ПРЕПРИНТ ПОМИ 13/2007

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП. IV. $\mathbb{Z}_2$-ГРАДУИРОВАННЫЕ ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ.

А. М. ВЕРШИК, А. Н. СЕРГЕЕВ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А.СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК.

Аннотация. Данная работа является дальнейшим развитием методов работы А.Окунькова и А.Вершика по теории представлений симметрической группы. Мы строим некоторые подалгебры в алгебрах связанных с проективными представлениями симметрической группы, которые являются естественным обобщением, алгебры Гельфанда Цетлина. Мы также описываем образующие этих подалгебр и некоторые соотношения между ними. Это позволяет нам написать аналоги нормальной формы Юнга для проективных представлений симметрической группы. Естественным языком в этой ситуации оказывается язык супералгебр. Мы также формулируем основные понятия теории локально полупростых алгебр в ситуации супералгебр. В втором параграфе приведены основные определения и примеры и теоремы теории полупростых ассоциативных супералгебр. В третьем параграфе рассматривается категория модулей над конечномерными полупростыми супералгебрами с четными морфизмами. Доказывается, что такая категория изоморфна категории обычных модулей над некоторой алгеброй. Формулируется также понятие центра. Четвертый параграф посвящен изучению цепочек полупростых супералгебр. Здесь формулируются основные определения, дается характеризация графов ветвления цепочек полупростых супералгебр. Доказывается также, что граф ветвления градуированных модулей и граф ветвления градуированных алгебр совпадают. Приводится также критерий простоты ветвления градуированных модулей. В пятом параграфе рассматривается понятие алгебры Гельфанда-Цетлина и вектора Гельфанда-Цетлина в случае градуированных модулей.Основные результаты содержатся в шестом параграфе посвященном теории проективных представлений симметрических групп. Мы описываем образующие обобщенной алгебры Гельфанда-Цетлина. Эти образующие являются естественными аналогами классических элементов Юнга-Юциса-Мёрфи. Приводятся также некоторые соотношения между ними и образующими исходной алгебры. Анализируя эти соотношения мы получаем нормальную форму Юнга для этих алгебр.

Содержание

1. Введение

В этой работе мы формулируем основные понятия теории локально полупростых $\mathbb{Z}_2$-градуированных конечномерных алгебр и их представлений. Главный результат статьи состоит в перенесении индуктивного метода построения теории представлений, - метода алгебр Гельфанда-Цетлина, - развитого в [OV, VO, V] на случай $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр, и в частности, позволяет использовать этот метод для построения проективных представлений симметрических групп.

Хотя общая теория $\mathbb{Z}_2$-градуированных полупростых алгебр и их представлений частично излагалась в работах [KL, J], мы тем не менее, приводим здесь последовательное изложение основных понятий, имея в виду применения к индуктивных цепям полупростых $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр. Здесь возникает ряд интересных новых эффектов, связанных с тем, что простые $\mathbb{Z}_2$-градуированные конечномерные алгебры и, следовательно, простые модули бывают двух типов (алгебра типа $M(n, m)$ и $Q(n)$), а граф ветвления индуктивных семейств имеет дополнительную структуру (инволюцию). Центральный вопрос - о связи представлений градуированной алгебры (группы) и представлений ее четной части, например, представлений симметрических и знакопеременных групп. Этот вопрос решается сравнительно просто: имеется биекция между этим двумя классами модулей (предложение 3.7) и эту связь можно использовать в обоих направлениях. Классический пример - описание представлений знакопеременной группы с помощью представлений симметрической группы. Противоположная и гораздо более сложная задача, которую мы исследуем далее, состоит в описании проективных представлений симметрической группы; как ни удивительно, знание представлений симметрической группы не помогает и фактически не используется в работах по этой задаче. В других интересных примерах и представления $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры, и представления ее четной части - неизвестны, и ищутся одновременно. Более того, иногда для явно заданной градуированной алгебры не всегда удается явно задать ее четную часть.

В статье предлагается строить представления индуктивных цепочек $\mathbb{Z}_2$-градуированных групп и алгебр с помощью той же техники, которая использовалась в [OV, VO, V] для описания представлений симметрических групп, в этом состоит основная цель настоящей работы. Пример, который мы подробно разбираем, - описание проективных представлений симметрической группы; он сводится к описанию простых модулей некоторой $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй, рассмотренной еще И.Шуром.

Проективные представления симметрических групп изучались многими авторами (например [Mo, Se3, N1, N2]); мы используем этот пример для иллюстрации нового подхода к задаче о представлениях $\mathbb{Z}_2$-градуированных цепочек алгебр. Прежде всего, определяются условия простоты ветвления представлений цепи полупростых $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр. Наиболее существенную роль в дальнейшем играет обобщение понятия алгебры Гельфанда-Цетлина, для цепи $\mathfrak{A} = A(1) \subseteq A(2) \subseteq \cdots \subseteq A(n)$ полупростых $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр. Прежде всего, следует обобщить понятие центра и определить, так называемый, суперцентр $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры. Понятие алгебры Гельфанда-Цетлина цепи расслаивается для $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр на несколько понятий, поскольку в отличие от неградуированного случая алгебра $SGZ(\mathfrak{Y})$, порожденная суперцентрализаторами последовательных подалгебр цепи, называемая далее *суперагеброй Гельфанда-Цетлина* не совпадает с алгеброй $SZ(\mathfrak{Y})$, порожденной суперцентрами алгебр $A(k)$. Алгебры $SGZ(\mathfrak{Y})$, вообще говоря, не коммутативны даже в случае простого ветвления, но их структура оказывается стандартной: это есть тензорное произведение коммутативной алгебры и алгебры Клиффорда. Между алгеброй $SGZ(\mathfrak{Y})$ и ее суперцентром $SZ(\mathfrak{Y})$ находится место для обычной алгебры Гельфанда-Цетлина - $GZ(\mathfrak{Y})$ - четной части цепи $\mathfrak{Y}$. Анализ представлений и характеров этих алгебр составляет суть метода. Аналогично методу работ [OV],[VO] находится спектр (перечень неприводимых представлений) алгебры $SGZ(\mathfrak{Y})$, это делается по существу таким же приемом - сведением к описанию спектра аналога алгебры Гекке, что в свою очередь позволяет описать неприводимые представления алгебры $A(n)$. Этот способ используется для описания проективных представлений симметрической группы, построения аналога форм Юнга, базисов и т.д. Как и в [OV],[VO] параметризующие базис в представлениях так называемые строгие таблицы Юнга оказываются точками спектра надлежащей алгебры Гельфанда-Цетлина, а неприводимые проективные представления S_n параметризуются строгими диаграммами, т.е. орбитами допустимых подстановок точек спектра. Это описание проективных представлений и является одной из целей работы.

В теории представлений $\mathbb{Z}_2$-градуированных групп и алгебр, их диаграмм ветвления, возникает много комбинаторных задач, видимо, не рассматривавшихся до сих пор. Даже столь известный вопрос о представлениях знакопеременной группы S_n^+, как четной части $\mathbb{Z}_2$-градуированной группы S_n, недостаточно изучен с этих позиций. Заметим, что например, задание знакопеременной группы, аналогичное заданию групп Коксетера (точнее,- ее копредставление, в виде "локальной группы"в смысле [V1]) получено лишь совсем недавно в работе [VV] - это копредставление знакопеременной группы следует использовать для прямого построения представлений S_n^+ независимо от представлений S_n^+. Для этого следует развить и использовать всю технику алгебр Гельфанда-Цетлина. Мы надеемся к этому вернуться в другой работе. По аналогии с симметрической группой следует рассмотреть проективные представления других классических групп Вейля, построить нормальную форму, описать подалгебру порожденную суперцентрализаторами и т.д. Можно также надеяться, что идеология индуктивного построения теории будет применима и в теории супералгебр, в частности, супералгебр Ли.

Изложим кратко содержание работы. Во втором параграфе приводятся основные определения теории $\mathbb{Z}_2$ градуированных ассоциативных конечномерных полупростых алгебр. В частности, описывается их структура, дается описание простых алгебр. Как и в классическом случае важную роль играет понятие центра и централизатора, которые в градуированном случае имеет несколько вариантов. Третий параграф содержит краткое изложение теории модулей над $\mathbb{Z}_2$ градуированными алгебрами. Основная теорема здесь, сводит описание градуированных модулей над градуированной алгеброй к описанию неградуированных модулей над некоторой другой алгеброй. Приводятся также теоремы описывающие соотношения между градуированными модулями и неградуированными модулями; градуированными модулями над самой алгеброй и неградуированными модулями над ее четной частью. Заметим, что краткое и ясное введение в теорию ассоциативных супералгебр и модулей над ними можно найти в [KL]. В четвертом параграфе вводится один из основных объектов работы : индуктивные семейства $\mathbb{Z}_2$ градуированных полупростых конечномерных алгебр. Дается определение графа ветвления, доказывается теорема, характеризующая эти графы. Кроме того показывается, что графы ветвления простых модулей и индуктивных семейств алгебр - совпадают. Приводится также критерий простоты ветвления основанный на понятии градуированного централизатора.

Пятый параграф посвящен алгебрам Гельфанда-Цетлина. В отличие от неградуированного случае здесь возникает несколько естественных аналогов этой алгебры. Основным результатом этого параграфа является теорема описывающая связь между представлениями супералгебры Гельфанда-Цетлина и представлениями исходной алгебры. В случае простого ветвления эти результаты интерпретируются в терминах соответствующего графа ветвления. В частности это позволяет определить естественное отношение эквивалентности на пространстве путей градуированного графа.

В наиболее важном последнем параграфе дается приложение теории, развитой в предыдущих параграфах, к проективным представлениям симметрических групп. Описывается явно супералгебра Гельфанда-Цетлина в терминах нечетных аналогов элементов Юнга-Юциса-Мерфи

(Young-Jucys-Murphy), что позволяет описать спектр этой алгебры, следуя методу работы [OV].

2. Основные определения.

В дальнейшем мы предполагаем, что основным полем является $\mathbb{C}$.

Напомним, определение $\mathbb{Z}_2$ градуированной алгебры.

Определение 2.1. *$\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра это алгебра с заданным разложением в прямую сумму $A = A_0 \oplus A_1$, так что если $a \in A_i, b \in A_j$ то $ab \in A_{i+j}$, где $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Условие $a \in A_i$ будет записываться также в виде $p(a) = i$, а p будет называться функцией четности. Четная часть A_0 есть подалгебра алгебры A, а A_1 есть A_0-модуль.*

Эквивалентное определение : $\mathbb{Z}_2$- градуированной алгебра, это алгебра A с автоморфизмом θ, $\theta^2 = 1$. При этом A_0- собственное подпространство отвечающее собственному значению 1, а A_1- собственное подпространство отвечающее собственному значению -1. Мы будем ссылаться на автоморфизм θ, как на автоморфизм четности.

Гомоморфизмом $\mathbb{Z}_2$ - градуированных алгебр называется их гомоморфизм как обычных алгебр который также сохраняет их градуировку.

Алгебра A рассматриваемая без учета градуировки будет обозначаться $|A|$.

Подалгеброй $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры A называется подалгебра $B \subset A$ в обычном смысле, наследующая градуировку: $B = B_0 + B_1, \quad B_0 = B \cap A_0, B_1 = B \cap A_1$.

Аналогично двусторонним идеалом $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебре A называется двусторонний идеал I, наследующий градуировку: $I = I \cap A_0 + I \cap A_1$. Таким же способом определяется понятие левого и правого идеала.

