ПРЕПРИНТ ПОМИ 03/2007

Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?

А. М. Вершик*

28.12.06

К 70-летию В.И.Арнольда с глубоким уважением

Аннотация

Дается асимптотико-геометрическая интерпретация сигма-конечных мер в пространстве векторных обобщенных функций на многообразии X с характеристическим функционалом

$$\Psi(f) = \exp\{-\theta \int_X \ln ||f(x)|| dx\}, \theta > 0.$$

Все такие меры составляют однопараметрическую полугруппу по θ. Мера для скалярных распределений и $\theta = 1$ может быть названа *бесконечномерной мерой Лебега.* Мы показываем, что при надлежащем выборе нормировок, последовательность инвариантных мер на картановских подгруппах групп $SL(n, R)$ при n, стремящемся к бесконечности, слабо сходится именно к ней, и что эта мера в пространстве распределений, инвариантна относительно некоторой бесконечномерной коммутативной группы - аналога бесконечномерной картановской подгруппы,- что и оправдывает ее название. Единственный известный пример такого рода асимптотик - классическая лемма Пуанкаре о гауссовости предела равномерных мер на эвклидовой сфере при стремлении размерности к бесконечности. В нашем примере построенные предельные меры уже не конечны, а сигма-конечны и тесно связаны не с гауссовыми мерами, а с мерами Пуассона–Дирихле, хорошо известными в комбинаторике и теории вероятности. Излагаемый результат об асимптотике инвариантных мер на картановских подгруппах делает актуальным вопрос о том, имеются ли какие-либо другие типы асимптотические поведения инвариантных мер на однородных пространствах групп Ли, кроме данного и гауссового.

*С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН. E-mail: vershik@pdmi.ras.ru. Частично поддержано грантами РФФИ 05-01-0089 и CRDF RUM1-2622-ST-04.

ПОСВЯЩЕНИЕ На 70-летии А.И.Райкина один актер, обращаясь к юбиляру сказал приблизительно так: "Некоторые и нас время от времени ходят на некоторые спектакли некоторых из своих друзей-актеров. Но ВСЕ мы, без исключения, смотрели ВСЕ Ваши программы."

Перевожу это высказывание на математический лад: "Некоторые из нас (математиков) иногда читают некоторые работы некоторых из своих коллег, но ВСЕ мы, без исключения, читаем ВСЕ работы Арнольда!"

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение

1.1 Об асимптотическом подходе к интегрированию и мерам в бесконечномерных пространствах

Фон Нейманн в своей замечательной, но относительно малоизвестной работе "Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного порядка"[34] писал, что специалисты по функциональному анализу непозволительно пренебрегают рассмотрением проблем о конечномерных пространствах высокой размерности в пользу изучения актуально бесконечномерных пространств. Быть может, в последней трети 20-го столетия положение несколько исправилось, но сказать, что мы понимаем анализ в пространствах размерности 10^{24} лучше, чем в бесконечномерном гильбертовом пространстве, (где "почти все ясно"!)- нельзя. [1] В особенности это относится к актуальным вопросам теории интегрирования и теории меры в бесконечномерных пространствах. Нескончаемые попытки оправдать интеграл Фейнмана, столь нужный физикам, в вложить его в ту или иную общую схему теории меры и интегрирования, не вызывает ни интереса, ни одобрения у физиков и не воспринимается большинством математиков. Такое отсутствие энтузиазма хорошо понятно: в основе физических построений всегда или почти всегда лежат асимптотические построения (по размерности, числу частиц, каким-либо константам и т.д.); математики же как правило пытаются переосмыслить их, как актуально бесконечные (бесконечномерные). Это продуктивно и необходимо в каких-то пределах, но неизбежно приводит к непреодолимым интерпретационным трудностям при абсолютизации предельных построений. Сказать, что асимптотический подход может полностью заменить актуальные бесконечномерные построения, конечно, нельзя, и в такой замене нет нужды, важно понять, какие эффекты в бесконечномерном случае, действительно, вырастают или выживают из асимптотических конечномерных свойств, и как их получить. Мы разберем новый пример асимптотического поведения мер на классических однородных пространствах, который приводит к замечательной предельной мере (точнее, однопараметрическому семейству мер)- лебегову меру в бесконечномерном пространстве, которая была в других, актуально бесконечных терминах, открыта ранее в связи с теорией представлений групп токов. [16]. Ее роль в комбинаторике и теории представлений, возможно, не меньшая чем роль гауссовой меры; ее свойства и глубокие связи, например, с мерами Пуассона–Дирихле, освещаются в этой работе, по-видимому, впервые (см. также [19]) и еще ждут дальнейших исследований.

1.2 Об этой работе

Мы начинаем – параграф 2 – с классического, известного всем вычисления, – с так называемой "леммы Пуанкаре", – обосновывающей максвелловское (гауссовское) распределение скоростей в статистической физике. Этот пример показывает, как бесконечномерная гауссовская мера - "белый шум возникает, как предельное распределение координат радиуса вектора точки на эвклидовой сфере, когда размерность сферы и радиус согласованно стремятся к бесконечности. Цель настоящей работы показать, что

[1] Подзаголовок главы 5 в книге Э.Бореля [2]:"Функции очень большого числа переменных: площади и объемы в геометрии пространства размерности 10^{24}.

