ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ 02/2008

ОПИСАНИЕ НАДГРУПП F_4 В E_6 НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

А. Ю. Лузгарев

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет

Аннотация

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Мы описываем подгруппы группы Шевалле $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащие элементарную подгруппу $E(\mathrm{F}_4, R)$ группы Шевалле типа F_4 при естественном вложении $G(\mathrm{F}_4, R) \le G(\mathrm{E}_6, R)$. Для любой промежуточной подгруппы H существует единственный наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что H содержит нормальное замыкание группы $E(\mathrm{E}_6, A)$ в $E(\mathrm{E}_6, R)$, которое мы обозначаем через $E(\mathrm{E}_6, R, A)$, и, кроме того, H нормализует группу $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A) = E(\mathrm{F}_4, R)E(\mathrm{E}_6, R, A)$. Этот результат аналогичен описаниям надгрупп ортогональной, симплектической и унитарной группы, полученным в работах Вавилова, Петрова и Хон Ю.

Настоящая работа была выполнена в рамках совместного проекта DAAD и Министерства образования России «Михаил Ломоносов», а также проекта INTAS 03-51-3251.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена описанию надгрупп элементарной группы Шевалле типа F_4 в группе Шевалле типа E_6 над произвольным коммутативным кольцом. Систематическое изучение подобных вопросов для классических групп над полями началось в работах Дая, Кинга, Ли Шанчжы [22–24], [29–33]. Описание надгрупп ортогональной, симплектической и унитарной группы в полной линейной группе над коммутативным кольцом получено в работах Вавилова, Петрова ([9–11], [35]) и Хон Ю ([27], [28]).

В перечисленных статьях изучаются надгруппы классических групп в их неприводимых представлениях, то есть, подгруппы $\mathrm{GL}(n,R)$, содержащие данную группу Шевалле. Интересной задачей является перенос этих результатов на исключительные группы над коммутативными кольцами. В работе [12] автор проделал некоторые шаги, необходимые для описания надгрупп групп Шевалле типов E_6 и E_7 в их неприводимых представлениях.

В то же время, в работах [5], [8] было замечено, что для изучения группы Шевалле типа F_4 часто удобнее рассматривать не минимальное ее представление, имеющее размерность 26, а *приводимое* представление размерности 27, возникающее в результате скручивания минимального модуля группы типа E_6. Таким образом, мы получаем вложение $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{F}_4,R)\le G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6,R)$, и естественно ставить вопрос об описании промежуточных подгрупп.

При переносе локализационных доказательств из [10] на исключительные группы возникают заметные технологические усложнения, но общая канва рассуждений остается неизменной, как и итоговый результат: «веерное» расположение подгрупп в духе Боревича. А именно, для всякой подгруппы H, лежащей между $G(\mathrm{F}_4,R)$ и $G(\mathrm{E}_6,R)$ (рассматриваемых как подгруппы в $\mathrm{GL}(27,R)$), существует единственный идеал A кольца R такой, что H лежит между $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)=E(\mathrm{F}_4,R)E(\mathrm{E}_6,R,A)$ и ее нормализатором в $G(\mathrm{E}_6,R)$.

Теорема 1. *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда для любой подгруппы в $G=G(\mathrm{E}_6,R)$, содержащей группу $E(\mathrm{F}_4,R)$, существует единственный идеал $A\trianglelefteq R$ такой, что*

$$\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)\le H\le N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)).$$

Кроме того, мы явно вычисляем нормализатор, фигурирующий в теореме. Рассмотрим расширенную группу Шевалле

$$\overline{G}(\mathrm{F}_4,R)=G(\mathrm{F}_4,R)\,\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6,R))$$

(через $\mathrm{Cent}(G)$ мы обозначаем центр группы G). Для подгрупп E и F в группе G обозначим через $\mathrm{Tran}_G(E,F)$ *транспортер* E в F:

$$\mathrm{Tran}_G(E,F)=\{g\in G\mid E^g\le F\}.$$

Еще одним основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *имеем*

$$N_G(E(\mathrm{F}_4, R)) = N_G(G(\mathrm{F}_4, R)) = \mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4, R), G(\mathrm{F}_4, R)) = \overline{G}(\mathrm{F}_4, R).$$

Рассмотрим теперь гомоморфизм редукции $\rho_A^{\mathrm{E}_6} : G(\mathrm{E}_6, R) \to G(\mathrm{E}_6, R/A)$, индуцированный гомоморфизмом соответствующих полных линейных групп, и обозначим через $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ полный прообраз группы $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)$ относительно $\rho_A^{\mathrm{E}_6}$. Еще один результат настоящей работы состоит в следующем.

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 для любого идеала $A \trianglelefteq R$ имеем*

$$N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)) = \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Условие принадлежности матрицы $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ описывается сравнениями (по модулю идеала A) на ее коэффициенты. Мы явно приводим эти сравнения в предложении 2.

С технической точки зрения настоящая работа соединяет метод *локализации-пополнения*, предложенный Баком в [19] и позднее упрощенный Хазратом и Вавиловым в [25], [26], [10], с явными вычислениями с элементами исключительных групп в минимальных представлениях, освоенными Вавиловым и его учениками (см. [4–8], [12]).

Статья организована следующим образом. В § 2 и § 3 мы вводим основные обозначения, относящиеся к группам Шевалле типов E_6 и F_4 в 27-мерном представлении. В § 4 приведены некоторые факты, общие для групп Шевалле типов F_4 и E_6. В § 5 собраны технические утверждения, относящиеся к уравнениям, задающим группу $G(\mathrm{E}_6, R)$, которые понадобятся нам в дальнейшем. В § 6 обсуждается вид нужных нам параболических подгрупп в $G(\mathrm{E}_6, R)$ и $G(\mathrm{F}_4, R)$ и их унипотентных радикалов. Теорема 2 доказывается в § 7 вместе с описанием уравнениями расширенной группы Шевалле $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. В § 8 вводится понятие нижнего уровня для классифицируемых подгрупп. В § 9 приведено доказательство теоремы 3 вместе с описанием уравнениями фигурирующего в ней нормализатора. Техническим сердцем доказательства теоремы 1 является § 10, в котором с помощью локализации происходит значительное упрощение задачи извлечения корневого элемента. Следующие три параграфа посвящены этому извлечению: мы показываем существование корневого элемента при все более слабых условиях. После того, как это сделано, доказательство теоремы 1 легко завершается в § 14.

Автор выражает благодарность Николаю Александровичу Вавилову, без которого эта работа никогда не была бы написана, а также Энтони Баку за гостеприимство и всестороннюю поддержку.

§ 2. Группа Шевалле типа E_6

В этом параграфе мы вкратце напомним обозначения и факты, относящиеся к группе Шевалле типа E_6 над коммутативным кольцом. Более подробную информацию, а также дальнейшие ссылки можно найти в [1], [13], [34], [36], [15], [40–42], [4], [6], [7]. Больше внимания мы уделим вложению группы типа F_4 в группу типа E_6, значительно менее освещенному в литературе.

Мы рассматриваем системы корней E_6 и F_4 с фиксированными базисами простых корней $\Pi(\mathrm{E}_6)$ и $\Pi(\mathrm{F}_4)$. Наша нумерация простых корней соответствует [2]. Далее везде R — коммутативное кольцо с единицей.

Вычисления настоящей работы происходят в 27-мерном модуле $V = V(\varpi_1)$ группы Шевалле $G = G(\mathrm{E}_6, R)$ типа E_6 со старшим весом $\omega = \varpi_1$. Множество весов этого модуля обозначается через Λ. Модуль V снабжен кристаллическим базисом v^λ, $\lambda \in \Lambda$. Это означает (см. [34]), что векторы v^λ являются весовыми векторами и действие элементарных корневых элементов $x_\alpha(\xi)$ для всех $\alpha \in \mathrm{E}_6$ и $\xi \in R$ описывается так:

$$x_\alpha(\xi)v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda\alpha}\xi v^{\lambda+\alpha},$$

причем все структурные константы действия $c_{\lambda\alpha}$ равны ± 1, и $c_{\lambda\alpha} = +1$, если $\alpha \in \pm\Pi(\mathrm{E}_6)$. Мы будем обозначать через $T(\mathrm{E}_6, R)$ максимальный расщепимый тор группы $G(\mathrm{E}_6, R)$; в нашем представлении матрица из $G(E_6, R)$ лежит в $T(\mathrm{E}_6, R)$ тогда и только тогда, когда она диагональна. Группа $T(\mathrm{E}_6, R)$ коммутативна и порождается элементами вида

$$h_\alpha(\varepsilon) = e + \sum_{\lambda, \lambda+\alpha \in \Lambda} ((\varepsilon - 1)e_{\lambda+\alpha, \lambda+\alpha} + (\varepsilon^{-1} - 1)e_{\lambda,\lambda})$$

для всех $\alpha \in \Pi(\mathrm{E}_6)$, $\varepsilon \in R^*$.

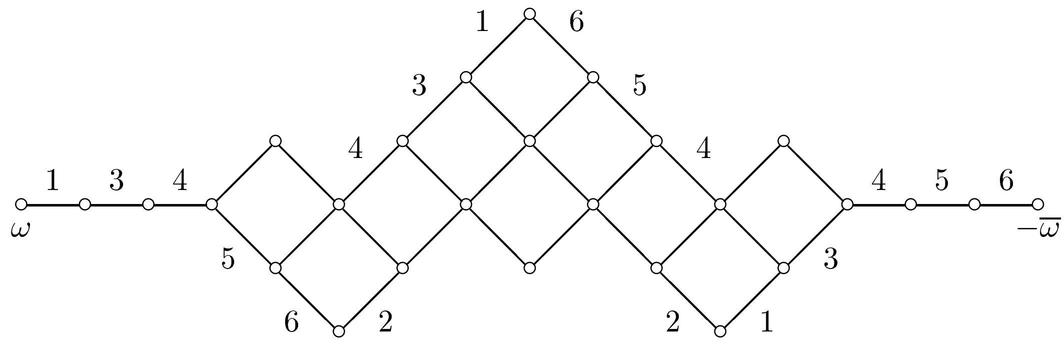
Легко видеть, что

$${}^{h_\alpha(\varepsilon)}x_\beta(\xi) = x_\beta(\varepsilon^{\langle\alpha,\beta\rangle}\xi)$$

для всех $\alpha \in \Pi$, $\beta \in \Phi$, $\varepsilon \in R^*$, $\xi \in R$. Напомним, что $\langle\alpha, \beta\rangle = 2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$, где $(\cdot, \cdot)$ — $W(\mathrm{E}_6)$-инвариантное скалярное произведение на $P \otimes_{\mathbb{Z}} R$, и в нашем случае $P = P_{\mathrm{sc}}$ — решетка весов.

Работа [7] была посвящена детальному изучению модуля V; в частности, там приведены явные таблицы знаков структурных констант в кристаллическом базисе, которые мы активно используем для вычислений. Кроме этого, как отмечено в работах [17], [18], [6], еще одним важным инструментом для работы с модулем V является инвариантная трилинейная форма. Явный вид этой формы также приведен в [7]. На группу $G(\mathrm{E}_6, R)$ можно смотреть с различных точек зрения: согласно классическому определению, это группа точек аффинной групповой схемы Шевалле–Демазюра. Однако для конкретных матричных вычислений на самом деле используется тот факт, что для любого кольца R группа $G(\mathrm{E}_6, R)$ совпадает группой изометрий трилинейной формы T. Описание этой формы, связанной с ней кубической формы и ее частных производных в различных базисах можно найти в [7] (см. также [40–42], [8], [6]). Мы приводим явный вид кубической формы и ее частных производных в § 5. Кроме того, $G(\mathrm{E}_6, R)$ совпадает с группой изометрий пары, состоящей из кубической формы Q и ее частичной поляризации (подробнее см. [18]) Это нетривиальный результат (см. [17]), особенно если не предполагать обратимости 2 и 3: заметим, что $T(u,u,u) = 6Q(u)$.

Ниже на рисунке воспроизведена *весовая диаграмма* модуля V. Ее вершины занумерованы весами модуля V, а ребра соединяют пары весов, разность между которыми является простым корнем. При этом на ребре указывается номер этого простого корня, и старший вес расположен слева.



Мы изображаем вектор $a \in V$, $a = \sum a_\lambda v^\lambda$ как *столбец* координат в кристаллическом базисе: $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. При этом элемент b контраградиентного модуля V^* естественно представлять как *строку* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Заметим, что координаты вектора из V^* здесь занумерованы весами модуля V; именно поэтому они записываются как строки. Элемент $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ отождествляется нами с его образом в представлении π и изображается матрицей $(g_{\lambda\mu})$ из $\mathrm{GL}(V) \simeq \mathrm{GL}(27, R)$, столбцы и строки которой проиндексированы весами Λ. Столбец этой матрицы с номером $\mu \in \Lambda$ мы будем обозначать через $g_{*\mu}$. Таким образом, $g_{*\mu} = gv^\mu$. Аналогично, через $g_{\lambda *}$ обозначается строка матрицы g с номером $\lambda \in \Lambda$. Для элементов обратной матрицы мы используем обозначение $g^{-1} = (g'_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Следующее утверждение является простой переформулировкой определения кристаллического базиса, и мы будем пользоваться им во всех вычислениях без специального упоминания.

Лемма 1. *Для любых $g \in \mathrm{GL}(27, R)$, $\alpha \in \mathrm{E}_6$, $\xi \in R$ имеют место формулы*

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + c_{\lambda-\alpha,\alpha}\xi g_{\lambda-\alpha,\mu}, \quad (gx_\alpha(\xi))_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} + c_{\mu\alpha}\xi g_{\lambda,\mu+\alpha}.$$

Часто нам не требуется знать точные знаки констант $c_{\lambda\alpha}$, в таких случаях мы пользуемся обозначением «±».

§ 3. Группа Шевалле типа F_4

Далее везде, если не указано обратное, $\Phi = \mathrm{F}_4$, Φ_l — множество длинных, Φ_s — множество коротких корней Φ. Мы рассматриваем систему корней F_4 как проекцию системы корней E_6 на четырехмерное подпространство, порожденное векторами $\genfrac{}{}{0pt}{}{00000}{1}, \genfrac{}{}{0pt}{}{00100}{0}, \genfrac{}{}{0pt}{}{01010}{0}, \genfrac{}{}{0pt}{}{10001}{0}$. При этом длинные корни F_4 — это в точности корни E_6, лежащие в этом подпространстве. Такой корень обязательно имеет вид $\genfrac{}{}{0pt}{}{abcba}{d} \in \mathrm{E}_6$, и с точки зрения системы F_4 является корнем $d\alpha_1 + c\alpha_2 + 2b\alpha_3 + 2a\alpha_4 \in \Phi_l$ (α_i, $1 \le i \le 4$ — фундаментальная система корней F_4). Таким образом, можно считать, что $\Phi_l \subset \mathrm{E}_6$ (заметим, что множество Φ_l является системой корней типа D_4). Короткий же корень F_4 является проекцией двух корней E_6 на наше четырехмерное пространство: корни $\genfrac{}{}{0pt}{}{abcb'a'}{d}$ и $\genfrac{}{}{0pt}{}{a'b'cba}{d}$ проектируются в корень

$$d\alpha_1 + c\alpha_2 + (b+b')\alpha_3 + (a+a')\alpha_4 \in \Phi_s.$$

Через β_i, $1 \le i \le 6$ мы будем обозначать простые корни системы корней E_6; напомним, что наша нумерация простых корней следует [2]. Рассмотрим внешний автоморфизм $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ порядка 2 системы E_6, переставляющий β_1 с β_6, β_3 с β_5 и оставляющий β_2 и β_4 на месте. Одноэлементные орбиты этого автоморфизма состоят в точности из длинных корней F_4, а двухэлементные содержат пары корней, проектирующихся в короткие корни F_4. Заметим, что корни $\beta \ne \overline{\beta}$ двухэлементной орбиты ортогональны друг другу и образуют углы $\pi/4$ с соответствующим коротким корнем $(\beta + \overline{\beta})/2 \in \Phi_s$. Мы будем отождествлять множество орбит с множеством корней F_4.

