ПОМИ ПРЕПРИНТ 12/2007

Аналог теоремы Брукса для динамических раскрасок

Д. В. Карпов [1]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191013, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

Abstract

Назовем подразбиением полного графа K_n любой граф, который можно получить заменой нескольких ребер K_n на цепочки длины 2 (с каждой такой цепочкой добавляется новая вершина степени 2).

Пусть G — связный простой граф с максимальной степенью вершин $d \geq 86$. В работе доказывается, что динамическая правильная раскраска вершин графа G в d цветов существует тогда и только тогда, когда G отличен от K_{d+1} и его подразбиений.

[1] Автор благодарит за поддержку исследований программу фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики." Исследования поддержаны грантом Президента РФ НШ-8664.2006.1 и грантом РФФИ 05-0100932.

1 Введение

В настоящей работе под графом понимается конечный граф без петель и кратных ребер, а под *раскраской* мы будем понимать правильную раскраску вершин графа.

Как обычно, множество вершин и ребер графа G мы будем обозначать $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Максимальную и минимальную степени вершин графа G мы будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно. Для любой вершины $v \in V(G)$ через $d_G(v)$ будем обозначать степень вершины v в графе G, а через $\mathrm{N}_G(v)$ — *окрестность* вершины v, то есть, множество всех вершин, смежных с v. Нетрудно убедиться, что $v \notin \mathrm{N}_G(v)$.

Для любой вершины $v \subset V(G)$ мы будем обозначать через $G-v$ граф, полученный из G в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей ребер. Если $u, v \in V(G)$, но $uv \notin E(G)$, то через $G + uv$ мы будем обозначать граф, полученный из G в результате добавления ребра uv.

Для любого множества $U \subset V(G)$ через $G(U)$ мы будем обозначать индуцированный подграф графа G на множестве вершин U. Под компонентой связности графа G мы будем понимать любое максимальное по включению множество вершин $W \subset V(G)$ такое, что граф $G(W)$ связен.

Определение 1. Назовем правильную раскраску вершин графа G *динамической*, если для любой вершины $v \in V(G)$ такой, что $d_G(v) \geq 2$, окрестность $\mathrm{N}_G(v)$ содержит вершины хотя бы двух различных цветов.

По аналогии с классическим определением хроматического числа, определим динамическое хроматическое число графа.

Определение 2. *Динамическое хроматическое число* графа G (обозначение: $\chi_2(G)$) — это наименьшее такое натуральное число, что существует динамическая раскраска вершин графа G в $\chi_2(G)$ цветов.

Теорема Брукса ([1, 2, 3]) говорит нам, что $\chi(G) \leq \Delta(G)$ для любого связного графа G, кроме ряда исключений. (При $\Delta(G) > 2$ единственное исключение — это полный граф на $d+1$ вершине K_{d+1}, при $\Delta(G) = 2$ исключения — циклы нечетной длины.)

В работе [4] доказано похожее на теорему Брукса утверждение о динамическом хроматическом числе: $\chi_2(G) \leq \Delta(G) + 1$ для любого связного графа G при условии $\Delta(G) \geq 3$. Более того, в [4] доказано, что при $\Delta(G) \leq 3$ имеет место неравенство $\chi_2(G) \leq 4$ за исключением случая, когда граф G — это цикл из пяти вершин.

Рассмотрим связный граф G такой, что $\Delta(G) = 2$. Тогда G — это цикл C_n или простой путь P_n. При $n \leq 3$, очевидно, $\chi_2(C_n) = \chi_2(P_n) = n$.

Легко видеть, что $\chi_2(P_n) = 3$ при $n > 3$ и $\chi_2(C_n) = 3$ при n кратном 3. Остается заметить, что $\chi_2(C_5) = 5$ и $\chi_2(C_n) = 4$ для всех $n > 3$, не кратных 3 и отличных от 5. Суммируя все вышесказанное, отметим, что $\chi_2(G) \le \Delta(G) + 2$, кроме единственного исключения — случая, когда G — цикл из пяти вершин: $\Delta(C_5) = 2$, а $\chi_2(C_5) = 5$.

В работе [4] сказано, что оценка $\chi_2(G) \le \Delta(G) + 1$ — наилучшая возможная. В самом деле, существуют графы, для которых $\chi_2(G) = \Delta(G) + 1$. При $\Delta(G) > 85$ мы перечислим все такие "исключения", а для остальных графов докажем аналогичную теореме Брукса оценку $\chi_2(G) \le \Delta(G)$, воспользовавшись результатом из работы Н.В.Гравина [5].

Определение 3. Пусть $n \ge 3$. Рассмотрим любой граф H, полученный из полного графа K_n следующей операцией: заменой нескольких ребер графа K_n на цепочки длины 2 (с каждой такой цепочкой добавляется одна новая вершина степени 2). Назовем такой граф *подразбиением* K_n.