подобно этому примеру, сравнение с которым основной темы статьи систематически проводится далее, имеется другая серия однородных пространств картановской подгруппы в $SL(n, R)$, инвариантные меры на которых подобно ситуации леммы Пуанкаре, слабо сходятся к совсем другой, уже сигма-конечной мере, которая напоминает бесконечномерную меру Лебега. Группа линейных симметрий нашей меры столь же велика как и у гауссовой меры, но совсем иная. Эта мера связана с замечательными мерами Пуассона–Дирихле имеющими комбинаторное происхождение. Есть основания сравнивать винеровскую меру и нашу Лебегову меру их можно воспринимать как концевые точки отрезка $\alpha \in [0, 2]$, внутренние точки которого параметризуют меры Леви устойчивых процессов, при этом наша мера есть производная по параметру α в точке 0. Помимо самостоятельного интереса, изучаемые меры используются (и впервые появились) в теории представлений групп токов. Но наша главная цель – дать их геометрическое и асимптотическое описание этих мер. В параграфе 2 мы приводим доказательства леммы Пуанкаре, сравнение с которой наших рассмотрений мы проводим систематически. Это сравнение во-первых, полезно, а во-вторых позволяет наметить пути дальнейших естественных обобщений. Мы комментируем лемму с нескольких точек зрения.

В параграфе 3 мы рассматриваем орбиты картановской подгруппы $SDiag(n, \mathbb{R})$ в группе $SL(n, \mathbb{R})$. Удобно сначала рассмотреть положительную часть картановской подгруппы $SDiag_+(n\mathbb{R})$ и ее орбиту, откладывая общее рассмотрение до параграфа 4. Далее мы погружаем орбиты в конус положительных кусочно постоянных функций K^+ на отрезке и определяем слабую сходимость инвариантных мер на этих орбитах, как сходимость их преобразований Лапласа. Этот предел есть функционал

$$\Phi_\theta(f) = \exp\{-\theta \int_X \ln f(x) dx\}, \quad \theta > 0,$$

и мы ищем его несколькими способами. Он определен на множестве функций с конечным интегралом от логарифма и инвариантен относительно всех замен переменных, сохраняющих меру, и операторов умножения на функции с нулевым интегралом от логарифма.

Основная цель параграфа 4 - явное определение счетно-аддитивной сигма-конечной меры $\mathcal{L}^+_{theta}$. Мы определяем сначала слабое распределение Ξ_{theta} (пункт 4.1) на конусе K, имеющее функционал Φ_θ в качестве преобразования Лапласа. Затем мы вводим конус D_+ дискретных положительных мер с конечной массой на X, он находится в двойственности с конусом K^+. Поэтому слабое распределение Ξ_{theta} можно трактовать как предмеру на D_+. Еще раз подчеркнем, что мы имеем дело с бесконечными, а не конечными слабыми распределениями и мерами, поэтому обычная техника проекций и др здесь неприменима. Заключительный этап построения – доказательство существования продолжения этого слабого распределения до настоящей счетно-аддитивной меры. Это делается конструктивным способом с помощью бесконечной ("пуассонизированной"или конической) версии мер Пуассона–Дирихле. Меры Пуассона–Дирихле $PD(\theta), \theta > 0$, ставшие популярными в последние годы, определены на симплексе монотонных положительных рядов с сумой равной единице, и их мы кратко описываем в Добавлении 1. Нам нужны их сигма-конечные варианты - PDC - конические меры Пуассона–Дирихле", заданные на конусе монотонных сходящихся положительных рядов, эти меры есть прямое произведение меры Пуассона–Дирихле $D(\theta)$ на меру на полупрямой L_θ

с плотностью $t^{\theta-1}/\Gamma(\theta)$. (Мера на полупрямой есть "распределение"суммы ряда). В центральном пункте – (4.2) – мы определяем наш основной объект – мультипликатиивные меры – $\mathcal{L}_\theta$, *как образ произведения меры Бернулли* m^∞ *на вводимые здесь конические Пуассона–Дирихле* – $PDK(\theta)$.

Эти меры в конечном итоге и есть слабые пределы мер на последовательности орбит группы $SDiag_+(n, \mathbb{R})$. Меру с параметром $\theta = 1$ мы называем ее мультипликативной мерой Лебега на конусе D_+.

Таким образом наш план введения мультипликативных мер и в частности меры Лебега состоит в следующем:

определяем меры на орбитах картановской группы –> находим предел их преобразований Лапласа –> вводим слабое распределение, имеющее это распределением Лапласа –> определяем меру, продолжающую построенное слабое распределение, как явный образ конических мер Пуассона–Дирихле, умноженных на бернуллиевскую продакт-меру.

В этом, казалось бы, длинном пути, последний пункт не зависит от предыдущих и позволяет ввести желаемые меры непосредственно, независимо от предыдущих пунктов. Но при такой экономии будет скрыт асимптотико-геометрический смысл этой меры. Читатель, для которого этот смысл мало важен, может приступить к пункту 4.2. сразу после введения. Подытожим свойства этих мер, - они

1)являются слабыми пределами мер на орбитах положительной картановской подгруппы;

2)имеют преобразование Лапласа

$$\Phi_\theta(f) = \exp\{-\theta \int \ln f(x)dx\}, \quad \theta > 0;$$

3)являются образом произведения мер Пуассона–Дирихле на симплексе монотонных положительных сходящихся рядов с суммой единица на меру Бернулли и лебегову меру на полупрямой.

С другой стороны эти меры ведут себя как процессы Леви но с бесконечной вероятностью : наши меры абсолютно непрерывны и даже эквивалентны законам гамма-процессов Леви на субординаторах. Именно так она определялась в [19] фактически так она была открыта в [14, 15]. В пункте 4.3 мы связываем эти меры с гамма-процессом Леви соответственно субординаторным или полным. В работах [16, 19] принят противоположный способ введения мер, при котором они определяются через гамма-процесс с помощью введения плотности. Такой способ (особенно в многомерном случае) более аналитичен и менее прозрачен.

В пункте 4.4 мы приводим аддитивный вариант описания этих мер, и показываем, что они дают первый пример сигма-конечной меры инвариантной относительно сдвигов на векторы бесконечномерного банахова пространства.