Мы будем обозначать через $x_\beta(\xi)$ элементарные корневые элементы группы $G(\mathrm{E}_6, R)$, а через $X_\beta(\xi)$ — элементарные корневые элементы группы $G(\mathrm{F}_4, R)$. При этом элементы $X_\beta(\xi)$ могут иметь вид $x_\beta(\xi)$ для $\beta = \overline{\beta}$ (длинные корневые элементы) или вид $x_\beta(\xi)x_{\overline{\beta}}(\pm\xi)$ для $\beta \ne \overline{\beta}$ (короткие корневые элементы). Нам понадобится явное знание знаков в коротких корневых элементах, поэтому приведем их:

$$X_{0001}(\xi) = x_{\substack{10000\\0}}(\xi)x_{\substack{00001\\0}}(\xi), \qquad X_{0010}(\xi) = x_{\substack{01000\\0}}(\xi)x_{\substack{00010\\0}}(\xi),$$

$$X_{0011}(\xi) = x_{\substack{11000\\0}}(\xi)x_{\substack{00011\\0}}(-\xi), \qquad X_{0110}(\xi) = x_{\substack{01100\\0}}(\xi)x_{\substack{00110\\0}}(-\xi),$$

$$X_{1110}(\xi) = x_{\substack{01100\\1}}(\xi)x_{\substack{00110\\1}}(-\xi), \qquad X_{0111}(\xi) = x_{\substack{11100\\0}}(\xi)x_{\substack{00111\\0}}(\xi),$$

$$X_{1111}(\xi) = x_{\substack{11100\\1}}(\xi)x_{\substack{00111\\1}}(\xi), \qquad X_{0121}(\xi) = x_{\substack{11110\\0}}(\xi)x_{\substack{01111\\0}}(-\xi),$$

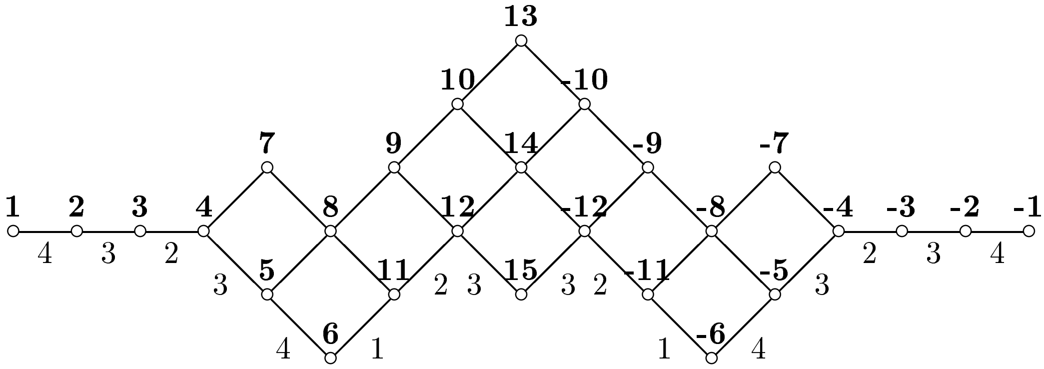
$$X_{1121}(\xi) = x_{\substack{11110\\1}}(\xi)x_{\substack{01111\\1}}(-\xi), \qquad X_{1221}(\xi) = x_{\substack{11210\\1}}(\xi)x_{\substack{01211\\1}}(-\xi),$$

$$X_{1231}(\xi) = x_{\substack{12210\\1}}(\xi)x_{\substack{01221\\1}}(-\xi), \qquad X_{1232}(\xi) = x_{\substack{12211\\1}}(\xi)x_{\substack{11221\\1}}(\xi).$$

Максимальный расщепимый тор $T(\mathrm{F}_4, R)$ группы $G(\mathrm{F}_4, R)$ порождается диагональными элементами

$$H_{1000}(\varepsilon) = h_{\substack{00000\\1}}(\varepsilon), \qquad H_{0100}(\varepsilon) = h_{\substack{00100\\0}}(\varepsilon),$$
$$H_{0010}(\varepsilon) = h_{\substack{01000\\0}}(\varepsilon)h_{\substack{00010\\0}}(\varepsilon), \qquad H_{0001}(\varepsilon) = h_{\substack{10000\\0}}(\varepsilon)h_{\substack{00001\\0}}(\varepsilon).$$

При ограничении представления π с $G(\mathrm{E}_6, R)$ на $G(\mathrm{F}_4, R)$ получаем 27-мерное представление, диаграмма которого приведена ниже. Здесь метки на ребрах соответствуют нумерации простых корней F_4.



Нумерация весов, приведенная здесь, будет использоваться для всех наших вычислений. Для разнообразия она (и даже ее положительная часть) не согласована ни с одной из трех нумераций, приведенных в [7]. Мы будем обозначать вес, занумерованный на этой диаграмме целым числом i, через λ_i или (если это не вызывает двусмысленностей) просто i. Заметим, что в ограничении на F_4 веса 13, 14, 15 становятся нулевыми.

Полученное представление $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{F}_4$ приводимо и является прямой суммой 26-мерного представления на коротких корнях и тривиального 1-мерного представления. Кроме того, нам понадобится ограничение $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{D}_4$. Для его визуализации достаточно вычеркнуть в диаграмме (E_6, ϖ_1) ребра, помеченные 1 и 6. При совмещении ограничений на F_4 и на D_4 мы получаем ограничение на B_3, которое получается из диаграммы $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{F}_4$ вырезанием всех ребер, помеченных 4. Как видно, результатом является прямая сумма трех одномерных представлений, отвечающих весам $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_{-1} = -\overline{\omega}$, λ_{13}, и трех восьмимерных представлений (одно из них приводимо и является прямой суммой семимерного и одномерного). Обозначим через B, Γ, Δ множества весов этих представлений:

$$\mathrm{B} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\},$$
$$\Gamma = \{6, 11, 12, 14, 15, -12, -11, -6\},$$
$$\Delta = \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}.$$

Как отмечено выше, $G(\mathrm{E}_6, R)$ совпадает с группой преобразований свободного правого модуля R^{27}, сохраняющих некоторую трилинейную форму T. Удобно рассматривать $G(\mathrm{F}_4, R) < G(\mathrm{E}_6, R)$ как группу преобразований из $G(\mathrm{E}_6, R)$, стабилизирующих некоторый выделенный вектор u, для которого $Q(u) \neq 0$. Равносильно, $G(\mathrm{F}_4, R)$ — это группа преобразований из $G(\mathrm{E}_6, R)$, сохраняющих билинейную форму $B(x, y)$, определенную равенством $B(x, y) = T(u, x, y)$. В качестве выделенного вектора мы будем брать $u = v^{13} - v^{14} + v^{15}$, тогда $Q(u) = -1$, а билинейная форма приобретет вид

$$\begin{aligned} B(x,y) = &\sum_{i=1}^{12} (-1)^{i+1}(x_i y_{-i} + x_{-i} y_i) \\ &+ x_{13}y_{14} + x_{14}y_{13} + x_{14}y_{15} + x_{15}y_{14} - x_{13}y_{15} - x_{15}y_{13}. \end{aligned}$$

Пусть F — матрица Грама билинейной формы B. Мы получили, что матрица $g = (g_{ij}) \in G(\mathrm{E}_6, R)$ в том и только в том случае принадлежит $G(\mathrm{F}_4, R)$, когда $gFg^T = F$ (здесь и далее через g^T мы обозначаем матрицу, транспонированную к g). Таким образом, $G(\mathrm{F}_4, -)$ является подсхемой в $G(\mathrm{E}_6, -)$; матрица $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ лежит в $G(\mathrm{F}_4, R)$ тогда и только тогда, когда $(Fg^T)_{ij} = (g^{-1}F)_{ij}$ для всех $i, j = 1, \ldots, -1$. В частности, для $i, j = 1, \ldots, 12, -12, \ldots, -1$ эти уравнения превращаются в $g'_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j g_{-j,-i}$.

Нам понадобится также группа *подобий* билинейной формы B, то есть множество преобразований $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$, для которых $B(gx, gy) = \lambda(g) B(x, y)$ для некоторого $\lambda(g) \in R^*$. В терминах матрицы Грама это условие означает, что $gFg^T = \lambda(g) F$. Мы будем обозначать эту группу $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. Пусть $g \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. Для любых $x, y \in R^{27}$ имеем

$$\begin{aligned} T(u, x, y) = B(x, y) &= \lambda(g)^{-1} B(gx, gy) \\ &= \lambda(g)^{-1} T(u, gx, gy) = \lambda(g)^{-1} T(g^{-1}u, x, y), \end{aligned}$$

откуда $T(\lambda(g)u - g^{-1}u, x, y) = 0$. Значит, $g^{-1}u = \lambda(g)u$, то есть g переводит в себя одномерное подпространство $\langle u \rangle$. Обратное тоже верно; таким образом, на $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ можно смотреть как на группу матриц из $G(\mathrm{E}_6, R)$, стабилизирующих $\langle u \rangle$.

Лемма 2. *Если $gu = \lambda u$ для некоторых $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$, $\lambda \in R$, то $\lambda^3 = 1$.*

Доказательство.

$$-1 = Q(u) = Q(gu) = Q(\lambda u) = \lambda^3 Q(u) = -\lambda^3.$$

Получаем, что если R не содержит нетривиальных кубических корней из 1, то $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) = G(\mathrm{F}_4, R)$. Если же $\lambda \in R$ и $\lambda^3 = 1$, то матрица λI_{27} лежит в центре $G(\mathrm{E}_6, R)$ и является элементом $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$; кроме того, $\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6, R))$

состоит в точности из таких скалярных матриц. Таким образом, мы доказали, что

$$\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) = G(\mathrm{F}_4, R)\,\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6, R)). \tag{1}$$

Содержащуюся в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ диагональную подгруппу мы будем обозначать через $\overline{T}(\mathrm{F}_4, R)$. Эта подгруппа нормализует $E(\mathrm{F}_4, R)$, поэтому мы можем рассмотреть произведение

$$\overline{E}(\mathrm{F}_4, R) = E(\mathrm{F}_4, R)\overline{T}(\mathrm{F}_4, R) = E(\mathrm{F}_4, R)\,\mathrm{Cent}(G(\mathrm{E}_6, R)).$$

§ 4. Общие сведения о группах Шевалле

В этом параграфе $\Phi = \mathrm{E}_6$ или F_4.

Пусть $A \trianglelefteq R$ — идеал в R. Обозначим через $E(\Phi, A)$ группу, порожденную корневыми элементами уровня A:

$$E(\Phi, A) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha \in \Phi, \xi \in A\rangle.$$

В случае $A = R$ группа $E(\Phi, R)$ называется (абсолютной) *элементарной группой*. Важную роль играют и *относительные элементарные группы* $E(\Phi, R, A)$:

$$E(\Phi, R, A) = \langle x_a(\xi), \alpha \in \Phi, \xi \in A\rangle^{E(\Phi,R)}.$$

Следующий простой факт хорошо известен (см, например, [36], следствие 4.4).

Лемма 3. *Пусть $\Phi = \mathrm{E}_6$ или F_4. Тогда элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi, R)$ совершенна.*

Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_A^\Phi : G(\Phi, R) \to G(\Phi, R/A)$, являющийся ограничением очевидного гомоморфизма $\mathrm{GL}(27, R) \to \mathrm{GL}(27, R/A)$ на группу $G(\Phi, R) \leq \mathrm{GL}(27, R)$. Обозначим через $G(\Phi, R, A)$ ядро этого гомоморфизма, а через $C(\Phi, R, A)$ — прообраз центра группы $G(\Phi, R/A)$.

Равенства из следующего утверждения носят название *стандартных коммутационных формул.*

Лемма 4. *Пусть $\Phi = \mathrm{E}_6$ или F_4. Для любого идеала $A \trianglelefteq R$ выполняются равенства*

$$[G(\Phi, R), E(\Phi, R, A)] = [E(\Phi, R), C(\Phi, R, A)] = E(\Phi, R, A)$$

В частности, подгруппа $E(\Phi, R, A)$ нормальна в $G(\Phi, R)$.

Для интересующих нас исключительных случаев эта лемма была доказана Таддеи [37] и Васерштейном [39]. В работах [40], [20], [26]. можно найти другие доказательства и дальнейшие ссылки.

Пусть S — мультипликативная система в кольце R, то есть множество элементов R, содержащее 1 и замкнутое относительно умножения. Мы будем обозначать через $S^{-1}R$ *локализацию* кольца R относительно системы S и через $F_S : R \to S^{-1}R$ — канонический гомоморфизм. Наиболее важными для нас являются следующие частные случаи:

(1) Локализация в максимальном идеале: $S = R \setminus M$, где $M \in \mathrm{Max}(R)$ — максимальный идеал кольца R. В этом случае мы пишем $(R\setminus M)^{-1}R = R_M$, и F_M вместо F_S. Кольцо R_M является локальным с максимальным идеалом $R_M F_M(M)$.

(2) Главная локализация: $S = \langle s\rangle = \{1, s, s^2, \dots\}$ — наименьшая мультипликативная система, содержащая элемент $s \in R$. Мы будем обозначать $\langle s\rangle^{-1}R$ через R_s, F_S через F_s.

Пусть X — аффинная групповая схема над $\mathbb{Z}$. Гомоморфизм $X(F_S) : X(R) \to X(S^{-1}R)$, индуцированный гомоморфизмом локализации, мы также будем обозначать через F_S. Заметим, что если $X = G(\mathrm{E}_6, R)$, $G(\mathrm{F}_4, R)$, $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$, то элементарные корневые элементы переходят в элементарные корневые элементы: $F_S(x_\alpha(\xi)) = x_\alpha(F_S(\xi))$. Это означает, что

$$F_S(E(\mathrm{E}_6, R)) \le E(\mathrm{E}_6, S^{-1}R),$$
$$F_S(E(\mathrm{F}_4, R)) \le E(\mathrm{F}_4, S^{-1}R).$$

Так как при гомоморфизме F_S торы переходят в торы, то $F_S(\overline{E}(\mathrm{F}_4, R)) \le \overline{E}(\mathrm{F}_4, S^{-1}R)$. Таким образом, $E(\mathrm{E}_6, -)$, $E(\mathrm{F}_4, -)$, $\overline{E}(\mathrm{F}_4, -)$ также являются функторами из категории коммутативных колец в категорию групп, однако эти функторы не представимы.