Как мы увидим ниже, следующая алгебра является полезной при рассмотрении $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр:

$$A[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in A,\ \varepsilon^2 = 1,\ \varepsilon a = \theta(a)\varepsilon\}$$

Определение 2.2. *$\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра называется простой если она не содержит двусторонних $\mathbb{Z}_2$-градуированных идеалов отличных от 0 и самой алгебры.*

Определение 2.3. *$\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра называется полупростой, если любой ее двусторонний градуированный идеал I имеет градуированное дополнение, т.е. существует двусторонний градуированный идеал I' такой, что $A = I \oplus I'$.*

Пример 2.4. [1] *Обозначим через $M(n, m)$ множество матриц следующего вида*

[1] Если рассматривать приводимые ниже алгебры как суперлагебры Ли, то мы получим две основные серии суперлагебр Ли $\mathfrak{gl}(n, m)$ и $\mathfrak{q}(n)$.

$$M(n,m)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\}; \quad M(n,m)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

где A квадратная матрица порядка n, D квадратная матрица порядка m, а B, C прямоугольные матрицы размеров $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. При этом автоморфизм четности является внутренним $\theta(M) = JMJ^{-1}$ где J единственный с точностью до знака, удовлетворяющий условию $J^2 = 1$

$$J = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1_m \end{pmatrix}$$

Нетрудно проверить, что алгебра $M(n,m)$ проста как $\mathbb{Z}_2$-градуированная и как неградуированная алгебра.

Пример 2.5. *Обозначим через $Q(n)$ множество матриц следующего вида*

$$Q(n)_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\}; \quad Q(n)_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

где A, B квадратные матрицы порядка n и автоморфизм четности имеет тот же вид что и в предыдущем примере, при этом $J \notin Q$.

Нетрудно проверить, что $Q(n)$ проста как градуированная алгебра и непроста как неградуированная алгебра.

Следующая хорошо известная теорема описывает структуру простых $\mathbb{Z}_2$ градуированных алгебр, ее доказательство содержится например в [J],[KL].

Теорема 2.6. *Любая конечномерная простая $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра над $\mathbb{C}$ градуированно изоморфна либо $M(n,m)$, либо $Q(n)$, где n, m любые натуральные числа.*

Предыдущая теорема показывает что $\mathbb{Z}_2$-градуированных простых конечномерных алгебр больше, чем неградуированных. Тем не менее, оказывается что класс полупростых конечномерных алгебр не зависит от градуировки [J],[KL].

Теорема 2.7. 1) *Конечномерная градуированная алгебра полупроста как градуированная алгебра тогда и только тогда, когда она полупроста как неградуированная алгебра.*

2) *Всякая конечномерная полупростая градуированная алгебра является суммой конечного числа простых алгебр, т.е. алгебр $M(n,m)$ и $Q(k)$.*

Следствие 2.8. *Четная часть градуированной полупростой конечномерной алгебры полупроста.*

Следствие 2.9. *Количество простых компонент полупростой конечномерной градуированной алгебры равно размерности четной части ее обычного центра, а количество простых компонент типа Q равно размерности нечетной части обычного центра.*

Замечание 2.10. *Из предыдущей теоремы следует, что всякая конечномерная полупростая градуированная алгебра A допускает единственное разложение вида $A = A_M \oplus A_Q$, где A_M является суммой всех простых компонент типа M, а A_Q суммой всех простых компонент типа Q. Далее как следует из примера 2.4 существует элемент $J_A \in A_M$ такой, что $\theta(a) = J_A a J_A^{-1}, a \in A_M$.*

Важнейшим понятием классической теории алгебр является понятие центра. В градуированном случае естественным аналогом центра является следующая алгебра, которая возникает из рассмотрения центра алгебры $A[\varepsilon]$.

Определение 2.11. *Центром градуированной алгебры называется алгебра, являющаяся суммой четных частей центра неградуированной алгебры и скрученного центра:*

$$Z(A) = Z(|A|)_0 + Z^\theta(|A|)_0$$

где $Z(|A|)_0 = \{a \in A_0 \mid ab = ba, \forall b \in A\}$ - четная часть обычного центра, и $Z^\theta(|A|)_0 = \{a \in A_0 \mid ab = \theta(b)a\forall, \ b \in A\}$- четная часть скрученного центра.

Определение 2.12. *Градуированным централизатором подалгебры B в алгебре A называется алгебра являющаяся суммой четных частей неградуированного централизатора и скрученного централизатора:*

$$Z(A, B) = Z_0(|A|, |B|) + Z_0^\theta(|A|, |B|)$$

где $Z_0(|A|, |B|) = \{a \in A_0 \mid ab = ba \,\forall\, b \in B\}$- четная часть обычного централизатора, и $Z_0^\theta(|A|, |B|) = \{a \in A_0 \mid ab = \theta(b)a \,\forall\, b \in B\}$- четная часть скрученного централизатора.

Заметим, что если алгебра A конечномерна и полупроста, то градуированный центр совпадает с центром четной части $Z(A) = Z(A_0)$. Это легко проверить сведением к случаю, простой алгебры. Аналогичное утверждение для централизатора также верно см. лемма 3.3.

Полезно следующее понятие, которое используется в теории супералгебр Ли.

Определение 2.13. *Суперцентрализатором подалгебры $B \subset A$ называется алгебра*

$$SZ(A, B) = \{a \in A \mid ab = (-1)^{p(a)p(b)}ba, \text{ для любого } b \in B\}$$

В частности, суперцентрализатор $SZ(A, A)$ называется суперцентром A и будет обозначатся как $SZ(A)$.

Заметим, что для полупростой конечномерной алгебры суперцентр совпадает с четной частью обычного центра $SZ(A) = Z(|A|)_0$.

Нам понадобится также понятие $\mathbb{Z}_2$ градуированной группы.

Определение 2.14. *Конечная группа G называется $\mathbb{Z}_2$ градуированной, если в ней выделен нормальный делитель G_0 индекса 2 и разложение на классы смежности по G_0 есть разложение на четную и нечетную части: $G = G_0 \bigcup G_1$.*

Групповая алгебра $\mathbb{Z}_2$ градуированной группы имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ градуировку. Нетрудно доказать следующий факт:

Теорема 2.15. *Групповая алгебра конечной градуированной группы с естественной $\mathbb{Z}_2$ градуировкой является полупростой $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй.*

Эта теорема является частным случаем более общего результата доказанного в [NS].

В дальнейшем для краткости мы часто используем термин "градуированная алгебра (группа, модуль)"вместо "$\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра (группа, модуль)".Основные примеры.

1) Симметрическая группа S_n, в которой четность элемента $g \in S_n$ определяется как четность подстановки g, а групповая алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ снабжается с соответствующей градуировкой.

2) $\mathbb{C}$-алгебра $\mathfrak{A}_n$, соответствующая проективным представлениям группы S_n, она порождена образующими $\tau_1, \ldots, \tau_n$ удовлетворяющими соотношениям:

$$\tau_k^2 = 1, \quad (\tau_k \tau_{k+1})^3 = 1, \quad (\tau_k \tau_l)^2 = -1 \text{ if } | k - l | > 1$$

Градуированная алгебра $\mathfrak{A}_n$ не является групповой алгеброй какой бы то ни было градуированной группы.

3) Полупрямое произведение $S_n \ltimes C_n$ алгебры Клиффорда C_n и симметрической группы S_n с естественном действии симметрической группы; при этом все образующие алгебры Клиффорда считаются нечетными, а все элементы симметрической группы считаются четными. Заметим, что имеет место соотношение

$$S_n \ltimes C_n = \mathfrak{A}_n \otimes C_n,$$

где тензорное произведение в правой части рассматривается как градуированное. Определение тензорного произведения состоит в следующем.

Определение 2.16. *Тензорным произведением градуированных алгебр A и B, обозначаемым $A \otimes B$, называется градуированная алгебра, которая, как векторное пространство, совпадает с обычным тензорным произведением алгебр A и B, а автоморфизм четности и произведение определяются по правилам*

$$\theta_{A\otimes B}(a \otimes b) = \theta_A(a) \otimes \theta_B(b), \quad (a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{ji} aa' \otimes bb'$$

где $a' \in A_i$, $b \in B_j$.

Заметим, что тензорное произведение градуированных алгебр рассматриваемое как неградуированная алгебра, вообще говоря не изоморфно их тензорному произведению как обычных алгебр.

Лемма 2.17. *Тензорное произведение полупростых конечномерных ассоциативных градуированных алгебр полупросто.*

Доказательство. Доказательство сводится к случаю простой градуированной алгебры. В этом случае легко проверить равенства

$$M(n,m)\otimes M(n',m') = M(nn'+mm', nm'+nm')$$

$$M(n,m)\otimes Q(l) = Q((m+n)l), \quad Q(n)\otimes Q(m) = M(nm,nm)$$

$\square$

3. $\mathbb{Z}_2$-градуированные модули

Мы будем рассматривать категорию градуированных модулей $GMod$ над $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй A.

Определение 3.1. *Градуированным модулем над градуированной алгеброй A называется векторное пространство пространство V с разложением $V = V_0 \oplus V_1$ таким, что действие A сохраняет градуировку, то есть $A_iV_j \subset V_{i+j}$, где $i,j \in \mathbb{Z}_2$.*

Напомнм также, что градуированной размерностью $GdimV$-градуированного модуля V называется пара $(dimV_0, dimV_1)$. Множество морфизмов в категории $GMod$, это множество гомоморфизмов $f : V \to U$ как обычных модулей которые сохраняют градуировку т.е. $f(V_i) \subset U_i$, $i \in \mathbb{Z}_2$.

На категории $GMod$ существует естественный функтор смены четности $V \to P(V)$, где $P(V)_0 = V_{\bar{1}}, P(V)_1 = V_{\bar{0}}$ и новое действие совпадает со старым.

Определение 3.2. *Градуированный модуль называется простым или неприводимым, если он не имеет градуированных подмодулей, отличных от нулевого и самого модуля.*

Примеры.

1) Алгебра $M(n,m)$ имеет с точностью до изоморфизма два неизоморфных градуированных простых модуля V и $P(V)$. Заметим, что градуированная размерность одного из этих модулей равна (n,m), а другого (m,n) . При этом легко проверить, что оба модуля являются простыми изоморфными в неградуированном смысле. Такие модули мы будем называть парой противоположных модулей типа M.

2) Алгебра $Q(n)$ имеет только один градуированный простой модуль $V = P(V)$, где V стандартное представление и $GdimV = (n,n)$. Легко проверить, что V приводим как неградуированный модуль и является прямой суммой двух неизоморфных простых неградуированных модулей. Такого типа неприводимые модули мы будем называть модулями типа Q.

Лемма 3.3. *Если A полупростая конечномерная алгебра, а B ее полупростая подалгебра, то*

$$Z(A,B) = Z(A_0, B_0)$$

Доказательство. Ясно, что

$$Z(A,B) = Z_0(|A|,|B|) + Z_0^\theta(|A|,|B|) \subset Z(A_0, B_0).$$

Поэтому достаточно показать, что обе алгебры имеют одинаковую размерность над $\mathbb{C}$. Далее, нетрудно проверить, что можно ограничиться случаем, когда A простая градуированная алгебра. То есть $A = M(n,m)$, $Q(n)$. Рассмотрим первый случай. Пусть V один из неприводимых модулей над A. Мы можем ограничиться случаем, когда V является суммой B модулей $U, P(U)$ для некоторого неприводимого B модуля U. Возможны следующие случаи: 1) $B = B_0$

2) $B \neq B_0$

В первом случае $Z_0(A,B) = Z_0^\theta(|A|,|B|) = Z(A_0,B_0)$. Во втором случае мы имеем две возможности $U \neq P(U)$ и $U = P(U)$.

В первой из них $V = U^k \oplus P(U)^l$ для некоторых k,l. Отсюда

$$dim(Z_0(|A|,|B|) + Z_0^\theta(|A|,|B|)) = 2k^2 + 2l^2 = dim Z(A_0,B_0).$$

Во второй - $V = U^k$ для некоторого k. Отсюда

$$dim(Z_0(|A|,|B|) + Z_0^\theta(|A|,|B|)) = 4k^2 = dim Z(A_0,B_0).$$

□

Пусть θ- автоморфизм алгебры A. Тогда на категории неградуированных модулей существует естественный функтор $V \to V^\theta$, где $V^\theta = V$ и новое дйствие имеет вид $a \star v = \theta(a)v$.

Следствие 3.4. *Пусть A градуированная алгебра, θ ее автоморфизм четности и*

$$Rep(|A|) = (E_1, E_1^\theta, \dots, E_r, E_r^\theta, F_1 = F_1^\theta, \dots, F_s = F_s^\theta)$$

полный набор попарно неизоморфных неградуированных модулей. Тогда

$$Rep(A) = (F_1, P(F_1), \dots, F_s, P(F_s), E_1 \oplus E_1^\theta, \dots, E_r \oplus E_r^\theta)$$

полный набор попарно неизоморфных градуированных модулей.