Вершины графа H, являющиеся вершинами исходного полного графа, назовем *главными*, а добавленные вершины степени 2 — *реберными*.

Пусть класс графов $\mathcal{K}_n$ состоит из полного графа K_n и всех его подразбиений.

Теорема 1. *Пусть $d \ge 86$.*

1) *Для любого графа $H \in \mathcal{K}_{d+1}$ выполняется утверждение $\chi_2(H) = d + 1$.*

2) *Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d$, причем G не изоморфен никакому из графов класса $\mathcal{K}_{d+1}$. Тогда $\chi_2(G) \le d$.*

Из этой теоремы автоматически следует аналогичное пункту 2 теоремы утверждение для несвязного графа.

Следствие 1. *Пусть G — такой, что $\Delta(G) = d \ge 86$ и никакая компонента связности графа G не изоморфна ни одному из графов класса $\mathcal{K}_{d+1}$. Тогда $\chi_2(G) \le d$.*

В заключение введения выскажем гипотезу, что результат теоремы 1 справедлив для всех $d \ge 4$. Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 1.

2 Доказательство основной теоремы

Определение 4. Пусть даны натуральные числа $c \ge 2$ и $p \ge c$. Раскраска вершин графа G называется (c, p)*-невырожденной*, если она является правильной и для любой вершины графа G степени хотя бы p среди ее соседей найдутся вершины хотя бы c различных цветов.

Наше доказательство базируется на следующем обобщении теоремы Брукса, принадлежащем Н.В.Гравину [5].

Теорема 2. *Пусть дано число $d \geq 3$ и граф G без клик на $d+1$ вершине такой, что степень любой его вершины не превосходит d. Тогда для любого $c \geq 2$ существует правильная (c,p)-невырожденная раскраска вершин графа G в d цветов, где $p = (c^3 + 8c^2 + 19c + 6)(c-1)$.*

Сформулируем нужное нам непосредственное следствие этой теоремы.

Следствие 2. *Пусть $\Delta(G) = d$, $\delta(G) \geq 84$. Тогда $\chi_2(G) \leq d$.*

Доказательство. По теореме 2, существует $(2,84)$-невырожденная раскраска графа G. Так как все вершины графа имеют степень не менее 84, то в окрестности любой вершины графа будут вершины хотя бы двух различных цветов, то есть, полученная раскраска является динамической. $\square$

Доказательство теоремы 1. 1) Рассмотрим граф $H \in \mathcal{K}_{d+1}$. Отметим, что в динамической раскраске любые две главные вершины a и b должны быть разноцветными: если они смежны, то это очевидно. Если a и b несмежны, то их соединяет путь длины два atb, где t — реберная вершина. Тогда $\mathrm{N}_H(t) = \{a, b\}$, следовательно, вершины a и b имеют разный цвет. Таким образом, $\chi_2(K^m_{d+1}) \geq d+1$.

Несложно построить динамическую раскраску этого графа в $d+1$ цвет: покрасим все главные вершины в разные цвета, после чего приступим к последовательной покраске реберных вершин. Рассмотрим очередную реберную вершину t, смежную с главными вершинами a и b. Вершину t нельзя красить в цвета вершин a и b. Кроме того, если вершина t — последняя непокрашенная вершина из $\mathrm{N}_H(a)$, а все остальные вершины множества $\mathrm{N}_H(a)$ покрашены в один цвет, то нельзя красить t в этот цвет. Аналогичный запрет на цвет для t может быть наложен из-за цветов соседей вершины b. Мы получаем не более четырех запретов на цвет t. Ввиду того, что количество цветов более 85, мы легко можем покрасить вершину t. Нетрудно видеть, что в итоге получится динамическая раскраска — цвета всех главных вершин изначально различные, поэтому вершины из окрестности любой реберной вершины будут разноцветными. О соблюдении условий для главных вершин мы заботились при покраске реберных вершин.

Замечание 1. Пусть $H \in \mathcal{K}_{d+1}$, $H \neq K_{d+1}$, $t \in V(H)$ — реберная вершина. Тогда аналогично пункту 1 доказательства теоремы можно построить правильную раскраску вершин графа H в d цветов, в которой условие о наличии хотя бы двух разных цветов в окрестности вершины будет соблюдаться для всех вершин, кроме t.

Действительно, пусть $\mathrm{N}_G(t) = \{a, b\}$. Тогда покрасим $d+1$ главную вершину графа H в d цветов: вершины a и b будут покрашены в один и тот же цвет. Алгоритм покраски реберных вершин не изменится.