Затем в п.5.1 основное и все остальные определения повторяются для знакопеременных мер, конус заменяется на векторное пространство D положительные ряды на абсолютно сходящиеся и т.д.- этот переход не составляет трудностей, все наиболее важные свойства видны в "положительной"версии. Эти расширенные и наиболее важные меры являются

1) являются слабыми пределами мер на орбитах полной картановской подгруппы;

2) имеют преобразования Лапласа

$$\Phi_\theta(f) = \exp\{-\theta \int \ln|f(x)|dx\}, \quad \theta > 0;$$

(логарифм заменен на модуль логарифма)

3)являются образом произведения расширенных мер Пуассона–Дирихле на октаэдре всех убывающих (по модулю) абсолютно сходящихся рядов на меру Бернулли и лебегову меру на прямой.

и, главное,

4)*эти меры инвариантны относительно группы операторов умножения на функции с нулевым интегралом от модуля логарифма, проективно инварианты относительно функций, у которых этот интеграл конечен и (п.5.2) инвариантны относительно действия замен переменных, сохраняющих меру*[2]

В 5.3 мы напоминаем связь этих мер с теорией представлений групп токов. Наконец, в пункте 5.4 мы определяем векторное обобщение лебеговских мер и мер Пуассона–Дирихле, нужные для представлений групп токов с коэффициентами в группе $SO(n, 1)$.

Первое дополнение содержат важнейшие сведения о мерах Пуассона–Дирихле и об их приложениях в вероятности, алгебре и теории чисел. Во втором дополнении мы обсуждаем условия, налагаемые инвариантностью и квазиинвариантностью мер относительно группы сдвигов, на группу допустимых сдвигов и объясняем, в чем новизна вводимой здесь аддитивной версии бесконечномерных лебеговских мер.

2 Краткий исторический экскурс: белый шум по Максвеллу–Пуанкаре–Борелю и комментарии

2.1 Лемма Пуанкаре

Один из замечательных примеров асимптотического подхода к бесконечномерным объектам служит следующий хорошо известный способ введения распределения Максвелла в статистической физике. Рассмотрим малый канонический ансамбль скоростей системы идентичных частиц с энергией

$$H(v_1, \dots v_n) = \frac{1}{2} \sum_k ||v_k||^2,$$

размерность пространства для нас здесь не важна, поэтому можно считать скорости скалярами (d=1). Естественная мера на малом ансамбле - нормированная лебегова мера на соответствующей эвклидовой сфере, (поскольку мера должна быть ортогонально инвариантной). С другой стороны, рассмотрим канонический ансамбль скоростей с гиббсовской мерой на нем, т.е. мерой с плотностью $exp\{-H(v_1, \dots v_n)\}$, > 0, после нормировки - это стандартная гауссова мера. Будем увеличивать число частиц в обоих

[2]т.е. они инварианты относительно нормализатора бесконечномерного тора(=группы операторов умножения)

ансамблях и одновременно, общую энергию. Совпадают ли асимптотически распределения в обоих ансамблях и существует ли бесконечный аналог ансамбля? Ответ заключен в следующем замечательно простом факте, который в современных термина выглядит так:

Теорема 1. *Рассмотрим последовательность нормированных лебеговских мер на эвклидовых сферах $S_{r_n}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ радиуса $r_n = c\sqrt{n}, c > 0$, и рассмотрим возрастающий предел пространств*

$$\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n \subset \cdots \subset \mathbb{R}^\infty,$$

Тогда слабый предел этих мер есть стандартная гауссова мера μ, т.е. бесконечное произведение одинаковых гауссовых мер на прямой с нулевым средним и дисперсией, равной c^2. Разумеется тот же слабый предел имеет последовательность гиббсовских мер.

Таким образом, существует предельный (бесконечномерный) ансамбль и оба канонических ансамбля стремятся к нему в указанном смысле.

Доказательство. Слабая сходимость последовательности мер по определению есть сходимость соответствующей последовательности конечномерных распределений для любого конечного набора линейных функционалов. В свою очередь, для этого достаточно сходимости распределений для любого (одного) линейного функционала. Но в силу сферической инвариантности рассматриваемых мер, достаточно установить эту сходимость лишь для одного единственного линейного функционала, например для функционала, сопоставляющего произвольному вектору его первую координату вектора. В результате вопрос свелся к следующей выкладке: найти предельное распределение проекции лебеговой меры на сфере $S_{r_n}^{n-1}$ на первую координату. Плотность по лебеговой мере проекции нормированной меры на $S_{r_n}^{n-1}$ равна $C_n(r_n^2 - x^2)^{\frac{n-2}{2}}$, после очевидной перенормировки при стремлении $r/\sqrt{n} \to \theta > 0$ мы получаем в качестве предела плотность гауссовой меры - $C\exp(-\theta x^2), \theta > 0$. □

Есть много иных способов получить тот же факт, например, можно использовать преобразование Фурье и асимптотику бесселевых функций. Для сферы S^{n-1} положим $\nu = (n-2)/2$. Из формулы [35] 3.771.8

$$\int_0^r (r^2 - x^2)^{\nu - 1/2} \exp(itx)dx = C \cdot (\frac{2r}{t})^\nu J_\nu(tr),$$

где $C = \frac{\sqrt{\pi}/2}{\Gamma(\nu+1/2)}$ и формулы для асимптотики бесселевой $J_\nu(.)$ функции при аргументе и номере, стремящимися к бесконечности, следует, что при стремлении $r/\sqrt{n} = r/\sqrt{2(\nu+1)} \to \theta > 0$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_{r_n}^{n-1}} \exp(it\omega)d\Omega_n(\omega) = \exp(-\theta t^2),$$

где Ω_n -нормированная мера Лебега на сфере $S_{r_n}^{n-1}$. Таким образом, последовательность преобразований Фурье стремится к преобразованию Фурье гауссовой меры, из чего следует слабая сходимость мер. Мы приводим далее аналог именно такого доказательства в рассматриваемой нами ситуации, заменяя преобразование Фурье преобразованием Лапласа.

