PREPRINT POMI-6/2007

Четырехвершинная модель и случайные укладки

Н.М. Боголюбов

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191023, С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27

Рассматривается точно решаемая четырехвершинная модель на квадратной решетке с различными граничными условиями. Применение алгебраического Бете анзаца позволяет вычислить статистическую сумму модели. Для фиксированных граничных условий установлена связь между скалярным произведением векторов состояния модели с производящей функцией строгих по столбцам и строкам плоских разбиений. Обсуждается соответствующая модель покрытий на периодической решетке.

I. ВВЕДЕНИЕ

Связь интегрируемых моделей с комбинаторикой широко обсуждается в настоящее время. Шестивершинная модель играет важную роль в данном направлении. Модель интенсивно изучалась как для периодических, так и для фиксированных граничных условий [1–6]. Шестивершинная модель для граничных условий типа доменной стенки имеет отношение к перечислению укладок Ацтекских "алмазов"и к перечислению альтернированных знаковых матриц [7–9].

Четырехвершинная модель является частным случаем шестивершинной модели, в которой исключены две вершины. Данная модель рассматривалась в работах [10, 11], в которых была выявлена ее связь с моделью случайных укладок на полубесконечном цилиндре. Модели укладок являются моделями классической дискретной статистической физики, задача которых состоит в описании способов укладок определенных поверхностей плитками различной геометрической формы без зазоров и наложений. Укладки называются случайными лишь для того, чтобы отличить их от правильных квазипериодических покрытий.

В данной статье мы применим Квантовый Метод Обратной Задачи (КМОЗ) к решению модели [12, 13]. Данный подход позволяет исследовать модель на решетке конечного размера с различными граничными условиями и вычислить статистические суммы вершинной и соответствующей ей модели покрытий. В частности, мы покажем, что статистическая сумма модели с фиксированными граничными условиями имеет смысл производящей функции плоских разбиений строгих по столбцам и строкам. Плоские разбиения эквивалентны как трехмерным диаграммам Юнга помещенных в ящик конечного размера, так и покрытиям ромбами полурегулярного шестиугольника [14, 15]. В случае периодических граничных условий четырехвершинная модель эквивалентна модели покрытия тора единичными ромбами.

Связь интегрируемых моделей бозонного типа с теорией симметрических функций [14] и теорией плоских разбиений [16] рассматривалась в работах [17–20].

Статья организована следующим образом. В Разделе II мы даем определение модели и излагаем подход (КМОЗ) к ее решению. В Разделе III исследуется модель на решетке с фиксированными граничными условиями и устанавливается ее связь с плоскими разбиениями. Статистическая сумма модели на периодической решетке вычисляется в Разделе IV.

II. ЧЕТЫРЕХВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

Четырехвершинная модель на квадратной решетке, которая является частным случаем шестивершинной модели, определяется четырьмя различными конфигурациями стрелок, направленными как в сторону каждого узла решетки, так и от него. Из шести возможных конфигураций две, с двумя горизонтальными стрелками направленными направо, исключены. Статистический вес ω приписывается каждой допустимой конфигурации. Мы рассмотрим модель, в которой вершинные веса третьей и четвертой вершины совпадают (Рис. 1). Изображая стрелки, направленные вверх или направо линиями, мы получим альтернативное описание вершин с помощью линий протекающих сквозь узлы решетки. Так как грани решетки могут находиться лишь в двух состояниях, с линией или без нее, то существует взаимно однозначное соответствие между допустимыми конфигурациями стрелок на решетке и графами линий - наборами решеточных путей.

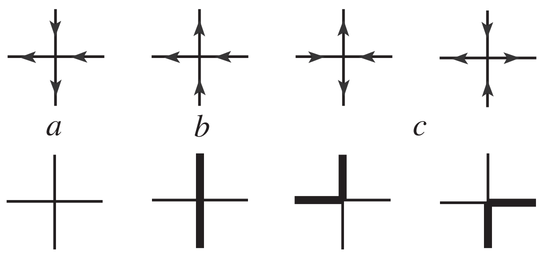

Рис. 1: Четыре допустимых вершины в виде конфигураций стрелок и линий.

Для однородной модели вершинные веса ω не зависят от положения узла решетки и статистическая сумма равна

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = \sum \omega_a^{l^a} \omega_b^{l^b} \omega_c^{l^c}, \tag{1}$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке, а ω_a , ω_b и ω_c есть веса соответствующих вершин. Допустимые конфигурации зависят от наложенных граничных условий, которые определяются направлением стрелок на границе решетки. Число вершин $(a),(b),(c)$ в каждой конфигурации равно l^a, l^b, l^c. Для неоднородной модели вершинные веса зависят от положения узла решетки.

Для того чтобы применить КМОЗ для исследования данной модели, мы воспользуемся спиновым описанием модели. Каждому вертикальному и каждому горизонтальному ребру решетки ставится в соответствие локальное пространство $\mathcal{C}^2$. Состояния со спином вверх и спином вниз образуют естественный базис в этом пространстве. Состояние со спином вверх на вертикальном ребре соответствует стрелке направленной вверх, а состояние со спином вниз стрелке направленной вниз. Состояние со спином вверх на i-том горизонтальном ребре $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i \equiv |\leftarrow\rangle_i$ соответствует стрелке направленной налево, а состояние со спином вверх $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_i \equiv |\rightarrow\rangle_i$ стрелке направленной направо. Вспомогательным пространством мы будем называть пространство, ассоциированное со всеми вертикальными ребрами решетки $\mathcal{V} = (\mathcal{C}^2)^{\otimes N}$, а квантовым - пространство, ассоциированное со всеми горизонтальными ребрами решетки $\mathcal{H} = (\mathcal{C}^2)^{\otimes N}$ В каждом узле решетки в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{H}$ действует оператор. Этот оператор, действующий нетривиально только в локальном вспомогательном $\mathcal{C}^2$ и локальном квантовом $\mathcal{C}^2$ пространствах, называется L-оператором.