Хорошо известно, что все эти функторы коммутируют с индуктивными пределами. Точнее, если R_i, $i \in I$ — индуктивная система колец, а X — один из функторов $G(\mathrm{E}_6, -)$, $G(\mathrm{F}_4, -)$, $\overline{G}(\mathrm{F}_4, -)$, $E(\mathrm{E}_6, -)$, $E(\mathrm{F}_4, -)$, $\overline{E}(\mathrm{F}_4, -)$, то $X(\varinjlim R_i) = \varinjlim X(R_i)$.

В частности, если R_i — индуктивная система всех конечно порожденных подколец в R по отношению к вложению, то $X(R) = \varinjlim X(R_i)$, что позволяет нам ограничиться рассмотрением нетеровых колец.

Кроме того, если S — мультипликативная система, мы можем рассмотреть систему колец R_s, $s \in S$, как индуктивную систему колец по отношению к каноническим гомоморфизмам локализации $F_t : R_s \to R_{st}$. Тогда $X(S^{-1}R) = \varinjlim X(R_s)$. Это позволит нам сводить рассмотрение произвольных локализаций (в частности, локализации в максимальном идеале) к главным локализациям. Локализации в максимальных идеалах приводят нас к локальным кольцам. Как хорошо известно (см., например, [16]), для локальных (и даже для полулокальных) колец $G(\mathrm{E}_6, R) = E(\mathrm{E}_6, R)$, $G(\mathrm{F}_4, R) = E(\mathrm{F}_4, R)$, а поэтому и $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) = \overline{E}(\mathrm{F}_4, R)$.

§ 5. Изучение уравнений в $G(\mathrm{E}_6, R)$

В настоящем параграфе собраны технические результаты, касающиеся матриц из $G(\mathrm{E}_6, R)$. Их доказательства используют явный вид трилинейной формы T, кубической формы Q и ее частных производных f_λ, $\lambda \in \Lambda$. В нашей нумерации весов кубическая форма Q выглядит так:

$$
\begin{aligned}
Q(x) =& x_1x_{13}x_{-1} - x_1x_{-10}x_{-2} + x_1x_{-9}x_{-3} - x_1x_{-8}x_{-4} + x_1x_{-5}x_{-7} \\
& - x_2x_{10}x_{-1} + x_2x_{14}x_{-2} - x_2x_{-12}x_{-3} + x_2x_{-11}x_{-4} - x_2x_{-6}x_{-7} \\
& + x_3x_9x_{-1} - x_3x_{12}x_{-2} + x_3x_{15}x_{-3} - x_3x_{-11}x_{-5} + x_3x_{-8}x_{-6} \\
& - x_4x_8x_{-1} + x_4x_{11}x_{-2} - x_4x_{15}x_{-4} + x_4x_{-12}x_{-5} - x_4x_{-9}x_{-6} \\
& + x_7x_5x_{-1} - x_7x_6x_{-2} + x_7x_{15}x_{-7} - x_7x_{-12}x_{-8} + x_7x_{-9}x_{-11} \\
& - x_5x_{11}x_{-3} + x_5x_{12}x_{-4} - x_5x_{14}x_{-5} + x_5x_{-10}x_{-6} + x_8x_6x_{-3} \\
& - x_8x_{12}x_{-7} + x_8x_{14}x_{-8} - x_8x_{-10}x_{-11} - x_6x_9x_{-4} + x_6x_{10}x_{-5} \\
& - x_6x_{13}x_{-6} + x_9x_{11}x_{-7} - x_9x_{14}x_{-9} + x_9x_{-10}x_{-12} - x_{11}x_{10}x_{-8} \\
& + x_{11}x_{13}x_{-11} + x_{10}x_{12}x_{-9} - x_{10}x_{15}x_{-10} - x_{12}x_{13}x_{-12} + x_{13}x_{14}x_{15}.
\end{aligned}
$$

Симметрическая трилинейная форма T получается отсюда поляризацией. Воспроизведем для дальнейших ссылок и явный вид частных производных этой формы в той же нумерации:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x_{13}x_{-1} - x_{-10}x_{-2} + x_{-9}x_{-3} - x_{-8}x_{-4} + x_{-7}x_{-5} \\
f_2(x) &= -x_{10}x_{-1} + x_{14}x_{-2} - x_{-12}x_{-3} + x_{-11}x_{-4} - x_{-6}x_{-7} \\
f_3(x) &= x_9x_{-1} - x_{12}x_{-2} + x_{15}x_{-3} - x_{-11}x_{-5} + x_{-8}x_{-6} \\
f_4(x) &= -x_8x_{-1} + x_{11}x_{-2} - x_{15}x_{-4} + x_{-12}x_{-5} - x_{-9}x_{-6} \\
f_5(x) &= x_7x_{-1} - x_{11}x_{-3} + x_{12}x_{-4} - x_{14}x_{-5} + x_{-10}x_{-6} \\
f_6(x) &= -x_7x_{-2} + x_8x_{-3} - x_9x_{-4} + x_{10}x_{-5} - x_{13}x_{-6} \\
f_7(x) &= x_5x_{-1} - x_6x_{-2} + x_{15}x_{-7} - x_{-12}x_{-8} + x_{-9}x_{-11} \\
f_8(x) &= -x_4x_{-1} + x_6x_{-3} - x_{12}x_{-7} + x_{14}x_{-8} - x_{-10}x_{-11} \\
f_9(x) &= x_3x_{-1} - x_6x_{-4} + x_{11}x_{-7} - x_{14}x_{-9} + x_{-10}x_{-12} \\
f_{10}(x) &= -x_2x_{-1} + x_6x_{-5} - x_{11}x_{-8} + x_{12}x_{-9} - x_{15}x_{-10} \\
f_{11}(x) &= x_4x_{-2} - x_5x_{-3} + x_9x_{-7} - x_{10}x_{-8} + x_{13}x_{-11} \\
f_{12}(x) &= -x_3x_{-2} + x_5x_{-4} - x_8x_{-7} + x_{10}x_{-9} - x_{13}x_{-12} \\
f_{13}(x) &= x_1x_{-1} - x_6x_{-6} + x_{11}x_{-11} - x_{12}x_{-12} + x_{14}x_{15} \\
f_{14}(x) &= x_2x_{-2} - x_5x_{-5} + x_8x_{-8} - x_9x_{-9} + x_{13}x_{15} \\
f_{15}(x) &= x_3x_{-3} - x_4x_{-4} + x_7x_{-7} - x_{10}x_{-10} + x_{13}x_{14} \\
f_{-12}(x) &= -x_2x_{-3} + x_4x_{-5} - x_7x_{-8} + x_9x_{-10} - x_{12}x_{13} \\
f_{-11}(x) &= x_2x_{-4} - x_3x_{-5} + x_7x_{-9} - x_8x_{-10} + x_{11}x_{13} \\
f_{-10}(x) &= -x_1x_{-2} + x_5x_{-6} - x_8x_{-11} + x_9x_{-12} - x_{10}x_{15} \\
f_{-9}(x) &= x_1x_{-3} - x_4x_{-6} + x_7x_{-11} - x_9x_{14} + x_{10}x_{12} \\
f_{-8}(x) &= -x_1x_{-4} + x_3x_{-6} - x_7x_{-12} + x_8x_{14} - x_{10}x_{11}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{-7}(x) &= x_1x_{-5} - x_2x_{-6} + x_7x_{15} - x_8x_{12} + x_9x_{11}\\
f_{-6}(x) &= -x_2x_{-7} + x_3x_{-8} - x_4x_{-9} + x_5x_{-10} - x_6x_{13}\\
f_{-5}(x) &= x_1x_{-7} - x_3x_{-11} + x_4x_{-12} - x_5x_{14} + x_6x_{10}\\
f_{-4}(x) &= -x_1x_{-8} + x_2x_{-11} - x_4x_{15} + x_5x_{12} - x_6x_9\\
f_{-3}(x) &= x_1x_{-9} - x_2x_{-12} + x_3x_{15} - x_5x_{11} + x_6x_8\\
f_{-2}(x) &= -x_1x_{-10} + x_2x_{14} - x_3x_{12} + x_4x_{11} - x_6x_7\\
f_{-1}(x) &= x_1x_{13} - x_2x_{10} + x_3x_9 - x_4x_8 + x_5x_7
\end{aligned}
$$

Мы часто будем пользоваться тем, что каждый столбец v матрицы из $G(\mathrm{E}_6, R)$ является *сингулярным* и, следовательно, удовлетворяет квадратичным уравнениям $f_\lambda(v) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Лемма 5. *Пусть v является столбцом матрицы $G(\mathrm{E}_6, R)$, причем строка $(v_2, \dots, v_{-1})$ унимодулярна. Если $v_j = 0$ для $j = 6, 11, 12, 13, -12, \dots, -1$ и $v_{14} + v_{15} = 0$, то $v_{14} = v_{15} = 0$.*

Доказательство. Обозначим $\xi = v_{15} = -v_{14}$. Поскольку V — столбец матрицы из $G(\mathrm{E}_6, R)$, то $f_\lambda(v) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. В частности,

$$
\begin{aligned}
0 &= f_{-2}(v) = v_2v_{14} = -\xi v_2,\\
0 &= f_{-3}(v) = v_3v_{15} = \xi v_3,\\
0 &= f_{-4}(v) = -v_4v_{15} = -\xi v_4,\\
0 &= f_{-5}(v) = -v_5v_{14} = \xi v_5,\\
0 &= f_{-7}(v) = v_7v_{15} = \xi v_7,\\
0 &= f_{-8}(v) = v_8v_{14} = -\xi v_8,\\
0 &= f_{-9}(v) = -v_9v_{14} = \xi v_9,\\
0 &= f_{-10}(v) = -v_{10}v_{15} = -\xi v_{10},\\
0 &= f_{13}(v) = v_{14}v_{15} = \xi v_{14}.
\end{aligned}
$$

Но по условию строка $(v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{14})$ унимодулярна, значит, $\xi = 0$, что и требовалось доказать.

§ 6. Параболические подгруппы

Разобьем все веса из Λ на три множества: $\{\lambda_1\}$, $\mathrm{B} \cup \Gamma$ и $\{\lambda_{13}, \lambda_{-1}\} \cup \Delta$ (это разбиение соответствует вырезанию из весовой диаграммы E_6 всех ребер, помеченных 1). Если $g_{\lambda 1} = 0$ для всех $\lambda \in \mathrm{B} \cup \Gamma$ и элемент g_{11} обратим, то из уравнений на первый столбец следует, что он совпадает с первым столбцом единичной матрицы. Иными словами, тогда g лежит в параболической подгруппе $G(\mathrm{E}_6, R)$ и по отношению к приведенному разбиению весов матрица g

имеет следующую блочную структуру:

$$g = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Диагональные блоки здесь имеют размеры 1, 16, 10 соответственно. Мы будем обозначать эту параболическую подгруппу через $P_1(R)$. Ее унипотентный радикал $U_1(R)$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & A & * \\ 0 & I_{16} & * \\ 0 & 0 & I_{10} \end{pmatrix}$$

Группа $U_1(R)$ абелева и изоморфна (как абстрактная группа) R^{16}: мы можем произвольным образом выбрать строку A длины 16, состоящую из элементов кольца R и единственным образом построить по ней матрицу из унипотентного радикала $U_1(R)$. Покажем, как это сделать явно. Обозначим через Σ_1 множество таких корней $\alpha \in E_6$, что $\lambda_1 - \alpha \in \Lambda$. Заметим, что при вычитании всех таких α из λ_1 мы получим в точности шестнадцать весов из $B \cup \Gamma$, то есть

$$\Sigma_1 = \{\lambda_1 - \lambda \mid \lambda \in B \cup \Gamma\} = \{{}^{1****}_{\ \ *} \in E_6\}.$$

Выберем произвольные шестнадцать элементов $\xi_\alpha \in R$, $\alpha \in \Sigma_1$ и рассмотрим матрицу

$$\prod_{\alpha \in \Sigma_1} x_\alpha(\xi_\alpha) \in G(E_6, R).$$

Порядок, в котором здесь перемножаются корневые элементы, не важен: все они коммутируют друг с другом. Нетрудно видеть, что эта матрица лежит в $U_1(R)$ и на пересечении ее первой строки со столбцом v^λ, $\lambda \in B \cup \Gamma$, находится элемент $\pm\xi_{\lambda_1 - \lambda}$ (знак здесь на самом деле равен знаку структурной константы $c_{\lambda, \lambda_1 - \lambda}$). Кроме того, любая матрица из $U_1(R)$ единственным образом представляется в виде такого произведения.

Аналогичным образом определяется параболическая подгруппа $P_6(R)$ и ее унипотентный радикал $U_6(R)$. Для этого рассмотрим разбиение Λ на три множества $\{\lambda_1, \lambda_{13}\} \cup B$, $\Gamma \cup \Delta$ и $\{\lambda_{-1}\}$, соответствующее вырезанию из весовой диаграммы E_6 всех ребер, помеченных 6. Матрицы из $P_6(R)$ и $U_6(R)$ имеют следующую блочную структуру относительно этого разбиения:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in P_6(R), \qquad \begin{pmatrix} I_{10} & * & * \\ 0 & I_{16} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_6(R).$$

Группа $U_6(R)$ абелева и также является произведением шестнадцати попарно коммутирующих корневых подгрупп. Действительно, пусть

$$\Sigma_6 = \{\alpha \in E_6 \mid \lambda_{-1} + \alpha \in \Lambda\} = \{{}^{****1}_{\ \ *} \in E_6\}$$

Тогда $\lambda_{-1}+\alpha \in \Gamma\cup\Delta$ для $\alpha\in\Sigma_6$. Мы можем выбрать произвольные $\xi_\alpha \in R$, $\alpha\in\Sigma_6$ и рассмотреть произведение

$$\prod_{\alpha\in\Sigma_6} x_\alpha(\xi_\alpha)\in G(\mathrm{E}_6,R).$$

Оно лежит в $U_6(R)$ и любая матрица из $U_6(R)$ представляется в таком виде.

Теперь посмотрим на пересечение $P_1(R)\cap P_6(R)$. Для этого необходимо разбить Λ на шесть множеств весов:

$$\Lambda=\{\lambda_1\}\cup \mathrm{B}\cup\Gamma\cup\{\lambda_{13}\}\cup\Delta\cup\{\lambda_{-1}\}.$$

Блочная структура матриц из пересечения $P_1(R)\cap P_6(R)$ и его унипотентного радикала такова:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in P_1(R)\cap P_6(R),\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & I_8 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & I_8 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_1(R)\cap U_6(R),$$

Обозначим через Ψ_{16} пересечение множеств $\Sigma_1\cap\Sigma_6$, а через Ψ_1 и Ψ_6 — дополнения Ψ_{16} до Σ_1 и Σ_6 соответственно. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\Psi_1&=\{\lambda_1-\lambda\mid\lambda\in\mathrm{B}\}=\{\substack{1{*}{*}{*}0\\ *}\in\mathrm{E}_6\},\\ \Psi_6&=\{\lambda-\lambda_{-1}\mid\lambda\in\Delta\}=\{\substack{0{*}{*}{*}1\\ *}\in\mathrm{E}_6\},\\ \Psi_{16}&=\{\lambda_1-\lambda\mid\lambda\in\Gamma\}=\{\lambda-\lambda_{-1}\mid\lambda\in\Gamma\}=\{\substack{1{*}{*}{*}1\\ *}\in\mathrm{E}_6\}.\end{aligned}$$

Матрица из $U_1(R)\cap U_6(R)$ единственным образом представляется в виде произведения

$$\prod_{\alpha\in\Psi_{16}} x_\alpha(\xi_\alpha)\in G(\mathrm{E}_6,R),$$

где $\xi_\alpha\in R$ для $\alpha\in\Psi_{16}$.

