ПОМИ ПРЕПРИНТ 4/2007

Построение остовного дерева с большим количеством листьев

Н. В. Гравин

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
E-mail: vgravin@mail.ru

Abstract

We prove the following theorem: every connected graph with k vertices of degree at least 4 and m vertices of degree 3 has a spanning tree with at least $\lceil \frac{2}{5} \cdot k + \frac{2}{15} \cdot m \rceil$ leaves.

Введение

В. Г. Визинг [1] в 1968 году поставил проблему поиска в связном графе остовного дерева с наибольшим числом висячих вершин. В 1973 году B. Zelinka [2] предложил алгоритм выделения в связном графе дерева с масимально возможным количеством висячих вершин. Известно, что задача поиска в связном графе остовного дерева с наибольшим количеством висячих вершин является NP–полной даже в классе кубических графов.

Определим $LL(G)$, как максимум количества висячих вершин в остовных деревьях графа G. В 1981 году Storer в своей работе [3] заявил, что $LL(G) \geq \frac{1}{4}N + 2$ для всех 3–регулярных графов на N вершинах. Затем N. Linial выдвинул гипотезу, что $LL(G) \geq \frac{k-2}{k+1}N + c_k$ для графов с минимальной степенью хотя бы k, где c_k зависит только от k. В работе [4] была доказана гипотеза для $k = 4, k = 5$ (для $k = 3$ гипотеза была доказана еще раньше в работе [5] с помощью метода "мертвых вершин"). Там же, в работе [4], построена бесконечная серия примеров показывающая, что эта оценка асимптотически точна для $k = 4, k = 5, k = 3$ и $c_k = 2$.

В настоящей работе оценка доказывается для **произвольного** графа, в отличие от предыдущих работ, без ограничений на минимальную степень. Таким образом, если пытаться оценить $LL(G)$ через количество вершин степени хотя бы 4, то вершины степени 2 и 1 "не мешают" в этой оценке, а вершины степени 3 даже немного увеличивают количество висячих вершин. Из работы [4] следует, что коэффициент $\frac{2}{5}$ асимптотически точен. В нашей работе предъявляется алгоритм, работающий полиномиальное время, на выходе выдающий остовное дерево, количество висячих вершин которого удовлетворяет неравенству из аннотации.

Дадим несколько необходимых нам определений и обозначений.

Через $E(G)$ мы будем обозначать множество всех ребер графа G.

Пусть $S \subset V(G)$, тогда через $G(S)$ обозначим индуцированный подграф графа G на множестве вершин S.

Через $d(x)$ будем обозначать степень вершины x в графе G.

Определение 1. Назовем *помеченным графом* пару (G, S), где G— граф, а $S \subset V(G)$, при этом множество S вершин графа назовем *помеченными вершинами.*

Замечание 1. Все свойства графа G естественным образом переносятся на помеченный граф (G, S). Например, пусть G — связный граф, тогда связность помеченного графа $\overline{G} = (G, S)$ означает ровно то, что граф G связен.

Определение 2. Пусть $\overline{G} = (G, S)$ помеченный граф и $P \subseteq V(G)$, тогда *индуцированным помеченным подграфом* на множестве вершин P помеченного графа $\overline{G}$ назовем помеченный граф $(G(P), S \cap P)$.

Определение 3. *Помеченное дерево* — это корневое дерево, корень которого — помеченная вершина.

Определение 4. Пусть дан некоторый помеченный граф $\overline{G}$, тогда назовем *помеченным остовным лесом* в этом помеченном графе такой остовный лес графа G, что корень каждого дерева этого леса является помеченной вершиной.

Определение 5. Определим величину $L'(T)$ в помеченном дереве T вычисляемую по следующему правилу.

1) Если $|V(T)| > 1$, то $L'(T)$ — это количество некорневых висячих вершин в дереве T минус один.

2) Если $|V(T)| = 1$, то $L'(T) := 0$.

Определение 6. Определим величину для помеченного леса $\overline{F}$ $\overline{L}(\overline{F}) = \sum L'(T_i)$, где T_i — это все деревья в $\overline{F}$.

Определение 7. Пусть дан некоторый помеченный граф (H, S). Через $L((H, S))$ мы будем обозначать максимальное значение $\overline{L}(\overline{F})$ взятое по всем остовным лесам $\overline{F}$ на помеченном графе (H, S).

Пусть $S_1 \subset V(G)$ таково, что граф $G(S_1)$ связен. Рассмотрим множество $S_2 \subset V(G)$, состоящее из всех вершин не из S_1, смежных хотя бы с одной вершиной из S_1. Определим S_3, как $V(G) \setminus (S_1 \cup S_2)$. Тогда нет ребер из S_3 в S_1.

Определение 8. Пусть $\Omega(G)$ — это множество всех таких троек (S_1, S_2, S_3).

Замечание 2. Так как в нашей работе будет всегда понятно, для какого графа мы рассматриваем Ω, то вместо $\Omega(G)$ мы обычно будем писать просто Ω.

Определение 9. Введем следующие две функции для $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$.
$\overline{\Delta}(S_1, S_2, S_3) := |S_2| - |S_1|$.
$\overline{\Delta_1}(S_1, S_2, S_3)$ — это количество вершин в S_2, не смежных ни с одной вершиной из S_3.

Определение 10. Пусть $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$ и $\overline{a}_4(S_1, S_2, S_3)$ — это количество вершин степени четыре среди вершин $S_1 \cup S_2$, $\overline{a}_2(S_1, S_2, S_3)$ и $\overline{a}_3(S_1, S_2, S_3)$ — количество помеченных вершин степени два и три соответственно среди вершин $S_1 \cup S_2$, $\overline{b}_3(S_1, S_2, S_3)$ — это количество непомеченных вершин степени три среди вершин $S_1 \cup S_2$. Пусть

$$\overline{b}_1(S_1, S_2, S_3) := |S_1| + |S_2| - \overline{a}_4(S_1, S_2, S_3) - \overline{a}_3(S_1, S_2, S_3) - \overline{a}_2(S_1, S_2, S_3) - \overline{b}_3(S_1, S_2, S_3).$$

Пусть $a'_4 = \overline{a}_4(S_1, S_2, S_3)$, $a'_3 = \overline{a}_3(S_1, S_2, S_3)$, $a'_2 = \overline{a}_2(S_1, S_2, S_3)$, $b'_3 = \overline{b}_3(S_1, S_2, S_3)$ и $b'_1 = \overline{b}_1(S_1, S_2, S_3)$.