L-оператор четырехвершинной модели имеет вид

$$L(n|u) = -\frac{u}{2}(1+\sigma^z)e_n + \frac{u^{-1}}{2}(1-\sigma^z)e_n + \sigma^+\sigma_n^- + \sigma^-\sigma_n^+, \tag{2}$$

где параметр $u \in \mathcal{C}$, $\sigma^{z,\pm}$ это матрицы Паули, проектор $e = \frac{1}{2}(\sigma^z + 1)$. Матрица с подстрочным индексом n действует нетривиально только в n-том квантовом пространстве: $s_n = I \otimes ... \otimes I \otimes s \otimes I \otimes ... \otimes I$.

Матричные элементы введенного L-оператора

$$L(n|u) = \begin{pmatrix} L_{11}(n|u) & L_{12}(n|u) \\ L_{21}(n|u) & L_{22}(n|u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ue_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & u^{-1}e_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

можно представить в виде точек с примыкающими стрелками (Рис. 2). Матричный элемент $L_{11}(n|u)$ соответствует вершине (1) (Рис. 2), где точкой обозначен оператор $-ue_n$, действующий в локальном квантовом пространстве. Единственный ненулевой элемент этого оператора ${}_n\langle\leftarrow| -ue_n |\leftarrow\rangle_n$ определяет вершину (b) (Рис. 1) с весом $-u$. Матричный элемент $L_{22}(n|u)$ соответствует вершине (2) (Рис. 2) с точкой обозначающей

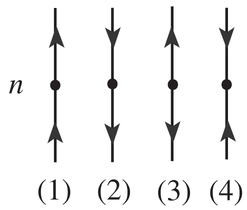

Рис. 2: Вершинное представление матричных элементов L-оператора.

оператор $u^{-1}e_n$, имеющим ненулевой элемент ${}_n\langle\leftarrow|u^{-1}e_n|\leftarrow\rangle_n$, который определяет вершину (a) (Рис. 1) с весом u^{-1}. Матричные элементы $L_{12}(n|u)=\sigma_n^-$ и $L_{21}(n|u)=\sigma_n^+$ соответствуют вершинам (3) и (4) (Рис. 2), ненулевые матричные элементы этих операторов ${}_n\langle\rightarrow|\sigma_n^-|\leftarrow\rangle_n$ и ${}_n\langle\leftarrow|\sigma_n^+|\rightarrow\rangle_n$ определяют вершины (c) (Рис. 1) с весом равным единице.

Операторнозначная матрица (2) удовлетворяет сплетающему соотношению

$$R(u,v)\left(L(n|u)\otimes L(n|v)\right)=\left(L(n|v)\otimes L(n|u)\right)R(u,v), \tag{4}$$

в котором $R(u,v)$ это 4×4 матрица равная

$$R(u,v)=\begin{pmatrix} f(v,u) & 0 & 0 & 0\\ 0 & g(v,u) & 1 & 0\\ 0 & 0 & g(v,u) & 0\\ 0 & 0 & 0 & f(v,u)\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$f(v,u)=\frac{u^2}{u^2-v^2},\ g(v,u)=\frac{uv}{u^2-v^2}. \tag{6}$$

Вертикальная матрица монодромии определяется как произведение L-операторов

$$T(u)=L(M|u)L(M-1|u)...L(0|u)=\begin{pmatrix} A(u) & B(u)\\ C(u) & D(u)\end{pmatrix} \tag{7}$$

Матричные элементы матрицы монодромии (7) выражаются через суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с $M+1$ узлами (Рис. 3). Например, оператору $B(u)=\sum_{k_M,\ldots,k_1=1}^{2}L_{1k_M}(M|u)L_{k_Mk_{M-1}}(M-1|u)\ldots L_{k_12}(0|u)$ соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены наружу (конфигурация (B)). Оператору $C(u)$ соответствуют граничные условия, когда верхняя и нижняя стрелки направлены внутрь (конфигурация (C)). Операторам $A(u)$

и $D(u)$ соответствуют граничные условия когда верхняя и нижняя стрелки направлены в одном направлении (конфигурации (A) и (D)).

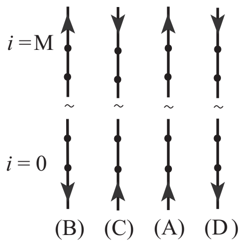

Рис. 3: Графическое представление матричных элементов матрицы монодромии

Коммутационные соотношения матричных элементов матрицы монодромии задаются той же R-матрицей (5)

$$R(u,v)\,(T(u)\otimes T(v)) = (T(v)\otimes T(u))\,R(u,v), \tag{8}$$

наиболее важными из которых являются:

$$\begin{aligned} C(u)B(v) &= g(u,v)\left\{A(u)D(v) - A(v)D(u)\right\}, \\ A(u)B(v) &= f(u,v)B(v)A(u) + g(v,u)B(u)A(v), \\ D(u)B(v) &= f(v,u)B(v)D(u) + g(u,v)B(u)D(v), \\ [B(u),B(v)] &= [C(u),C(v)] = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Матрица перехода $\tau(u)$ определяется как след матрицы монодромии во вспомогательном пространстве

$$\tau(u) = trT(u) = A(u) + D(u). \tag{10}$$

Равенство (8) означает, что $[\tau(u),\tau(v)] = 0$ при произвольных значениях параметров u, v.

