orthogonal polynomials*, J. Stat. Mech. JSTAT, P01005 (2005).
- [12] P.L. Ferrari, H. Spohn, *Domino tilings and the six-vertex model at its free fermion*, cond-mat/0605406.
- [13] N.M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*, J. Phys. A **38** 9415 (2005).
- [14] Н.М. Боголюбов, *Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете*, Теор. Мат. Физ. **150**, 193 (2007).
- [15] Н.В. Цилевич, *Квантовый метод обратной задачи для q-бозонной модели и симметрические функции*, Функц. Анал. и Прил. **40**, 53 (2006).
- [16] K. Shigechi, M. Uchiyama, *Boxed skew plane partition and integrable phase model*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 10287 (2005).
- [17] Н.М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель*, Зап. Научн. Семин. ПОМИ, , (2007).
- [18] N.M. Bogoliubov, *Four-vertex model and random tilings*, arxiv: 0711.0030v1, (2007).

- [19] D. Kim, *Bethe Ansatz solution for crossover scaling functions of the asymmetric XXZ chain and the Kardar-Parisi-Zhang-type growth model*, Phys. Rev. E **52** 3512 (1995).
- [20] L.-H. Gwa and H. Spohn, *Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian*, Phys. Rev. Lett. **68** 725 (1992).
- [21] R. Rajesh, D. Dhar, *An exactly solvable anisotropic directed percolation model in three dimensions*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1646 (1998).
- [22] L.D. Faddeev, *Quantum Inverse Scattering Method*, Sov. Sci. Rev. Math. **C1**, 107 (1980).
- [23] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, and A.G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [24] Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, В.Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, (Наука, Москва, 1992).
- [25] N.M. Bogoliubov and T. Nassar, *On the spectrum of the non-Hermitian phase-difference model*, Phys. Lett. A **234** 345 (1997).
- [26] L.-H. Gwa and H. Spohn, *Bethe solution for the dynamical-scaling exponent of the noisy Burgers equation*, Phys. Rev. A **46** 844 (1992).
- [27] V.B. Priezzhev, *Exact nonstationary probabilities in the asymmetric exclusion process on a ring*, Phys. Rev. Lett. **91** 050601 (2003).
- [28] Golinelli and K. Mallick, *The asymmetric simple exclusion process : an integrable model for non-equilibrium statistical mechanics*, J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 12679 (2006).