Опишем процедуру $OUTPUT$ преобразования троек $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$, которая потребуется нам при доказательстве основной теоремы этой статьи. При выполнении шагов процедуры мы будем следить за тем, чтобы не убывали $\overline{\Delta}(S_1, S_2, S_3)$ и $\overline{\Delta_1}(S_1, S_2, S_3)$.

Процедура. ***Шаг 1.*** *Пусть в S_2 есть вершина v, смежная хотя бы с двумя вершинами $v_1, v_2, ..., v_i \in S_3$. Положим*

$$S'_1 = S_1 \cup \{v\}, S'_2 = S_2 \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_i\}, S'_3 = S_3 \setminus \{v_1, v_2, ..., v_i\}.$$

Тогда $(S'_1, S'_2, S'_3) \in \Omega$ и $|S'_2| - |S'_1| \geq |S_2| - |S_1|$. Шаг процедуры заключается в замене тройки (S_1, S_2, S_3) на тройку (S'_1, S'_2, S'_3). (см. рис. 1)

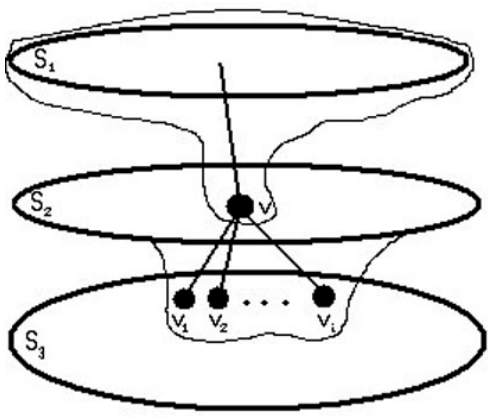


рис. 1.

Шаг 2. *Пусть в S_2 есть вершина v, смежная с некоторой вершиной $u \in S_3$, и из вершины u ведет хотя бы три ребра в вершины $v_1, v_2, ..., v_i \in S_3$. Положим*

$$S_1' = S_1 \cup \{u, v\}, S_2' = S_2 \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_i\}, S_3' = S_3 \setminus \{u, v_1, v_2, ..., v_i\}.$$

Тогда $(S_1', S_2', S_3') \in \Omega$. Шаг процедуры состоит в замене тройки (S_1, S_2, S_3) на тройку (S_1', S_2', S_3').

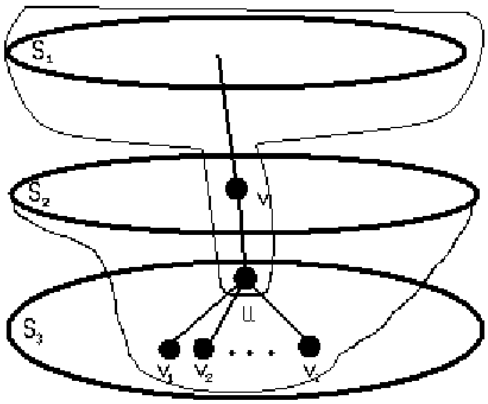


рис. 2.

Понятно, что в обоих шагах $\overline{\Delta}(S_1', S_2', S_3') \geq \overline{\Delta}(S_1, S_2, S_3)$ и $\overline{\Delta_1}(S_1', S_2', S_3') \geq \overline{\Delta_1}(S_1, S_2, S_3)$ (см. рис. 1 и рис. 2).

Алгоритм процедуры OUTPUT.

Пусть $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$. Будем пытаться выполнить шаг 1 и, если это невозможно, то шаг 2. Пусть в какой-то момент мы не можем выполнить ни один из шагов. Полученную в итоге тройку множеств (P_1, P_2, P_3) обозначим через $OUTPUT(S_1, S_2, S_3)$.

Заметим, что каждой тройке $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$ соответствует ровно одна тройка $OUTPUT(S_1, S_2, S_3)$, так как $OUTPUT(S_1, S_2, S_3)$ является результатом выполнения детерминированного алгоритма (можно всегда считать, что вершины занумерованны числами от 1 до N, и мы пытаемся применить шаги процедуры в порядке от вершин с меньшим номером к вершинам с большим номером).

В данной статье мы будем всегда считать, что $(P_1, P_2, P_3) = OUTPUT(S_1, S_2, S_3)$.

Определение 11. Пусть $a_i = \overline{a}_i(P_1, P_2, P_3)$, где $i \in \{2, 3, 4\}$, и $b_i = \overline{b}_i(P_1, P_2, P_3)$, где $i \in \{1, 3\}$.

Лемма 1. *В предыдущих обозначениях $a_i \geq a_i'$ для $i \in \{2, 3, 4\}$ и $b_i \geq b_i'$ для $i \in \{1, 3\}$.*

Proof. Отметим, что $|S_2| \leq |P_2|$, и $S_2 \cup S_1 \subseteq P_2 \cup P_1$. Так как $P_2 \cup P_1 \supseteq S_2 \cup S_1$, то $a_i \geq a_i'$ для $i \in \{2, 3, 4\}$ и $b_i \geq b_i'$ для $i \in \{1, 3\}$. □

Теорема 1. *Пусть $\overline{G} = (G, S)$ — связный помеченный граф, в котором k_4 вершин степени хотя бы четыре, k_3 помеченных вершин степени три, k_2 помеченных вершин степени два, k_5 непомеченных вершин степени три. Тогда, если в графе есть по крайней мере одна помеченная вершина, в нем можно выделить помеченный остовный лес $\overline{F}$ с*

$$\overline{L}(\overline{F}) \geq \lceil \frac{2}{5}k_4 + \frac{4}{15}k_3 + \frac{2}{15}k_2 + \frac{2}{15}k_5 \rceil.$$

Proof. Пусть $N = |V(G)|$. Будем доказывать нашу теорему индукцией по N из предположения, что для всех помеченных графов с меньшим количеством вершин выполняется утверждение теоремы.

База индукции.

В качестве базы разберем случай, когда $\lceil \frac{2}{5}k_4 + \frac{4}{15}k_3 + \frac{2}{15}k_2 + \frac{2}{15}k_5 \rceil = 0$. Заметим, что по определению $L'(T) \geq 0$ для любого дерева T из остовного леса. Поэтому выбрав любое остовное дерево в $\overline{G}$, с корнем в помеченной вершине, мы получим остовный лес F с $\overline{L}(F) \geq 0$.

Переход. Дальнейший план доказательства: мы покажем, что если выбрать "*хорошую*" тройку $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega(G)$, получить из нее тройку $(P_1, P_2, P_3) = OUTPUT(S_1, S_2, S_3)$ и применить предположение индукции для меньших N, то мы докажем теорему для N. Что такое "*хорошая*" тройка станет ясно в ходе дальнейшего доказательства. В конце работы будет приведен алгоритм выбора "*хорошей*" тройки (S_1, S_2, S_3).