L-оператор (2) удовлетворяет соотношению

$$e^{\zeta\sigma_n^z}L(n|u)e^{-\zeta\sigma_n^z} = e^{-\frac{\zeta}{2}\sigma^z}L(n|u)e^{\frac{\zeta}{2}\sigma^z}, \tag{11}$$

где ζ это произвольный параметр. Из этого равенства и из определения матрицы монодромии (7) следует что

$$e^{\zeta S^z}T(u)e^{-\zeta S^z} = e^{-\zeta\sigma^z}T(u)e^{\zeta\sigma^z}, \tag{12}$$

где $S^z = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M}\sigma_i^z$ является оператором z-компоненты полного спина. Равенства

$$\begin{aligned} S^z B(u) \; &= \; B(u)\,(S^z - 1)\,, \\ S^z C(u) \; &= \; C(u)\,(S^z + 1)\,, \end{aligned} \tag{13}$$

являются следствием соотношения (12) и означают, что оператор $B(u)$ понижает полный спин системы, а оператор $C(u)$ повышает его. Из равенства (12) следует коммутативность

$$[\tau(u), S^z] = 0. \tag{14}$$

Производящим вектором квантового пространства $\mathcal{H}$ является состояние со всеми спинами направленными вверх

$$| \Leftarrow\rangle = \otimes_{i=0}^{M} | \leftarrow\rangle_i = \otimes_{i=0}^{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i . \tag{15}$$

Данный вектор уничтожается оператором $C(u)$

$$C(u)| \Leftarrow\rangle = 0, \tag{16}$$

и является собственным вектором операторов $A(u)$ и $D(u)$,

$$A(u)| \Leftarrow\rangle = \alpha(u)| \Leftarrow\rangle; \;\; D(u)| \Leftarrow\rangle = \delta(u)| \Leftarrow\rangle, \tag{17}$$

с собственными значениями

$$\alpha(u) = (-u)^{M+1}, \;\; \delta(u) = (u^{-1})^{M+1}. \tag{18}$$

Полный спин производящего вектора равен $\frac{1}{2}(M+1)$:

$$S^z| \Leftarrow\rangle = \frac{1}{2}(M+1)| \Leftarrow\rangle. \tag{19}$$

Одним из основных объектов дальнейшего рассмотрения будет состояние, полученное последовательным действием операторов $B(u)$ на состояние $| \Leftarrow\rangle$:

$$|\Psi_n(u_1, u_2, ..., u_N)\rangle = \prod_{i=1}^{N} B(u_i)| \Leftarrow\rangle. \tag{20}$$

Из равенства (13), следует что полный спин этого вектора равен

$$S^z \prod_{i=1}^{N} B(u_i)| \Leftarrow\rangle = \frac{1}{2}\,(M + 1 - 2N) \prod_{i=1}^{N} B(u_i)| \Leftarrow\rangle. \tag{21}$$

Сопряженный к (20) вектор определяется как

$$\langle \Psi_n(u_1, u_2, ..., u_N)| = \langle \Leftarrow | \prod_{i=1}^{N} C(u_i). \tag{22}$$

Легко проверить, что $\langle \Leftarrow | B(u) = 0$.

В координатном представлении вектор состояния имеет вид

$$|\Psi_N(u_1, u_2, ..., u_N)\rangle = \prod_{k=1}^{N} B(u_k) | \Leftarrow\rangle = \sum \chi_\mu(u_1, u_2, ..., u_N) |m_1, ..., m_N\rangle, \tag{23}$$

где через $|m_1, ..., m_N\rangle$ мы обозначили состояние с N спинами, направленными вниз в узлах $m_1, ..., m_N$, и с $M+1-N$ спинами, направленными вверх в других узлах. Волновая функция $\chi_\mu(u_1, u_2, ..., u_N)$ удовлетворяет условию исключения. Она отлична от нуля только в том случае, если числа $\mu = (m_1, m_2, ..., m_N)$ образуют строгое разбиение $M \geq m_1 > m_2 > ... > m_N \geq 0$, причем, $m_i \geq m_{i+1} + 2$. Путем прямого вычисления можно показать, что волновая функция представима в виде определителя:

$$\chi_\mu(u_1, u_2, ..., u_N) = (-1)^{\sum m_k} (u_1 ... u_N)^{M-2(N-1)} \frac{\det\left(u_j^{-2(m_k+k-N)}\right)}{\prod_{1\leq k<j\leq N}(u_k^{-2} - u_j^{-2})}. \tag{24}$$

Волновая функция, записанная через симметрическую функцию Шура

$$S_\lambda(u_1, u_2, ..., u_N) = \frac{\det\left(u_j^{N-k+\lambda_k}\right)}{\prod_{1\leq k<j\leq N}(u_k - u_j)},$$

имеет вид

$$\chi_\mu(u_1, u_2, ..., u_N) = (-1)^{\sum m_k} (u_1 ... u_N)^{M-2(N-1)} S_{\mu-\delta}\left(u_1^{-2}, u_2^{-2}, ..., u_N^{-2}\right), \tag{25}$$

где δ есть разбиение с элементами $\delta_j = 2(N-j)$, $j = 1, ..., N$, а элементы разбиения $\lambda = \mu - \delta$ равны $\lambda_j = m_j - 2(N-j)$ и удовлетворяют условию $M - 2(N-1) \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N \geq 0$.

III. ФИКСИРОВАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим модель на $2N \times (M+1)$ квадратной решетке со следующими граничными условиями: все стрелки на правой и левой границе направлены налево, верхние и нижние стрелки первых N колонок (считая слева) направлены внутрь, а верхние и нижние стрелки последних N колонок направлены наружу. Данные условия мы будем называть фиксированными граничными условиями.

Для того чтобы перечислить все возможные конфигурации стрелок, значительно удобнее использовать описание модели в терминах линий и представлять допустимые конфигурации как наборы решеточных путей. Путь начинается в одной из N нижних левых вершин и завершается в одной из N верхних правых и всегда идет на восток или север. Пути не соприкасаются, причем, несколько последовательных шагов допустимо в вертикальном направлении и лишь один шаг в горизонтальном. Если первые N колонок решетки имеют номера $(-N, \ldots, -1)$, а последние $(0, \ldots, N-1)$, если нижняя строка имеет номер 0, а верхняя M, тогда путь с номером m идет из вершины $(-N+m-1; 0)$ к вершине $(m-1; M)$, $1 \leq m \leq N$. Типичный набор путей изображен на (Рис. 4). Длина пути равна $N+M$. Число вершин типа (c) в допустимом пути равно $2N$, так как лишь один последовательный шаг разрешен в горизонтальном направлении, соответственно, число вершин типа (b) равно $M-N+1$. Это означает, что число вершин типа (c) и (b) в наборе путей равно соответственно $l^c = 2N^2$ и $l^b = l^a = N(M-N+1)$.

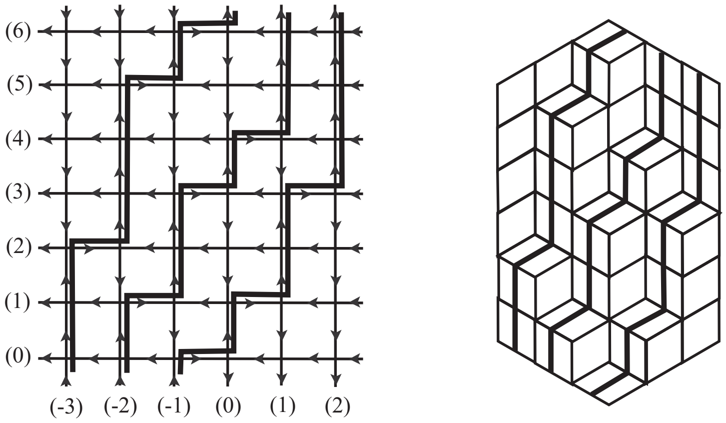

Рис. 4: Типичная конфигурация допустимых решеточных путей на решетке с фиксированными граничными условиями и соответствующее ей строгое плоское разбиение с градиентными линиями.

Статистическая сумма модели с фиксированными граничными условиями равна

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = (\omega_a \omega_b)^{N(M-N+1)} \omega_c^{2N^2} S(N, M), \tag{26}$$

где через $S(N, M)$ обозначено число всех допустимых конфигураций решеточных путей.

В случае неоднородной модели вершинные веса ω_a, ω_b и ω_c зависят от положения узла решетки. Мы рассмотрим модель, в которой веса зависят только от номера колонки. Если первые N колонок имеют номера $(-N,\dots,-1)$, а последние $(0,\dots,N-1)$ соответственно, тогда статистическая сумма модели равна

$$Z(\{\omega_a\},\{\omega_b\},\{\omega_c\}) = \sum \prod_{k=-1}^{-N} (\omega_a)_k^{l_k^a} (\omega_b)_k^{l_k^b} (\omega_c)_k^{l_k^c} \prod_{j=1}^{N} (\omega_a)_j^{l_j^a} (\omega_b)_j^{l_j^b} (\omega_c)_j^{l_j^c}. \qquad (27)$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов состояния (20) и (22)

$$W(u_1,...,u_N;v_1,...,v_N) = \langle \Leftarrow | C(v_1)...C(v_N) B(u_1)...B(u_N) | \Leftarrow \rangle, \qquad (28)$$

где $\{u\}$ и $\{v\}$ это наборы независимых параметров. Мы можем представить матричные элементы скалярного произведения (28) как двумерную квадратную решетку размерности $2N \times (M+1)$. Первые N вертикальных линий решетки ассоциируются с операторами $C(v_j)$, а последние N вертикальных линий с операторами $B(u_j)$. Горизонтальные линии ассоциируются с локальными квантовыми пространствами, линия с номером i соответствует квантовому пространству с индексом i. Из графического представления операторов $B(u)$ и $C(u)$ следует, что матричный элемент (28) равен сумме всех допустимых конфигураций стрелок (или решеточных путей) на решетке с фиксированными граничными условиями (Рис. 4):

$$\begin{aligned} W(u_1,...,u_N;v_1,...,v_N) &= \sum \prod_{k=-1}^{-N} (-v_{-k})^{l_k^b} (v_{-k}^{-1})^{l_k^a} \prod_{j=1}^{N} (-u_j)^{l_k^b} (u_j^{-1})^{l_k^a} \\ &= (-1)^{MN} \sum \prod_{k=-1}^{-N} v_{-k}^{l_k^b - l_k^a} \prod_{j=1}^{N} u_j^{l_k^b - l_k^a}. \end{aligned} \qquad (29)$$