Оказывается категория градуированных модулей изоморфна некоторой категории неградуированных модулей над некоторой другой алгеброй. Рассмотрим алгебру

$$A[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in A,\ \varepsilon^2 = 1,\ \varepsilon a = \theta(a)\varepsilon\}.$$

Заметим, что алгебра $A[\varepsilon]$ обладает каноноческим автоморфизмом φ таким, что $\varphi(a) = a,\ a \in A$ и $\varphi(\varepsilon) = -\varepsilon$.

Предложение 3.5. *Категория неградуированных $A[\varepsilon]$-модулей изоморфна категории $GMod$ градуированных A модулей . При этом функтор смены четности переходит в функтор $V \to V^{\varphi}$. Градуированный неприводимый A модуль имеет тип M если и только если $V \neq V^{\varphi}$, и имеет тип Q если и только если $V = V^{\varphi}$.*

Доказательство. Построим функторы

$$F : Mod(A[\varepsilon]) \longrightarrow GMod(A) \text{ и } G : GMod(A) \longrightarrow Mod(A[\varepsilon])$$

Пусть V объект категории $Mod(A[\varepsilon])$, тогда $\varepsilon \in End(V)$ и так как $\varepsilon^2 = 1$, то V можно рассматривать как объект категории $SMod_0(A)$ со следующей градуировкой

$$V_0 = \{v \in V \mid \varepsilon v = v\} \text{ и } V_1 = \{v \in V \mid \varepsilon v = -v\}.$$

На морфизмах функтор F действует тождественно. При этом, так как любой морфизм коммутирует с ε, то он сохраняет введенную градуировку и тем самым является морфизмом категории $GMod(A)$.

Обратный функтор также тождествен на объектах и морфизмах , при этом действие ε совпадает с действием оператора четности. Нетрудно проверить, что FG and GF являются тождественными функторами на соответствующих категориях. □

Лемма 3.6. *Пусть градуированная алгебра содержит нечетный элемент p такой что $p^2 = 1$. Тогда на алгебре A_0 можно ввести градуировку такую, что алгебра A изоморфна алгебре $A_0[\varepsilon]$.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм $a \to pap^{-1}$ как автоморфизм четности на A_0. Тогда $A_0[\varepsilon] = A$. □

Будем называть $\mathbb{Z}_2$ градуировку полупростой алгебры существенной если все ее простые компоненты имеют нетривиальную нечетную часть.

Предложение 3.7. *Пусть A - полупростая конечномерная $\mathbb{Z}_2$ градуированная алгебра с существенной градуировкой. Тогда функтор I*

$$V_0 \longrightarrow A \otimes_{A_0} V_0$$

из категории $Mod(A_0)$ в категорию $GMod(A)$ является изоморфизмом категорий.

Доказательство. Достаточно показать, что функтор ограничения R

$$V \longrightarrow V_0$$

из категории $GMod(A)$ в категорию $Mod(A_0)$ является двусторонне обратным к I. В самом деле $R \circ I(V_0) = A_0 \otimes_{A_0} V_0 = V_0$. Обратно докажем равенство $I \circ R(V) = V$. В силу аддитивности достаточно доказать это равенство для простого модуля V. Но предыдущее равенство равносильно равенству $A \otimes_{A_0} V_0 = V$. Так как V простой A модуль, то из предыдущего равенства следует, что V_0 простой A_0 модуль. В силу предположений леммы четная часть каждого простого A модуля нетривиальна. Но модуль $A \otimes_{A_0} V_0$ имеет четную часть равную V_0. Поэтому он неприводим и совпадает с V. Лемма доказана.

$\square$

Это означает, что теория представлений алгебры A сводится к теории представлений ее четной части.

4. Индуктивные семейства (цепи) $\mathbb{Z}_2$ - градуированных алгебр.

Определение 4.1. *$\mathbb{Z}_2$ - градуированным графом, называется граф, который обладает инволютивным автоморфизмом.*

Основные примеры таких графов возникают в следующей ситуации. Рассмотрим цепь (конечную) $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр

$$\mathfrak{Y} =< \mathbb{C} = A(1) \subset A(2) \cdots \subset A(n) >, \ n = 1, \dots$$

Обозначим через $GA_i^\wedge$ множество классов с точностью до изоморфизма неприводимых объектов категории $GMod$.

Определение 4.2. *Градуированным графом[2] ветвления простых модулей $Y(\mathfrak{Y})$ цепи $\mathfrak{Y}$ называется ориентированный граф множество вершин которого является несвязным объединением*

$$\bigcup_{i=1}^{n} GA(i)^\wedge$$

а число ребер соединяющих вершину $U \in GA_i^\wedge$ с вершиной $V \in GA_{i+1}^\wedge$ и направленных от U к V равно размерности векторного пространства $(GHom)_{A_i}(U, V)$.

Соответствующий граф ветвления неградуированных модулей мы будем обозначать $Y(|\mathfrak{Y}|)$. Граф ветвления четных подалгебр будет обозначаться $Y(\mathfrak{Y}_0)$

На категории $\mathbb{Z}_2$ - градуированных модулей мы имеем инволютивный функтор смены четности модуля $V \to P(V)$. Поэтому любой граф вида $Y(\mathfrak{Y})$ обладает автоморфизмом ω таким что, $\omega^2 = 1$. Тем самым автоморфизм ω задает структуру $\mathbb{Z}_2$ градуированного графа. Кроме того любой такой граф имеет на нулевом уровне 2 вершины которые переставляются автоморфизмом ω. Оказывается, эти свойства являются характеристическими.

Характеризация градуированных графов ветвления обычных модулей состоит в следующем (см.[VK]):

---

[2]Не следует смешивать термин "градуированный"в контексте, связанным с графом ветвления, с $\mathbb{Z}_2$ - градуировкой алгебр, модулей и др. Градуировка графа лишь отражает индуктивность цепи алгебр; в то же время граф простых модулей цепи (граф ветвления) имеет, как мы увидим и свою $\mathbb{Z}_2$ градуировку, проистекающую из $\mathbb{Z}_2$ градуировки алгебр.

Теорема 4.3. *Пусть $Y = \cup_{i=0}^{n} Y_i$ - градуированный конечный граф с целыми положительными кратностями ребер. Тогда он является графом ветвления некоторой цепи неградуированных модулей если и только если выполнены следующие условия*

1)Для любой вершины y графа Y не принадлежащей Y_n существует вершина непосредственно следующая за y[3].

2)Для любой вершины y графа Y не принадлежащей Y_0 существует вершина непосредственно предшествующая y.

3) Множество Y_0 состоит из одного элемента.

В случае цепи градуированных алгебр мы имеем следующую теорему:

Теорема 4.4. *Пусть $Y = \cup_{i=0}^{n} Y_i$ - градуированный конечный граф с целыми положительными кратностями ребер. Тогда он является графом ветвления некоторой цепи градуированных модулей если и только если выполнены следующие условия*

1) Для любой вершины y графа Y не принадлежащей Y_n существует вершина непосредственно следующая за y[4].

2)Для любой вершины y графа Y не принадлежащей Y_0 существует вершина непосредственно предшествующая y.

3) Существует инволютивный автоморфизм ω графа сохраняющий его градуировку.

4) Множество Y_0 состоит из двух элементов и автоморфизм ω переставляет эти элементы.

Построение алгебры по соответствующему графу проходит по той же схеме как и в работе [VK]. А именно, рассмотрим множество петель графа $B(Y)$, то есть пар путей (t, s) которые начинаются в одной из вершин уровня 0 и заканчиваются в одной вершине уровня n. Рассмотрим векторное пространство функций A на $B(Y)$ которые инвариантны относительно ω, то есть $f(\omega s, \omega t) = f(s, t)$ и определим в нем оператор четности $\theta(f)(t, s) = f(t, s)$, если пути s, t начинаются в одной вершине, и $\theta(f)(t, s) = -f(t, s)$, если пути s, t начинаются в разных вершинах. Умножение определяется как и в [VK]

$$(f * g)(s, t) = \sum_r f(s, r) g(r, t)$$

где $(s, t) \in B(Y)$ и суммирование ведется по всем путям r таким, что $(s, r), (r, t) \in B(Y)$. Мы можем также описать разложение алгебры A на простые компоненты в терминах графа Y. Обозначим через $\tilde{Y}_n$ множество орбит относительно действия ω в Y_n. Так как ω инволютивный автоморфизм, то орбиты бывают двух видов. А именно состоящие из одной вершины (тип Q), и состоящие из двух вершин (тип M). Пусть $t \in \tilde{Y}$ и пара чисел (n_t, m_t) совпадает с числом путей идущих из каждой

[3] В случае бесконечной цепи это условие отсутствует.

[4] В случае бесконечной цепи это условие отсутствует.

вершины Y_0 в одну из вершин принадлежащих t. Заметим, что в случае вершины типа Q, $n_t = m_t$. Тогда мы имеем

$$A = \oplus_{t \in \tilde{Y}_n} A_t,$$

где $A_t = M(n_t, m_t)$ если вершина имеет тип M, и $A_t = Q(n_t)$ если вершина имеет тип Q

Определение 4.5. *Назовем две цепи $\mathfrak{Y}, \mathfrak{Y}'$ $\mathbb{Z}_2$-градуирванных алгебр эквивалентными если для $i = 1, \ldots, n$ существуют изоморфизмы $f_i : A(i) \to A(i)'$ такие что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A(i+1) & \xrightarrow{f_{i+1}} & A'(i+1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ A(i) & \xrightarrow{f_i} & A'(i) \end{array}$$

для $i = 1, \ldots, n-1$

Предложение 4.6. *Классы эквивалентности цепей находятся в биекции с графами ветвления градуированных простых модулей с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай цепи длины 2. Заметим во первых, что достаточно ограничиться цепями вида $B \subset A$, $B \subset A'$ и показать, что коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{id_B} & B \end{array} \tag{1}$$

равносильна тому, что для соответствующей пары V, V' простых A, A' модулей они изоморфны как B модули. Заменяя алгебру B проекцией на соответствующую простую компоненту, можно считать A, A' простыми алгебрами. Кроме того можно заменить алгебру A' на алгебру A. Таким образом достаточно доказать следующее утверждение. Пусть A простая $\mathbb{Z}_2$ - градуированная алгебра, V стандартный модуль над ней, B ее $\mathbb{Z}_2$ - градуированная подалгебра, φ- автоморфизм A. Тогда этот автоморфизм действует на подалгебре B тождественно, если и только если он имеет вид $\varphi(a)v = faf^{-1}v$, где f - изоморфизм B модуля V, либо B модулей V и $P(V)$. Докажем это утверждение. Допустим, что φ имеет такой вид. Тогда для $b \in B$ получаем $\varphi(b)v = fbf^{-1}v = bv$. Следовательно $\varphi(b) = b$. Обратно предположим, что $\varphi(b) = b$ для любого $b \in B$. Автоморфизм четности алгебры A имеет вид $a \to JaJ^{-1}$, где J- автоморфизм четности модуля V. Так как φ сохраняет четность, то $\varphi(J) = \pm J$. Далее найдется линейное отображение $f : V \to V$ такое что, $\varphi(a)v = faf^{-1}v$. Так как $\varphi(J) = \pm J$, то f является градуированным гомоморфизмом либо $V \to V$, либо $V \to P(V)$. Из условия $\varphi(b) = b, \varphi(a)v = faf^{-1}v$ следует, что f является гомоморфизмом B модулей. Предложение доказано. $\square$

Граф ветвления называется простым, если он не имеет кратных ребер. Для того чтобы сформулировать критерий простоты ветвления, мы используем понятие централизатора из параграфа 2. Следующая лемма дает критерий простоты ветвления градуированных модулей.