Что такое "*хорошая*" тройка.

В следующей части доказательства мы определим достаточное условие для того, что тройка (S_1, S_2, S_3) — "хорошая", и завершим индукционный переход при наличии в помеченном графе $\overline{G}$ "хорошей" тройки.

Пусть у нас есть тройка $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$, такая что $|S_2| - |S_1| = \Delta$ $(\Delta \geq 0)$. Мы знаем, что $(P_1, P_2, P_3) \in \Omega$ и $|P_2| - |P_1| \geq \Delta$. Заметим, что существует остовное дерево T_1' на графе $G(P_1 \cup P_2)$ с множеством висячих вершин, содержащем P_2. Пусть $P_3^1, P_3^2, ..., P_3^m$ — компоненты связности графа $G(P_3)$. Пусть B — множество всех непомеченных вершин из P_3 в помеченном графе $\overline{G}$, которые смежны хотя бы с одной вершиной из P_2.

Рассмотрим граф $\overline{G}(P_3) = (G_1, Q)$ и пометим дополнительно все вершины из B. Получим новый помеченный граф $\overline{G(P_3)} = (G_1, Q \cup B)$. Применим предположение индукции для компонент связности $\overline{P_3^1}, \overline{P_3^2}, ..., \overline{P_3^m}$ помеченного графа $\overline{G(P_3)}$. В каждой из этих компонент мы получим некоторый *помеченный остовный лес*. Рассмотрим во всех этих помеченных лесах все помеченные деревья $T_1, T_2, ..., T_t$, у которых корень лежит в B. Из каждого корня такого дерева ведет ребро в множество P_2, "подвесим" тогда все эти деревья к T_1'. Получится новое дерево T' (см. рис. 3).

Замечание 3. В результате мы получили некоторый остовный лес F в помеченном графе $\overline{G}$, который состоит из дерева T' и нескольких помеченных деревьев.

Попытаемся получить из этого леса помеченный остовный лес помеченного графа $\overline{G}$. Для этого разберем два случая: когда в множетсве P_1 есть помеченная вершина, и когда в P_1 такой вершины нет.

Случай 1.

Пусть *среди вершин из множества* P_1 *есть помеченная вершина.*

Тогда можно считать, что T' — помеченное дерево. Пусть t' — это количество вершин в P_2, к которым "подвесили" помеченные деревья $T_1, T_2, ..., T_t$. Понятно, что $t \geq t'$. Так как вершины из P_2 — висячие и P_2 не содержит корня T', то

$$L'(T') \geq |P_2| - 1 + \sum_{i=1}^{t} L'(T_i) + t - t' \geq |P_2| - 1 + \sum_{i=1}^{t} L'(T_i).$$

Таким образом, мы нашли *помеченный остовный лес* F в помеченном графе $\overline{G}$ для которого

$$\overline{L}(F) \geq \sum L(\overline{P_3^i}) + |P_2| - 1. \quad (1)$$

Обозначим множество всех вершин из P_3^i степени по крайней мере 4 в исходном помеченном графе $\overline{G}$ как $P_{3_4}^i$. Через $P_{3_3}^i$ обозначим множество всех помеченных вершин из P_3^i степени 3 в исходном помеченном графе $\overline{G}$. Через $P_{3_2}^i$ обозначим множество всех помеченных вершин из P_3^i степени 2 в исходном помеченном графе $\overline{G}$. Через $P_{3_5}^i$ обозначим множество всех непомеченных вершин из P_3^i степени 3 в исходном помеченном графе $\overline{G}$. Пусть $P_{3_j} := \bigcup_{i=1}^{m} P_{3_j}^i$, $j \in \{2,3,4,5\}$ и $p_j = |P_{3_j}|$, $j \in \{2,3,4,5\}$.

Пусть r — количество ребер графа G ведущих из P_2 в P_3. Тогда, приминив индукционное предположение для каждой компоненты связности $\overline{P_3^i}$, получим следующее неравенство:

$$\sum L(\overline{P_3^i}) \geq \lceil \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}p_3 + \frac{2}{15}p_2 + \frac{2}{15}p_5 - \frac{2}{15}r \rceil. \quad (2)$$

Замечание 4. Объясним почему в правой части формулы (2) стоит именно такое число.

Говоря неформально, мы получаем там такое число исходя из следующих соображений:

1) Рассмотрим выражение $(*) := \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}p_3 + \frac{2}{15}p_2 + \frac{2}{15}p_5$ для множества P_3 помеченного графа $\overline{G}$. Это выражение можно понимать как некоторую функцию от $\overline{G}$.

2) $(*)$ при удалении одного ребра $\{u,v\} \in E(G), u \in P_2, v \in P_3$ и добавлении v в множество помеченных вершин (если, конечно, v не была помеченной) уменьшается не более чем на $\frac{2}{15}$. Действительно, вершина степени 4 становится помеченной вершиной степени 3, помеченная вершина степени 3 становится помеченной вершиной степени 2, помеченная вершина степени 2 становится вершиной степени 1, непомеченная вершина степени 3 становится помеченной вершиной степени 2. А коэффициенты в выражение подобраны так, что при каждом из таких переходов выражение убывает не более чем на $\frac{2}{15}$.

Пусть $\Delta_1 = \overline{\Delta_1}(P_1, P_2, P_3)$, $\Delta = \overline{\Delta}(P_1, P_2, P_3)$. Очевидно, $r = (|P_2| - \Delta_1)$, иначе в P_2 есть вершина смежная по крайней мере с двумя вершинами из P_3, а тогда можно выполнить шаг 1 процедуры $OUTPUT$.