Если положить

$$\begin{aligned} (\omega_a)_j &= v_{-j}^{-1}, (\omega_b)_j = v_{-j};\ -N \le j \le -1, \\ (\omega_a)_j &= u_j^{-1}, (\omega_b)_j = u_j;\ 1 \le j \le N, \\ (\omega_c)_j &= 1\,, \end{aligned} \qquad (30)$$

то

$$Z(\{\omega_a\},\{\omega_b\},\{\omega_c\}) = (-1)^{MN} W(u_1,...,u_N;v_1,...,v_N). \qquad (31)$$

Скалярное произведение (28) при произвольном значении параметров u_j, v_j вычисляется с помощью перестановочных соотношений (9) [13, 17] и равно:

$$W(u_1,...,u_n;v_1,...,v_n) = (-1)^{MN} \left\{ \prod_{j>k} \frac{v_j v_k}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{l>m} \frac{u_l u_m}{u_l^2 - u_m^2} \right\} \det H, \qquad (32)$$

где матричные элементы $N\times N$ матрицы H равны

$$H_{jk}=\left\{\left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{M-N+2}-\left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{-M+N-2}\right\}\times\frac{1}{\frac{u_k}{v_j}-\left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{-1}}. \tag{33}$$

Формулы (32), (33) являются решением неоднородной четырехвершинной модели и дают представление ее статистической суммы в виде определителя.

Статистическую сумму можно вычислить в явном виде, если выбрать вершинные веса в следующем виде

$$v_j=q^{-\frac{j}{2}},\;\; u_j=q^{\frac{j}{2}}, \tag{34}$$

где $q=e^{-\nu}$ with $\nu>0$ это Больцмановский вес. В данной параметризации статистическая сумма модели (27) примет вид

$$Z(q)=\sum q^{\sum_{k=-1}^{-N}\frac{k}{2}(l_k^a-l_k^b)+\sum_{j=1}^{N}\frac{j-1}{2}(l_j^a-l_j^b)}, \tag{35}$$

где суммирование ведется по всем допустимым наборам решеточных путей. Подстановка параметризации (34) преобразует представление (32) в

$$W_q(N,M)=(-1)^{NM+\frac{N(N-1)}{2}}\left\{\prod_{j>k}\left(q^{\frac{j-k}{2}}-q^{-\frac{j-k}{2}}\right)^{-2}\right\}\det Q, \tag{36}$$

с матричными элементами Q равными

$$Q_{jk}=\frac{s^{\frac{k+j-1}{2}}-s^{-\frac{k+j-1}{2}}}{q^{\frac{k+j-1}{2}}-q^{-\frac{k+j-1}{2}}}, \tag{37}$$

где $s=q^{M-N+2}$. Определитель матрицы Q вычисляется [7] и равен

$$\det Q=(-1)^{\frac{N(N-1)}{2}}\left\{\prod_{j>k}\left(q^{\frac{j-k}{2}}-q^{-\frac{j-k}{2}}\right)^{2}\right\}\prod_{1\le j,k\le N}\frac{s^{\frac{1}{2}}q^{\frac{j-k}{2}}-s^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{j-k}{2}}}{q^{\frac{k+j-1}{2}}-q^{-\frac{k+j-1}{2}}}. \tag{38}$$

Подстановка этого выражения в (36) дает

$$\begin{aligned} W_q(N,M) &= (-1)^{NM}q^{-\frac{N^2}{2}(M+2-2N)}\prod_{1\le j,k\le N}\frac{1-q^{M-N+2+j-k}}{1-q^{k+j-1}} \\ &= (-1)^{NM}q^{-\frac{N^2}{2}(M+2-2N)}\prod_{1\le j,k\le N}\frac{1-q^{M+3-j-k}}{1-q^{k+j-1}} \end{aligned}$$

и статистическая сумма (35) равна соответственно

$$Z(q)=q^{-\frac{N^2}{2}(M+2-2N)}\prod_{1\le j,k\le N}\frac{1-q^{M+3-j-k}}{1-q^{k+j-1}}. \tag{39}$$

Согласно определению $Z(1) = S(N,M)$, и для однородной модели (26) получим следующий ответ

$$Z(\omega_a,\omega_b,\omega_c) = (\omega_a\omega_b)^{N(M-N+1)}\omega_c^{2N^2}\prod_{1\leq j,k\leq N}\frac{M-j-k+3}{j+k-1}. \tag{40}$$

Для того чтобы связать четырехвершинную модель с моделью укладок заметим что каждый набор допустимых решеточных путей может быть представлен в виде матрицы π_{ij} размерности $N\times N$. Путь с номером m соответствует m-й колонке этой матрицы с матричными элементами π_{jm} равными числу ячеек в последующих колонках j решетки (начиная с правой) под m-ым путем. Матрица

$$\pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

соответствует набору путей на (Рис. 4).

Набор π_{ij} неотрицательных целых чисел, расположенных в порядке нестрогого убывания по индексам i и j $(i,j=1,2,...)$, называется плоским разбиением π [14]. Числа π_{ij} называются частями плоского разбиения. У плоского разбиения есть трехмерная диаграмма представляющая множество столбцов из единичных кубов - трехмерная диаграмма Юнга. Число $|\pi| = \sum\pi_{ij}$ называется ее объемом или весом плоского разбиения. Высота колонки с координатами (i,j) равна части плоского разбиения π_{ij}. Если $i\leq r, j\leq s$ и $\pi_{ij}\leq t$ для всех частей плоского разбиения то такое плоское разбиение называется плоским разбиением заключенным внутри ящика со сторонами r,s,t. Если при этом $\pi_{ij}>\pi_{i+1j}$, т.е. если части плоского разбиения убывают вдоль каждого столбца, то такое π называется строгим по столбцам плоским разбиением. Плоское разбиение π с частями, убывающими как по столбцам, так и по строкам $(\pi_{ij}>\pi_{i+1j}$ и $\pi_{ij}>\pi_{ij+1})$, будем называть строгим разбиением. Если $s=r$, то элемент π_{11} строгого разбиения π_{ij} удовлетворяет условию $\pi_{11}\geq 2r-2$. Произвольное плоское разбиение π_{ij} заключенное в ящик со сторонами $r\times r\times t$, может быть преобразовано в строгое плоское разбиение в ящике со сторонами $r\times r\times(t+2r-2)$, если добавить к