Лемма 4.7. *Пусть $B \subset A$ - короткая цепь градуированных алгебр. Ветвление соответствующих градуированных модулей будет простым если и только если алгебра $Z(A, B)$ коммутативна и в этом случае она порождена градуированными центрами $Z(A), Z(B)$. (Ср. с критерием простоты в* [OV, VO]*).*

Доказательство. Несложно проверить, что $Z(A[\varepsilon], B[\varepsilon]) = Z_0(|A|, |B|) + \varepsilon Z_0^\theta(|A|, |B|)$

Поэтому алгебра $Z(A, B)$ является образом алгебры $Z(A[\varepsilon], B[\varepsilon])$ относительно гомоморфизма который переводит ε в 1. Отсюда легко следует, что алгебра $Z(A, B)$ коммутативна, тогда и только тогда когда коммутативна алгебра $Z(A[\varepsilon], B[\varepsilon])$. В этом случае как известно она порождена подалгебрами $Z(A[\varepsilon])$, $Z(B[\varepsilon])$. □

Как и в неградуированном случае для рассмотренных графов возникают два типа задач - задача анализа: построить граф простых модулей для заданной градуированной алгебры, и задача синтеза: описать алгебру, для которой заданный граф с инволюцией есть граф простых модулей.

Пусть $G - \mathbb{Z}_2$-градуированная группа, тогда G_0, как подгруппа индекса 2 является нормальной подгруппой и поэтому G есть $\mathbb{Z}_2$-расширение группы G_0. Напомним [FH] описание связи между неприводимыми представлениями этих групп. Группа $\mathbb{Z}_2$ действует на простых модулях группы G_0 и делит их на два класса - неподвижные и подвижные относительно действия $\mathbb{Z}_2$ и, прямая сумма модулей из одного класса является неприводимым G модулем. Заметим, что для $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр положение аналогичное, но более сложное. Наличие таких связей влечет наличие связей между соответствующими графами ветвления $Y(\mathfrak{Y})$, $Y(|\mathfrak{Y}|)$ и $Y(\mathfrak{Y}_0)$. Мы будем в противоречии с традицией обозначать знакопеременную группу не A_n, а S_n^+.

Из предложеия 3.7 следует

Лемма 4.8. *Пусть нечетная часть каждой алгебры из цепи $\mathbb{Z}_2$ градуированных алгебр $\mathfrak{Y}$ нетривиальна. Тогда граф ветвления цепи $Y(\mathfrak{Y})$ совпадает с графом ветвления цепи $Y(|\mathfrak{Y}_0|)$.*

Пример 4.9. *Рассмотрим инволютивный автоморфизм θ групповой алгебры симметрической группы $\mathbb{C}[S_n]$ такой, что $\theta(\sigma) = sgn(\sigma)\sigma$, где $sgn(\sigma)$- знак перестановки (σ) и соответствующую структуру градуированной алгебры на $\mathbb{C}[S_n]$. Пусть $Y(\mathbb{S})$- градуированный граф ветвления цепи $\mathbb{S}$*

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}[S_1] \subset \mathbb{C}[S_2] \cdots \subset \mathbb{C}[S_n]$$

групповых алгебр симметрических групп с введенной $\mathbb{Z}_2$ градуировкой, а $Y(|\mathbb{S}^+|)$ неградуированный граф ветвления цепи $\mathbb{S}^+$ групповых алгебр знакопеременных групп

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}[S_1^+] \subset \mathbb{C}[S_2^+] \cdots \subset \mathbb{C}[S_n^+]$$

Тогда из леммы 4.8 следует , что граф $Y(\mathbb{S})$ совпадает с графом $Y(|\mathbb{S}^+|)$ во всех градуировках кроме нулевой.

Заметим, что неприводимое градуированное представление симметрической группы совпадает с обычным неприводимым представлением соответствующим диаграмме λ, если $\lambda = \lambda'$ и равно прямой сумме обычных представлений соответствующих диаграммам λ, λ' если $\lambda \neq \lambda'$

Рассмотрим инволютивный автоморфизм θ групповой алгебры знакопеременной группы $\mathbb{C}[S_n^+]$ такой, что $\theta(f) = s_{12} f s_{12}$, где s_{12}- транспозиция переставляющая символы $1, 2$ и соответствующую структуру супералгебры на $\mathbb{C}[S_n^+]$, тогда из леммы 3.6 вытекает следующая теорема

Теорема 4.10. *1) Обычное неприводимое представление группы S_n остается неприводимым как градуированное представление группы A_n. Оно имеет тип Q если соответствующая диаграмма Юнга λ самосопряжена, т.е. $\lambda = \lambda'$ и, имеет тип M, если соответствующая диаграмма Юнга λ несамосопряжена, т.е. $\lambda \neq \lambda'$.*

2) Пусть $Y(\mathbb{S}^+)$- градуированный граф ветвления цепи

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}[S_1^+] \subset \mathbb{C}[S_2^+] \cdots \subset \mathbb{C}[S_n^+]$$

групповых алгебр знакопеременных групп с введенной $\mathbb{Z}_2$ градуировкой,а $Y(|\mathbb{S}|)$ неградуированный граф ветвления цепи $\mathbb{S}$ групповых алгебр симметрических групп (то есть граф Юнга)

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}[S_1] \subset \mathbb{C}[S_2] \cdots \subset \mathbb{C}[S_n]$$

Тогда граф $Y(\mathbb{S}^+)$ совпадает с графом $Y(|\mathbb{S}|)$ во всех градуировках кроме нулевой.

5. Алгебры Гельфанда-Цетлина

Рассмотрим цепь $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр :

$$\mathfrak{Y} =< \mathbb{C} = A(1) \subset A(2) \cdots \subset A(n) >$$

Определение 5.1. *Пусть граф ветвления цепи $\mathfrak{Y}$ является простым. Алгеброй Гельфанда Цетлина $GZ(\mathfrak{Y})$, называется алгебра порожденная градуированными центрами $Z(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$.*

Теорема 5.2. *Рассмотрим цепь $\mathbb{Z}_2$-градуирванных алгебр*

$$\mathfrak{Y} =< \mathbb{C} = A(1) \subset A(2) \cdots \subset A(n) >$$

ветвление которых является простым. Тогда алгебра Гельфанда Цетлина $GZ(\mathfrak{Y})$ совпадает с обычной алгеброй Гельфанда Цетлина цепи *четных подалгебр $GZ(\mathfrak{Y}_0)$. Эта алгебра является максимальной коммутативной среди четных коммутативных подалгебр в $A(n)$. Каждое неприводимое градуированное представление алгебры $A(n)$ имеет однородный базис из собственных векторов этой подалгебры.*

Доказательство. Рассмотрим цепь алгебр

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[\varepsilon] = A(1)[\varepsilon] \subset A(2)[\varepsilon] \cdots \subset A(n)[\varepsilon]$$

Так как ветвление простое, то алгебра порожденная $Z(A(i+1)[\varepsilon], A(i)[\varepsilon])$, $i = 1\ldots, n-1$ является максимальной коммутативной подалгеброй в $A(n)[\varepsilon]$. Далее рассмотрим гомоморфизм $A(n)_0[\varepsilon] \to A(n)_0$ который переводит ε в единицу. Образ любой максимальной коммутативной подалгебры в $A(n)_0[\varepsilon]$ будет максимальной коммутативной подалгеброй в $A(n)_0$. $\square$

Таким образом, в определенной степени теория представлений цепей $\mathbb{Z}_2$ градуированных алгебр сводится к изучению представлений четной части. Однако не всегда можно обозримым образом описать четную часть градуированной алгебры, поэтому полезен еще один вариант понятия алгебры Гельфанда - Цетлина, который связан с понятием суперцентрализатора (см. параграф 2), используемого в теории суперaлгебр Ли.

Определение 5.3. *Рассмотрим цепь $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр*

$$\mathfrak{Y} =< \mathbb{C} = A(1) \subset A(2) \cdots \subset A(n) >$$

1) Алгебра $SGZ(\mathfrak{Y})$, порожденная последовательными суперцентрализаторами

$$SGZ(\mathfrak{Y}) =< SZ(A(2), A(1)), \ldots, SZ(A(n), A(n-1)) >$$

называется супералгеброй Гельфанда - Цетлина.

2)Через $SZ(\mathfrak{Y})$ обозначим коммутативную алгебры, порожденную суперцентрами $SZ(A(1)), \ldots, SZ(A(n))$.

Как будет показано ниже алгебра $SZ(\mathfrak{Y})$ является суперцентром алгебры $SGZ(\mathfrak{Y})$.

Для цепей алгебр с простым ветвлением в неградуированном случае алгебра порожденная последовательными централизаторами совпадает с алгеброй порожденной центрами $SZ(\mathfrak{Y}) = SGZ(\mathfrak{Y})$. В неградуированном случае имеем вообще говоря строгие включения

$$SZ(\mathfrak{Y}) \subset GZ(\mathfrak{Y}) \subset SGZ(\mathfrak{Y}),$$

причем первые две алгебры коммутативны. Роль супералгебры Гельфанда Цетлина состоит в том, что разложение неприводимых $A(n)$ модулей на неприводимые $SGZ(\mathfrak{Y})$ модули дизъюнктно. В случае тривиальной градуировки и простого спектра алгебра $SGZ(\mathfrak{Y})$ совпадает с $SZ(\mathfrak{Y})$. В случае непростого спектра $SGZ(\mathfrak{Y})$ есть так называемая "большая алгебра "Гельфанда- Цетлина. Основной результат этого параграфа заключается в следующей теореме.

Теорема 5.4. *Рассмотрим цепь $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр*

$$\mathfrak{Y} =< \mathbb{C} = A(1) \subset A(2) \cdots \subset A(n) >$$

Тогда

1) Ограничение неприводимых $A(n)$ модулей на суперaлгебру Гельфанда - Цетлина имеет простой спектр .

2) Разложение различных неприводимых $A(n)$ модулей на неприводимые $SGZ(\mathfrak{Y})$ модули не имеют общих слагаемых. Тип неприводимости ненулевого модуля $SGZ(\mathfrak{Y})$ совпадает с типом неприводимости содержащего его $A(n)$ модуля.

Доказательство. Доказательство основано на серии лемм.

Лемма 5.5. *Предположим, что градуированное векторное пространство V конечномерно и градуированная подалгебра $A \subset End(V)$ полупроста, и пусть A' ее суперцентрализатор. Тогда $(A')' = A$.*

Доказательство теоремы содержится в [NS]. Эта теорема аналогична теореме о бикоммутанте подалгебр в простых алгебрах и доказывается аналогично.

Лемма 5.6. *Пусть A- $\mathbb{Z}_2$градуированная алгебра и B ее $\mathbb{Z}_2$-градуированная подалгебра. Тогда равенство $SZ(A, B) = SZ(B)$ выполнено тогда и только тогда, когда каждый неприводимый A модуль разлагается по простым B модулям с кратностью не больше 1 и различные неприводимые A модули не имеют общих неприводимых B компонент. Кроме того, каждая неприводимая B компонента имеет такой же тип неприводимости как и содержащий ее неприводимый A модуль.*

Доказательство. Предположим, что каждый неприводимый A модуль разлагается по простым B модулям с кратностью не больше 1 и, различные неприводимые A модули не имеют общих неприводимых B компонент. Пусть $V_1, \dots, V_q$ полный набор попарно неизоморфных неприводимых A модулей, а $U_1, \dots, U_p$ все различные неприводимые B модули, и $b_1, \dots, b_p$ соответствующие центральные идемпотенты. Пусть $a \in SZ(A, B)$. По условиям леммы a - четный элемент. Так как каждый неприводимый A модуль разлагается по простым B модулям с кратностью не больше 1, то элемент a сохраняет каждый модуль U_j и, действует в нем как некоторый скаляр c_j. И, так как различные неприводимые A модули не имеют общих неприводимых B компонент, то разность $a - c_1b_1 - \cdots - c_pb_p$ равна нулю в каждом неприводимом A модуле. Это доказывает, что $SZ(A, B) = SZ(B)$.