Из неравенств (1) и (2) следует то, что количество висячих вершин в F не менее, чем

$$\lceil \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}p_3 + \frac{2}{15}p_2 + \frac{2}{15}p_5 - \frac{2}{15}r \rceil + |P_2| - 1.$$

Нам надо доказать, что это количество не менее

$$\lceil \frac{2}{5}(p_4 + a_4) + \frac{4}{15}(p_3 + a_3) + \frac{2}{15}(p_2 + a_2) + \frac{2}{15}(p_5 + b_3) \rceil,$$

что равно $\lceil \frac{2}{5}k_4 + \frac{4}{15}k_3 + \frac{2}{15}k_2 + \frac{2}{15}k_5 \rceil$. Преобразуем неравенство.

$$\lceil \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}p_3 + \frac{2}{15}p_2 + \frac{2}{15}p_5 - \frac{2}{15}r \rceil + |P_2| - 1 \geq$$

$$\lceil \frac{2}{5}(p_4 + a_4) + \frac{4}{15}(p_3 + a_3) + \frac{2}{15}(p_2 + a_2) + \frac{2}{15}(p_5 + b_3) \rceil$$

$$\Updownarrow$$

$$\lceil \frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}p_3 + \frac{2}{15}p_2 + \frac{2}{15}p_5 - \frac{2}{15}r + |P_2| - 1 \rceil \geq$$
$$\lceil \frac{2}{5}(p_4 + a_4) + \frac{4}{15}(p_3 + a_3) + \frac{2}{15}(p_2 + a_2) + \frac{2}{15}(p_5 + b_3) \rceil$$
$$\Uparrow$$
$$\frac{2}{5}p_4 + \frac{4}{15}p_3 + \frac{2}{15}p_2 + \frac{2}{15}p_5 - \frac{2}{15}r + |P_2| - 1 \geq$$
$$\frac{2}{5}(p_4 + a_4) + \frac{4}{15}(p_3 + a_3) + \frac{2}{15}(p_2 + a_2) + \frac{2}{15}(p_5 + b_3)$$
$$\Updownarrow$$
$$|P_2| - \frac{2}{15}r - 1 - (\frac{2}{5}a_4 + \frac{4}{15}a_3 + \frac{2}{15}a_2 + \frac{2}{15}b_3) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(\frac{2}{15}|P_2| - \frac{2}{15}r) + \frac{13}{15}|P_2| - 1 - (\frac{2}{5}a_4 + \frac{4}{15}a_3 + \frac{2}{15}a_2 + \frac{2}{15}b_3) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2}{15}\Delta_1 + \frac{13}{15}|P_2| - 1 - (\frac{2}{5}a_4 + \frac{4}{15}a_3 + \frac{2}{15}a_2 + \frac{2}{15}b_3) \geq 0$$

По определению $b_3 + a_4 + a_3 + a_2 + b_1 = |P_2| + |P_1|$, $|P_2| - |P_1| = \Delta$. Тогда последнее неравенство равносильно следующему.

$$\frac{2}{15}\Delta_1 + \frac{12}{15}|P_2| + \frac{1}{15}|P_2| - 1 - (\frac{2}{5}a_4 + \frac{4}{15}a_3 + \frac{2}{15}a_2 + \frac{2}{15}b_3) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2}{15}\Delta_1 + \frac{6}{15}|P_2| + \frac{6}{15}|P_1| + \frac{6}{15}\Delta + \frac{1}{15}|P_2| - 1 - (\frac{2}{5}a_4 + \frac{4}{15}a_3 + \frac{2}{15}a_2 + \frac{2}{15}b_3) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2}{15}\Delta_1 + \frac{6}{15}(b_3 + a_4 + a_3 + a_2 + b_1) + \frac{6}{15}\Delta + \frac{1}{15}|P_2| - 1 - (\frac{2}{5}a_4 + \frac{4}{15}a_3 + \frac{2}{15}a_2 + \frac{2}{15}b_3) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2}{15}\Delta_1 + \frac{6}{15}\Delta + \frac{1}{15}|P_2| + \frac{2}{15}a_3 + \frac{4}{15}a_2 + \frac{4}{15}b_3 + \frac{6}{15}b_1 \geq 1$$

Пусть $\Delta' = \overline{\Delta}(S_1, S_2, S_3)$, $\Delta'_1 = \overline{\Delta_1}(S_1, S_2, S_3)$ и

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq 1. \quad (3)$$

Тогда по Лемме 1 справедливо неравенство.

$$\frac{2}{15}\Delta_1 + \frac{6}{15}\Delta + \frac{1}{15}|P_2| + \frac{2}{15}a_3 + \frac{4}{15}a_2 + \frac{4}{15}b_3 + \frac{6}{15}b_1 \geq \frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1$$

Таким образом, если мы в помеченном графе $\overline{G}$ найдем тройку $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$, для которой выполнено неравенство (3) и в S_1 есть помеченная вершина, то мы докажем переход индукции, то есть такая тройка (S_1, S_2, S_3) будет "*хорошей*".