Лемма 6. *Пусть $g\in G(\mathrm{E}_6,R)$ такова, что $g_{11}=1$ и $g_{\lambda 1}=0$ для $\lambda\in(\mathrm{B}\cup\Gamma)\setminus\{\lambda_{15}\}$. Тогда $g_{\lambda 1}=0$ для всех $\lambda\notin\{\lambda_1,\lambda_{15}\}$.*

Доказательство. Обозначим $g_{15,1}$ через ξ и рассмотрим матрицу

$$h=x_{\_\substack{11221\\1}}(\xi)g.$$

Заметим, что $h_{15,1}=g_{15,1}-\xi g_{11}=0$. Кроме того, $h_{\lambda,1}=g_{\lambda,1}$ для всех $\lambda\in\mathrm{B}\cup\Gamma\setminus\{\lambda_{15}\}$, потому что для всех таких λ сумма $\lambda+\substack{11221\\1}$ не является весом.

Но из этого следует, что $h_{\lambda 1} = 0$ для всех $\lambda \neq \lambda_1$, то есть $h \in P_1(R)$. Отсюда, поскольку $g = x_{-\substack{11221\\1}}(-\xi)h$, видно, что

$$g_{\lambda,1} = h_{\lambda,1} = 0 \text{ для всех } \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1\}, \lambda + \substack{11221\\1} \notin \Lambda.$$

Если же $\lambda, \lambda + \substack{11221\\1} \in \Lambda$ и $\lambda \neq \lambda_{15}$, то

$$g_{\lambda,1} = h_{\lambda,1} \pm \xi h_{\lambda+\substack{11221\\1}} = h_{\lambda,1} = 0.$$

Лемма 7. *Пусть $g = \prod_{\gamma \in \Psi_{16}} x_\gamma(\xi_\gamma) \in G(\mathrm{E}_6, R)$, где $\xi_\gamma \in R$ для всех $\gamma \in \Psi_{16}$. Матрица g лежит в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ тогда и только тогда, когда $\xi_{\substack{12211\\1}} = \xi_{\substack{11221\\1}}$.*

Доказательство. Если $\xi_{\substack{12211\\1}} = \xi_{\substack{11221\\1}} = \xi$, то

$$x_{\substack{12211\\1}}(\xi_{\substack{12211\\1}})x_{\substack{11221\\1}}(\xi_{\substack{11221\\1}}) = X_{1232}(\xi),$$

а поскольку все остальные корни из Ψ_{16} лежат в Φ_l, получаем $g \in E(\mathrm{F}_4, R)$. Обратно, поскольку

$$g_{1,13} = 0, \quad g_{1,14} = -\xi_{\substack{12211\\1}}, \quad g_{1,15} = -\xi_{\substack{11221\\1}},$$

имеем

$$(gu)_1 = g_{1,13} - g_{1,14} + g_{1,15} = \xi_{\substack{12211\\1}} - \xi_{\substack{11221\\1}}.$$

По условию $gu = \lambda u$ для некоторого $\lambda \in R^*$, значит,

$$\xi_{\substack{12211\\1}} - \xi_{\substack{11221\\1}} = (gu)_1 = \lambda u_1 = 0.$$

Лемма 8. *Если $g \in P_1(R) \cap G(\mathrm{F}_4, R)$, то $g \in P_6(R)$.*

Доказательство. По условию, $g_{11} \in R^*$ и $g_{\lambda,1} = 0$ для $\lambda \neq \lambda_1$. Выберем $\lambda \in \Delta \cup \{\lambda_{13}\}$. Тогда

$$0 = B(v^1, v^\lambda) = B(gv^1, gv^\lambda) = g_{11}g_{-1,\lambda},$$

поэтому $g_{-1,\lambda} = 0$ для всех таких λ. С другой стороны, для $\lambda \in \mathrm{B} \cup \Delta \cup \{\lambda_1\}$ также имеем $g_{-1,\lambda} = 0$, поскольку $g \in P_1(R)$. Значит, последняя строка g пропорциональна последней строке единичной матрицы, то есть, $g \in P_6(R)$.

§ 7. Вычисление нормализатора $E(\mathrm{F}_4, R)$ в $G(\mathrm{E}_6, R)$

Теорема 2, говоря неформально, показывает, что $\overline{G}$ является нормализатором F_4 в E_6 не только в схемном смысле, но и поточечно: значение этого функтора на любом кольце является абстрактно-групповым нормализатором соответствующей группы. Заметим, что наше определение $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ совпадает с определением *расширенной группы Шевалле*, данным впервые в [14] для присоединенных групп, а позднее в [21] и для интересующего нас случая односвязных групп (см. также [3]). Очевидно, что $G(\mathrm{F}_4, R)$ — нормальная подгруппа в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

По самому определению $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ является аффинной схемой над $\mathbb{Z}$. Как хорошо известно, функтор точек аффинной схемы полностью определяется своими значениями на локальных кольцах. Частным случаем этого принципа является следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть* $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$, *причем* $F_M(g) \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ *для всех* $M \in \mathrm{Max}(R)$. *Тогда* $g \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

Лемма 10. *Матрица* $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ *принадлежит* $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям*

$$(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{js} = (g^{-1}F)_{ir}(Fg^T)_{js}$$

для всех $i, j, r, s = 1, \dots, -1$.

Доказательство. Пусть X — аффинная подсхема в $G(\mathrm{E}_6, -)$ над $\mathbb{Z}$, определенная этими уравнениями. Ясно, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) \subset X(R)$. По лемме 9 обратное включение достаточно доказывать для локального кольца R. Пусть $M = R \setminus R^*$ — максимальный идеал R. Для начала докажем, что если $g \in X(R)$, то найдутся i, r такие, что $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{ir} \in R^*$. Предположим противное: пусть $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{ir} \in M$ для всех i, r. Так как матрица Fg^T обратима, то для любого i найдется такое r, что $(Fg^T)_{ir} \notin M$. Так как матрица $g^{-1}F$ обратима, то для любого j найдется такое s, что $(g^{-1}F)_{js} \notin M$. Тогда $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{js} \in R^*$, но по нашему предположению $(g^{-1}F)_{ir}(Fg^T)_{js} \in M$, что противоречит тому, что $g \in X(R)$.

Теперь зафиксируем i, r такие, что $(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{ir} \in R^*$. Положим

$$\lambda = (Fg^T)_{ir}((g^{-1}F)_{ir})^{-1} \in R^*.$$

Тогда уравнения на g превращаются в $(Fg^T)_{js} = \lambda(g^{-1}F)_{js}$. Но это означает, что $Fg^T = \lambda g^{-1}F$, то есть $gFg^T = \lambda F$, откуда $g \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

Следующая теорема является небольшим усилением теоремы Таддеи [37]. Строго говоря, в [37] доказана нормальность $E(\Phi, R)$ лишь в группе Шевалле $G(\Phi, R)$, но позднее (см., например, [9–11]) было замечено, что $G(\Phi, R)$ можно заменить на $\overline{G}(\Phi, R)$. Впрочем, в интересующем нас случае $\Phi = \mathrm{F}_4$ этот факт очевидно следует из теоремы Таддеи, поскольку выполняется (1).

Лемма 11. *Элементарная подгруппа $E(\mathrm{F}_4, R)$ нормальна в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$ для любого коммутативного кольца R.*

Доказательство теоремы 2. Напомним, что через G мы обозначаем группу $G(\mathrm{E}_6, R)$. Очевидно, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) \leq N_G(G(\mathrm{F}_4, R))$ — это сразу вытекает из (1). Из леммы 11 следует, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R) \leq N_G(E(\mathrm{F}_4, R))$. Кроме того, очевидно, что

$$N_G(E(\mathrm{F}_4, R)),\ N_G(G(\mathrm{F}_4, R)) \leq \mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4, R), G(\mathrm{F}_4, R)).$$

Для окончания доказательства нам достаточно проверить включение

$$\mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4, R), G(\mathrm{F}_4, R)) \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R).$$

Возьмем какую-нибудь матрицу $g \in \mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4, R), G(\mathrm{F}_4, R))$. Для некоторых $\alpha \in \mathrm{F}_4$, $\xi \in R$ рассмотрим матрицу $h = g^{-1}X_\alpha(\xi)g$. Поскольку $h \in G(\mathrm{F}_4, R)$, имеем $hu = u$, то есть $g^{-1}X_\alpha(\xi)gu = u$. Обозначим $gu = v$, тогда $X_\alpha(\xi)v = v$. Поскольку $X_\alpha(\xi) = e + \xi e_\alpha$, получаем, что $e_\alpha v = 0$ для всех $\alpha \in \mathrm{F}_4$. Из этого немедленно следует, что если $\alpha \in \Phi_l$ и $\lambda \in \Lambda$ — такой вес, что $\lambda + \alpha \in \Lambda$, то $v^\lambda = 0$. Таким образом, у вектора v стоит 0 во всех позициях, кроме 13, 14, 15 (для всех остальных позиций нетрудно подобрать нужный корень $\alpha \in \Phi_l$). Подставив теперь в качестве α короткий корень $0001 \in \mathrm{F}_4$, получаем $v^{13} + v^{14} = 0$, а подставив $\alpha = 0010 \in \mathrm{F}_4$, получаем $v^{14} + v^{15} = 0$. Значит, $v = \lambda u$ для некоторого $\lambda \in R$ и $gu = \lambda u$, откуда по лемме 2 имеем $\lambda^3 = 1$ и, следовательно, $g \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

Простое теоретико-групповое рассуждение позволяет усилить результат теоремы 2 следующим образом.

Следствие. *В условиях теоремы 2 имеем также*

$$\mathrm{Tran}_G(E(\mathrm{F}_4, R), \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)) = \overline{G}(\mathrm{F}_4, R).$$

Доказательство. Пусть для некоторого $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ выполняется включение $[g, E(\mathrm{F}_4, R)] \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. По лемме 11

$$[g, E(\mathrm{F}_4, R), E(\mathrm{F}_4, R)] \leq E(\mathrm{F}_4, R).$$

Но группа $E(\mathrm{F}_4, R)$ совершенна (лемма 3), поэтому из леммы о трех подгруппах вытекает, что $g \in N_G(E(\mathrm{F}_4, R)) = \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$.

§ 8. Относительные группы и нижний уровень

Напомним определение относительной элементарной группы. Пусть R — коммутативное кольцо, $A \trianglelefteq R$ — идеал в нем, Φ — произвольная система корней. Тогда

$$E(\Phi, R, A) = E(\Phi, A)^{E(\Phi, R)}.$$

Следующее утверждение доказано Титсом [38].

Лемма 12. *Подгруппа $E(\mathrm{E}_6, R, A)$ порождается всеми элементами вида*

$$z_\alpha(\xi,\zeta) = {}^{x_{-\alpha}(\zeta)}x_\alpha(\xi), \qquad \xi \in A,\ \zeta \in R,\ \alpha \in \mathrm{E}_6.$$

Лемма 13. *Для идеала $A \trianglelefteq R$ имеет место равенство*

$$E(\mathrm{E}_6, A)^{E(\mathrm{F}_4,R)} = E(\mathrm{E}_6, R, A).$$

Доказательство. Ясно, что левая часть содержится в правой. Обозначим левую часть через H. По лемме 12 достаточно доказать, что если $\alpha \in \mathrm{E}_6$, $\xi \in A$, $\zeta \in R$, то $z_\alpha(\xi,\zeta) \in H$. Для $\alpha \in \Phi_l$ это очевидно; если же α не является длинным корнем F_4, значит, α и $\overline{\alpha} \neq \alpha$ проектируются в корень $\beta \in \Phi_s$. Рассмотрим в H элемент ${}^{X_{-\beta}(\zeta)}x_\alpha(\xi) = {}^{x_{-\alpha}(\pm\zeta)x_{-\overline{\alpha}}(\pm\zeta)}x_\alpha(\xi)$. Поскольку $\overline{\alpha}$ ортогонален α, этот элемент равен ${}^{x_{-\alpha}(\pm\zeta)}x_\alpha(\xi) = z_\alpha(\xi,\pm\zeta)$, что завершает доказательство.

Лемма 14. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Для $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ положим $I_\alpha = \{\xi \in R \mid x_\alpha(\xi) \in H\}$. Тогда для любого $\beta \in E_6 \setminus \Phi_l$ имеем $I_\alpha = I_\beta = I$, причем $I \trianglelefteq R$.*

Доказательство. Очевидно, что каждое множество I_α является аддитивной подгруппой в R. Возьмем сначала $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ и $\xi \in I_\alpha$. Возьмем также любое $\zeta \in R$ и $\beta \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ такой, что разность $\beta - \alpha$ лежит в Φ_l. Тогда

$$x_\beta(\pm\xi\zeta) = [x_\alpha(\xi), x_{\beta-\alpha}(\zeta)] = [x_\alpha(\xi), X_{\beta-\alpha}(\zeta)] \in H.$$

Таким образом, $I_\alpha R \subset I_\beta$. Кроме того, для некоторого выбора знаков $x_\alpha(\pm\xi)x_{\overline{\alpha}}(\pm\xi)$ лежит в $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$, откуда $I_\alpha = I_{\overline{\alpha}}$. Разобьем все положительные корни из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$ на три множества:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &: \substack{10000\\0},\ \substack{11110\\0},\ \substack{11110\\1},\ \substack{11210\\1},\ \substack{00001\\0},\ \substack{01111\\0},\ \substack{01111\\1},\ \substack{01211\\1}\\
\Theta_2 &: \substack{11000\\0},\ \substack{11100\\0},\ \substack{11100\\1},\ \substack{12210\\1},\ \substack{00011\\0},\ \substack{00111\\0},\ \substack{00111\\1},\ \substack{01221\\1}\\
\Theta_3 &: \substack{01000\\0},\ \substack{01100\\0},\ \substack{01100\\1},\ \substack{12211\\1},\ \substack{00010\\0},\ \substack{00110\\0},\ \substack{00110\\1},\ \substack{11221\\1}
\end{aligned}$$

Как нетрудно видеть, в каждом из этих множеств у любых двух корней из первой четверки разность лежит в Φ_l, а вторая четверка является образом первой четверка под действием автоморфизма $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$. Значит, для корней α в каждом из множеств Θ_i множества I_α совпадают и являются идеалами. Обозначим идеалы, соответствующие корням из Θ_1, Θ_2, Θ_3, соответственно, I_1, I_2, I_3. Рассмотрим коммутатор

$$[x_{\substack{10000\\0}}(\xi), X_{0010}(\zeta)] = [x_{\substack{10000\\0}}(\xi), x_{\substack{01000\\0}}(\pm\zeta)x_{\substack{00010\\0}}(\pm\zeta)] = x_{\substack{11000\\0}}(\pm\xi\zeta).$$

Получаем, что $I_1R \subset I_2$. Проведя еще два аналогичных вычисления, легко убедиться, что $I_1 = I_2 = I_3$. Таким образом, идеалы I_α совпадают для всех положительных $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$. Точно такое же рассуждение показывает, что идеалы I_α совпадают для всех отрицательных $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$. Осталось заметить, что разность корней $\genfrac{}{}{0pt}{}{10000}{0}$ и $-\genfrac{}{}{0pt}{}{01111}{0}$ является корнем из Φ_l, поэтому можно применить такое же вычисление, как в начале доказательства леммы, и получить совпадение идеалов для *всех* корней из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Суммируя леммы 13 и 14, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Тогда существует единственный наибольший идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что*

$$\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A) = E(\mathrm{F}_4, R)E(\mathrm{E}_6, R, A) \le H.$$

При этом, если $x_\alpha(\xi) \in H$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$, то $\xi \in A$.