Обратно предположим, что $SZ(A, B) = SZ(B)$. Следовательно $SZ(A) \subset SZ(B)$. Пусть e_1, e_2 два различных центральных идемпотента в A отвечающие простым A модулям V_1, V_2, тогда

$$e_1 = c_1b_1 \cdots + c_pb_p, \quad e_2 = d_1b_1 + \cdots + d_pb_p$$

Из условия $e_1e_2 = 0$ следует, что $c_id_i = 0$ для $i = 1, \ldots, p$. Отсюда следует, что модули V_1, V_2 не имеют общих неприводимых B компонент. Кроме того из равенств $e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2$ следует, что $c_i, d_i = 0, 1$. Это доказывает, что каждый неприводимый A модуль разлагается по простым B модулям с кратностью не больше 1 . Утверждение о типе неприводимости следует из того, что $SZ(A, B)$ содержит только четные элементы. $\square$

Лемма 5.7. *Пусть $f : A \longrightarrow B$ гомоморфизм полупростых супералгебр и C - полупростая подсупералгебра в A. Тогда*

$$f(SZ(A, C)) = SZ(f(A), f(C))$$

Доказательство. Ясно, что $f(SZ(A, C)) \subset SZ(f(A), f(C))$. Докажем обратное включение. Пусть $b = f(a) \in SZ(f(A), f(C))$. Так как A является полупростой алгеброй, то $Kerf = eA$, где e центральный идемпотент. Имеем $ac - (-1)^{p(a)p(c)}ca \in eA$ для любого $c \in C$. Следовательно, $a(1-e)c = (-1)^{p(a)p(b)}c(1-e)a$ также для любого $c \in C$. Поэтому, $a(1-e) \in SZ(A, C)$. Следовательно, $f(a) = f(a(1-e))$. $\square$

Лемма 5.8. *Пусть A полупростая градуированная а B ее полупростая градуированная подалгебра и C градуированная подалгебра в A порожденная $SZ(A, B)$ и B. Для неприводимого A модуля V, и неприводимого B модуля U, обозначим через $I_U(V)$ сумму всех B подмодулей в V которые изоморфны U или $P(U)$. Тогда, $I_U(V)$ является непривидимыми C модулями и, всякий неприводимый C модуль имеет такой вид. Кроме того, два ненулевых модуля такого вида изоморфны тогда и только тогда, когда $U = U'$, $V = V'$.*

Доказательство. По Лемме 5.7 мы можем заменить алгебры A и B их образами $L(V)$. Ясно, что $I_U(V)$ является C модулем. Кроме того, алгебры $SZ(A, B)$ и B полупросты. Следовательно, их тензорное произведение также является полупростой алгеброй и, C как ее гомоморфный образ тоже полупроста. Далее, имеем каноническое разложение $V = W \oplus I_U(V)$, где W является суммой всех B подмодулей в V которые не изоморфны U или $P(U)$. Тем самым, мы имеем канонический гомоморфизм $L(V) \to L(I_U(V))$. Поэтому, для доказательства неприводимости $I_U(V)$ достаточно вычислить суперцентрализатор C в $I_U(V)$. Далее,V является неприводимым A модулем поэтому, существует две возможности: $L(V) = A$ и $L(V) = A[\pi]$, где π нечетный элемент из $L(V)$ суперкоммутирующий с A. В первом случае, по лемме 5.5 суперцентрализатор C в $L(V)$ равен центру B. Следовательно, по лемме 5.7 централизатор C в $I_U(V)$ равен $\mathbb{C}$. Во втором случае, те же рассуждения показывают что суперцентрализатор C в $I_U(V)$ равен $\mathbb{C}[\pi]$. Обратно, докажем что каждый неприводимый модуль имеет такой вид. Пусть W неприводимый C модуль и, U его неприводимый B подмодуль. Рассмотрим индуцированный модуль $A \otimes_C W$ и его неприводимое слагаемое V содержащее W. Тогда, согласно предыдущему модуль $I_U(V)$ неприводим и следовательно совпадает с W.

Осталось только доказать, что условие $I_U(V) = I_{U'}(V')$ влечет $(U, V) = (U', V')$. Это равносильно тому, что различные неприводимые A модули не имеют общих неприводимых C компонент. По лемме 5.6 это равносильно условию $SZ(A, C) = SZ(C)$. Но как легко видеть, из определения $SZ(A, C) = SZ(B')$, где $B' = SZ(A, B)$. Поэтому, достаточно показать, что $SZ(B') = SZ(C)$. Но алгебра C полупроста и, является гомоморфным образом алгебры $B' \otimes B$, которая также полупроста и имеет суперцентр равный $SZ(B)') \otimes SZ(B)$. Поэтому, суперцентр алгебры C равен произведению суперцентров алгебр B' и B. Но как легко видеть, $SZ(B) \subset SZ(B')$ поэтому $SZ(C) = SZ(B')$.

$\square$

Следствие 5.9. *Рассмотрим цепь $\mathbb{Z}_2$-градуирванных полупростых конечномерных алгебр*

$$\mathfrak{Y} =< A(1) \subset \cdots \subset A(n-1) \subset A(n) >$$

(мы не предполагаем, что $A(1) = \mathbb{C}$). Пусть кроме того, $V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n$ будут неприводимыми модулями над алгебрами $A(1), \ldots, A(n-1), A(n)$ соответственно и, $SGZ(\mathfrak{Y})$-алгебра порожденная суперцентрализаторами $SZ(A(i+1), A(i))$, $i = 1, \ldots, n-1$ и алгеброй $A(1)$. Тогда, алгебра порожденная суперцентрализаторами и алгебра $SGZ(\mathfrak{Y})$ полупросты. Обозначим через $I(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ подпространство $I_{V_1}(\ldots(I_{V_{n-1}}(V_n)\ldots))$.

Тогда, ненулевуе подпространства

$$I(V_1, V_2, \ldots, V_n)$$

являются неприводимыми $SGZ(\mathfrak{Y})$ модулями и, каждый неприводимый $SGZ(\mathfrak{Y})$ модуль имеет такой вид. Кроме того, если

$$I(V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n) = I(V_1', \ldots, V_{n-1}', V_n'),$$

то $V_1 = V_1', \ldots, V_n = V_n'$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Если $n = 2$ то это утверждение предыдущей леммы. Пусть $n > 2$. Обозначим через C подалгебру в $A(n)$ порожденную $SZ(A(i+1), A(i))$, $i = 2, \ldots, n-1$ и, через B алгебру порожденную алгеброй $A(2)$ и C. Рассмотрим цепочку $A(1) \subset B$. По предположению индукции алгебра C полупроста следовательно, тензорное произведение $A(2) \otimes C$ также полупросто. Далее, легко проверить, что суперцентрализатор алгебры $A(1)$ в алгебре $A(2) \otimes C$ равен $SZ(A(2), A(1)) \otimes C$. Так как, алгебра B является гомоморфным образом алгебры $A(2) \otimes C$ то, по лемме 5.7 $SZ(B, A(1))$ равен $SGZ(\mathfrak{Y})$. Теперь мы можем воспользоваться леммой 5.8. $\square$

Докажем теперь теорему. Для этого докажем во первых, что суперцентр алгебры $SGZ(\mathfrak{Y})$ порожден суперцентрами алгебр $A(1), \ldots, A(n)$. Пусть W неприводимый $SGZ(\mathfrak{Y})$ модуль и, z_W элемент суперцентра, который действует как 1 в модулях W, $P(W)$ и, как 0 во всех остальных неприводимых модулях. По предыдущей Лемме $W = I_{V_1}(\ldots(I_{V_{n-1}}(V_n)\ldots))$.

Пусть, z_{V_i}, $i = 1, \ldots, n$ элементы аналогичные элементу z_W. Тогда, разность действует как 0 в любом неприводимом $SGZ(\mathfrak{Y})$ модуле и потому равна нулю. Это доказывает, что суперцентр алгебры$SGZ(\mathfrak{Y})$ порожден суперцентрами алгебр $A(1), \ldots, A(n)$. Так как, неприводимые представления $SGZ(\mathfrak{Y})$ с точностью до функтора P находятся в биекции с гомоморфизмами суперцентра $SGZ(\mathfrak{Y})$, то это доказывает теорему. $\square$

В случае, если ветвление простое, обобщенная алгебра Гельфанда-Цетлина содержит градуированную алгебру Гельфанда-Цетлина, а описание подпространств неприводимых модулей можно дать в терминах соответствующего графа ветвления.

Определение 5.10. *Пусть граф ветвления цепи $\mathfrak{A}$ является простым. В этом случае, каждому пути*

$$T = \lambda_1 \nearrow \ldots \lambda_i \nearrow \lambda_{i+1} \nearrow \ldots \lambda_n$$

в графе ветвления соответствует вектор v_T единственный с точностью до ненулевой константы в соответствующем неприводимом представлении. Этот вектор называется вектором Гельфанда-Цетлина.

Определение 5.11. *Два вектора v, w базиса GZ называются эквивалентными, если для соответствующих путей*

$$v \subset A(1)v \subset A(2)v \cdots \subset A(n)v, \quad w \subset A(1)w \subset A(2)w \cdots \subset A(n)w$$

в графе ветвления имеем $A(n)w = A(n)v$ и, для любого $1 \leq i \leq n-1$, $A(i)w = A(i)v$, или $\Pi(A(i)w) = A(i)v$.

Лемма 5.12. *Эквивалентные векторы GZ базиса определяют один и тот же гомоморфизм суперцентра алгебры $SGZ(\mathfrak{A})$ $\chi : SZ(\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}$. Линейная оболочка эквивалентных векторов совпадает с V_χ*

Доказательство. Легко видеть, что это условие равносильно тому, что векторы v, w являются собственными для алгебры SZ и, принадлежат одному и тому же центральному характеру. В самом деле, пусть B будет подалгебра порожденная суперцентрами

$$SZ(A(1)), SZ(A(2)), \ldots, SZ(A(n)).$$

Докажем, что тогда B является максимальной подалгеброй в A среди подалгебр которые действует как один и тот же гомоморфизм на эквивалентных векторах.

Пусть v и w эквивалентны. Если, $z \in B$ тогда, для некоторого $1 \leq i \leq n$ $z \in Z(A(i))$. Так как, неприводимые модули $A(i)v$ и $A(i)w$ отличаются только четностью, то z действует на v и w одинаковым характером. Обратно, пусть a действует как единица на любом векторе GZ базиса который эквивалентен v, и как ноль на любом неэквивалентном векторе. Достаточно показать что в $a \in B$. Пусть,

$$v \subset A(1)v \subset A(2)v \cdots \subset A(n)v$$

будет соответствующий путь. Так как, ветвление простое мы можем найти $z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n$ такие, что z_i действует как единица в $A(i)v, \Pi(A(i)v)$ и как ноль в любом неприводимом модуле не изоморфном $A(i)v, \Pi(A(i)v)$. Тогда, произведение $z = z_1 z_2, \dots z_i \dots z_n$ действует также как и a в каждом неприводимом модуле. Следовательно, $z = a$.

$\square$

Следствие 5.13. *Если ветвление цепи градуированных алгебр простое, то соответствующая алгебра Гельфанда-Цетлина является прямой суммой алгебр Клиффорда.*

6. Проективные представления симметрических групп.

И.Шур [Sch] доказал, что симметрическая группа S_n имеет лишь одно нетривиальное центральное расширение и, дал метод нахождения проективных представлений симметрической группы. Это центральное расширение, - обозначим его $\tilde{S_n}$, - является $\mathbb{Z}_2$-градуированной группой в определенном выше смысле. Однако, соответствующая градуировка его групповой алгебры устроена сложнее случая $\mathbb{C}[S_n]$, рассмотренного ранее. Собственно проективные представления симметрической группы совпадают с представлениями некоторой $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры $\mathfrak{A}_n$, которая описывается ниже и которая является "половиной"групповой алгебры группы $\tilde{S_n}$, точнее фактор-алгеброй, по "половинному идеалу". Второй идеал, дополнительный к первому, есть образ групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ группы S_n, при вложении (не сохраняющем единицу), а фактор по нему совпадает с алгеброй $\mathbb{C}[S_n]$. при этом обе фактор-алгебры - $\mathbb{C}[S_n]$ и $\mathfrak{A}_n$ наследуют $\mathbb{Z}_2$-градуировку алгебры $C[\tilde{S_n}]$. Из предыдущих рассмотрений следует, что представления всякой $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры с существенной градуировкой находятся в биективном соответствии с представлениями ее четной части. Однако, четная часть алгебры $\mathfrak{A}_n$ до сих пор не имеет удобного модели. Поэтому, для описания ее представлений мы используем изложенные выше понятия градуированных представлений суперулгебры Гельфанда-Цетлина $SGZ(\mathfrak{Y})$. При этом мы повторяем путь построения теории представлений симметрической группы предложенный в [OV, VO]. Строятся аналоги YJM-элементов, спектров, содержаний и др.и в конце концов приводит к известному списку проективных представлений симметрических групп.