2.2 Комментарии

1.Более серьезное осмысление приведенной выкладки состоит в следующем. Это доказательство можно рассматривать как вывод эмпирического распределения первой (а тогда и любой) координаты вектора в пространстве $\mathbb{R}^\infty$ относительно априори неизвестной сферически инвариантной меры. Действительно, из общих эргодических теорем и теорем о сходимости мартингалов (см. так называемый, эргодический метод в [12, 13]) следует, что по любой вероятностной борелевской эргодической меры в пространстве $\mathbb{R}^\infty$, инвариантной относительно всех конечномерных ортогональных групп в метрике l^2, (а следовательно и всей бесконечномерной ортогональной группы $O(\infty)$ в пространстве l^2), распределение такого функционала есть предел его эмпирических распределений относительно инвариантных мер на орбитах конечномерных ортогональных групп. Но все дело в том, что мы заранее не знаем, какое множество векторов составляют "почти все"векторы по искомой мере, и поэтому не знаем, какие орбиты следует брать. Однако, из цитированных теорем вытекает, что перебирая все орбиты мы не пропустим ни одной инвариантной эргодической меры. Оказывается, что в данном случае, достаточно брать орбиты векторов вида

$$(x, x, \dots (n) \dots x, 0, 0 \dots),$$

- эти и только эти орбиты дадут все нужные меры, - у других последовательностей орбит нетривиальных пределов - нет. Это соответствует тому, что средний квадрат нормы такого вектора по гауссовой мере растет пропорционально n, и следовательно, других эргодических мер кроме гауссовых - нет. Разумеется, знание распределения всех (а в данном случае -одного) линейных функционалов полностью определяет меру.

Отсюда немедленно следует, что общая сферически инвариантная мера есть смесь по различным дисперсиям гауссовых мер. Т.е. общий вид характеристического функционала сферически инвариантных мер таков: $\int_0^\infty exp(-cx^2)dm(c)$. Отсюда вытекает и теоремы Шенберга о том, что все неразложимые положительно определенные нормированные функции, зависящие от нормы в бесконечномерном гильбертовом пространстве имеют вид $\phi(h) = exp(-||h||^2)$. В этой связи приведенный факт являющийся по существу одной из версий эргодической теоремы (или теоремы о мартингалах), позволяет не только в данном конкретном примере, но и в общем случае описывать все инвариантные меры, специально подбирая орбиты аппроксимирующих данную групп последовательности подгрупп. Мы по существу именно это делаем для некомпактного примера картановских подгрупп и также описываем все инвариантные меры.

2.Более тонкое обстоятельство (понадобящееся нам далее) состоит в том, что действие всей бесконечномерной ортогональной группы O^∞ на пространстве $\mathbb{R}^\infty$, нужно понимать лишь в том смысле, что каждый ортогональный оператор $g \in O^\infty$ определен и действует, сохраняя гауссову меру, на измеримом линейном подпространстве полной меры, - его легко построить, используя например спектральное разложение g в l^2, - своем для каждого оператора; но единого полной меры, на котором были бы определены сразу все ортогональные операторы, как доказано в [11] - не существует, а недавно в [36] было доказано, что вообще не существует никакого измеримого множества полной меры, на котором были бы определены все элементы группы O^∞ одновременно. [3] Это

[3]В [36] не отмечено, что отсутствие общего *линейного подпространства* доказано в [11].

- пример действия группы, не допускающей индивидуальной измеримой реализации. Хорошо известно, что для локально-компактных групп измеримая реализация всегда существует.

3.Аналогичным способом можно определять инвариантную меру относительно произвольной группы, в которой есть плотная подгруппа, являющаяся объединением возрастающей последовательности компактных или локально-компактных подгрупп, в этом и состоит эргодический метод описания инвариантных мер, характеров и т.д.: мы выбираем орбиту для каждой подгруппы из этой последовательности групп и рассматриваем инвариантную меру на орбите; затем ищем все случаи слабой сходимости этих мер на орбитах. Эргодическая теорема или теорема о сходимости мартингалов гарантирует полноту списка инвариантных мер. Случай компактных подгрупп -проще. Для случая Пуанкаре-Максвелла орбиты (и лебеговы меры на них) -это сфере размерности n и радиуса $c\sqrt{n}$, и при $n \to \infty$ они слабо сходятся к гауссовой мере. Ровно также, меняя сферы и вложения можно получить любую гауссову меру в бесконечномерном пространстве, поскольку все они линейно изоморфны, например, можно получить и винеровскую меру. Ниже мы используем тот же прием для некомпактных групп.

4.Несколько замечаний исторического характера. Вышеприведенную выкладку можно найти в огромном количестве книг и статей. Чаще всего ее называют леммой Пуанкаре или даже теоремой Максвелла [5]. В то же время ряд исследователей [7, 9] утверждает, что ни в одной работе Пуанкаре им не удалось найти эту лемму. Ее неоднократно приводит Э.Борель [2, 3], не ссылаясь на Пуанкаре по ее поводу, но обильно цитируя [1] по другим поводам. Д.Струк, Г.Маккин и М.Йор см. [8] указали мне на работу [4] немецкого математика Ф.Мелера (1866 г.), где уже имеется эта выкладка; Э.Борель, видимо, не знал об этой работе. В действительности, в [4] есть теорема о том, что производящая функция сферических гармоник сходится при увеличении номера к производящей функции полиномов Эрмита. Из этого, конечно, сразу следует и наш скромный факт (и даже сходимость всех моментов распределений), но все же геометрическая сторона дела в такой общей теореме остается скрытой, а именно она составляет суть метода. Г.Маккин сообщил мне, что М.Кац, среди других, называл А.Пуанкаре автором этого утверждения. См. также недавний препринт П.Картье [6]. Можно предположить, что А.Пуанкаре в своих лекциях и беседах упоминал о таком выводе распределения Максвелла, но не записал этого; то, что ему был ясен такой факт видно из его лекций [1]. Поэтому, следуя принципу, который высказывали многие авторы, (а некоторые из них, следуя этому же принципу, приписывают сам принцип В.И.Арнольду), и который состоит в том, что имена, присвоенные последующими поколениями теориям, теоремам, леммам, редко принадлежат истинным открывателям этих теорий и т.д., - мы продолжаем называть это утверждение леммой Пуанкаре, не рискуя нарушить, возможно, неправильную, традицию.