Это означает, что для каждой подгруппы между $E(\mathrm{F}_4, R)$ и $G(\mathrm{E}_6, R)$ мы нашли так называемый *нижний уровень*. Для окончания доказательства теоремы 1 остается показать, что он совпадает с верхним уровнем, то есть, что $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ *нормальна* в H.

§ 9. Доказательство теоремы 3

Лемма 15. *Пусть R — коммутативное кольцо, $A \trianglelefteq R$ — идеал. Тогда группа* $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ *совершенна.*

Доказательство. Из леммы 13 следует, что $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ порождается как группа всеми корневыми элементами $x_\alpha(\zeta)$, $\alpha \in \mathrm{F}_4$, $\zeta \in R$ и корневыми элементами $x_\alpha(\xi)$, $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$, $\xi \in A$. Покажем, что все эти образующие лежат в коммутанте $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$. Для корневых элементов F_4 это вытекает из совершенности абсолютной элементарной группы (лемма 3). Теперь рассмотрим $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$ и $\xi \in A$. Как замечено в доказательстве леммы 14, найдется корень $\beta \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$ такой, что $\alpha - \beta \in \mathrm{F}_4$. Но тогда

$$x_\alpha(\xi) = [x_\beta(\xi), x_{\alpha-\beta}(\pm 1)],$$

и оба корневых элемента из правой части лежат в $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$.

Рассмотрим гомоморфизм редукции $\rho_A^{\mathrm{E}_6} : G(\mathrm{E}_6, R) \to G(\mathrm{E}_6, R/A)$ и обозначим через $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ полный прообраз $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)$ относительно этой редукции:

$$\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A) = (\rho_A^{\mathrm{E}_6})^{-1}(\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A))$$

Напомним, что через $G(\mathrm{E}_6, R, A)$ мы обозначили ядро гомоморфизма $\rho_A^{\mathrm{E}_6}$. Заметим, что $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R)G(\mathrm{E}_6, R, A) \le \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$, однако здесь возможно и строгое неравенство.

Из леммы 10 немедленно вытекает следующее описание введенной нами группы $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$.

Предложение 2. *Матрица* $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ *принадлежит* $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет сравнениям*

$$(Fg^T)_{ir}(g^{-1}F)_{js} \equiv (g^{-1}F)_{ir}(Fg^T)_{js} \pmod{A}$$

для всех $i, j, r, s = 1, \dots, -1$.

Теперь все готово для доказательства теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Напомним, что $G = G(\mathrm{E}_6, R)$. Очевидно, что

$$N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)) \leq N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)).$$

Кроме того, из теоремы 2, примененной к кольцу R/A, и теоремы о гомоморфизме следует, что

$$N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)) = \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

В частности,

$$[\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A).$$

Нам остается доказать, что $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A)$ нормализует $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$. Заметим, что

$$[\overline{G}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Действительно, рассмотрим коммутатор вида

$$[xy, hg], \quad x \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R),\ y \in G(\mathrm{E}_6, R, A),\ h \in E(\mathrm{F}_4, R),\ g \in E(\mathrm{E}_6, R, A).$$

Тогда $[xy, hg] = {}^x[y, h] \cdot [x, h] \cdot {}^h[xy, g]$. По лемме 11 второй коммутатор лежит в $E(\mathrm{F}_4, R)$. По лемме 4 коммутаторы $[xy, g]$ и $[y, h]$ лежат в $E(\mathrm{E}_6, R, A)$, следовательно, ${}^h[xy, g] \in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)$ и, снова по лемме 4, ${}^x[y, h] \in E(\mathrm{E}_6, R, A)$.

Но $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)$ содержится в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A)$, поэтому, тем более,

$$[\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)G(\mathrm{E}_6, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Резюмируя сказанное выше, мы видим, что

$$[[\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)], \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Теперь уточним этот результат: покажем, что на самом деле

$$[[\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)], [\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A), \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)]] \leq \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Заметим, что по уже доказанному левая часть порождается коммутаторами вида $[uv,[z,y]]$, где $u,y\in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$, $v\in G(\mathrm{E}_6,R,A)$, $z\in \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4,R,A)$. Но

$$[uv,[z,y]] = {}^{u}[v,[z,y]]\cdot[u,[z,y]],$$

причем второй коммутатор принадлежит $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$, а первый принадлежит $[G(\mathrm{E}_6,R,A),E(\mathrm{E}_6,R)]\le E(\mathrm{E}_6,R,A)$.

Теперь мы можем завершить доказательство. Напомним, что нам остается доказать, что $\mathrm{CG}(\mathrm{F}_4,R,A)$ нормализует $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$. По лемме 15 группа $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$ совершенна. Значит, достаточно показать, что $[z,[x,y]]\in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$ для любых $x,y\in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$, $z\in \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4,R,A)$. Тождество Холла-Витта дает

$$[z,[x,y]] = {}^{xz}[[z^{-1},x^{-1}],y]\cdot {}^{xy}[[y^{-1},z],x^{-1}],$$

причем, по уже доказанному, второй коммутатор лежит в $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$. Осталось заметить, что

$${}^{xz}[[z^{-1},x^{-1}],y] = {}^{x}[{}^{z}[z^{-1},x^{-1}],{}^{z}y] = {}^{x}[[x^{-1},z],[z,y]y]$$

и достаточно доказать, что $[[x^{-1},z],[z,y]y]\in \mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$. Но

$$\begin{aligned}[[x^{-1},z],[z,y]y] &= [x^{-1},z][z,y]y[z,x^{-1}]y^{-1}[y,z]\\ &= [[x^{-1},z],[z,y]]\cdot[z,y][x^{-1},z]y[z,x^{-1}]y^{-1}[y,z]\\ &= [[x^{-1},z],[z,y]]\cdot {}^{[z,y]}[[x^{-1},z],y],\end{aligned}$$

причем оба коммутатора $[[x^{-1},z],[z,y]]$ и $[[x^{-1},z],y]$ в полученном выражении принадлежат $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$, а сопрягающий элемент $[z,y]$ при втором коммутаторе лежит в $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)G(\mathrm{E}_6,R,A)$ и, следовательно, нормализует $\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4,R,A)$.

§ 10. Функтор локализации

Следующие леммы предоставляют техническую основу для проведения локализации. Лемма 16 является частным случаем теоремы 5.3 работы [26].

Лемма 16. *Для любого конечного числа элементов $g_1,\dots,g_n\in \overline{E}(F_4,R)$ и любого $k\ge 0$ существует такое $m\ge 0$, что*

$$[g_i,F_s(\overline{G}(\mathrm{F}_4,R,s^mR))]\le E(\mathrm{F}_4,F_s(s^kR)).$$

Лемма 17. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Пусть $X \leq G(\mathrm{E}_6, -)$ — групповая подсхема. Предположим, что для какого-то $s \in R$*

$$F_s(H)\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap X(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда найдется такое $t \in R$, что уже

$$F_t(H)\overline{E}(\mathrm{F}_4, R_t) \cap X(R_t) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_t).$$

Доказательство. Пусть $F_s(g)x$, где $g \in H$, $x \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, такой элемент. По лемме 9 найдется такой максимальный идеал $M \in \mathrm{Max}(R)$, что $s \notin M$ и $F_M(g) \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_M)$. Так как кольцо R_M локальное, то $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_M) = \overline{E}(\mathrm{F}_4, R_M)$. С другой стороны, так как $\overline{E}(\mathrm{F}_4, R_M) = \varinjlim \overline{E}(\mathrm{F}_4, R_t)$, где предел берется по всем $t \notin M$, то найдется такое $t = sq \notin M$, что $F_q(x) \in \overline{E}(\mathrm{F}_4, R_t)$. Тогда

$$F_q(F_s(g)x) = F_t(g)F_q(x) \in F_t(H)\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_t) \cap X(R_t)$$

и в силу нашего выбора M по-прежнему $F_t(g) \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_t)$.

Лемма 18. *Если в условиях предыдущей леммы $y \in F_s(H)\overline{E}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то найдется такое $n \in \mathbb{N}_0$, что*

$$[y, X_\alpha(s^n/1)] \in F_s(H)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{F}_4$.

Доказательство. Запишем y в виде $y = gx$, где $g \in F_s(H)$, $x \in \overline{E}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Тогда для любого n имеем

$$[y, X_\alpha(s^n/1)] = {}^g[x, X_\alpha(s^n/1)][g, X_\alpha(s^n/1)].$$

По лемме 16 можно выбрать n так, чтобы

$$[x, X_\alpha(s^n/1)] \in F_s(E(\mathrm{F}_4, R)) \subseteq F_s(H)$$

для всех $\alpha \in \mathrm{F}_4$. Все остальные множители в правой части принадлежат $F_s(H)$.

Следующий вспомогательный результат позволяет нам извлекать корневой элемент из группы $F_s(H)$ при помощи элементов $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, а не только элементов $F_s(\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R))$. Благодаря этому дальнейшее доказательство уже может практически не учитывать локализацию.

Предложение 3. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что найдется такое $s \in R$, что $F_s(H)\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ содержит нетривиальный элементарный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$. Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$, $\xi \in R$.*

Доказательство. По лемме 17 мы можем считать, что

$$x_\alpha(a/s^k) \in F_s(H)\overline{E}(\mathrm{F}_4, R_s)$$

для некоторых $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$, $a \in R$, $k \geq 0$, причем $a/s^k \neq 0$. Выберем корень $\beta \in \Phi_l$ такой, что $\alpha + \beta \in \mathrm{E}_6$ и рассмотрим коммутатор

$$[x_\alpha(a/s^k), x_\beta(s^{n+k}/1)] = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1).$$

В силу леммы 18 найдется n такое, что $x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1) \in F_s(H)$, то есть, найдется такое $g \in H$, что $F_s(g) = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1)$. Кроме того, $F_s(x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a)) = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a/1)$, и поэтому $g = x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a)y$ для некоторого $y \in \mathrm{Ker}(F_s)$. Следовательно, найдется $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что $y \in \mathrm{GL}(27, R, \mathrm{Ann}(s^m))$. Рассмотрим коммутатор $z = [g, x_{-\beta}(s^m)] \in H$. Так как $[y, x_{-\beta}(s^m)] = e$, то

$$z = [x_{\alpha+\beta}(\pm s^n a), x_{-\beta}(s^m)] = x_\alpha(s^{n+m}a).$$

Если $s^{m+n}a = 0$, то $a \in \mathrm{Ker}(F_s)$, что невозможно, так как мы предполагали, что $a/s^k \in R_s$ — ненулевой элемент. Значит, $z = x_\alpha(s^{m+n}a) \in H$ и есть искомый нетривиальный корневой элемент.

§ 11. Извлечение корневого элемента из унипотентных радикалов

В следующих предложениях происходит *извлечение корневого элемента*, аналогичное извлечению трансвекции в доказательствах описания надгрупп классических групп в полной линейной группе. Напомним, что $P_1(R)$, $P_6(R)$ — максимальные параболические подгруппы в $G(\mathrm{E}_6, R)$, соответствующие корням α_1 и α_6 соответственно; $U_1(R)$, $U_6(R)$ — их (абелевы) унипотентные радикалы. В этом параграфе мы показываем существование корневого элемента при наличии нетривиального элемента в пересечении унипотентных радикалов $U_1(R_s)$ и $U_6(R_s)$, затем — в их произведении, а затем — в произведении $U_1(R_s)$, $U_6(R_s)$ и тора $T(\mathrm{E}_6, R_s)$. Таким образом, происходит постепенное ослабление условий.

Предложение 4. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap U_1(R_s) \cap U_6(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Любой элемент из $U_1(R_s)\cap U_6(R_s)$ является произведением корневых элементов $x_\alpha(\xi_\alpha)$, где α имеет вид $\substack{1{*}{*}{*}1\\ *}$. Нетрудно видеть, что все такие корни, кроме $\alpha = \substack{12211\\ 1}$ и $\overline{\alpha} = \substack{11221\\ 1}$, лежат в Φ_l. Домножая на обратные к этим корневым элементам, получаем, что

$$y = x_\alpha(\xi_\alpha)x_{\overline{\alpha}}(\xi_{\overline{\alpha}}) \in F_s(H)\cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s),$$

причем $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Корни α и $\overline{\alpha}$ проектируются в один короткий корень $1232 \in \mathrm{F}_4$: $X_{1232}(\xi) = x_\alpha(\xi)x_{\overline{\alpha}}(\xi)$. Рассмотрим элемент

$$z = yX_{1232}(-\xi_\alpha) = x_{\overline{\alpha}}(\xi_{\overline{\alpha}} - \xi_\alpha) \in F_s(H)\cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Очевидно, что $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, поэтому $\xi_{\overline{\alpha}} - \xi_\alpha \neq 0 \in R_s$, и по предложению 3 в H найдется нужный нетривиальный корневой элемент.

Предложение 5. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H)\cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)\cap U_1(R_s)\cdot U_6(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Любой элемент y произведения унипотентных радикалов $U_1(R_s)\cdot U_6(R_s)$ и тора T можно представить в виде

$$y = \prod_{\gamma\in\Psi_6} x_\gamma(\xi_\gamma) \prod_{\gamma\in\Psi_1} x_\gamma(\xi_\gamma) \prod_{\gamma\in\Psi_{16}} x_\gamma(\xi_\gamma).$$

Заметим, что если мы представим, кроме этого, y в виде

$$y = \prod_{\gamma\in\Psi_1} x_\gamma(\zeta_\gamma) \prod_{\gamma\in\Psi_6} x_\gamma(\zeta_\gamma) \prod_{\gamma\in\Psi_{16}} x_\gamma(\zeta_\gamma),$$

то $\xi_\gamma = \zeta_\gamma$ для $\gamma \in \Psi_1\cup\Psi_6$ (это непосредственно следует из того, что для $\gamma \in \Psi_1$, $\delta \in \Psi_6$ имеем $[x_\gamma(\xi), x_\delta(\zeta)] = x_{\gamma+\delta}(\pm\xi\zeta)$, если $\gamma+\delta \in \Psi_{16}$, и $[x_\gamma(\xi), x_\delta(\zeta)] = 1$ в противном случае).

Для каждого корня $\gamma \in \Psi_6$ мы можем составить элемент $x_\gamma(-\xi_\gamma)x_{\overline{\gamma}}(\pm\xi_\gamma) \in E(\mathrm{F}_4, R_s)$ и домножить слева y на произведение всех таких элементов; значит, можно считать, что $\xi_\gamma = \zeta_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Psi_6$.