Мы рассматриваем две алгебры которые связаны с проективными представлениями симметрической группы. Первая, - это описываемая ниже алгебра $\mathfrak{A}_n$, а вторая это тензорное произведение (в градуированном смысле) алгебры Клиффорда с n образующими $\mathcal{C}_n$ и алгебры $\mathfrak{A}_n$. Для алгебры $\mathfrak{A}_n$ ортогональная форма Юнга была построена М.Назаровым в [N1], а полунормальная и ортогональные формы Юнга для алгебры $\mathcal{C}_n \otimes \mathfrak{A}_n$ в [N2]. Мы строим полунормальные формы Юнга для обеих алгебр. Оказывается, что для алгебры $\mathcal{C}_n \otimes \mathfrak{A}_n$ формулы Юнга выглядят проще и совпадают с формулами полученными М.Назаровым в [N2] другими методами.

Таким образом, градуированные представления $\mathfrak{A}_n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неградуированными собственно проективными представлениями знакопеременной группы или, что то же самое, -с представлениями центрального расширения знакопеременной группы в которых центральный элемент действует нетривиально.

Перейдем к более подробному описанию групп и алгебр. Группа $\tilde{S}_n$ задается образующими $\tilde{\sigma}_k, k = 0, 1, \ldots, n-1$ и соотношениями

$$\tilde{\sigma_k}^2 = 1, \quad \tilde{\sigma}_k\tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma}_0\tilde{\sigma}_k, \quad (\tilde{\sigma}_k\tilde{\sigma}_{k+1})^3 = 1 \quad , k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\tilde{\sigma}_i\tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_0\tilde{\sigma}_k\tilde{\sigma}_i \quad i, k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Градуировка определяется следующим образом: единица группы является четным элементом, а все элементы $\tilde{\sigma}_k, k > 0$-нечетными, заметим, что элемент $\tilde{\sigma}_0$- четный. Фактор-группа $\tilde{S}_n$ группы по ее центру ($\mathbb{Z}_2 = \{\tilde{\sigma}_0\}$) - есть симметрическая группа, поэтому $\tilde{S}_n$ есть $\mathbb{Z}_2$ -расширение S_n, но это расширение не является тривиальным. Групповая алгебра $\mathbb{C}[\tilde{S}_n]$ группы $\tilde{S}_n$ разлагается в сумму двух идеалов, а именно, идеала, порожденного соотношением $\tilde{\sigma}_0 - 1 = 0$, фактор-алгебра по которому есть групповая алгебра симметрической группы с обычной градуировкой по четности; и идеала, порожденного соотношением $\tilde{\sigma}_0 + 1 = 0$, которому не отвечает никакой нормальный делитель в группе $\tilde{S}_n$; фактор-алгебра по этому идеалу есть по определению градуированная алгебра $\mathfrak{A}_n$, не являющаяся групповой алгеброй никакой группы. Ее представления и есть собственно проективные представления симметрической группы. Заметим еще, что нормальный делитель, являющийся четной частью группы $\tilde{S}_n$ есть ограничение центрального расширения группы S_n на знакопеременную группу S_n^+, т.е. $\mathbb{Z}_2$-расширение знакопеременной группы, которое также не является тривиальным.

Алгебра $\mathfrak{A}_n$, таким образом, порождена образующими $\tau_1, \ldots, \tau_n$ являющимися образами образующих $\tilde{\sigma}_k, k > 0$ группы $\tilde{S}_n$ и удовлетворяющим соотношениям

$$\tau_k^2 = 1, \quad (\tau_k\tau_{k+1})^3 = 1, \quad (\tau_k\tau_l)^2 = -1 \text{ if } \mid k - l \mid > 1 \tag{2}$$

Алгебра $\mathfrak{A}_n$ имеет естественную градуировку, наследуемую из алгебры $\mathbb{C}[\tilde{S}_n] : p(\tau_i) = 1,\ i = 1, \ldots, n-1$. Мы можем переписать определяющие соотношения в виде:

$$\tau_k^2 = 1, \quad \tau_k\tau_{k+1}\tau_k = \tau_{k+1}\tau_k\tau_{k+1}, \quad \tau_k\tau_l = -\tau_l\tau_k \text{ if } \mid k - l \mid > 1 \tag{3}$$

На самом деле более удобна немного иная форма описания алгебры $\mathfrak{A}_n$. Определим по индукции для $i < j$

$$\tau_{ii+1} = \tau_i, \quad \tau_{ij} = -\tau_{ij-1}\tau_j\tau_{ij-1}, \quad \tau_{ji} = -\tau_{ij}$$

где $i = 1, \dots, n-1$. Легко проверить справедливость следующих соотношений для $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и $i \neq j$

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji}, \quad \tau_{ij}^2 = 1, \quad \tau_{ij}\tau_{kl} = -\tau_{kl}\tau_{ij}, \quad \text{if } \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$$

$$\tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ij} = \tau_{jk}\tau_{ij}\tau_{jk} = -\tau_{ij},$$

где i, j, k попарно различны и $i, j, k \in \mathfrak{A}_n$. Мы будем рассматривать $\mathfrak{A}_n$ как суперdescribed алгебру полагая $p(\tau_{ij}) = 1$. Отметим, что можно получить аналогичное описание алгебры $\mathfrak{A}_n^+$. Чтобы сделать это, напомним следующий результат из [VV]. Группа S_n^+ задается образующими $x_i = (i, i+1, i+2), i = 1, \dots, n-2$ и соотношениями

$$x_i^3 = 1, \ i = 1, \dots, n-2,$$

$$(x_i x_{i+1})^2 = 1, \ i = 1, \dots, n-3,$$

$$x_i x_j = x_j x_i, \ |i-j| > 2, \ i, j = i = 1, \dots, n-2,$$

$$x_i x_{i+1}^{-1} x_{i+2} = x_{i+2} x_i, \ i = 1, \dots, n-4.$$

Отсюда легко следует

Предложение 6.1. *Алгебра $\mathfrak{A}_n^+$ задается образующими y_i, $i = 1, \dots, n-2$ и соотношениями*

$$y_i^3 = 1, \ i = 1, \dots, n-2,$$

$$(y_i y_{i+1})^2 = -1, \ i = 1, \dots, n-3,$$

$$y_i y_j = y_j y_i, \ |i-j| > 2, \ i, j = i = 1, \dots, n-2,$$

$$y_i y_{i+1}^{-1} y_{i+2} = -y_{i+2} y_i, \ i = 1, \dots, n-4.$$

Опишем теперь суперцентр (см. 2.13) алгебры $\mathfrak{A}_n$.

Теорема 6.2. *Пусть $\alpha \vdash n$ - разбиение числа n, и все части α являются нечетными. Элементы C_n^α образуют базис суперцентра алгебры $\mathfrak{A}_n$.*

Доказательство. Существует естественный аналог циклового разложения. А именно, определим

$$\tau_{i_1 i_2 \dots i_p} = \tau_{i_1}\tau_{i_2} \dots \tau_{i_p}$$

Тогда несложно проверить, что если p - четное, то $\tau_{i_1 i_2 \dots i_p} = -\tau_{i_2 i_3 \dots i_p i_1}$ а, если p - нечетное, то $\tau_{i_1 i_2 \dots i_p} = \tau_{i_2 i_3 \dots i_p i_1}$

Пусть α будет разбиением числа $m \leq n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, где $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_s \geq 2$. Положим

$$C_n^\alpha = \sum \tau_{i_1^{(1)} \dots i_{\alpha_1}^{(1)}} \tau_{i_1^{(2)} \dots i_{\alpha_2}^{(2)}} \dots \tau_{i_1^{(s)} \dots i_{\alpha_s}^{(s)}}$$

где сумма берется по попарно различным $i_j^{(r)}$ из $\{1, 2, \dots, n\}$.

Определим следующее действие симметрической группы S_n на $\mathfrak{A}_n$

$$\sigma_{ij}(\tau_{kl}) = -\tau_{ij}\tau_{kl}\tau_{ij}$$

где $\sigma_{ij} \in S_n$ является транспозицией. отсюда мы видим , что для описания суперцентра, нам надо описать инвариантные элементы относительно этого действия. Следовательно, суперцентр является линейной оболочкой элементов C_n^α где α любое разбиение n. Покажем что если α_j является четным для некоторого j тогда C_n^α равен нулю. В самом деле,

$$C_n^\alpha = \sum \tau_{i_1^{(1)}\dots i_{\alpha_1}^{(1)}} \dots \tau_{i_1^{(j)}\dots i_{\alpha_j}^{(j)}} \dots \tau_{i_1^{(s)}\dots i_{\alpha_s}^{(s)}} =$$

$$\sum \tau_{i_1^{(1)}\dots i_{\alpha_1}^{(1)}} \dots \tau_{i_2^{(j)}\dots i_{\alpha_j}^{(j)} i_1^{(j)}} \dots \tau_{i_1^{(s)}\dots i_{\alpha_s}^{(s)}} = -C_n^\alpha$$

Следовательно, $C_n^\alpha = 0$. Если все части α являются нечетными, тогда $C_n^\alpha \neq 0$. Заметим, что для различных $\alpha^{(1)}, \dots \alpha^{(q)}$ соответствующие элементы $C_n^{\alpha^{(1)}}, \dots, C_n^{\alpha^{(q)}}$ не имеют общих слагаемых и потому линейно независимы. □

Теперь опишем суперцентрализатор $SZ(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-1})$. Для этого, введем следующие аналоги элементов YJM.

Определение 6.3. [Se] *Элементом Юнга-Юциса-Мерфи (YJM) называется следующий элемент алгебры $\mathfrak{A}_n$:*

$$\pi_n = \tau_{1n} + \tau_{2n} + \dots + \tau_{n-1n}$$

Отметим, что по определению $\pi_1 = 0$. Заметим также, что аналоги элементов YJM для алгебры $\mathcal{C}_n \otimes \mathfrak{A}_n$ были введены М.Назаровым в [N2] и, они с точностью до элемента из алгебры Клиффорда совпадают с π_n, а именно $x_n = \frac{1}{\sqrt{2}} p_n \pi_n$. Известно, что элементы x_i, $i = 1, \dots, n$ попарно коммутируют. Отсюда следует, что элементы π_i, $i = 1, \dots, n$ попарно антикоммутируют. Мы дадим ниже независимое доказательство этого.