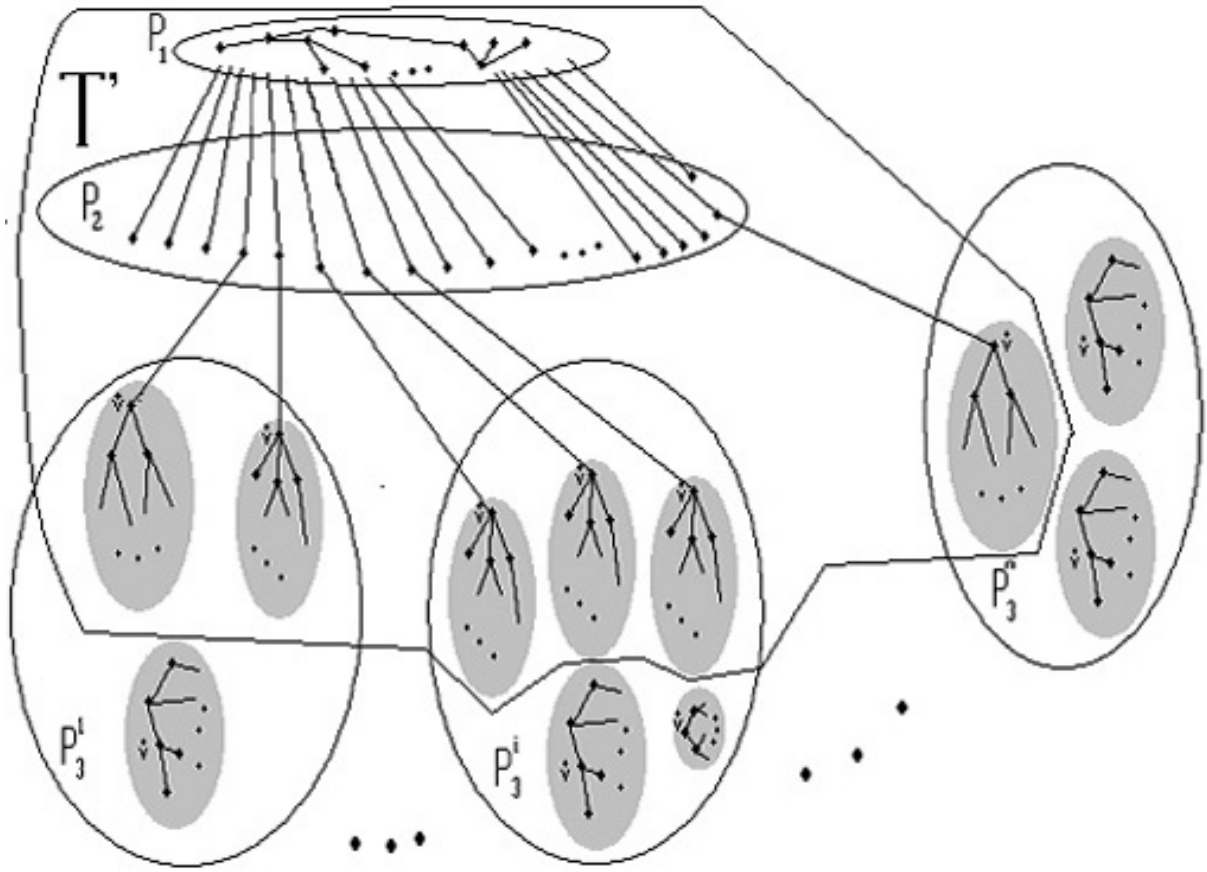


рис. 3.

На этом и всех остальных рисунках помеченные вершины нарисованы с точкой над ними.

Случай 2.

Теперь рассмотрим случай, когда *в* P_1 *нет помеченных вершин.* Разберем два подслучая.

A) Пусть *среди вершин дерева* T' (*см. рис. 3*) *есть помеченная вершина.* Тогда будем считать ее корнем этого дерева. Рассмотрим помеченный остовный лес F', который отличается от описанного ранее F только тем, что мы корнем дерева T' будем считать эту помеченную вершину. Тогда

$$\overline{L}(F') \geq \sum L(\overline{P_3^i}) + (|P_2| - 2).$$

Доказательство аналогично случаю 1, с той лишь разницей, что $L'(T') \geq |P_2| - 2 + \sum_{i=1}^{t} L'(T_i)$.

B) Пусть *среди остальных деревьев в* F *есть дерево* T_0 *такое, что в нем есть вершина, смежная с вершиной из дерева* T'. Заметим, что это дерево T_0 обязательно помеченное, так как в лесу F, все деревья кроме дерева T' были помечены (см. замечание 3). В этом случае вместо леса F рассмотрим помеченный лес F'', в котором проведено ребро между деревьями T' и T_0 и в качестве корня этого нового дерева T'' взят корень T_0. Тогда

$$\overline{L}(F'') \geq \sum L(\overline{P_3^i}) + (|P_2| - 2).$$

Доказательство аналогично случаю 1, с той лишь разницей, что

$$L'(T'') \geq |P_2| - 2 + \sum_{i=1}^{t} L'(T_i) + L'(T_0)$$

.

Осталось заметить, что среди вершин $\overline{G}$ обязательно есть помеченная вершина, а значит эта вершина либо попадет в дерево T' (тогда действуем согласно **A**), либо не попадет (тогда в F обязательно будет существовать дерево из случая **B**). Применив те же самые рассуждения , что и в *случае 1*, мы получим, что если нам удастся найти тройку $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$, такую что

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq 2,$$

то тогда *теорема 1* будет доказана.

Обозначения a'_i, где $i \in \{2,3,4\}$, b'_i, где $i \in \{1,3\}$, Δ'_1, Δ' те же, что в **случае 1**.

Поиск хорошей тройки

В предыдущей части доказательства мы получили некое условие на тройку множеств $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$, достаточное для доказательства теоремы. В этой части доказательства мы будем заниматься поиском "хороших" троек $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$.

Определение 12. Определим для $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$ функцию $X(S_1, S_2, S_3)$.

$$X(S_1, S_2, S_3) := \frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1.$$

Где a'_i, $i \in \{2,3\}$ и b'_i, $i \in \{1,3\}$ определены выше, $\Delta'_1 = \overline{\Delta_1}(S_1, S_2, S_3)$, $\Delta' = \overline{\Delta}(S_1, S_2, S_3)$.

Мы будем искать тройку множеств $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$ с подходящим значение $X(S_1, S_2, S_3)$. (Если среди вершин S_1 есть помеченная вершина, то для завершения доказательства достаточно $X(S_1, S_2, S_3) \geq 1$, если же в S_1 нет помеченной вершины, то достаточно $X(S_1, S_2, S_3) \geq 2$.) Пусть таких троек $(S_1, S_2, S_3) \in \Omega$ нет. Рассмотрим несколько случаев. Разбирая каждый случай мы полагаем, что не могут выполнятся условия каждого из предыдущих.

1) Предположим, что в G есть две смежные вершины u и v, с которыми смежно не мение шести отличных от них вершин. Тогда пусть $S_1 = (u, v)$, по S_1 однозначно строятся S_2 и S_3. Тогда $\Delta' = |S_2| - |S_1| = 4$, $|S_2| \geq 6$. Достаточно доказать, что $\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq 2$. Подставив $\Delta' = 4$, $S_2 = 6$, мы получим

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}4 + \frac{1}{15}6 + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq 2.$$

□

2) Предположим, что в G есть вершина u такая, что $d(u) \geq 6$. Тогда, взяв $S_1 = \{u\}$, мы получим $\Delta' \geq 5$, $|S_2| \geq 6$ и

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{6}{15}5 + \frac{1}{15}6 \geq \frac{36}{15} > 2.$$

□

Таким образом можно считать, что степень любой вершины графа G не превосходит пяти.

3) Предположим, что в G есть помеченная вершина u такая, что $d(u) \geq 3$. Положим $S_1 = \{u\}$. Тогда $\Delta' \geq 2$, $|S_2| \geq 3$, следовательно,

$$\frac{2}{15}\Delta'_1+\frac{6}{15}\Delta'+\frac{1}{15}|S_2|+\frac{2}{15}a'_3+\frac{4}{15}a'_2+\frac{4}{15}b'_3+\frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{2}{15}\Delta'_1+\frac{6}{15}2+\frac{1}{15}3+\frac{2}{15}a'_3+\frac{4}{15}a'_2+\frac{6}{15}b'_1 \geq 1.$$

Так как u — помеченная вершина, то случай разобран.

□

4) Пусть в G есть такая помеченная вершина u, что $d(u) = 2$.

Рассмотрим случаи.