Выберем короткий корень $\alpha \in \mathrm{F}_4$ вида $\alpha = {*}{*}{*}1$. Соответствующие ему корни $\beta, \overline{\beta} \in \mathrm{E}_6$ выглядят так: $\beta = \substack{1{*}{*}{*}0\\ *} \in \Psi_1$, $\overline{\beta} = \substack{0{*}{*}{*}1\\ *} \in \Psi_6$. Прокоммутируем y с корневым элементом $X_\alpha(\xi) = x_\beta(\xi)x_{\overline{\beta}}(\pm\xi)$:

$$[X_\alpha(\xi), y] = {}^{x_\beta(\xi)}[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), y]\cdot [x_\beta(\pm\xi), y].$$

Пусть

$$y_6 = \prod_{\gamma\in\Psi_6} x_\gamma(\xi_\gamma), \quad y_1 = \prod_{\gamma\in\Psi_1} x_\gamma(\xi_\gamma), \quad y_{16} = \prod_{\gamma\in\Psi_{16}} x_\gamma(\xi_\gamma).$$

Тогда $y = y_6y_1y_{16}$. Прежде всего заметим, что $x_\beta(\xi)$ коммутирует со всеми $x_\gamma(\xi_\gamma)$ для $\gamma \in \Psi_1 \cup \Psi_{16}$, и, следовательно, с y_1 и y_{16}. Значит,

$$\begin{aligned}[][x_\beta(\pm\xi), y] &= [x_\beta(\pm\xi), y_6y_1y_{16}] \\ &= [x_\beta(\pm\xi), y_6] \cdot {}^{y_6}[x_\beta(\pm\xi), y_1] \cdot {}^{y_6y_1}[x_\beta(\pm\xi), y_{16}] \\ &= [x_\beta(\pm\xi), y_6].\end{aligned}$$

Аналогично, если

$$z_1 = \prod_{\gamma\in\Psi_1} x_\gamma(\zeta_\gamma), \quad z_6 = \prod_{\gamma\in\Psi_6} x_\gamma(\zeta_\gamma), \quad z_{16} = \prod_{\gamma\in\Psi_{16}} x_\gamma(\zeta_\gamma),$$

то $y = z_1z_6z_{16}$ и, следовательно,

$$[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), y] = [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1].$$

Кроме этого, y_6 является произведением коммутирующих между собой корневых элементов вида $x_\gamma(\xi_\gamma)$, $\gamma = \genfrac{}{}{0pt}{}{0{*}{*}{*}1}{*}$. Результат коммутирования $x_\beta(\pm\xi)$ с одним таким элементом равен либо e, либо корневому элементу, соответствующему корню из Ψ_{16}, и, следовательно, коммутирует со всеми корневыми элементами $x_\gamma(\xi_\gamma)$, $\gamma \in \Psi_1 \cup \Psi_6 \cup \Psi_{16}$. Таким образом,

$$[x_\beta(\pm\xi), y_6] = [x_\beta(\pm\xi), \prod_{\gamma\in\Psi_6} x_\gamma(\xi_\gamma)] = \prod_{\gamma\in\Psi_6} [x_\beta(\pm\xi), x_\gamma(\xi_\gamma)].$$

Аналогичное рассуждение показывает, что

$$[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1] = [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), \prod_{\gamma\in\Psi_1} x_\gamma(\zeta_\gamma)] = \prod_{\gamma\in\Psi_1} [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), x_\gamma(\zeta_\gamma)]$$

и, поскольку $[x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), y] = [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1]$ оказалось произведением корневых элементов, соответствующих корням из Ψ_{16}, оно коммутирует с $x_\beta(\xi)$. Значит,

$$\begin{aligned} z = [x_\alpha(\xi), y] &= [x_\beta(\pm\xi), y_6] \cdot [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), z_1] \\ &= \prod_{\gamma\in\Psi_6} [x_\beta(\pm\xi), x_\gamma(\xi_\gamma)] \prod_{\gamma\in\Psi_1} [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), x_\gamma(\zeta_\gamma)]\end{aligned}$$

Каждый из получившихся коммутаторов является корневым элементом вида $x_\gamma(*)$, $\gamma \in \Psi_{16}$, то есть все произведение лежит в $U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$. Если мы покажем, что можно подобрать α так, что $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то мы попадем в условие предложения 4 и доказательство будет закончено. Теперь вспомним, что $\xi_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Psi_6$ и $\xi_\gamma = \zeta_\gamma$ для всех $\gamma \in \Psi_1 \cup \Psi_6$. Значит,

$$z = \prod_{\gamma \in \Psi_1} [x_{\overline{\beta}}(\pm\xi), x_\gamma(\xi_\gamma)]$$

Но по лемме 7 элемент $z = \prod_{\gamma \in \Psi_{16}} x_\gamma(\eta_\gamma)$ лежит в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ тогда и только тогда, когда $\eta_{\substack{12211\\1}} = \eta_{\substack{11221\\1}}$. Теперь рассмотрим все возможные α:

$$\begin{aligned}
&\alpha = 0001, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}00001\\0\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{12210\\1}}, && \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 0011, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}00011\\0\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, && \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11210\\1}};\\
&\alpha = 0111, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}00111\\0\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, && \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11110\\1}};\\
&\alpha = 1111, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}00111\\1\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, && \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11110\\0}};\\
&\alpha = 0121, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}01111\\0\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11100\\1}}, && \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 1121, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}01111\\1\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11100\\0}}, && \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 1122, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}01211\\1\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{11000\\0}}, && \eta_{\substack{11221\\1}} = 0;\\
&\alpha = 1132, && \overline{\beta} = \begin{smallmatrix}01221\\1\end{smallmatrix}, && \eta_{\substack{12211\\1}} = 0, && \eta_{\substack{11221\\1}} = \pm\xi\xi_{\substack{10000\\0}};
\end{aligned}$$

По нашему предположению, все получающиеся z лежат в $\overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Значит, $\xi_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Psi_1$, что означает, что $y \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$, и мы можем применить предложение 4.

Предложение 6. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap U_1(R_s) \cdot U_6(R_s) \cdot T(\mathrm{E}_6, R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. После домножения на подходящий элемент $T(\mathrm{F}_4, R_s)$ можно считать, что мы нашли элемент $y = zd \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \setminus \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, где

$$z \in U_1(R_s) \cdot U_6(R_s), \quad d = h_{\substack{10000\\0}}(\varepsilon) h_{\substack{01000\\0}}(\eta)$$

для некоторых $\varepsilon, \eta \in R_s^*$.

Возьмем $\beta = \begin{smallmatrix}10000\\0\end{smallmatrix}$, $\overline{\beta} = \begin{smallmatrix}00001\\0\end{smallmatrix}$, $\alpha = 0001 \in \mathrm{F}_4$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} g &= [X_\alpha(\xi), y] \\ &= X_\alpha(\xi) z d x_\beta(-\xi) x_{\overline{\beta}}(-\xi) d^{-1} z^{-1} \\ &= X_\alpha(\xi) z x_\beta(-\varepsilon^2 \eta \xi) x_{\overline{\beta}}(-\xi) z^{-1} \end{aligned}$$

Посмотрим, что происходит при коммутировании z с корневым элементом $x_\beta(*)$. z является произведением корневых элементов $x_\gamma(*)$, где $\gamma \in \Psi_1 \cup \Psi_6 \cup \Psi_{16}$. Поскольку $\beta \in \Psi_1$, элемент $x_\beta(*)$ коммутирует с $x_\gamma(*)$ при всех γ таких, что $\beta + \gamma \notin \mathrm{E}_6$. Если же $\beta + \gamma \in \mathrm{E}_6$, то $\gamma \in \Psi_6$, $\beta + \gamma \in \Psi_{16}$ и $[x_\beta(*), x_\gamma(*)] = x_{\beta+\gamma}(*)$. Таким образом,

$$[z, x_\beta(*)] \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s).$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что

$$[z, x_{\overline{\beta}}(*)] \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s).$$

Значит,

$$\begin{aligned} g &= X_\alpha(\xi) u x_\beta(-\varepsilon^2 \eta \xi) x_{\overline{\beta}}(-\xi) z z^{-1} \\ &= u x_\beta((1 - \varepsilon^2 \eta)\xi) \end{aligned}$$

для некоторого $u \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$.

Если $g \notin G(\mathrm{F}_4, R_s)$, мы можем применить предложение 5. Нетрудно видеть, что $g_{12} = (1 - \varepsilon^2\eta)\xi$ и $g_{-2,-1} = 0$. Но если $g \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$, то

$$0 = B(v^2, v^{-1}) = B(gv^2, gv^{-1}) = g_{12} - g_{-2,-1}.$$

Подставляя $\xi = 1$, получаем, что $\varepsilon^2 \eta = 1$.

Теперь повторим это рассуждение для $\beta = \begin{smallmatrix}11000\\0\end{smallmatrix}$, $\overline{\beta} = \begin{smallmatrix}00011\\0\end{smallmatrix}$, $\alpha = 0011 \in \mathrm{F}_4$. На этот раз

$$\begin{aligned} g &= [X_\alpha(\xi), y] \\ &= X_\alpha(\xi) z d x_\beta(-\xi) x_{\overline{\beta}}(\xi) d^{-1} z^{-1} \\ &= X_\alpha(\xi) z x_\beta(-\varepsilon \eta \xi) x_{\overline{\beta}}(\xi) z^{-1} \end{aligned}$$

При коммутировании z с $x_\beta(*)$ и $x_{\overline{\beta}}(*)$ вновь получаются элементы из $U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$, поэтому

$$\begin{aligned} g &= X_\alpha(\xi) u x_\beta(-\varepsilon \eta \xi) x_{\overline{\beta}}(\xi) z z^{-1} \\ &= u x_\beta((1 - \varepsilon\eta)\xi) \end{aligned}$$

для некоторого $u \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$.

Если $g \notin G(\mathrm{F}_4, R_s)$, мы можем применить предложение 5. Как и в предыдущем рассуждении, нетрудно видеть, что $g_{13} = (1-\varepsilon\eta)\xi$, $g_{-3,-1} = g_{-2,-1} = 0$. Но если $g \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$, то

$$0 = B(v^3, v^{-1}) = B(gv^3, gv^{-1}) = g_{13} + g_{-2,-1}.$$

Подставляя $\xi = 1$, получаем, что $\varepsilon\eta = 1$. Из равенств $\varepsilon\eta = \varepsilon^2\eta = 1$ получаем, что $\varepsilon = \eta = 1$. Но это означает, что $d = 1$, $y \in U_1(R_s) \cdot U_6(R_s)$ и мы могли с самого начала применить предложение 5

§ 12. Извлечение корневого элемента из параболических подгрупп

Ослабление условий продолжается: в этом параграфе мы извлекаем корневой элемент из параболических подгрупп (сначала из пересечения $P_1(R_s)$ и $P_6(R_s)$, а потом из $P_1(R_s)$), фактически сводя задачу к уже проведенному извлечению из унипотентных радикалов. Неформально говоря, здесь мы избавляемся от факторов Леви.

Предложение 7. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s) \cap P_6(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Пусть $y \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s) \cap P_6(R_s)$ и $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ Выберем $\alpha \in \Sigma_1 \cap \Phi_l$, то есть длинный корень F_4 такой, что $\omega - \alpha \in \Lambda$ и рассмотрим $z = y^{-1}X_\alpha(1)y$. Заметим, что $\omega - \alpha \in \mathrm{B}$. Нетрудно видеть, что $z \in U_1(R_s) \cap U_6(R_s)$, и, если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то мы можем применить предложение 4. Теперь можно считать, что $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, но тогда $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Для любого $j \in \Gamma$

$$z_{1j} = \sum_{\lambda, \lambda+\alpha \in \Lambda} c_{\lambda,\alpha} y'_{1,\lambda+\alpha} y_{\lambda,j} = c_{\omega-\alpha,\alpha} y'_{11} y_{\omega-\alpha,j},$$

поскольку для пяти остальных слагаемых множитель $y_{\lambda,j}$ обращается в 0: действительно, у четырех из остальных слагаемых $\lambda \in \Delta$, но $y_{\Delta,\Gamma} = 0$; у пятого же $\lambda = -\omega$, но $y_{-1,\Gamma} = 0$. Кроме этого,

$$z_{1,13} = \sum_{\lambda, \lambda+\alpha \in \Lambda} c_{\lambda,\alpha} y'_{1,\lambda+\alpha} y_{\lambda,13} = c_{\omega-\alpha,\alpha} y'_{11} y_{\omega-\alpha,13} = 0,$$

поскольку $y_{\Delta,13} = 0$, $y_{-1,13} = 0$ и $y_{\mathrm{B},13} = 0$. По нашему предположению $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$, то есть $zu = u$, откуда $z_{1,13} - z_{1,14} + z_{1,15} = 0$. Это означает, что $c_{\omega-\alpha,\alpha}\xi y'_{11}(-y_{\omega-\alpha,14}+y_{\omega-\alpha,15})=0$. Поскольку $c_{\omega-\alpha,\alpha}=\pm1$ и $y'_{11}\in R^*$, мы получаем $-y_{\omega-\alpha,14}+y_{\omega-\alpha,15}=0$. В то же время, $y_{\omega-\alpha,13}=0$, поскольку $\omega-\alpha\in\mathrm{B}$. Варьируя α, мы получаем, что для всех $\lambda\in\Gamma\setminus\{14,15\}$ выполняется $y_{\lambda,13}-y_{\lambda,14}+y_{\lambda,15}=0$.

Теперь возьмем $\alpha=1232\in\Phi_s$, $\beta=\substack{12211\\1}\in\mathrm{E}_6$, $\overline{\beta}=\substack{11221\\1}\in\mathrm{E}_6$ и рассмотрим
$$z=y^{-1}X_\alpha(1)y=y^{-1}x_\beta(1)x_{\overline{\beta}}(1)y.$$
Аналогично, $z\in U_1(R_s)\cap U_6(R_s)$, и можно считать, что $z\in G(\mathrm{F}_4,R_s)$. Для любого $j\in\Gamma$
$$\begin{aligned}z_{1j}&=\sum_{\lambda,\lambda+\beta\in\Lambda}c_{\lambda,\beta}y'_{1,\lambda+\beta}y_{\lambda,j}+\sum_{\lambda,\lambda+\overline{\beta}\in\Lambda}c_{\lambda,\overline{\beta}}y'_{1,\lambda+\overline{\beta}}y_{\lambda,j}\\&=c_{\omega-\beta,\beta}y'_{11}y_{\omega-\beta,j}+c_{\omega-\overline{\beta},\overline{\beta}}y'_{11}y_{\omega-\overline{\beta},j}=-y'_{11}(y_{14,j}+y_{15,j}),\end{aligned}$$
поскольку $c_{\omega-\beta,\beta}=c_{\omega-\overline{\beta},\overline{\beta}}=-1$. Далее,
$$\begin{aligned}z_{1,13}&=\sum_{\lambda,\lambda+\beta\in\Lambda}c_{\lambda,\beta}y'_{1,\lambda+\beta}y_{\lambda,13}+\sum_{\lambda,\lambda+\overline{\beta}\in\Lambda}c_{\lambda,\overline{\beta}}y'_{1,\lambda+\overline{\beta}}y_{\lambda,13}\\&=c_{\omega-\beta,\beta}y'_{11}y_{\omega-\beta,13}+c_{\omega-\overline{\beta},\overline{\beta}}y'_{11}y_{\omega-\overline{\beta},13}=0.\end{aligned}$$
По нашему предположению $z\in G(\mathrm{F}_4,R_s)$, откуда $z_{1,13}-z_{1,14}+z_{1,15}=0$ и $y'_{11}(y_{14,14}+y_{15,14}-y_{14,15}-y_{15,15})=0$. Обозначим $-y_{15,14}+y_{15,15}=\xi$, $y_{13,13}=\zeta$, тогда $-y_{14,14}+y_{14,15}=-\xi$. Кроме того, $y_{14,13}=y_{15,13}=0$.