Теорема 6.4. *Суперцентрализатор (see 2.13) $SZ(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-1})$ порожден суперцентром $SZ(\mathfrak{A}_{n-1})$ и элементом π_n. Суперaлгебра Гельфанда Цетлина совпадает с алгеброй $\mathbb{C}[\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$ а алгебра порожденная суперцентрами $Z(\mathfrak{Y})$ совпадает с $\mathbb{C}[\pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_n^2]$*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме мы должны усреднить элементы из $\mathfrak{A}_n$ относительно действия S_{n-1}. Положим,

$$C_n^{\alpha,p} = \sum \tau_{i_1\dots i_p n} \tau_{i_1^{(1)}\dots i_{\alpha_1}^{(1)}} \dots \tau_{i_1^{(j)}\dots i_{\alpha_j}^{(j)}} \dots \tau_{i_1^{(s)}\dots i_{\alpha_s}^{(s)}}$$

где, сумма берется по попарно различным i_l, i_r^j из $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Нетрудно проверить, что $SZ(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-1})$ является линейной оболочкой $C_n^{\alpha,p}$, где $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + p \leq n$. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы видим, что все части α являются нечетными, а p произвольно. Проведем индукцию по $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + p$. Если $p = 0$, тогда $C_n^{\alpha,0} \in SZ(\mathfrak{A}_{n-1})$. Поэтому можно предполагать, что $p > 0$. Рассмотрим произведение

$$\pi_n C_n^{\alpha,p-1} = \sum \tau_{in} \tau_{i_1\dots i_{p-1} n} \tau_{i_1^{(1)}\dots i_{\alpha_1}^{(1)}} \dots \tau_{i_1^{(s)}\dots i_{\alpha_s}^{(s)}} =$$

$$= C_n^{\alpha,p} + \sum_{i=i_1,\ldots,i_{p-1}} \tau_{in}\tau_{i_1\ldots i_{p-1}n}\tau_{i_1^{(1)}\ldots i_{\alpha_1}^{(1)}}\cdots\tau_{i_1^{(s)}\ldots i_{\alpha_s}^{(s)}} +$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=i_1^{(j)},\ldots,i_{\alpha_j}^{(j)}} \tau_{in}\tau_{i_1\ldots i_{p-1}n}\tau_{i_1^{(1)}\ldots i_{\alpha_1}^{(1)}}\cdots\tau_{i_1^{(s)}\ldots i_{\alpha_s}^{(s)}}$$

Но легко проверить, что

$$\tau_{i_q n}\tau_{i_1\ldots i_{p-1}n} = (-1)^p \tau_{i_1\ldots i_{q-1}n}\tau_{i_q\ldots i_{p-1}n}$$

и

$$\tau_{i_1^{(j)}n}\tau_{i_1\ldots i_{p-1}n}\tau_{i_1^{(j)}\ldots i_{\alpha_j}^{(j)}} = \tau_{i_1\ldots i_{p-1}i_2^{(j)}\ldots i_{\alpha_j}^{(j)}i_1^{(j)}n}$$

Следовательно, все слагаемые за исключением $C_n^{\alpha,p}$ являются линейными комбинациями элементов $C_n^{\beta,q}$ причем, $|\beta| + q = |\alpha| + p - 1 < |\alpha| + p$. Отсюда сразу следует равенство $SGZ(\mathfrak{Y}) = \mathbb{C}[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]$. Поэтому, достаточно показать, что $SZ(\mathfrak{A})$ совпадает с $\mathbb{C}[\pi_1^2, \pi_2^2, \ldots, \pi_n^2]$. Имеем,

$$\pi_i^2 = i - 1 - \sum_{k,l<i,k\neq l} \tau_{kli} = \sum_{1\le i,j,k\le i-1} \tau_{ijk} - \sum_{1\le i,j,k\le i} \tau_{ijk},$$

где, в последних суммах индексы ijk попарно различны. Следовательно, $\pi_i^2 \in SZ(\mathfrak{Y})$, с другой стороны, как уже было доказано $SZ(A_i) \subset \mathbb{C}[SZ(A_{i-1}), \pi_i^2]$ □

Аналогично доказывается следующая теорема

Теорема 6.5. *Суперцентрализатор $SZ(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-2})$ порожден суперцентром $SZ(\mathfrak{A}_{n-2})$ и элементами $\pi_n, \pi_{n-1}, \tau_{n-1}$.*

.

Замечание. Согласно теореме 5.4 и предыдущему следствию каждый неприводимый $\mathfrak{A}_n$ модуль является прямой суммой попарно неизоморфных неприводимых $SGZ(\mathfrak{Y})$ модулей, каждый из которых имеет вид $V(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n$ собственные значения элементов $\pi_1^2, \pi_2^2, \ldots, \pi_n^2$.

Следствие 6.6. *Рассмотрим цепочку $\mathbb{Z}_2$ - градуированных алгебр*

$$\mathbb{C} \subset \mathcal{C}_1 \otimes \mathfrak{A}_1 \subset \mathcal{C}_2 \otimes \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \mathcal{C}_n \otimes \mathfrak{A}_n$$

Тогда, алгебра порожденная суперцентрализаторами этой цепочки совпадает с алгеброй $\mathcal{C}_n \otimes \mathbb{C}[\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n]$, а алгебра порожденная суперцентрами $SGZ(\mathfrak{Y})$ совпадает с $\mathbb{C}[\pi_1^2, \pi_2^2, \ldots, \pi_n^2]$.

Следующая Лемма описывает некоторые соотношения в алгебре $SZ(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_{n-2})$. Определим следующие элементы алгебры $\mathfrak{A}_n$

$$F_i = \tau_i(\pi_i^2 - \pi_{i+1}^2) + (\pi_{i+1} - \pi_i)$$

for $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Лемма 6.7. *Для $i = 1, 2, \ldots, n-1$, справедливы следующие соотношения*

$$\tau_i\pi_i + \pi_{i+1}\tau_i = 1, \quad (\pi_i - \pi_{i+1})\tau_i = \tau_i(\pi_i - \pi_{i+1})$$

$$(\pi_i^2 - \pi_{i+1}^2)\tau_i + \tau_i(\pi_i^2 - \pi_{i+1}^2) = 2(\pi_i - \pi_{i+1})$$

$$F_i\pi_i + \pi_{i+1}F_i = 0, \quad F_i\pi_{i+1} + \pi_iF_i = 0, \quad F_i^2 = \pi_i^2 + \pi_{i+1}^2 - (\pi_i^2 - \pi_{i+1}^2)^2$$

Доказательство.

$$\tau_i\pi_i + \pi_{i+1}\tau_i = \tau_{ii+1}\sum_{j<i}\tau_{ji} + \left(\tau_{ii+1} + \sum_{j<i}\tau_{ji+1}\right)\tau_{ii+1} =$$

$$1 + \sum_{j<i}\tau_{i+1ij} - \sum_{j<i}\tau_{ji+1i} = 1$$

и мы доказали первое соотношение. Остальные соотношения легко следуют из первого. □

Следующая лемма необходима для получения аналогов формул Юнга и является несложным упражнением по теории представлений. Рассмотрим алгебру H порожденную полупростой коммутативной алгеброй A и элементами τ, p, q коммутирующими с A и, подчиненными соотношениям $\tau^2 = 1$, $pq + qp = 0$, $\tau p + q\tau = 1$. Легко проверить, что элемент $\Delta = p^2 + q^2 - (p^2 - q^2)^2$ принадлежит центру алгебры H.

Лемма 6.8. *Пусть, V неприводимый модуль над H который полупрост как $A[p, q]$ модуль. Тогда:*

1) Если $\Delta = 0$ в V , то V неприводим как $A[p, q]$ модуль, а p^2, q^2 действуют в V умножениями на a, b при этом $a \neq b$, $a + b = (a - b)^2$, а τ действует как оператор $\frac{p-q}{a-b}$.

2) Если $\Delta \neq 0$ в V, то модуль V является прямой суммой двух неприводимых $A[p, q]$ модулей в одном из которых U элементы p^2, q^2 действуют умножениями на a, b при этом $a \neq b$, $a + b \neq (a - b)^2$ и

$$V = H \otimes_{A[p,q]} U$$

Следствие 6.9. *Пусть V неприводимый модуль над $\mathcal{C}_k \otimes \mathfrak{A}_n$ и $V(a_1, \ldots, a_n)$, подпространство общих собственных векторов для $\pi_1^2, \pi_2^2, \ldots, \pi_n^2$ с собственными значениями $a_1, \ldots, a_n$. Тогда:*

1) $a_i \neq a_{i+1}$ для $i = 1, \ldots, n-1$

2) Если $a_i + a_{i+1} = (a_i - a_{i+1})^2$,тогда τ_i действует в подпространстве $V(a_1, \ldots, a_n)$ как оператор $\frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}$

2) Если $a_i + a_{i+1} \neq (a_i - a_{i+1})^2$,то подпространство

$$V(a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n) \neq 0$$

Доказательство. Рассмотрим V как модуль над подалгеброй $SZ(\mathfrak{A}_{i+1}, \mathfrak{A}_{i-1})$, которая полупроста по лемме 6.5. Рассмотрим соответствующее действие алгебры $H(p, q, \tau)$ которое также полупросто. Разложим модуль V на изотипические компоненты относительно $H(p,q,\tau)$, тогда подпространство $V(a_1,\dots,a_n)$ содержится в изотипической компоненте в которой элемент $\Delta = p^2+q^2-(p^2-q^2)^2$ действует как 0. Поэтому, по лемме 6.8 , $a_i \neq a_{i+1}$ и оператор τ_i действует в $V(a_1,\dots,a_n)$ как оператор $\frac{\pi_i-\pi_{i+1}}{a_i-a_{i+1}}$. Это доказывает 2). Докажем 3). Аналогично предыдущему рассматриваем изотипическую компоненту с фиксированным значением $\Delta \neq 0$. По лемме, 6.8 $V(a_1,\dots,a_{i+1},a_i,\dots,a_n) \neq 0$.

□

Обозначим через $SSpec(n)$ множество всех возможных последовательностей собственных значений элементов $\pi_1^2,\pi_2^2\dots,\pi_n^2$ и, через $Spec(n)$ множество всех возможных собственных значений обычных элементов Юнга. Обозначим также через $Spec^+(n)$ подмножество в $Spec(n)$ состоящее из $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ таких, что $c_i \geq 0$ для $i=1,\dots,n$.

Теорема 6.10. *Пусть* $(a_1,a_2,\dots,a_n) \in SSpec(n)$.

Тогда:

1) $a_i \geq 0$ *для любого* $i=1,\dots,n$ *и существует только одно неотрицательное целое* b_i *такое, что* $a_i = \frac{1}{2}b_i(b_i+1)$*;*

2) *отображение*

$$(a_1,a_2,\dots,a_n) \longrightarrow (b_1,b_2,\dots,b_n)$$

является биекцией $SSpec(n)$ *на* $Spec^+(n)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение индукцией по i. Единственность очевидна. Докажем существование. Если $i=1$, тогда $\pi_1=0$ и $a_1=0$, следовательно $b_1=0$. Если $i=2$, тогда $a_2=\pi_2^2=1$ и $b_2=1$. Предположим, что $i>1$ и $a_i=\frac{1}{2}b_i(b_i+1)$ где b_i неотрицательное целое. Тогда возможны два случая

1. $a_i+a_{i+1}=(a_i-a_{i+1})^2$;

2. $a_i+a_{i+1}\neq(a_i-a_{i+1})^2$;

В случае 1. мы имеем следующее уравнение относительно a_{i+1}

$$a_{i+1}^2-(2a_i+1)a_{i+1}+a_i^2-a_i=0$$

В силу индуктивного предположения это уравнение имеет два корня : $a_{i+1}=\frac{1}{2}(b_i+1)(b_i+2)$, $a_{i+1}=\frac{1}{2}(b_i-1)b_i$. По индукции $b_i \geq 0$.Следовательно, $a_{i+1}\geq 0$. В случае 2 $(a_1,\dots,a_{i+1},a_i\dots,a_n)\in SSpec(n)$ и утверждение следует из индуктивного предположения.

Докажем теперь утверждение 2). Напомним следующую характеризацию множества $Spec(n)$. Согласно [OV] $(c_1,c_2,\dots,c_n)\in Spec(n)$ если и только если выполнены следующие условия:

1) $c_i\in\mathbb{Z},\ c_1=0$;

2) $c_i\neq c_{i+1}$;

3) для любого $i=1,\dots,n-2$, имеем $(c_i,c_{i+1},c_{i+2})\neq(d,d+1,d)$, для некоторого $d\in\mathbb{Z}$;

4) if $c_{i+1}\neq c_i\pm 1$ тогда, $(c_1,\dots,c_{i+1},c_i\dots,c_n)\in Spec(n)$.

Докажем, что b_i for $i=1,\dots,n$ удовлетворяют таким же условиям.