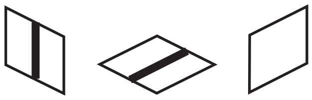

Рис. 5: Три типа единичных ромбов.

нему разбиение определяемое $r \times r$ матрицей

$$\pi_{spp} = \begin{pmatrix} 2r-2 & 2r-3 & \cdots & r-1 \\ 2r-3 & 2r-4 & \cdots & r-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r-1 & r-2 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

которая соответствует минимальному строгому разбиению.

Плоское разбиение в ящике со сторонами $r \times s \times t$ эквивалентно укладке полурегулярного шестиугольника единичными ромбами с углами $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ (Рис. 5). В рассматриваемом случае допустимые укладки представляют собой проекцию строгих трехмерных диаграмм Юнга с градиентными линиями. Трехмерная диаграмма Юнга, которая соответствует плоскому разбиению (41), изображена на (Рис. 4).

Статистическая сумма трехмерных диаграмм, Юнга заключенных в ящик, равна

$$Z_{YD}(q) = \sum q^{|\pi|}, \tag{42}$$

где q это Больцмановский вес единичного куба, а суммирование ведется по всем диаграммам. Объем трехмерной строгой диаграммы Юнга в ящике со сторонами $N \times N \times M$ вычисляется по соответствующему ей набору решеточных путей по формуле [17]:

$$|\pi| = \frac{N^2 M}{2} + \sum_{k=-1}^{-N} \frac{k}{2}(l_k^a - l_k^b) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j-1}{2}(l_j^a - l_j^b).$$

Подставляя это выражение в (35), мы получим следующий ответ для статистической суммы строгих трехмерных диаграмм Юнга в ящике со сторонами $N \times N \times M$:

$$Z_{YD}(q) = q^{\frac{N^2 M}{2}} Z(q) = q^{N^2(N-1)} \prod_{1 \le j,k \le N} \frac{1 - q^{M+3-j-k}}{1 - q^{k+j-1}}. \tag{43}$$

Эту статистическую сумму можно рассматривать как производящую функцию строгих плоских разбиений. Число соответствующих укладок шестиугольника единичными ромбами равно $Z_{YD}(1)$ и совпадает со статистической суммой однородной модели с единичными вершинными весами:

$$Z_{YD}(1) = Z(1,1,1) = \prod_{1 \le j,k \le N} \frac{M-j-k+3}{j+k-1}.$$

IV. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим теперь модель на решетке с периодическими граничными условиями. Это означает, что на решетке с $(M+1)$ горизонтальными и L вертикальными линиями граничные стрелки на любой линии направлены в одну сторону (Рис. 6).

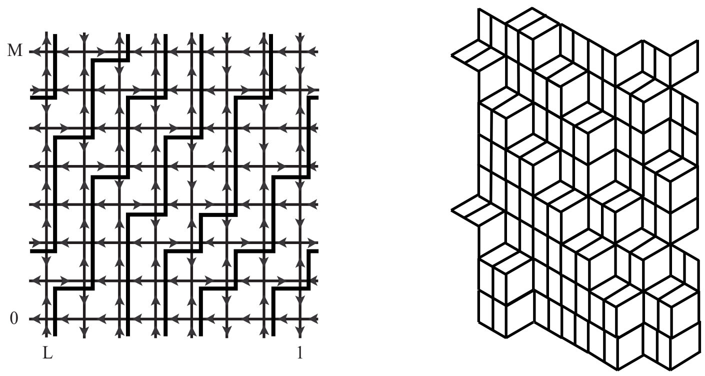

Рис. 6: Типичная конфигурация решеточных путей на решетке с периодическими граничными условиями и соответствующая ей укладка единичных ромбов.

Мы ограничимся случаем, когда $(M+1)$ и L четны. В четырехвершинной модели число стрелок, направленных направо или налево в последующих столбцах решетки, сохраняется. Это означает, что число вершин типа (c) на каждой вертикальной линии сохраняется и равно $l_c = 2n$, где n это число стрелок, направленных направо в примыкающем столбце.

Статистическая сумма (1) однородной модели на периодической решетке размерности $(M+1) \times L$ с фиксированным числом стрелок направленных направо и вершинными весами $\omega_a = e^{-\mu}$, $\omega_b = e^{\mu}$ and $\omega_c = 1$ равна

$$Z_n(\mu) = \sum e^{\mu(l_b - l_a)}, \tag{44}$$

где суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок на решетке с периодическими граничными условиями или по соответствующем наборам решеточных путей (Рис. 6).