4.a) Пусть среди двух вершин, смежных с u, есть вершина $v : d(v) \leq 3$. Тогда либо v непомеченная и $d(v) = 3$, либо $d(v) \leq 2$. (Иначе получаем случай 3). Взяв $S_1 = \{u\}$, мы получим $\Delta' \geq 1$, $|S_2| = 2$ и либо $a'_2 \geq 2$ (u и v — помеченные, $d(u) = 2 = d(v)$), либо $a'_2 \geq 1$ и $b'_1 \geq 1$ (u — помеченная, $d(u) = 2$, v — непомеченная степени 2, или $d(v) = 1$), либо $a'_2 \geq 1$ и $b'_3 \geq 1$ (v — непомеченная и $d(v) = 3$). Значит,

$$\frac{2}{15}\Delta'_1+\frac{6}{15}\Delta'+\frac{1}{15}|S_2|+\frac{2}{15}a'_3+\frac{4}{15}a'_2+\frac{4}{15}b'_3+\frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{6}{15}1+\frac{1}{15}2+\frac{4}{15}(a'_2+b'_3)+\frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{8}{15}+\frac{4}{15}2 > 1.$$

Заметим, что в S_1 есть помеченная вершина, следовательно, случай разобран.

□

4.b) Пусть u смежна с v_1,v_2, а среди v_1,v_2 есть вершина v, смежная хотя бы с тремя вершинами в графе $G \setminus \{u, v_1, v_2\}$ (см. рис. 4).

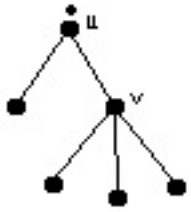


рис 4.

Возьмем $S_1 = \{u, v\}$, получим $\Delta' \geq 2$, $|S_2| \geq 4$, $a'_2 \geq 1$. Имеем

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{6}{15}2 + \frac{1}{15}4 + \frac{4}{15}1 > 1.$$

Заметим, что в S_1 есть помеченная вершина, следовательно, случай разобран.

□

4.c) Из предыдущих случаев 4.a) и 4.b) следует, что v_1 и v_2 — смежны и $d(v_1) = d(v_2) = 4$.

4.c).1) Предположим, что есть смежная с v_1 или с v_2 вершина w такая, что $d(w) = 5$. Не умаляя общности, предположим, что w смежна с v_1.

Тогда есть пять вершин, смежных с v_1 или w и отличных от них: это u и четыре отличные от v_1 вершины, смежные с w. Если w или v_1 смежна еще с какими–то вершинами, то мы приходим к случаю 1 (см. рис. 5). Следовательно, таких вершин нет, а значит, w смежна со всеми отличными от u вершинами, смежными с v_1, в частности, с v_2. Тогда мы получаем вершину w степени 5, смежную с v_1 и v_2, которые, в свою очередь, смежны с u, $d(u) = 2$. Рассмотрим $S_1 = \{w, v_1\}$ (см. рис. 6).

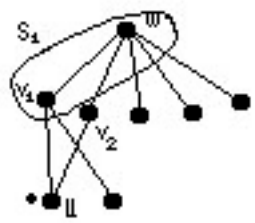


рис 5.

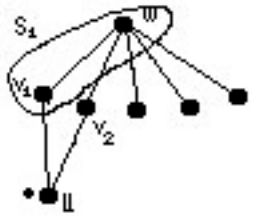


рис 6.

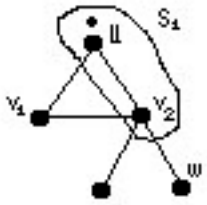


рис 7.

Аналогично получаем, что v_2 не имеет смежных вершин вне $S_1 \cup S_2$. Вершина u также не смежна с вершинами не из $S_1 \cup S_2$, следовательно, $\Delta'_1 \geq 2$. Легко видеть, что $\Delta' \geq 3$, $|S_2| \geq 5$, $a'_2 \geq 1$. Тогда

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{2}{15}2 + \frac{6}{15}3 + \frac{1}{15}5 + \frac{4}{15}1 \geq \frac{31}{15} > 2.$$

□

4.c).2) Предположим, что есть вершина w, $d(w) \leq 3$, смежная с v_1 или с v_2. Не умаляя общности, предположим, что w смежна с v_2. Рассмотрим $S_1 = \{u, v_2\}$ (см. рис. 7). Тогда $\Delta' \geq 1$, $|S_2| \geq 3$ и либо $a'_2 \geq 2$, либо $b'_1 \geq 1$, $a'_2 \geq 1$, либо $b'_3 \geq 1$ и $a'_2 \geq 1$. Вершина w не может быть помеченной вершиной степени 3 (см. случай 3). Тогда

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{6}{15}1 + \frac{1}{15}3 + \frac{4}{15}2 > 1.$$

Так как в S_1 есть помеченная вершина, то случай разобран.

□

4.c).3) Осталось рассмотреть следующий случай: вершины v_1 и v_2 смежны, $d(v_1) = d(v_2) = 4$, смежные с v_1 вершины w_1 и w_2 таковы, что $d(w_1) = d(w_2) = 4$ (см. рис. 8).

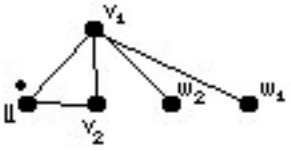


рис 8.

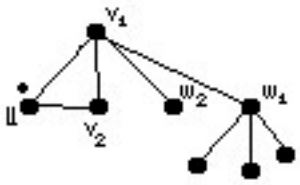


рис 9.

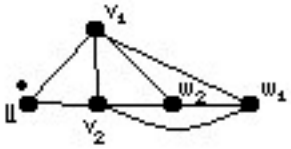


рис 10.

В случае, если вершина w_1 или вершина w_2 смежны с какими–то тремя вершинами не из множества $\{w_1, w_2, v_1, v_2, u\}$ (см. рис. 9), эта вершина (на рисунке это w_1) и v_1 попадают под случай 1. Если каждая из вершин w_1, w_2 смежна не более чем с одной вершиной из множества $G \setminus \{w_1, w_2, v_1, v_2, u\}$, тогда, так как $d(w_1) = d(w_2) = 4$, то w_1 смежна с w_2 и с v_2, а w_2 смежна с w_1 и с v_2 (см. рис. 10). Пусть $S_1 = \{v_1\}$, тогда $\Delta' \geq 3$, $|S_2| \geq 4$, $a'_2 \geq 1$, $\Delta'_1 \geq 2$ (две вершины u и v_2 смежны только с вершинами из множетсва $S_1 \cup S_2$, так как v_2 имеет степень 4 и смежна с u,v_1,w_2,w_1). Имеем

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{2}{15}2 + \frac{6}{15}3 + \frac{1}{15}4 + \frac{4}{15}1 = 2.$$

Значит, либо w_1, либо w_2 смежна с двумя вершинами из множества $G \setminus \{w_1, w_2, v_1, v_2, u\}$. Не умаляя общности, пусть это w_1 и эти две вершины — x_1 и x_2. Тогда получаем случай, изображенный на рис. 11.