2)Рассмотрим любой граф G, для которого $\Delta(G) \le d$ и ни одна из компонент связности которого не принадлежит классу $\mathcal{K}_{d+1}$. Докажем индукцией по количеству вершин в графе G существование динамической раскраски в d цветов. Базу составят случай графа без вершин степени менее 84, который проверен в следствии 2 и тривиальный случай графа, в котором все вершины имеют степень не более 2, рассмотренный во введении.

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда граф G связен, так как компоненты связности графа можно покрасить независимо.

2.1)Пусть u является точкой сочленения графа G, то есть, граф $G' = G - u$ несвязен. Тогда по очереди рассмотрим все компоненты связности $V_1, \ldots, V_k$ графа G'. Определим графы $G_i = G(V_i \cup \{u\})$ (для всех $i \in \{1, \ldots, k\}$). Независимо покрасим вершины графов G_i. Если $G_i \notin \mathcal{K}_{d+1}$, то, учитывая, что в этом графе меньше вершин, чем в G, воспользуемся индукционным предположением и рассмотрим динамическую раскраску вершин. Пусть $G_i \in \mathcal{K}_{d+1}$. Тогда вершина u является реберной вершиной графа G_i и по замечанию 1 можно покрасить вершины графа G_i так, чтобы единственное нарушение условия динамичности было в одноцветности соседей u. Отметим, что в силу независимости покраски графов $G_1, \ldots, G_k$ можно было осуществить покраску так, чтобы вершина u во всех графах имела цвет 1, а в множестве вершин $\mathrm{N}_G(u) = \mathrm{N}_{G_1}(u) \cup \ldots \cup \mathrm{N}_{G_k}(u)$ были вершины хотя бы двух разных цветов. Тогда, объединив раскраски, мы получим динамическую раскраску вершин графа G.

2.2) Пусть граф G двусвязен (то есть, при удалении любой вершины граф остается связным). Пусть $U \subset V(G)$ — множество всех вершин, степени которых больше 1 и меньше 84. В рассматриваемом случае $U \ne \varnothing$. Если это возможно, то выберем вершину $u \in U$ степени 2, иначе возьмем призвольную вершину $u \in U$.

Если в $\mathrm{N}_G(u)$ все вершины попарно несмежны, то выберем две вершины $v, w \in \mathrm{N}_G(u)$ и положим $G' = G - u + vw$. В противном случае положим $G' = G - u$. Очевидно, $\Delta(G') \le \Delta(G) \le d$, граф G' связен.

2.2.1) Предположим, что $G' \notin \mathcal{K}_{d+1}$. В таком случае доказываемое утверждение справедливо для графа G'. Рассмотрим динамическую раскраску графа G' в d цветов и перенесем цвета всех вершин на граф G. Любые две смежные в графе G вершины из $V(G) \setminus \{u\}$ покрашены в разные цвета.

Докажем, что для любой вершины $x \in \mathrm{N}_G(u)$ выполянется неравенство $d_{G'}(x) \geq 2$. Равенство $d_{G'}(x) = 1$ возможно лишь в случае $d_G(x) = 2$. Тогда по построению $d_G(u) = 2$, $\mathrm{N}_G(u) = \{x, y\}$ и $xy \in E(G)$. Так как в случай $G = K_3$ рассмотрен в базе, то вершина y оказывается точкой сочленения: в графе $G - y$ выделяется компонента связности $\{u, x\}$. Полученный факт противоречит предположению о двусвязности G.

Пусть $x \in V(G')$, $d_G(x) \geq 2$. Тогда из доказанного выше следует, что $d_{G'}(x) \geq 2$. Следовательно, если при построении G' не добавлялось ребро vw или такое ребро добавлялось, но $x \notin \{v, w\}$, то в $\mathrm{N}_G(x) \supset \mathrm{N}_{G'}(x)$ есть вершины хотя бы двух разных цветов. По построению в $\mathrm{N}_G(u)$ есть две смежные вершины, следовательно, в этом множестве есть вершины хотя бы двух разных цветов.

Остается дополнить расскраску до динамической раскраски графа G, покрасив вершину u. В случае $G' = G - u + vw$ при построении нужно проследить за тем, чтобы в $\mathrm{N}_G(v)$ и $\mathrm{N}_G(w)$ были вершины хотя бы двух разных цветов.

Среди вершин из $\mathrm{N}_G(u)$ не более, чем 83 цвета. В случае, когда $G' = G - u + vw$, может случиться так, что все вершины из $\mathrm{N}_G(v) \setminus \{u\}$ окажутся покрашенными в один цвет i. В этом случае вершину u нужно покрасить в цвет, отличный от i. Это обстоятельство, возможно, добавляет запрет на цвет вершины u. Еще один запрет может аналогичным образом добавить вершина w. Итого мы получаем максимум 85 запретов на цвет вершины u. Поскольку $d \geq 86$, мы можем покрасить вершину u, сделав раскраску вершин графа G динамической.