Рассмотрим блочно-диагональную матрицу g, образованную подматрицами y_{11}, y_{BB}, $y_{\Gamma\Gamma}$, $y_{13,13}$, $y_{\Delta\Delta}$, $y_{-1,-1}$. Поскольку g — часть Леви матрицы y относительно разложения Леви для параболической подгруппы $P_1(R_s)\cap P_6(R_s)$, имеем $g\in G(\mathrm{E}_6,R_s)$.

Сейчас мы покажем, что можно домножить g на некоторую диагональную матрицу из $G(\mathrm{E}_6,R_s)$ так, чтобы результат оказался в $G(\mathrm{F}_4,R_s)$. Посмотрим на вектор gu. По построению матрицы g имеем
$$(gu)_\lambda=g_{\lambda,13}-g_{\lambda,14}+g_{\lambda,15}=0 \text{ для } \lambda\in\mathrm{B}\cup\Delta\cup\{1,-1\}.$$
Кроме того,
$$(gu)_\lambda=g_{\lambda,13}-g_{\lambda,14}+g_{\lambda,15}=y_{\lambda,13}-y_{\lambda,14}+y_{\lambda,15}=0=ru_\lambda \text{ для } \lambda\in\Gamma\setminus\{14,15\}.$$
Наконец,
$$\begin{aligned}(gu)_{13}&=g_{13,13}-g_{13,14}+g_{13,15}=y_{13,13}=\zeta\\(gu)_{14}&=g_{14,13}-g_{14,14}+g_{14,15}=y_{14,13}-y_{14,14}+y_{14,15}=-\xi\\(gu)_{15}&=g_{15,13}-g_{15,14}+g_{15,15}=y_{15,13}-y_{15,14}+y_{15,15}=\xi\end{aligned}$$

Заметим, что $\zeta \in R_s^*$. Посмотрим внимательнее на обратимую матрицу $g_{\Gamma\Gamma} = y_{\Gamma\Gamma}$. Вычтем из столбца $y_{\Gamma,15}$ столбец $y_{\Gamma,14}$. Полученная матрица тоже обратима, и в ее столбце с номером 15 все элементы равны 0, кроме двух: $-\xi$ на позиции 14 и ξ на позиции 15. Значит, $\xi \in R_s^*$.

Итак, мы показали, что

$$gu = \zeta v^{13} - \xi v^{14} + \xi v^{15}, \text{ где } \xi, \zeta \in R_s^*.$$

Теперь уже нетрудно «подправить» g на диагональную матрицу из $G(\mathrm{E}_6, R_s)$ так, чтобы она попала в $G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Заметим сначала, что

$$-1 = Q(u) = Q(gu) = -\zeta\xi^2,$$

откуда $\zeta = \xi^{-2}$. Рассмотрим теперь произведение весовых элементов

$$h = h_{\beta_6}(\xi^2)h_{\beta_5}(\xi).$$

Нетрудно видеть, что $hgu = u$, то есть $hg \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$. Рассмотрим произведение $y(hg)^{-1}$ Кроме того, произведение $y(hg)^{-1}$ лежит в $T \cdot U_1(R_s) \cdot U_6(R_s)$, и в то же время $y(hg)^{-1} \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ и $y(hg)^{-1} \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Значит, мы можем применить предложение 6; доказательство окончено.

Предложение 8. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ имеем*

$$F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s) \not\subseteq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s).$$

Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.

Доказательство. Пусть $y \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s) \cap P_1(R_s)$ и $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Как и в доказательстве предыдущего предложения, выберем $\alpha \in \Sigma_1 \cap \Phi_l$, то есть длинный корень F_4 такой, что $\omega - \alpha \in \Lambda$ и рассмотрим $z = y^{-1}X_\alpha(1)y$. Нетрудно видеть, что $z \in U_1$. Если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то мы можем применить предложение 5. Если же $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то на самом деле $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$. В таком случае $B(zv^i, zv^j) = B(v^i, v^j)$ для всех $i, j \in \Lambda$. В частности, для $i \in \mathrm{B}$ и $j = -\omega$ мы получаем, что $B(z_{*i}, z_{*,-1}) = 0$. Это означает, что $z_{1i}z_{-1,-1} + z_{ii}z_{-i,-1} = 0$. Но $z_{-1,-1} = 1$ и $z_{-i,-1} = 0$, поскольку $-i \in \Delta$. Получаем, что $z_{1i} = 0$. Но

$$z_{1i} = \sum_{\lambda, \lambda+\alpha \in \Lambda} \pm y'_{1,\lambda+\alpha} y_{\lambda,i}$$

Нетрудно видеть, что любой корень $\alpha \in \Sigma_1 \cap \Phi_l$ совершает одно прибавление от веса $\omega - \alpha \in \Gamma$ к весу ω, четыре прибавления от каких-то весов из группы Δ и одно прибавление от $-\omega$ Поскольку y лежит в P_1, последние пять прибавлений ничего не дают: для них $y_{\lambda,i} = 0$, и $z_{1i} = \pm y'_{11} y_{\omega-\alpha,i}$. Кроме этого, элемент y'_{11} обратим. Отсюда $y_{\omega-\alpha,i} = 0$.

Теперь рассмотрим *короткий* корень $\alpha = 1232$. Корневой элемент $X_\alpha(1)$ является произведением двух корневых элементов E_6, а именно, $X_\alpha(1) = x_{\substack{11221\\1}}(1) x_{\substack{12211\\1}}(1)$, оба из которых лежат в U_1. Поэтому к нему применимы такие же рассуждения, и мы получаем $y_{14,i} + y_{15,i} = 0$ для всех $i \in \mathrm{B}$.

Получаем, что если $v = y_{*i}$ — столбец матрицы y с номером $i \in \mathrm{B}$, то мы находимся в условиях леммы 5 и, следовательно, $v_{14} = v_{15} = 0$. Таким образом, $y_{ij} = 0$ для всех $i \in \Gamma$, $j \in \mathrm{B}$.

Возьмем $i \in \Gamma$, $j \in \Delta$ и применим уравнения на матрицу z к *строкам* z_{i*} и $z_{-j,*}$. Эти уравнения означают, что $B(z_{i*}, z_{-j,*}) = 0$. Так как в строке $z_{-j,*}$ все коэффициенты на позициях из $\mathrm{B} \cup \Gamma \cup \{\lambda_{13}\}$, кроме $z_{-j,-j} = 1$, равны нулю, это уравнение превращается в $z_{ij} = 0$. Но $z_{ij} = \sum \pm y'_{i,\lambda+\alpha} y_{\lambda,j} = \pm y'_{i,-\omega+\alpha} y_{-\omega,j}$, поскольку мы уже знаем, что $y'_{i,\lambda+\alpha} = 0$ для $i \in \Gamma$, $\lambda + \alpha \in \{\omega\} \cup \mathrm{B}$. Но $-\omega + \alpha \in \Gamma$, и строка $y'_{i,\lambda_{-1}+\alpha}$ (i пробегает Γ) является строкой обратимой матрицы $y'_{\Gamma\Gamma}$, поэтому $y_{-1,j} = 0$.

Теперь посмотрим на столбец $z_{*,13}$. Для $i \in \{6, 11, 12, -12, -11, -6\}$ имеем $B(z_{*,13}, z_{*,-i}) = 0$, откуда $z_{i,13} = 0$. Наконец, $B(z_{*,13}, z_{*,14}) = 1$, откуда $z_{13,13} + z_{15,13} = 1$, значит, $z_{15,13} = 0$. Аналогично, $B(z_{*,13}, z_{*,15}) = -1$, откуда $-z_{13,13} + z_{14,13} = -1$, значит, $z_{14,13} = 0$. Мы доказали, что $z_{i,13} = 0$ для всех $i \in \mathrm{B}$. Теперь можно повторить вычисление из предыдущего абзаца, положив $j = 13$: получим, что $y_{-1,13} = 0$. Значит, последняя строка матрицы y пропорциональна последней строке единичной матрицы, откуда $y \in P_1 \cap P_6$, и мы можем применить предложение 7.

§ 13. Извлечение корневого элемента: окончание

Нам осталось попасть в параболическую подгруппу; но над локальным кольцом орбиты действия $G(\mathrm{F}_4, R)$ и $G(\mathrm{E}_6, R)$ не совпадают (поскольку рассматриваемое представление F_4 приводимо), поэтому сначала нам приходится провести еще одно ослабление условий и потребовать наличие нетривиального элемента в произведении параболической подгруппы на некоторый корневой элемент E_6.

Предложение 9. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Предположим, что для некоторого $s \in R$ найдется элемент $g \in F_s(H) \cdot \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ такой, что $g \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$ и первый столбец g совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме, быть может, λ_{15}. Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент, соответствующий корню из $\mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$.*

Доказательство. Обозначим $a = g_{15,1}$ и рассмотрим $h = x_{-\substack{11221\\1}}(a) g$. Нетрудно видеть, что h лежит в параболической подгруппе $P_1(R_s)$. Выберем $\alpha \in \mathrm{F}_4$,

$\xi \in R$ и рассмотрим

$$z = X_\alpha(\xi)^g = g^{-1}X_\alpha(\xi)g = h^{-1}x_{-\substack{11221\\1}}(a)X_\alpha(\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a)h.$$

Предположим также, что $\alpha = {*}{*}{*}1 \in \Phi_s$; тогда $X_\alpha(\xi) = x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)$, где $\alpha' = \substack{1{*}{*}{*}0\\{*}}$, $\alpha'' = \substack{0{*}{*}{*}1\\{*}}$ — корни E_6. Потребуем дополнительно $\alpha' - \substack{11221\\1} \in \mathrm{E}_6$ и $\alpha'' - \substack{11221\\1} \notin \mathrm{E}_6$ (на самом деле эти два условия равносильны). Тогда

$$\begin{aligned} x_{-\substack{11221\\1}}(a)X_\alpha(\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a) &= x_{-\substack{11221\\1}}(a)x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a) \\ &= x_{-\substack{11221\\1}}(a)x_{\alpha'}(\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a)x_{\alpha''}(\pm\xi) \\ &= x_{\alpha'}(\xi)[x_{\alpha'}(-\xi), x_{-\substack{11221\\1}}(a)]x_{\alpha''}(\pm\xi) \\ &= x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha'-\substack{11221\\1}}(\pm a\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi). \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha' - \substack{11221\\1}$ имеет вид $-\substack{0{*}{*}{*}{*}\\{*}}$, все произведение лежит в $P_1(R_s)$. Значит, $z \in P_1(R_s)$ и, если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, можно применить предложение 8.

Если же $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$ и по лемме 8 на самом деле $z \in P_1(R_s) \cap P_6(R_s)$. Кроме того, $z_{11} = z_{-1,-1} = 1$. Значит, последняя строка z совпадает с последней строкой единичной матрицы. Пусть $w = h'_{-1,*} \in {}^{27}R$ — последняя строка матрицы h^{-1}. Имеет место равенство $zh^{-1} = h^{-1}x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha'-\substack{11221\\1}}(\pm a\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)$. В левой части его стоит матрица, последняя строка которой совпадает с w. В правой же части стоит матрица $h^{-1}(e+\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''})$. Значит, последняя строка матрицы $h^{-1}(\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''})$ — нулевая, то есть $w(\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''}) = 0$. Теперь воспользуемся явными формулами: $(we_\gamma)_\lambda = \pm w_{\lambda+\gamma}$, если $\lambda + \gamma \in \Lambda$; $(we_\gamma)_\lambda = 0$, если $\lambda + \gamma \notin \Lambda$. Подставляя $\xi = 1$, $\alpha = 0001$, 0121, 1121, 1221 и рассматривая $w(\xi e_{\alpha'} \pm a\xi e_{\alpha'-\substack{11221\\1}} \pm \xi e_{\alpha''})_\lambda$ для $\lambda = \lambda_{-1}$ и $\lambda = \lambda_{-10}$, получаем, что $w_{-1} = w_{-5} = w_{-8} = w_{-9} = w_{13} = 0$. Кроме этого, подставляя $\xi = 1$, $\alpha = 1221$, $\lambda = \lambda_{-3}$, получаем, что $aw_{-1} = 0$

Теперь выберем $\alpha = {*}{*}{*}0 \in \Phi_l$ и проведем аналогичное рассуждение: сейчас $X_\alpha(\xi) = x_\alpha(\xi)$, где $\alpha = \substack{0{*}{*}{*}0\\{*}} \in \mathrm{E}_6$. При этом автоматически $\alpha - \substack{11221\\1} \notin \mathrm{E}_6$. Тогда $x_{-\substack{11221\\1}}(a)X_\alpha(\xi)x_{-\substack{11221\\1}}(-a) = x_\alpha(\xi)$ и матрица z снова лежит в $P_1(R_s)$. Если $z \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то можно применить предложение 8. Если же $z \in \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$, то $z \in G(\mathrm{F}_4, R_s)$ и (по лемме 8) $z \in P_1(R_s) \cap P_6(R_s)$, причем $z_{11} = z_{-1,-1} = 1$, то есть последняя строка z совпадает с последней строкой единичной матрицы. Поскольку $zh^{-1} = h^{-1}x_\alpha(\xi)$, мы имеем $w = wx_\alpha(\xi)$ и, следовательно, $we_\alpha = 0$ (можно подставить $\xi = 1$). Значит, $w_{\lambda+\alpha} = 0$, если $\lambda, \lambda + \alpha \in \Lambda$. Подставляя $\alpha = \pm 1000$, ± 0100, ± 0120, получаем, что $w_{-3} = w_{-4} = w_{-7} = w_{-10} = 0$.

Итак, мы получили, что все элементы последней строки w матрицы h^{-1} равны 0, кроме $h'_{-1,-1}$ и, кроме этого, $ah'_{-1,-1} = 0$. Но матрица h^{-1} обратима, поэтому $h'_{-1,-1} \in R^*$, откуда $a = 0$ и, значит, мы с самого начала были в условиях предложения 8.

Если R — локальное кольцо, то сингулярные векторы из R^{27} образуют одну орбиту под действием $E(\mathrm{E}_6, R)$. Следующее утверждение фактически описывает орбиты, на которые она распадается при сужении группы действия до $E(\mathrm{F}_4, R)$.

Предложение 10. *Пусть R — локальное кольцо и $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$. Тогда найдется элемент $x \in E(\mathrm{F}_4, R)$ такой, что первый столбец матрицы xg совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме, быть может, λ_{15}.*

Доказательство. Пусть M — максимальный идеал кольца R. Покажем сначала, что найдется $x_1 \in E(\mathrm{F}_4, R)$ такой, что $(x_1 g)_{11} = 1$

Поскольку R локально, найдется $\lambda \in \Lambda$ такой, что $g_{\lambda 1}$ обратим. Рассмотрим несколько случаев:

(1) $\lambda \in \mathrm{B}$. Обозначим $\alpha = \omega - \lambda \in \Phi_s$ и рассмотрим элемент

$$h = X_\alpha((1 - g_{11})g_{\lambda 1}^{-1})g.$$

При этом $X_\alpha(\xi) = x_{\alpha'}(\xi)x_{\alpha''}(\pm\xi)$, где $\alpha' = \begin{smallmatrix}1{*}{*}{*}0\\ {*}\end{smallmatrix}, \alpha'' = \begin{smallmatrix}0{*}{*}{*}1\\ {*}\end{smallmatrix}$. Тогда $h_{11} = g_{11} \pm (1 - g_{11})g_{\lambda 1}^{-1} g_{\lambda 1}$. Заменяя знак в аргументе X_α, если необходимо, можно добиться $h_{11} = 1$.