В этой работе мы показываем, что для картановской подгруппы аналогичный асимптотический прием, уже в "некомпактном сигма-конечном варианте приводит не к гауссовой, а к другой не менее замечательной бесконечномерной мере. Она появилась ранее в теории представлений групп токов [15], и, как оказалось позже, тесно связана с гамма-процессом Леви, - мы опишем ее с различных точек зрения, но покажем, как наиболее просто обнаружить ее существование с помощью геометрического подхода.

3 Орбитальные меры на картановской подгруппе и предел их преобразований Лапласа

3.1 Орбиты картановской подгруппы

Вместо $(n-1)$-мерных сфер S_r^{n-1} радиуса r в лемме Пуанкаре мы рассмотрим гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$

$$M_r^{n-1} = \{(x_1, \dots x_n) : \prod_{k=1}^{n} x_k = r^n > 0; x_k > 0\},$$

число r назовем "радиусом" гиперповерхности; оно будет зависеть от n и будет выбрано позже. На гиперповерхности M_r^{n-1} (при всех r) транзитивно и свободно действует группа положительных диагональных матриц с определителем единица $SDiag_+(n, \mathbb{R})$, т.е.положительная часть картановской подгруппы группы $SL(n, \mathbb{R})$, поэтому на гиперповерхности определена инвариантная сигма-конечная мера, конечная на любом ограниченном множестве; обозначим ее m_n это - образ меры Хаара на $SDiag_+(n, \mathbb{R})$. Для дальнейшего важно, что при умножении радиуса на положительное число инвариантная мера также меняется, умножаясь на n-ю степень того же числа, хотя и остается по прежнему образом меры Хаара. Наша цель, как и в лемме Пуанкаре, найти условия, при которых последовательность пространств с мерой (M_r^{n-1}, m_n) имеет предел в в определенном смысле и изучить свойства предельной меры. Отличие от сферической картины весьма велики; прежде всего в нашем случае мера m_n является уже не вероятностной, а сигма-конечной мерой, во-вторых, группа симметрий коммутативна, в то время, как там - это группа $SO(n)$. Все это приводит к другому пониманию слабого предела; в частности, многообразия M_r^{n-1} будут вкладываться не в пространство последовательностей ($\mathbb{R}^\infty$), как сферы, а в пространства распределений. Заметим, что условие положительности координат x_k и группы будет позже снято и будет рассмотрена вся группа $SDiag(n, \mathbb{R})$, но суть дела проясняется уже в рассматриваемом случае.

3.2 Вложение орбит в конус

Рассмотрим конус $K(X) = K$ измеримых кусочно-постоянных положительных функций на интервале $X = [0, 1]$ с лебеговой мерой (интервал взят только для удобства, X может быть произвольным пространством ему изоморфным, как пространство мерой см. далее), и вложим гиперповерхность M_r^{n-1} в K, сопоставляя каждому вектору $(x_1, \dots x_n)$ функцию принимающую на интервале $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ значение x_k. Образ многообразия M_r^{n-1} в K есть орбита постоянной функции $\phi(t) = r^{1/n}$ относительно соответствующего кусочно-постоянного действия группы $SDiag(n, \mathbb{R})$ на кусочно постоянных функциях. Топологию на конусе K определим, например, как слабую топологию в обычном смысле: иначе говоря мы приводим в двойственность конус K с собой: - $< f, g >= \int_X f(x)g(x)dx$ и рассматриваем соответствующую слабую топологию. Конус K в этой топологии не полон. Перенесем меру m_n с гиперповерхности M_r^{n-1} на ее образ и получим некоторую сигма-конечную меру $\mu_{n,r}$ на конусе K, сосредоточенную на кусочно-постоянных, постоянных и положительных на интервалах $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ с произведением значений равным r^n, r вообще говоря, зависит от n.

3.3 Слабая сходимость – определения

Мы будем рассматривать вещественные борелевские конечные или сигма-конечные меры на K, конечные на предкомпактных(=относительно компактных) множествах в K. Введем понятие, слабой сходимости в себе борелевских мер. Это можно сделать традиционным способом определяя сходимость мер как сходимость интегралов на некотором классе функций или множеств. Небольшие сложности возникают из-за бесконечности меры. Но мы ради краткости примем более прямой и более удобный способ. В дальнейшем мы рассматриваем лишь такие меры μ на конусе K, для которых определено *преобразование Лапласа* $\widehat{\mu}$ *меры* μ*, (или характеристический функционал), существующий для любой кусочно постоянной функции* $f \in K$:

$$\int_K exp\{-\int_X f(x)g(x)dx\}d\mu(g) \equiv \widehat{\mu}(f) < \infty,$$

и соответственно этому определению будем говорить, что

Определение 1. *Последовательность сигма-конечных борелевских мер* μ_n *на конусе* K *слабо сходится в себе если для любой кусочно постоянной функции* $f \in K$ *сходится последовательность* $\lim_n \widehat{\mu}_n(f)$*; и будем говорить, что последовательность* μ_n *сходится к некоторой мере* μ*, если функционал* $\lim_n \widehat{\mu}_n(f)$ *- есть преобразование Лапласа некоторой меры* μ*, возможно, сосредоточенной уже на самом конусе* K*, а на некотором его пополнении.*

Для конечных мер это определение сходимости совпадает с обычным, и последовательность мер в лемме Пуанкаре слабо сходится к гауссовой мере. Техническое различие состоит в том, что в нашем случае мы не можем пользоваться преобразованием Фурье из-за расходимости интегралов, и вместо этого используем преобразование Лапласа.