1) $b_i \in \mathbb{Z}$, $b_1 = 0$, $b_i \geq 0$. Утверждения 1),2) and 4) уже были доказаны. Давайте докажем утверждение 3). Предположим, что существует i такое, что $(b_i, b_{i+1}, b_{i+2}) = (b, b+1, b)$. Тогда

$$(a_i - a_{i+1})^2 = (-1-b)^2 = a_i + a_{i+1}, \quad (a_{i+1} - a_i)^2 = (1+b)^2 = a_{i+1} + a_{i+2}$$

Следовательно, согласно 6.9

$$\tau_i = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}}, \quad \tau_{i+1} = \frac{\pi_{i+1} - \pi_{i+2}}{a_{i+1} - a_{i+2}}$$

Но несложно проверить, что эти соотношения противоречат соотношению

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}.$$

и утверждение 4) доказано. Поэтому, отображение из утверждения 2) теоремы является инъекцией. Далее доказательство проходит по той же схеме что и для симметрической группы. Сначала доказывается, что существует последовательность допустимых транспозиций, которая переводит заданную строгую стандартную таблицу в стандартную таблицу той же формы заполненную по строкам. Отсюда следует, что если вес стандартной таблицы имеет ту же форму, что и вес некоторого неприводимого модуля, то он также является весом этого модуля. Подсчет числа неприводимых представлений и количества строгих разбиений заканчивает доказательство. □

Перейдем к описанию аналогов формул Юнга. В отличие от обычных формул Юнга, мы не используем базис Гельфанда - Цетлина, а пишем соответствующие формулы в терминах суперaлгебры Гельфанда - Цетлина . Заметим, что при этом мы получаем полное описание действия алгебры $\mathcal{C}_k \otimes \mathfrak{A}_n$ в неприводимых модулях.

Фиксируем строгое разбиение α и выберем подпространство $V^\alpha_{T_0}$ в неприводимом модуле V^α соответствующее стандартной таблице, заполненной по строкам. Пусть T будет любая таблица формы α. Тогда существует единственный $s \in S_n$ такой, что $T = sT_0$. Обозначим через P_T отображение $V^\alpha_{T_0} \to V^\alpha_T$ которое является композицией s и проекции V^α на V^α_T параллельно $\oplus_{T' \neq T} V^\alpha_{T'}$.

Теорема 6.11. *(Полунормальная форма Юнга для алгебры $\mathcal{C}_k \otimes \mathfrak{A}_n$). Пусть α строгое разбиение и, T любая таблица формы α. Тогда, действие $\tau_i \in \mathfrak{A}_n$ задается следующими формулами*

(i) Если $a_i + a_{i+1} = (a_i - a_{i+1})^2$, тогда

$$\tau_i P_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} P_T$$

(ii) Пусть $a_i + a_{i+1} \neq (a_i - a_{i+1})^2$ и $l(s_i T) > l(T)$, тогда

$$\tau_i P_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} P_T + \frac{1}{\sqrt{2}} (p_i - p_{i+1}) P_{s_i T}$$

(*iii*) *Пусть* $a_i + a_{i+1} \neq (a_i - a_{i+1})^2$ *и* $l(s_iT) < l(T)$, *тогда*

$$\tau_i P_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} P_T + \frac{1}{\sqrt{2}} (p_i - p_{i+1}) \left(1 - \frac{a_i + a_{i+1}}{(a_i + a_{i+1})^2}\right) P_{s_iT}$$

Доказательство. Во первых, напишем явный вид отображения P_T. Пусть $T = sT_0$, и $s = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ редуцированное разложение перестановки s, и все транспозиции в этом разложении являются допустимыми. Тогда,

$$P_{sT_0} = P_{s_{i_1}} P_{s_{i_2}} \dots P_{s_{i_l}} \tag{4}$$

где,

$$P_{s_i} = -\frac{p_i - p_{i+1}}{\sqrt{2}} \left(\tau_i - \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{\pi_i^2 - \pi_{i+1}^2}\right)$$

Достаточно рассмотреть случай $l = 1$, и проверить, что если $v \in V_T^\alpha$ и s_i допустимая транспозиция, то $s_i v - v' = P_{s_i} v \in V_{s_iT}^\alpha$, где $v' \in V_T^\alpha$. Но легко проверить, что $\pi_i^2 P_{s_i} = P_{s_i} \pi_{i+1}^2$, $\pi_i^2 P_{s_{i+1}} = P_{s_i} \pi_i^2$. Следовательно, $P_{s_i} v \in V_{s_iT}^\alpha$. Далее, утверждение пункта (*i*) следует из леммы 6.8. Утверждение пункта (*ii*) следует из соотношения $P_{s_iT} = P_{s_i} P_T$, если $l(s_iT) > l(T)$. Утверждение (*iii*) следует из (*ii*). Теорема доказана. □

Замечание 6.12. *Легко проверить выполнение соотношений* $P_{sT_0} \pi_i = \pi_{s(i)} P_{sT_0}, P_{sT_0} p_i = p_{s(i)} P_{sT_0}$. *Эти соотношения вместе с соотношениями предыдущей теоремы полностью описывают действие алгебры* $\mathcal{C}_k \otimes \mathfrak{A}_n$ *в неприводимых модулях и совпадают (после несложных преобразований) с формулами полученными в* [N2] *другими методами.*

Перейдем к описанием аналогов формул Юнга для алгебры $\mathfrak{A}_n$. Для этого нам необходимо определить аналоги отображений P_T. В отличие от предыдущего случая это нельзя сделать используя оператор проектирования на соответствующее собственное подпространство. Вместо этого мы напишем аналог формулы 4, которая дает явного разложения этого оператора.

Фиксируем строгое разбиение α и выберем подпространства V_T^α, $V_{s_iT}^\alpha$, где s_i допустимая транспозиция и положим

$$Q_{s_i} = \left(\tau_i - \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{\pi_i^2 - \pi_{i+1}^2}\right) \left(\frac{\pi_i}{\sqrt{\pi_i^2}} - \frac{\pi_{i+1}}{\sqrt{\pi_{i+1}^2}}\right)$$

если $a_i a_{i+1} \neq 0$, и

$$Q_{s_i} = \left(\tau_i - \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{\pi_i^2 - \pi_{i+1}^2}\right) \frac{\pi_i + \pi_{i+1}}{\sqrt{\pi_i^2} + \sqrt{\pi_{i+1}^2}}$$

если $a_i a_{i+1} = 0$.

Пусть как и прежде $V_{T_0}^\alpha$ подпространство в неприводимом модуле V^α соответствующее стандартной таблице заполненной по строкам. Пусть T будет любая таблица формы α. Тогда, существует единственный $s \in S_n$

такой, что $T = sT_0$ и $s = s_{i_1}\dots s_{i_l}$ редуцированное разложение перестановки s, и все транспозиции в этом разложении являются допустимыми. Положим

$$Q_T = Q_{s_1}Q_{s_2}\dots Q_{s_l}$$

Теорема 6.13. *(Полунормальная форма Юнга для алгебры $\mathfrak{A}_n$) Пусть , α строгое разбиение и, T любая таблица формы α . Тогда, Q_T не зависит от выбора приведенного разложения s в произведение допустимых транспозиций и действие $\tau_i \in \mathfrak{A}_n$ задается следующими формулами*

(i) Если $a_i + a_{i+1} = (a_i - a_{i+1})^2$, тогда

$$\tau_i Q_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} Q_T$$

(ii) Пусть $a_i + a_{i+1} \neq (a_i - a_{i+1})^2$, $a_i a_{i+1} \neq 0$ и $l(s_iT) > l(T)$, тогда

$$\tau_i Q_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} Q_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi_i}{\sqrt{a_{i+1}}} - \frac{\pi_{i+1}}{\sqrt{a_i}}\right) Q_{s_iT}$$

если $l(s_iT) < l(T)$, тогда

$$\tau_i Q_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} Q_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi_i}{\sqrt{a_{i+1}}} - \frac{\pi_{i+1}}{\sqrt{a_i}}\right)\left(1 - \frac{a_i + a_{i+1}}{(a_i + a_{i+1})^2}\right) Q_{s_iT}$$

(iii) Пусть $a_i + a_{i+1} \neq (a_i - a_{i+1})^2$, $a_i a_{i+1} = 0$ и $l(s_iT) > l(T)$, тогда

$$\tau_i Q_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} Q_T - \frac{\pi_i + \pi_{i+1}}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}} Q_{s_iT}$$

если $l(s_iT) < l(T)$, тогда

$$\tau_i Q_T = \frac{\pi_i - \pi_{i+1}}{a_i - a_{i+1}} Q_T + \frac{\pi_i + \pi_{i+1}}{\sqrt{a_i} + \sqrt{a_{i+1}}}\left(1 - \frac{a_i + a_{i+1}}{(a_i + a_{i+1})^2}\right) Q_{s_iT}$$

Доказательство. Проверим сначала, что Q_T не зависит от выбора приведенного разложения. Для этого достаточно проверить равенство,

$$Q_{s_i}Q_{s_{i+1}}Q_{s_i} = Q_{s_{i+1}}Q_{s_i}Q_{s_{i+1}}$$

что делается прямым перебором возможных случаев. После этого доказательство проходит по схеме предыдущей теоремы. □

Эта работа была частично поддержана EPSRC (грант EP/ E004008/1).

Список литературы

[C] Cherednik, I. V. Special bases of irreducible representations of a degenerate affine Hecke algebra. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 20 (1986), no. 1, 87–88.

[FH] Fulton W., Harris., Representation Theory . *A First Course.* Graduate Text in Mathematics, Springer - Verlag, 1991.

[J] Jozefiak T., Semisimple superalgebras, Lecture notes,Math. 1352, 1988, 96–113.

[Ju1] Jucys A., Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring, Report Math. Phys. 5, 1974, 107–112

[Ju2] Jucys A., Factorization of Young's projection operators for symmetric groups, Litovsk. Fiz. Sb. 5, 1971, 1–10

[M] Murphy G., A new construction of the Young seminormal representations of the symmetric group, J. Algebra 69, 1981, 287–291

[Mo] Morris A., Projective representations of finite reflection groups. III. Comm. Algebra 32 (2004), no. 7, 2679–2694

[N1] Nazarov M., Young's orthogonal form of irreducible projective representations of the symmetric group, J. London Math. Soc. (2), 42, 1990, 437–451.

[N2] Nazarov M., Young's symmetrizers for projective representations of the symmetric group, Adv. Math., 127, n.2, 1997, 190–257

[NS] Nazarov, M., Sergeev, A., Centralizer construction of the Yangian of the queer Lie superalgebra. Studies in Lie theory, 417–441, Progr. Math., 243, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2006.

[OV] Okunkov A., Vershik A., A new approach to representation theory of symmetric groups. Selecta Math., new series, 2, no. 4, 1996, 581–605

[Se] Sergeev A., The Howe duality and the projective representations of symmetric groups, Represent. Theory 3 (1999), 416–434

[Se1] Sergeev A.,The invariant polynomials on simple Lie superalgebras, Represent. Theory 3 (1999), 250–280

[Se3] Sergeev, A. N. Tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras Gl(n, m) and $Q(n)$. (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 123(165) (1984), no. 3, 422–430.

[KL] Kleshchev A . Linear and projective representations of symmetric groups. Cambridge Tracts in Mathematics, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. xiv+277 pp.

[Sch] Schur, J. On the representation of the symmetric and alternating groups by fractional linear substitutions. Translated from the German [J. Reine Angew. Math. 139 (1911), 155–250] by Marc-Felix Otto. Internat. J. Theoret. Phys. 40 (2001), no. 1, 413–458.

[VO] A.Vershik, A.Okunkov. A new approach to representation theory of symmetric groups.П. Journ. of Math.v.131, No.2, 2005.

[V] Vershik A.A new approach to representation theory of symmetric groups Ш. Induced representation and Frobenius correspondence. Moscow Math Journ. No. 4,2006.

[V1] Vershik A. Local algebras and a new version of Young's orthogonal form. In "Topics in Algebra, part 2: Commutative Rings and Algebraic Groups"(Warsaw 1988), Banach Cent. Publ. 26, Part 2, 467-473 (1990).

[VK] Vershik, A. M.; Kerov, S. V. Locally semisimple algebras. Combinatorial theory and the K_0-functor. (Russian) Current problems in mathematics. Newest results, Vol. 26, 3–56, 260, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1985.

[KW] Khongsap T. ; Wang W., Hecke - Clifford Algebras and spin Hecke Algebras I, arXiv: 07040201.

[VV] Vershik, A.M. Vsemirnov, M.V. The local stationary presentation of the alternating groups and normal form. arXiv:math/0703278 (sbm to Journal of Algebra).