(2) $\lambda \in \Gamma \setminus \{\lambda_{14}, \lambda_{15}\}$. Точно так же обозначим $\alpha = \omega - \lambda$ (теперь $\alpha \in \Phi_l$) и рассмотрим элемент $h = X_\alpha((1 - g_{11})g_{\lambda 1}^{-1})g$. Как и в предыдущем случае, при необходимости меняя знак аргумента X_α, получаем $h_{11} = 1$.

(3) $\lambda = \lambda_1$. Сначала получим 1 в позиции 10 первого столбца: положим $\alpha = \lambda_{10} - \lambda_1 = 1231 \in \Phi_s$ и $h = X_\alpha((1 - g_{10,1})g_{11}^{-1})g$. При необходимости меняя знак аргумента, получаем $h_{10,1} = 1$, и можно воспользоваться уже рассмотренным случаем (1).

(4) $\lambda = \lambda_{-1}$. Сейчас нетрудно получить 1 в позиции -6: положим $\alpha = \lambda_{-6} - \lambda_{-1} = 0122 \in \Phi_l$, $h = X_\alpha((1 - g_{-6,1})g_{-1,1}^{-1})g$, и, с возможной заменой знака, получаем $h_{-6,1} = 1$, что приводит нас к уже рассмотренному случаю (2).

(5) $\lambda \in \Delta$. Аналогично, нетрудно подобрать $\alpha \in \Phi_l$ такой, что $\lambda + \alpha \in \mathrm{B}$; например, можно взять $\alpha = 0122$ для $\lambda \in \{\lambda_{-10}, \lambda_{-9}, \lambda_{-8}, \lambda_{-7}\}$ и $\alpha = 2342$ для $\lambda \in \{\lambda_{-5}, \lambda_{-4}, \lambda_{-3}, \lambda_{-2}\}$. Рассмотрим после этого $h = X_\alpha((1 - g_{\lambda+\alpha,1})g_{\lambda,1}^{-1})g$. Заменив при необходимости знак, получаем $h_{\lambda+\alpha,1} = 1$, и можно воспользоваться случаем (1).

(6) Теперь можно считать, что $g_{\lambda,1} \in M$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}\}$. Заметим, что элементы $g_{13,1}$, $g_{14,1}$, $g_{15,1}$ не могут быть одновременно

обратимыми: иначе $Q(g_{*1})$ сравнимо с $\pm g_{13,1}g_{14,1}g_{15,1}$ по модулю M, то есть, обратимо; но, с другой стороны, столбец g_{*1} сингулярен, поэтому $Q(g_{*1}) = 0$. Предположим, что $g_{14,1} \in R^*$. Нам известно, что хотя бы один из элементов $g_{13,1}$, $g_{15,1}$ лежит в M. Пусть, например, $g_{13,1} \in M$. Рассмотрим $\alpha = 0001 \in \Phi_s$, $\xi = (1 - g_{10,1})g_{14,1}^{-1}$ и $h = X_\alpha(\xi)$. Поскольку $X_\alpha(\xi) = x_{10000}(\xi)x_{00001}(\pm\xi)$, мы имеем $h_{10,1} = g_{10,1} \pm \xi g_{14,1} \pm \xi g_{13,1} =$ $g_{10,1} \pm (1 - \overset{0}{g}_{10,1}) \pm \overset{0}{\xi} g_{13,1}$. При необходимости меняя знак у ξ, можно добиться того, что $h_{10,1} = 1 \pm \xi g_{13,1} \in R^*$, поскольку $g_{13,1} \in M$, и мы можем попали в условия случая (1). Аналогично, если $g_{15,1} \in M$, достаточно взять $\alpha = 0010 \in \Phi_s$ и $\xi = (1 - g_{12,1})g_{14,1}^{-1}$; тогда $h_{12,1} \in R^*$, где $h = X_\alpha(\pm\xi)g$, и мы попали в условия случая (2). Совершенно так же рассматривается случай $g_{14,1} \in M$, ибо хотя бы один из элементов $g_{13,1}$, $g_{15.1}$ обратим.

Итак, теперь у нас есть $x_1 \in E(\mathrm{F}_4, R)$ и $y = x_1 g$ такой, что $y_{11} = 1$. Покажем, что можно осуществить прибавления от первого элемента первого столбца вниз так, чтобы поставить 0 во все позиции кроме, быть может, λ_{15}. Сначала получим 0 в позициях из В: положим $x_2 = \prod_{\lambda \in \mathrm{B}} X_{\lambda-\omega}(\pm y_{\lambda 1})$ и $z = x_2 y$. Знаки здесь следует выбрать так, чтобы элемент $X_{\lambda-\omega}(\pm y_{\lambda 1})$ осуществлял *вычитание* с коэффициентом y_{λ_1} первой строчки из строчки с номером λ при действии на матрицах слева. Другими словами, нам нужно, чтобы матричный элемент $(X_{\lambda-\omega}(\pm y_{\lambda 1}))_{\lambda 1}$ равнялся $-y_{\lambda 1}$, а не $y_{\lambda 1}$. Легко видеть, что $z_{\lambda 1} = 0$ для всех $\lambda \in B$.

Теперь можно поставить 0 во все позиции из Г, кроме λ_{14} и λ_{15}: рассмотрим $x_3 = \prod_{\lambda \in \Gamma} X_{\lambda-\omega}(\pm z_{\lambda 1})$ и $u = x_3 z$ с аналогичным выбором знаков.

Если теперь $u_{14,1} \neq 0$, рассмотрим $x_4 = X_{1232}(\pm u_{14,1})$ и $v = x_4 u$. Можно выбрать знак так, что $v_{14,1} = 0$.

Таким образом, мы нашли x такой, что $(xg)_{11} = 1$ и $(xg)_{\lambda 1} = 0$ для $\lambda \in (\mathrm{B} \cup \Gamma) \setminus \{\lambda_{15}\}$. По лемме 6 из этого следует, что и на остальных местах первого столбца стоят нули.

§ 14. Доказательство теоремы 1

Следующая лемма резюмирует проведенное выше извлечение корневого элемента.

Основная лемма. *Пусть H — подгруппа в $G(\mathrm{E}_6, R)$, содержащая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Тогда либо $H \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$, либо H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \Phi_l$, $\xi \in R$.*

Доказательство. Пусть $g \in H$, но $g \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R)$. Тогда по лемме 9 найдется максимальный идеал $M \in \mathrm{Max}(R)$ такой, что $F_M(g) \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_M)$. Поскольку R_M — локальное кольцо, по предложению 10 найдется элемент $x \in E(\mathrm{F}_4, R_M)$ такой, что первый столбец матрицы $xF_M(g)$ совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме λ_{15}. Так как

$E(\mathrm{F}_4, R_M) = \varinjlim E(\mathrm{F}_4, R_s)$ по всем $s \notin M$, найдется такое $s \in M$ и такой элемент $x \in E(\mathrm{F}_4, R_s)$, что первый столбец матрицы $y = xF_s(g)$ совпадает с первым столбцом единичной матрицы во всех позициях, кроме λ_{15} и, конечно, $y \notin \overline{G}(\mathrm{F}_4, R_s)$. Теперь можно воспользоваться предложением 9 и завершить доказательство.

Доказательство теоремы 1. Пусть, как и в предложении 1, A — наибольший идеал, для которого $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R, A) \leq H$. Пусть $\overline{H} = \rho_A^{\mathrm{E}_6}(H)$ — образ группы H под действием гомоморфизма редукции $\rho_A^{\mathrm{E}_6} : G(\mathrm{E}_6, R) \to G(\mathrm{E}_6, R/A)$. Ясно, что группа $\overline{H}$ содержит $E(\mathrm{F}_4, R/A)$, и, применяя к ней основную лемму, видим, что либо $\overline{H} \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R, A)$, либо $\overline{H}$ содержит нетривиальный элементарный корневой элемент $x_\alpha(\xi + A)$, где $\alpha \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$, $\xi \in R$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, представим $x_\alpha(\xi) \in H\, G(\mathrm{F}_4, R, A)$ в виде $x_\alpha(\xi) = ab$, где $a \in H$, $b \in G(\mathrm{F}_4, R, A)$. Найдется корень $\beta \in \mathrm{E}_6 \setminus \mathrm{F}_4$ такой, что $\beta - \alpha \in \mathrm{F}_4$. Рассмотрим коммутатор

$$[x_\alpha(\xi), x_{\beta-\alpha}(1)] = x_\beta(\pm\xi).$$

Подставляя сюда выражение $x_\alpha(\xi) = ab$, получаем

$$x_\beta(\pm\xi) = [ab, x_{\beta-\alpha}(1)] = {}^a[b, x_{\beta-\alpha}(1)][a, x_{\beta-\alpha}(1)].$$

Первый из коммутаторов в правой части принадлежит $E(\mathrm{E}_6, R, A)$ в силу стандартной коммутационной формулы, а второй лежит в H. Значит, $x_\beta(\pm\xi) \in H$, и $\xi \notin A$, что противоречит максимальности A. Таким образом, всегда $\overline{H} \leq \overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)$, но тогда из теоремы 3 следует включение

$$H \leq (\rho_A^{\mathrm{E}_6})^{-1}(\overline{G}(\mathrm{F}_4, R/A)) = \mathrm{CG}(\mathrm{F}_4, R, A) = N_G(\mathrm{EE}(\mathrm{F}_4, R, A)),$$

которое завершает доказательство.

Список литературы

1. Борель А., *Свойства и линейные представления групп Шевалле*, Семинар по алгебраическим группам, 1973, pp. 9–59.
2. Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли, Главы* IV – VI, Мир, М., 1972, pp. 1–334.
3. Вавилов Н. А., *Весовые элементы групп Шевалле*, Алгебра и Анализ **20** (2008), no. 1, 34–85.
4. Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7, Алгебра и Анализ **16** (2004), no. 4, 54–87.
5. Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., Николенко С. И., *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги*, Зап. науч. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
6. Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю., *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6, Алгебра и Анализ **19** (2007), no. 5, 35–62.
7. Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М., *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении*, Зап. науч. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.

8. Вавилов Н. А., Николенко С. И., A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* F_4 *и* $^2E_6$, Алгебра и Анализ **20** (2008), no. 3.
9. Вавилов Н. А., Петров В. А., *О надгруппах* $EO(2l, R)$, Зап. науч. семин. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
10. Вавилов Н. А., Петров В. А., *О надгруппах* $Ep(2l, R)$, Алгебра и анализ **15** (2003), no. 4, 72–114.
11. Вавилов Н. А., Петров В. А., *О надгруппах* $EO(n, R)$, Алгебра и анализ **19** (2007), no. 2, 10–51.
12. Лузгарев А. Ю., *О надгруппах* $E(E_6, R)$ *и* $E(E_7, R)$ *в минимальных представлениях*, Зап. науч. семин. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
13. Стейнберг Р., *Лекции о группах Шевалле*, Мир, 1975, pp. 1–262.
14. Шевалле К., *О некоторых простых группах*, сб. Математика, 2 :1, 1958, pp. 3–58.
15. Abe E., *Chevalley groups over commutative rings*, Proc. Conf. Radical Theory, Sendai – 1988, pp. 1–23.
16. Abe E, Suzuki K., *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Tôhoku Math. J. **28** (1976), no. 2, 185–198.
17. Aschbacher M., *The 27-dimensional module for* E_6. I – IV, Invent. Math. **89** (1987), no. 1, 159–195; J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 45–84; J. Algebra **191** (1991), 23–39.
18. Aschbacher M., *Some multilinear forms with large isometry groups*, Geom. dedic. **25** (1988), no. 1–3, 417–465.
19. Bak A., *Non-abelian K-theory: the nilpotent class of K_1 and general stability*, K-Theory **4** (1991), 363–397.
20. Bak A., Vavilov N., *Normality of the elementary subgroup functors*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **118** (1995), no. 1, 35–47.
21. Berman S., Moody R., *Extensions of Chevalley groups*, Israel J. Math. **22** (1975), no. 1, 42–51.
22. Dye R. H., *Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic 2*, J. Algebra **59** (1979), no. 1, 202–221.
23. Dye R. H., *On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic 2*, Math. Z **172** (1980), no. 3, 203–212.
24. Dye R. H., *Maximal subgroups of* $GL_{2n}(K)$, $SL_{2n}(K)$, $PGL_{2n}(K)$, $PSL_{2n}(K)$ *associated with symplectic polarities*, J. Algebra **66** (1980), no. 1, 1–11.
25. Hazrat R., *Dimension theory and nonstable K_1 of quadratic modules*, K-theory **27** (2002), no. 4, 293–328.
26. Hazrat R., Vavilov N. A., K_1 *of Chevalley groups are nilpotent*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
27. Hong You, *Overgroups of symplectic group in linear group over commutative rings*, J. Algebra **282** (2004), no. 1, 23–32.
28. Hong You, *Overgroups of classical groups over commutative rings in linear group*, Sci. China Ser. A **49** (2006), no. 5, 626–638.
29. King O. H., *On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group*, J. Algebra **96** (1985), no. 1, 178–193.
30. King O. H., *On subgroups of the special linear group containing the special unitary group*, Geom. Dedic **19** (1985), no. 3, 297–310.
31. Li Shangzhi, *Overgroups of* $SU(n, K, f)$ *or* $\Omega(n, K, Q)$ *in* $GL(n, K)$, Geom. Dedic **33** (1990), no. 3, 241–250.
32. Li Shangzhi, *Overgroups of a unitary group in* $GL(2, K)$, J. Algebra **149** (1992), no. 2, 275–286.
33. Li Shangzhi, *Overgroups in* $GL(n, F)$ *of a classical group over a subfield of* F., Algebra Colloq **1** (1994), no. 4, 335–346.
34. Matsumoto H., *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann.

scient. École Norm. Sup., 4^e série **2**, no. 1, 1–62.
35. Petrov V. A., *Overgroups of unitary groups*, K-theory **29** (2003), no. 3, 147–174.
36. Stein M. R., *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings*, Amer. J. Math. **93** (1971), no. 4, 965–1004.
37. Taddei G., *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau*, Contemp. Math. **55,** Part II (1986), 693–710.
38. Tits J., *Systèmes générateurs de groupes de congruences*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A **283** (1976), 693–695.
39. Vaserstein L. N., *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Tôhoku Math. J. **36** (1986), no. 5, 219–230.
40. Vavilov N. A., *Structure of Chevalley groups over commutative rings*, Proc. Conf. Nonassociative algebras and related topics. Hiroshima – 1990, World Scientific, London et al., 1991, pp. 219–335.
41. Vavilov N., *A third look at weight diagrams*, Rendiconti del Seminario Matem. dell'Univ. di Padova **204** (2000), 1–45.
42. Vavilov N., *An* A_3*-proof of structure theorems for Chevalley groups of types* E_6 *and* E_7, Int. J. Algebra Comput. **17** (2007), no. 5&6, 1283–1298.