3.4 Предел преобразований Лапласа и прямое описание сходимости распределений.

Теорема 2. *Положим радиус нашей гиперповерхности равным* $r_n = \frac{\theta}{n}, \theta > 0$*, тогда последовательность мер* $\mu_{n,r_{n,\theta}} \equiv \mu_{n,\theta}$ *на конусе* K *слабо сходится в себе; более точно, последовательность преобразований Лапласа мер* $\mu_{n,\theta}$ *на орбитах сходится к следующему функционалу:*

$$\lim_n \widehat{\mu}_{n,\theta}(f) = \exp(-\theta \int_X \ln f(x)dx).$$

Эта утверждение есть аналог леммы Пуанкаре, с той лишь разницей, что в том случае предел мер немедленно идентифицируется с гауссовой мерой. В нашем случае предстоит еще описать меру, у которой преобразование Лапласа есть правая часть равенства.

Доказательство. Доказательство теоремы параллельно доказательству леммы Пуанкаре в варианте с преобразованием Фурье (см. выше), но вместо преобразования Фурье мы используем преобразование Лапласа. По существу нижеследующая выкладка в точности повторяет вывод формулы для характеристического функционала для процесса

Леви исходя из характеристической функции безгранично делимого закона, который задает этот процесс:

$$\mathbb{E}_{\Psi} \exp i < f, \xi >= \exp\{-\int \ln \psi(f(x))dx\},$$

где $\xi(.)$ траектория процесса, $f(.)$ -функция, а $< f, g >= \int_X f(x)d\xi(x)$; процесс Леви Ψ задается безгранично делимым распределением (например на полупрямой) α, а $\psi(.)$-преобразование Фурье меры α. Существенное различие состоит лишь в том, что мы рассматриваем сигма-конечные безграничные делимые меры на полупрямой - $\Gamma(\theta)^{-1}t^{\theta-1}dt$, - в частности, меру Лебега, - и их преобразования Лапласа ($1/\lambda$- для меры Лебега); заметим, что Мера Хаара на $SDiag_+$ является безгранично делимой). Для простоты будем считать, что $\theta = 1$. Пусть $f(x)$ фиксированная кусочно постоянная положительная функция на X с положительными значениями $f_1, \ldots f_m$. Кусочно-постоянная функция $y(x)$ со значениями на интервалах $(y_1 \ldots y_n)$ с $n = ms$ ступенями будет меняться и $s \to \infty$. Напомним, что $M_n = \{y = (y_1, \ldots y_n) : \prod_k y_k = n^{-n}\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\{\int_{M_n} \exp(-\sum_k f_k y_k)dm_n(y)\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\{\int_{M_n} \exp(-\sum_k f_k \widehat{y}_k)dm'_n(y)\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\{\int_{H_n} \exp(-\sum_k f_k \exp x_k)dx_1 \ldots dx_n\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{1}{[\prod_{k=1}^n f_k]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\{-\sum_k \ln f_k\} = -\int_X \ln f(x)dx,$$

здесь $H_n = \{x = (x_1, \ldots x_n) : \sum_k x_k = 0\}$; при переходе от первого выражения ко второму мы использовали замену $y_k = n\widehat{y}_k$, при этом $\prod_k \widehat{y}_k = 1$, и мера m_n заменяется на меру m'_n из-за чего появляется множитель $\frac{1}{n}$ перед логарифмом; в этом переходе используется факт, эквивалентный безграничной делимости мер: мера на орбите может быть представлена, как n-кратная свертка с собой пропорциональной меры на орбите, что следует из инвариантности и единственности (с точностью до множителя) меры Хаара. Переход от второго выражения к третьему состоит в замене $\widehat{y}_k = \exp x_k, k = 1 \ldots n$. Последнее выражение в выкладке определено для всех положительных измеримых функций $f \in K$ с конечным интегралом от логарифма, поэтому, следуя нашему определению, мы можем заключить, что последовательность мер слабо сходится. Особо следует сказать о переходе от интеграла к произведению $\frac{1}{[\prod_{k=1}^n f_k]}$ (предпоследнее равенство); он состоит в замене интегрирования по гиперплоскости H_n интегрированием по всему пространству $\mathbb{R}^n$, - обоснованность такой замены базируется на применении эргодического метода, о чем подробно сказано в первом комментарии к лемме Пуанкаре, позволяющего заменить вычисление интеграла по одной траектории интегрированием по всему пространству, различие в том, что метод применяется к последовательности некомпактных групп; мы не останавливаемся здесь на этом. □

Замечание. К сожалению, прямое вычисление асимптотики интеграла по гиперплоскости H_n, сводящееся к использованию асимптотики цилиндрических функций, автору провести не удалось, - достаточно для наших целей было бы доказать лишь следующее любопытное предельное тождество:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{H_n=\{x:\sum_{k=1}^n x_k=0\}}\exp(-\sum_{k=1}^n \exp x_k)dx_1\dots dx_n=1.$$

Если домножить подынтегральную функцию на $\exp\sum_k x_k$, (равную 1 на гиперплоскости H_n) и проинтегрировать по всему пространству $\mathbb{R}^n$ то интеграл, очевидно, равен 1 (без перехода к пределу). Но из теоретико-вероятностных соображений эта формула, и более общие формулы, следуют без вычислений.

Другое доказательство слабой сходимости мер, приводящее к тому же предельному функционалу, намечено далее.

Мы получили формулу для характеристических функционалов на кусочно-постоянных функций $f(.)$:

$$\Phi_\theta(f)=\lim_{n\to\infty}\int_K[\exp(-\int_X f(x)y(x)dx)]d\mu_{n,\theta}\}=\exp\{-\theta\int_X\ln f(x)dx\},\theta>0$$

она естественно продолжается на любые измеримые положительные функции f с конечным интегралом от логарифма.