Рассмотрим след матрицы перехода в квантовом пространстве (10):

$$Tr\tau^L(u) = Tr\,(A(u)+D(u))^L = \sum \langle m_1,...,m_n|\,(A(u)+D(u))^L\,|m_1,...,m_n\rangle. \qquad (45)$$

Через $|m_1,...,m_n\rangle$ обозначено состояние с n спинами, направленными вниз в узлах $m_1,...,m_n$, и с $M+1-n$ спинами, направленными вверх в других узлах, а суммирование ведется по полному набору состояний $|m_1,...,m_n\rangle$ квантовом пространстве $\mathcal{H}$. Сохранение числа n есть следствие коммутативности оператора третьей компоненты полного спина и матрицы перехода (14). Так как $\tau^L(u)$ является производящей функцией различных комбинаций операторов A и D, то ее след (45) представляет собой сумму по всем допустимым конфигурациям вершин $(a),(b),(c)$ с весами $\omega_a=\delta(u),\omega_b=\alpha(u),\omega_c=1$ (18) на периодической решетке размерности $(M+1)\times L$

$$Tr\tau^L(u) = \sum (-u)^{l^b}(u^{-1})^{l^a}. \qquad (46)$$

Сравнивая это выражение с (44), мы получим следующее представление для статистической суммы

$$Z_n(\nu) = e^{-i\frac{\pi}{2}(M+1-2n)L}Tr_n\tau^L(-ie^{\nu}), \qquad (47)$$

где мы положили $u=-ie^{\nu}$.

Для того чтобы вычислить это выражение, необходимо решить задачу на собственные значения для матрицы перехода $\tau(u)$:

$$\begin{aligned} \tau(u)|\Psi_n(v_1,...,v_n)\rangle &= \Theta_n(u;v_1,...,v_n)|\Psi_n(v_1,...,v_n)\rangle, \qquad (48)\\ S^z|\Psi_n(v_1,...,v_n)\rangle &= \frac{1}{2}(M+1-2n)|\Psi_n(v_1,...,v_n)\rangle. \end{aligned}$$

Вектор (20) является собственным вектором матрицы перехода, если параметры v_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$\begin{aligned} (v_k^2)^{M+1-n} &= (-1)^{n-1}V^{-2},\;\; k=1,...,n. \qquad (49)\\ V^{-2} &= \prod_{j=1}^{n} v_j^{-2}. \end{aligned}$$

Положив $v_k^2=e^{ip_k}$, можно представить решения уравнений Бете (49) в виде

$$p_k = \frac{2\pi I_k - P}{M+1-n},\;\; -\pi < p_k \le \pi, \qquad (50)$$

где I_n это целые или полуцелые числа в зависимости от того является ли n нечетным или четным числом, полный импульс $P = \sum_{j=1}^{n} p_j$. Решения (50) были проклассифицированы в работах [21, 22].

Собственное значение матрицы перехода равно

$$\Theta_n(u;\{v\}) = e^{i\frac{\pi}{2}(M+1-2n)} \left\{ u^{M+1}V^{-2} + (-1)^n u^{-(M+1-2n)} \right\} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{u^2 - v_j^2}. \tag{51}$$

Статистическая сумма четырехвершинной модели на периодической решетке (44) определяется равенством

$$Z_n(\nu) = e^{-i\frac{\pi}{2}(M+1-2n)L} \sum_{\{v\}} \Theta_n^L(-ie^{\mu};\{v\}), \tag{52}$$

где суммирование ведется по всем наборам решений уравнений Бете. Простейшее решение соответствует случаю с $n = 0$. Статистическая сумма равна $Z_0(\mu) = \{2\cosh(M+1)\mu\}^L$, и $Z_0(0) = 2^L$. Другой предельный случай соответствует $2n = M+1$. В этом случае существует лишь два набора решений. Первый набор задается решениями (50) с $I_k = k - \frac{n+1}{2}$, $k = 1, ..., n$ и $P = 0$. Другой набор задается числами $I_k = k - \frac{n+3}{2}$, $k = 1, ..., n$, с $P = -\pi$. Применение равенства

$$\prod_{k=1}^{n} (a - be^{i\frac{2\pi}{n}k}) = a^n - b^n$$

дает $Z_{\frac{M+1}{2}}(\mu) = 2$.

Сопряженным к собственному вектору (48)

$$|\Psi_n(p_1, ..., p_n)\rangle = \prod_{k=1}^{n} B(e^{ip_k})|\Leftarrow\rangle,$$

где p_k это решения (50) уравнений Бете (49), является вектор

$$\langle\Psi_n(p_1, ..., p_n)| = \langle\Leftarrow| \prod_{k=1}^{n} B^\dagger(e^{ip_k}).$$

Операторы $B(e^{ip})$ и $C(e^{ip})$ находятся в инволюции: $B^\dagger(e^{ip}) = (-1)^M C(e^{ip})$.

Норма собственных векторов вычисляется с помощью представления 32. Когда наборы параметров совпадают $\{u\} = \{v\}$, диагональные элементы матрицы H равны

$$H_{jj} = M - n + 2.$$

Если $\{u\} = \{v\}$ являются решениями уравнений Бете (49), то недиагональные элементы матрицы H равны единице: $H_{jk} = 1$. Определитель легко вычисляется

$$\det H = (M+1)(M-n+1)^{n-1},$$

и норма любого собственного вектора равна:

$$\mathcal{N}^2(p_1,...,p_n) = \langle\Psi_n(p_1,...,p_n)|\Psi_n(p_1,...,p_n)\rangle = (M+1)(M-n+1)^{n-1}\prod_{j\neq k}\frac{e^{iP}}{e^{ip_j}-e^{ip_k}},$$

где p_j это решения (50). Собственные вектора (48) образуют полную ортогональную систему [21].