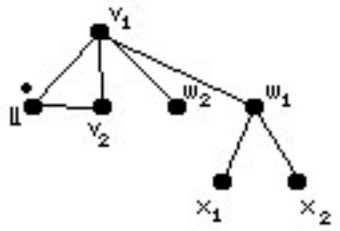


рис 11.

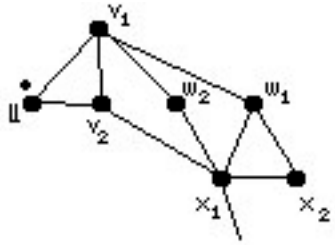


рис 12.

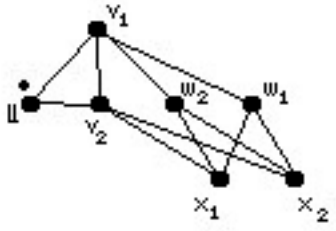


рис 13.

Обозначим через Z множество $G \setminus \{x_1, x_2, w_1, v_2, v_1, w_2, u\}$.

Взяв $S_1 = \{v_1, w_1\}$, получим $\Delta' \geq 3$, $|S_2| \geq 5$, $\Delta'_1 \geq 1$, $a'_2 \geq 1$. Имеем

$$\frac{2}{15}\Delta'_1 + \frac{6}{15}\Delta' + \frac{1}{15}|S_2| + \frac{2}{15}a'_3 + \frac{4}{15}a'_2 + \frac{4}{15}b'_3 + \frac{6}{15}b'_1 \geq \frac{2}{15}1 + \frac{6}{15}3 + \frac{1}{15}5 + \frac{4}{15}1 = \frac{29}{15}.$$

Заметим, что если $(P_1, P_2, P_3) \neq (S_1, S_2, S_3)$, то $X(P_1, P_2, P_3) > X(S_1, S_2, S_3)$. Из определения $X(S_1, S_2, S_3)$ следует, что $X(S_1, S_2, S_3) = \frac{c}{15}$, где $c \in \mathbb{Z}$. Тогда $X(P_1, P_2, P_3) \geq 2$ и случай разобран. Пусть $X(S_1, S_2, S_3) = \frac{29}{15}$, тогда можно считать, что $|S_2| = 5, S_1 = P_1, S_2 = P_2, S_3 = P_3$, $\Delta'_1 = 1$, $d(x_1) \geq 4$, $d(x_2) \geq 4$, каждая из вершин x_1, x_2, w_2, v_2 смежна ровно с одной вершиной из множества Z (иначе либо $\Delta'_1 > 1$, либо можно выполнить шаг 1 процедуры $OUTPUT$). Пусть $d(x_1) = 5$. Так как из x_1 в Z ведет одно ребро, и она не смежна ни с u, ни с v_1, то x_1 смежна с x_2, w_1, v_2, w_2, следовательно, v_2 и x_1 удовлетворяют условиям из *случая 1* (см. рис. 12).

Таким образом, $d(x_1) = 4$ и, аналогично, $d(x_2) = 4$, вершина x_1 смежна с двумя вершинами из множества $\{x_2, w_2, v_2\}$ и x_2 смежна с двумя вершинами из множества $\{x_1, w_2, v_2\}$. Если x_2 и x_1 не смежны, то тогда x_1 смежна с w_2 и v_2, а также x_2 смежна с w_2 и v_2, откуда $\Delta'_1 \geq 2$, так как из v_2 нет ребер вне $S_1 \cup S_2$ (см. рис. 13).

Таким образом, x_2 и x_1 смежны. Если v_2 смежна и с x_1, и с x_2, то $\Delta'_1 > 1$ (см. рис. 14). Пусть w_2 смежна и с x_1, и с x_2. Так как w_2 смежна ровно с одной вершиной из Z, то в этом случае w_2 смежна с тремя вершинами из $G \setminus \{u, v_1, v_2, w_1, w_2\}$ (см. рис. 15), а такой случай уже разобран (см. случай 1 для вершин w_2, v_1).

Таким образом, каждая из вершин x_2 и x_1 смежна ровно с одной из пары вершин w_2, v_2, причем для x_2 и x_1 эти вершины разные. Пусть x_2 смежна с w_2, а x_1 смежна с v_2 (см. рис. 16). Так как каждая из вершин v_2 и w_2 смежна ровно с одной вершиной из Z, то v_2 не смежна с w_2 и, следовательно, w_2 смежна с w_1 (см. рис. 17).

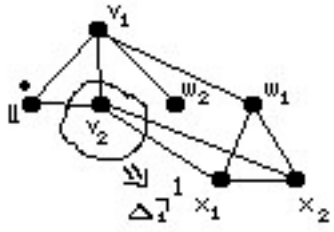


рис 14.

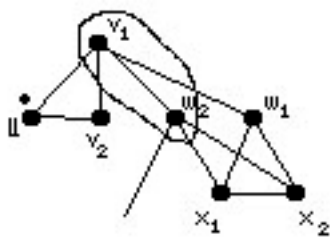


рис 15.

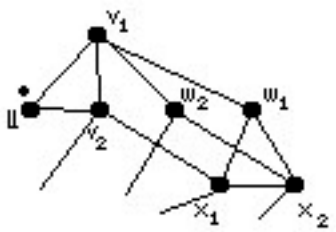
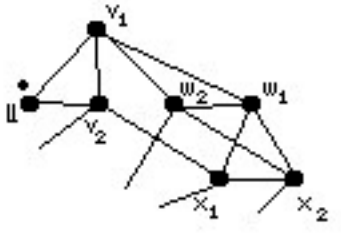
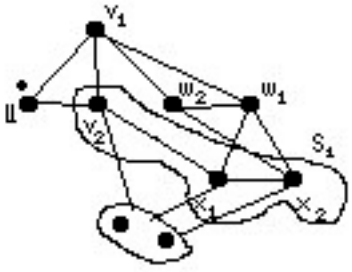


рис 16.