Следствие 1. *Полученные характеристические функционалы Φ_θ - инвариантны относительно умножения аргумента на любую измеримую неотрицательную функцию $a(.)$ с нулевым интегралом от логарифма:*

$$\Phi(a\cdot f)=\exp\{-\theta\int_X\ln a(x)f(x)dx\}$$

$$=\exp\{-\theta[\int_X\ln a(x)dx+\int_X\ln f(x)dx]\}=\exp\{-\theta\int_X\ln f(x)dx\},$$

и умножается на константу если интеграл $\int_X\ln a(x)dx$ - конечен.

Тем самым, та сигма-конечная мера, для которой функционал Φ_θ есть преобразование Лапласа, будет инвариантной (соответственно - проективно-инвариантной) относительно мультипликаторов M_a (операторов умножения на a), на функции a с нулевым (соотв. - конечным) интегралом от логарифма.

Заметим, что наиболее прямой способ установления слабой сходимости мер на орбитах состоит в подсчете распределений системы функционалов, что и приведет нас к слабому распределению, рассматриваемому в следующем пункте. Обозначим через m_d меру Лебега в пространстве $\mathbb{R}^d$ и наметим вычисления для $\theta=1$.

Утверждение 1.

$$lim_{n\to\infty}m_{n-1}\{(x_1,x_2\dots x_n):\sum_{k=1}^n x_k=0,\quad\sum_{k=1}^n\exp(\theta x_k)\le r_n\cdot t\}=Ct,$$

где $r_n=\exp(An)$, A,C – константы, независящие от n.

Доказательство. $m_{n-1}\{...\} \approx \alpha_n(\ln r_n + \ln t)^n$. Поэтому

$$\lim_n \alpha_n(\ln r_n + \ln t)^n = \lim_n C(1+\frac{\ln t}{n})^n = C \cdot \exp(\ln t) = Ct,$$

здесь α_n -нормировка лебегова объема, причем $\ln r_n \sim (\alpha_n)^{1/n}$. □

4 Описание лебеговских мер $\mathcal{L}_\theta^+$ и меры Пуассона–Дирихле.

4.1 Меры $\mathcal{L}_\theta^+$, как слабые распределения.

Теперь мы приступаем к описанию мер которые до сих пор были определены лишь косвенно и которые являются главным объектом работы. Нам необходимо доказать, что в некотором пополнении конуса K существует однопараметрическое семейство мер $\mathcal{L}_\theta$ со следующим замечательным преобразованием Лапласа:

$$\int_K \exp(-<f,g>)d\mathcal{L}_\theta^+(g) = \Phi_\theta(f) \equiv \exp(-\theta \int_X \ln f(x)dx),$$

$\theta > 0$, и объяснить, что это за мера, и на каком множестве она сосредоточена. При $\theta = 1$, эта мера $\mathcal{L}_1^+$ и есть та, которую следует называть *мультипликативной мерой Лебега в бесконечномерном пространстве.* Все эти меры сосредоточены на некотором пополнении конуса K, а сам конус имеет относительно них нулевую меру.

Опишем сначала эти меры аналогично тому, как описываются слабые распределения, иначе говоря, зададим их с помощью согласованных семейств конечномерных сигма-конечных мер. Для этого, ограничим наш характеристический функционал Φ_θ на конечномерный конус кусочно-постоянных функций на заданном конечном разбиении ξ множества $X = \cup_{k=1}^n F_k$ и возьмем обратное преобразование Лапласа. В результате прямого вычисления мы получим некоторую сигма-конечную меру $L_{\theta,\xi}$ в $\mathbb{R}^n$; соответствующие формулы для плотностей этой меры, выглядят так:

Утверждение 2. *Плотность меры $L_{\theta,\xi}$ по лебеговой мере равна*

$$\frac{dL_{\theta,\xi}}{dx}(x_1,\dots x_n) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\Gamma(\theta m_k)} x_k^{\theta m_k - 1}, x_k > 0 \quad k = 1\dots n$$

(здесь m_k -лебегова мера множества $F_k, \Gamma(.)$- гамма-функция).

См. [16], а также [19], где меры $\mathcal{L}_\theta^+$ были определены иным способом.

Доказательство. Проверка сводится к стандартным формулам интегралов от гамма-распределений. □

Заметим, что согласованность мер относительно измельчения разбиений понимается не буквально - т.е. не относительно проекций конечномерных пространств, как для вероятностных мер,- это невозможно из-за бесконечности проекций, - а в смысле перехода к двойственному описанию: преобразования Лапласа всех конечномерных распределений суть ограничения на конечномерные подпространства одного и того же функционала. Для вероятностных мер такое понимание согласованности эквивалентно обычному в смысле проекций. В частности, для $\theta = 1$ все эти конечномерные меры есть лебеговы меры с согласованной, например на единичных координатных кубах, нормировкой.

Данное описание пока не дает явного описания самой меры – это пока лишь аналог слабого распределения или предмеры в бесконечномерном векторном пространстве. Но уже из него видно, что соответствующая мера (а она,как мы увидим, существует) аналогична мере, порожденной процессом с независимыми неотрицательными значениями, но сигма-конечной. Дадим прямое описание этих мер и укажем их замечательные свойства и приложения.

4.2 Явное описание мер $\mathcal{L}_\theta^+$ с помощью мер Пуассона–Дирихле

Рассмотрим еще один конус

$$D_+ = \{\xi = \sum c_i \delta_{x_i}, c_i > 0, \sum c_i < \infty, x_i \in X\}$$

всех положительных конечных (ненормированных) мер на пространстве X со счетным носителем. Если X – отрезок, то можно рассматривать такую меру как (нестрого) монотонную функцию со счетным числом скачков, сумма которых конечна. В теории случайных процессов вероятностные меры на этом пространстве называют тогда субординаторами. Нам удобнее рассматривать элементы D_+, как положительные дискретные меры, то есть, как положительные линейные комбинации дельта-функций, тем более, что предыдущая интерпретация возможна лишь на отрезке.