2.2.2) Предположим, что $G' \in \mathcal{K}_{d+1}$. Далее все главные вершины графа G' мы будем называть главными в графе G, а все реберные вершины графа G' мы будем называть реберными в графе G.

Предположим, что $G' = G - u$. Тогда для любой вершины $x \in \mathrm{N}_G(u)$ имеем $d_{G'}(x) = d_G(x) - 1 \leq d - 1$, следовательно, все вершины из $\mathrm{N}_G(u)$ являются реберными вершинами графа G'. Отметим, что по построению существуют две смежные в графе G вершины $x, y \in \mathrm{N}_G(x)$, но никакие две реберные вершины графа G' не смежны. Полученное противоречие показывает, что $G' = G - u + vw$. Отметим, что для любой вершины $x \in \mathrm{N}_G(u) \setminus \{v, w\}$ выполняется неравенство $d_{G'}(u) = d_G(u) - 1 < d$, следовательно, в множестве $\mathrm{N}_G(u) \setminus \{v, w\}$ не может быть главных вершин графа G'. Рассмотрим два случая: одна из вершин v и w является главной, а другая — реберной, или обе эти вершины являются главными.

2.2.2.1) Пусть вершина v является главной, а вершина w — реберной.

Положим $\mathrm{N}_{G'}(w) = \{v, t\}$. Тогда в графе G две главные вершины v и t оказываются соединены цепочкой из трех ребер $vuwt$. Покрасим главные вершины v и t в цвет 1, остальные $d-1$ главных вершин покрасим в разные цвета, использовав оставшийся $d-1$ цвет. Вершины u и w покрасим в цвета 2 и 3. В результате для любой не главной вершины $x \in V(G)$ в множестве $\mathrm{N}_G(x)$ есть вершины хотя бы двух разных цветов.

Будем последовательно красить все отличные от w реберные вершины так, чтобы получилась правильная раскраска графа G и для любой главной вершины a в окрестности $\mathrm{N}_G(a)$ были вершины хотя бы двух разных цветов. Пусть x — очередная реберная вершина, тогда $d_G(x) \leq 3$ (реберная вершина x может быть смежна с двумя главными вершинами и с вершиной u), следовательно, смежные с x вершины накладывают не более трех запретов на цвет x. Каждая из двух смежных с x главных вершин может дополнительно накладывать один запрет на цвет x (в случае когда все отличные от x вершины из ее окрестности одноцветны). Итого получается не более пяти запретов и мы можем покрасить вершину x, так как количество цветов $d \geq 86$. Нетрудно понять, что в результате такой покраски реберных вершин для любой главной вершины a графа G в окрестности $\mathrm{N}_G(a)$ будут вершины хотя бы двух разных цветов.

2.2.2.2)Пусть обе вершины v и w — главные. Тогда, поскольку G не принадлежит к исключительной серии графов, то существует как минимум одна реберная вершина t такая, что $ut \in E(G)$. Покрасим главные вершины v и w в цвет 1, остальные $d-1$ главных вершин покрасим в разные цвета, использовав оставшийся $d-1$ цвет. Вершину u покрасим в цвет 2. В результате для любой реберной вершины x графа G в множестве $\mathrm{N}_G(x)$ есть вершины хотя бы двух разных цветов.

Будем последовательно красить все реберные вершины так, чтобы получилась правильная раскраска графа G и для любой главной вершины a в окрестности $\mathrm{N}_G(a)$ были вершины хотя бы двух разных цветов, а также в окрестности $\mathrm{N}_G(u)$ были вершины хотя бы двух разных цветов. Пусть x — очередная реберная вершина, тогда $d_G(x) \leq 3$ (реберная вершина x может быть смежна с двумя главными вершинами и с вершиной u), следовательно, смежные с x вершины накладывают не более трех запретов на цвет x. Каждая из трех смежных с x вершин может накладывать один дополнительный запрет на цвет x (в случае, когда все отличные от x вершины из ее окрестности одноцветны). Итого получается не более шести запретов и мы можем покрасить вершину x, так как количество цветов $d \geq 86$. Нетрудно понять, что в результате такой покраски реберных вершин для любой главной вершины a графа G в окрестности $\mathrm{N}_G(a)$ будут вершины хотя бы двух разных цветов. Так как вершина u смежна с реберной вершиной t, то при покраске t мы позаботились о том, чтобы в окрестности $N_G(u)$ были вершины хотя бы двух разных цветов.

□

Список литературы

[1] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, “Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[2] О. Оре. *Теория графов.* Москва, “Наука", 1968. (Перевод с английского. O. Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976.

[4] H.-J. Lui, B. Montgomery, H. Poon. *Upper bounds of dynamic chromatic number.* Ars Combinatoria 68 (2003), 193–201.

[5] N. V. Gravin. *Non-degenerate colorings in the Brook's Theorem.* PDMI Prerint 11/2007.