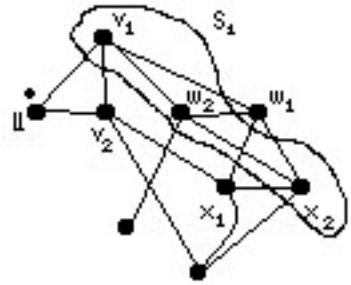


рис 17. *рис 18.* *рис 19.*

Докажем, что ребра, ведущие из вершин x_1, x_2, v_2 в множество вершин Z, ведут в одну и ту же вершину. Пусть это не так, положим $S_1 = \{x_1, x_2, v_2\}$ (см. рис. 18), тогда $\Delta' \geq 3$, $|S_2| \geq 6$, $\Delta'_1 \geq 3$ (вершины u, v_1 и w_1 смежны только с вершинами из $S_1 \cup S_2$), $a'_2 \geq 1$. Имеем

$$X(S_1, S_2, S_3) \geq \frac{2}{15}3 + \frac{6}{15}3 + \frac{1}{15}6 + \frac{4}{15}1 \geq \frac{6+18+6+4}{15} \geq 2.$$

Пусть w_2 и x_2 имеют разные смежные вершины в $G \setminus \{x_1, x_2, v_2, w_2, w_1, u\}$, положим $S_1 = \{x_2, w_2, v_1\}$ (см. рис. 19). Тогда $\Delta' \geq 3$, $|S_2| \geq 6$, $\Delta'_1 \geq 4$ (вершины u, v_2, x_1 и w_1 смежны только с вершинами из $S_1 \cup S_2$), $a'_2 \geq 1$, откуда $X(S_1, S_2, S_3) \geq 2$.

Таким образом, x_1, x_2, v_2, w_2 смежны с общей вершиной z из $G \setminus \{x_1, x_2, v_2, w_2, w_1, u\}$. Если $d(z) = 5$, то z и v_2 удовлетворяют условиям из *случая 1*. Значит, $d(z) = 4$. Тогда рассмотрим $S_1 = \{w_2, w_1, v_1\}$ (см. рис. 20). Понятно, что $(P_1, P_2, P_3) = (S_1, S_2, S_3)$. Тогда $\Delta' = 2$, $|S_2| = 5$, $\Delta'_1 = 5$, $a'_2 = 1$. Имеем

$$X(S_1, S_2, S_3) = \frac{2}{15}5 + \frac{6}{15}2 + \frac{1}{15}5 + \frac{4}{15}1 = \frac{10+12+5+4}{15} > 2.$$

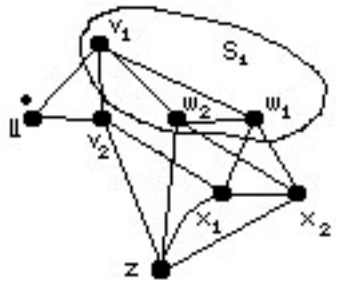


рис 20.

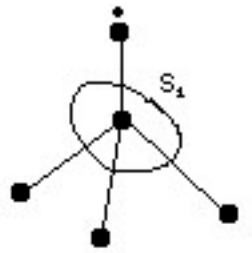


рис 21.

На этом разбор случая, когда в графе G есть помеченная вершина степени 2, закончен. □

5) Пусть в графе G есть помеченная вершина u. Если $d(u) = 0$, то из-за связности G $V(G) = \{u\}$, и тогда теорема 1 доказана. Пусть $d(u) = 1$. Если u смежна с вершиной v степени четыре, положим $S_1 = \{v\}$ (см. рис. 21). Тогда $\Delta' \geq 3$, $|S_2| \geq 4$, $\Delta'_1 \geq 1$, $b'_1 \geq 1$. Имеем

$$X(S_1, S_2, S_3) \geq \frac{2}{15}1 + \frac{6}{15}3 + \frac{1}{15}4 + \frac{6}{15}1 = \frac{2+18+4+6}{15} = 2.$$

□

Осталось разобрать случай, когда помеченная вершина u смежна с непомеченной вершиной v степени не более трех или помеченной вершиной степени один. Если v вершина степени 1, то $V(G) = \{u, v\}$, тогда теорема 1 доказана. Значит $d(v) > 1$ и v непомеченная вершина. Применив индукционное предположение для помеченного графа

$$(G(V(G) \setminus \{u\}), \{v\} \cup S \setminus \{u\})$$

получим некоторый остовный лес F'.

Если в F' нет помеченного дерева с корнем в v, то в качестве остовного леса F для помеченного графа $\overline{G}$ возьмем $F := F' \cup \{u\}$, а если в F' есть такое помеченное дерево T, тогда пусть помеченное дерево T' — это помеченное дерево T "подвешенное" к u с корнем в u и $F := T' \cup F' \setminus T$. Заметим, что $\overline{L}(F) \geq \overline{L}(F')$, а $\overline{L}(F') \geq \lceil \frac{2}{5}k_4 + \frac{4}{15}k_3 + \frac{2}{15}k_2 + \frac{2}{15}k_5 \rceil$. На этом разбор всех случаев завершен, теорема доказана.

□

Следствие. Пусть в графе G есть k вершин степени хотя бы 4 и k' вершин степени 3, тогда в этом графе можно выделить остовное дерево с количеством висячих вершин не менее $\lceil \frac{2}{5} \cdot k + \frac{2}{15} \cdot k' \rceil$.

Доказательство: Возьмем любую вершину в нашем графе и будем считать, что она помеченна. Применим к этому графу *теорему 1.* Так как в графе только одна помеченная вершина, то мы получим остовное дерево исходного графа.

□

Замечание 5. Заметим, что исходя из доказательства теоремы 1 легко можно построить полиномиальный алгоритм, который будет выделять остовный лес с нужным количеством висячих вершин. Действительно, вначале алгоритм должен находить "хорошую" тройку (S_1, S_2, S_3)(причем $|S_1| + |S_2| = O(1)$), а потом, пока это возможно, выполнять шаги процедуры. Очевидно, что время работы алгоритма будет полиномиальным относительно размеров входа, более того если аккуратно реализовывать алгоритм, можно получить общее время работы $O(|E(G)|)$.

Автор выражает благодарность Д. В. Карпову за плодотворные обсуждения предмета статьи.

Литература

[1] В. Г. Визинг. *Некоторые нерешенные задачи в теории графов.* Успехи мат. наук т.23 (1968), стр. 117–134.

[2] B. Zelinka. *Finding a Spanning Tree of a Graph with Maximal Number of Terminal Vertices.* Kybernetika v.9 (1973),№5, p. 357–360.

[3] J. A. Storer, Constructing full spanning trees for cubic graphs, Inform. Process. Lett. 13 (1981), №1, p. 8-11.

[4] Jerrold, R. Griggs, Mingshen Wu. *Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5*, Discreet Mathematics 104 (1992) p. 167–183.

[5] D. J. Kleitman и D. B. West. *Spanning trees with many leaves*, SIAM J. Discrete Math. 4 (1991), №1, p. 99-106.