Рассмотрим цилиндр с длиной окружности равной $M+1$ и длиной L. Вероятность того, что решеточные пути, берущие начало в узлах $\tilde{\mu} = (\tilde{m}_1,...,\tilde{m}_n); \tilde{m}_i \geq \tilde{m}_{i+1}+2$, покинут его в узлах $\mu = (m_1,...,m_n); m_i \geq m_{i+1}+2$ определяется следующем равенством

$$\begin{aligned} &\langle m_1,...,m_n|\tau^L(-ie^{\nu})|\tilde{m}_1,...,\tilde{m}_n\rangle \\ &= \mathcal{N}^{-2}\sum_{\{p\}}\langle m_1,...,m_n|\Psi_n(p_1,...,p_n)\rangle\Theta_n^L(-ie^{\nu};\{e^{ip}\})\langle\Psi_n(p_1,...,p_n)|\tilde{m}_1,...,\tilde{m}_n\rangle \\ &= \mathcal{N}^{-2}\sum_{\{p\}}S_{\mu-\delta}\left(e^{ip_1},e^{ip_2},...,e^{ip_n}\right)S_{\tilde{\mu}-\delta}\left(e^{-ip_1},e^{-ip_2},...,e^{-ip_n}\right)\Theta_n^L(-ie^{\nu};\{e^{ip}\}), \end{aligned} \tag{53}$$

где суммирование ведется по всем решениям уравнений Бете и мы воспользовались представлением (25).

Каждой конфигурации решеточных путей на торе можно сопоставить укладку тора единичными ромбами по следующему правилу: ромбу (1) на (Рис. 5) соответствует вертикальное ребро, по которому проходит путь, ромбу (2) подобное горизонтальное ребро, а ромбу (3)свободные вертикальные ребра. Число укладок, которые определяются четырехвершинной моделью, дается равенством (52) с $\mu = 0$.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что, хотя рассмотренная четырехвершинная модель и является частным случаем шестивершинной, однако детерминантные представления для статистической суммы неоднородной модели на решетке с фиксированными граничными условиями нельзя получить простым пределом, так как подобный ответ для шестивершинной модели неизвестен. То же можно сказать и про полученное представление среднего (53) через симметрические функции.

Квантовым гамильтонианом, коммутирующим с матрицей перехода четырехвершинной модели, является гамильтониан, получающийся в пределе бесконечной анизотропии из гамильтониана XXZ цепочки Гейзенберга [21, 22].

Описанный в статье подход позволяет получать детерминантные представления для различных корреляционных функций соответствующей квантовой модели.

VI. БЛАГОДАРНОСТИ

Данная работа частично поддержана CRDF грантом RUMI-2622-ST-04 и проектом РФФИ 07-01-00358.

[1] Р. Бакстер, *Точно решаемые модели в статистической механике* ("Мир Москва, 1985).

[2] V.E. Korepin, *Calculation of norms of Bethe wave functions*, Comm. Math. Phys. **86**, 391 (1982).

[3] V. Korepin, P. Zinn-Justin, *Thermodynamic limit of the Six-Vertex Model with Domain Wall Boundary Conditions*, J. Phys. A **33**, 7053 (2000).

[4] N.M.Bogoliubov, A.G.Pronko, M.B.Zvonarev, *Boundary correlation functions of the six-vertex model*, J. Phys. A **35**, 5525 (2002).

[5] D. Allison, N. Reshetikhin, *Numerical study of the 6-vertex model with domain wall boundary conditions*, Ann. Inst. Fourier(Grenoble) **55**, 1847 (2005).

[6] O. Syljuåsen, M. Zvonarev, *Directed-loop monte carlo simulations of vertex models*, Phys. Rev. E **70**, 016118 (2004).

[7] G. Kuperberg, *Another proof of the alternating-sign matrix conjecture*, Int. Math. Res. Not. **1996**, 139 (1996).

[8] F.Colomo, A.G.Pronko, *Square ice, alternating sign matrices, and classical orthogonal polynomials*, J. Stat. Mech. JSTAT, P01005 (2005).

[9] P.L. Ferrari, H. Spohn, *Domino tilings and the six-vertex model at its free fermion*, cond-mat/0605406.

[10] W. Li, H. Park, and M. Widom, *Finite-size scaling amplitudes in a random tiling model,* J. Phys. A **23**, L573 (1990).

[11] W. Li and H. Park, *Logarithmic singularity in the surface free energy near commensurate-incommensurate transitions*, J. Phys. A **24**, 257 (1991).

[12] L.D. Faddeev, *Quantum Inverse Scattering Method*, Sov. Sci. Rev. Math. **C1**, 107 (1980).

[13] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, and A.G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

[14] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, (Мир, Москва, 1985).

[15] D.M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[16] A. Vershik, *Statistical mechanics of combinatorial partitions and their limit configurations*, Funct. Anal. Appl. **30** 90 (1996).

[17] N.M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*, J. Phys. A **38**, 9415 (2005).

[18] Н.В. Цилевич, *Квантовый метод обратной задачи для q-бозонной модели и симметрические функции*, Функц. Анал. и Прил. **40**, 53 (2006).

[19] K. Shigechi, M. Uchiyama, *Boxed skew plane partition and integrable phase model*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 10287 (2005).

[20] Н.М. Боголюбов, *Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете*, Теор. Мат. Физ. **150**, 193 (2007).

[21] Н.И. Абаренкова, А.Г. Пронько, *Температурный коррелятор в абсолютно анизотропном XXZ-магнетике Гейзенберга*, Теор. Мат. Физ. **131**, 288 (2002).

[22] М. Годен, *Волновая функция Бете*, (Мир, Москва, 1987).