Имеется естественное спаривание пространства D_+ и конуса K: каждая кусочно постоянная функция $f = \sum f_k \chi_{F_k}$ определяет функционал на D_+:

$$< f, \xi >= \sum_k f_k \cdot (\sum_{i: x_i \in F_k} c_i).$$

Поэтому конус D_+ лежит в пополнении конуса K в слабой топологии, но мы не будем этим пользоваться. Определим непосредственно меры на конусе D_+ меры $\mathcal{L}_\theta^+$, и покажем, что они являются продолжением выше определенных слабых распределений на конусе K до настоящих счетно-аддитивных сигма-конечных мер,

Для этого дадим конусу D_+ другое более удобное и естественное описание, его представлять себе следующим образом.

Рассмотрим совокупность (нестрого) убывающих рядов с неотрицательными членами и конечной ненулевой суммой. Обозначим это пространство через Σ_∞: это - затупленный (без вершины) конус, имеющий в качестве сечения бесконечномерный симплекс Σ_1 - монотонных неотрицательных рядов с суммой единица. Заметим, что $\Sigma_\infty = \Sigma_1 \times \mathbb{R}_+$. Пусть X^∞ -прямое произведение счетного числа пространств X. Рассмотрим произведение

$$\Sigma_\infty \times X^\infty = \Sigma_1 \times \mathbb{R}_+ \times X^\infty,$$

и отождествим его с конусом D_+ с помощью отображения T следующим образом:

сопоставим ряду $\{c_1 \geq c_2 \dots\} \in \Sigma_\infty$ и последовательности $\{x_1, x_2, \dots\} \in X^\infty$ дискретную меру:

$$T(\{c_k\}, \{x_k\}) = \sum_k c_k \cdot \delta_{x_k} \in D_+.$$

Очевидным образом, это отображение есть биекция между произведением

$$\Sigma_\infty \times X^\infty$$

и пространством D_+.

Опишем теперь меры на D_+ как T-образы некоторых канонических мер при описанной биекции. На X^∞ рассмотрим продакт-меру m^∞ (меру Бернулли), независящую от θ. На симплексе монотонных сходящихся положительных рядов Σ_1 рассмотрим однопараметрическое семейство вероятностных *мер Пуассона–Дирихле* $PD_\theta, \theta > 0$, [20], - о них - см. ниже и в Добавлении 1. Наиболее важная мера,- собственно мера Пуассона–Дирихле, - отвечает параметру $\theta = 1$. Наконец, введем на полупрямой $\mathbb{R}_+$ меру с плотностью по лебеговой мере $dL_\theta = \frac{t^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)}dt, \theta > 0$, при $\theta = 1$, это – Лебегова мера на полупрямой.

Полезно ввести еще одно обозначение для меры на конусе Σ_∞ -монотонных сходящихся положительных рядах –

$$PDC_\theta = PD_\theta \times L_\theta.$$

Меры PDC можно назвать "пуассонизацией"мер Пуассона–Дирихле или – *коническими мерами Пуассона–Дирихле* (в отличие от обычных мер $PD(\theta)$, которые сосредоточены на симплексе Σ_1 -монотонных сходящихся рядов.) Сигма-конечные меры PDC_θ, по-видимому, до сих пор не рассматривались.

Определение 2. *Мера $\mathcal{L}_\theta^+$ на конусе D есть T-образ произведения мер:*

$$PD(\theta) \times L_\theta \times m^\infty = PDC(\theta) \times m^\infty$$

$$\mathcal{L}_\theta^+ = T(P^2D(\theta) \times m^\infty)$$

Очевидно, что эти меры сигма-конечны, сигма-аддитивны и конечны на компактах. Следующая теорема идентифицирует меру $\mathcal{L}_\theta^+$ с мерой, у которой преобразование Лапласа есть вычисленный ранее функционал. А именно, мы докажем, что эта мера соответствует введенному выше слабому распределению вычисленному в утверждении 2. В свою очередь отсюда следует, что данное определение приводит к мере с заданным преобразованием Лапласа и, поэтому эти меры являются слабыми пределами мер на орбитах (из теоремы 2).

Теорема 3.

$$\int_{D_+} \exp\{- < f, \xi >\} d\mathcal{L}_\theta^+(\xi) = \Phi_\theta(f) \equiv \exp\{-\int_X \ln f(x)dx\}$$

Тем самым, меры $\mathcal{L}_\theta^+$ есть слабые пределы мер на орбитах положительной части картановских подгрупп.

Доказательство. Мы используем следующее замечательное свойство конических мер Пуассона–Дирихле, носитель которых - конус Σ_∞:

Теорема 4. *Рассмотрим произвольное случайное разбиение натурального ряда* $\mathbb{N}$ *на конечное число* r *подмножеств, иначе говоря, отнесем с одинаковой вероятностью* $1/r$ *каждое натуральные число независимо от других к одному из* r *подмножеств. Тогда совместное распределение* r *подсумм случайного ряда (распределенного по мере* $PDC(\theta)$*) по этим подмножествам есть мера в* $\mathbb{R}^r_+$*, являющаяся* r*-кратным произведением* $L_\theta \times \cdots \times (r) \times \cdots \times L_\theta$*.*

Мы не будем здесь доказывать это характеристическое свойств мер $PDC(\theta)$. Соответствующее свойство мер $PD(\theta)$ с заменой r-кратного произведения мер на Лебегову меру на r-мерном симплексе, следует из результатов [10] о связи этих мер с процессами Леви, построенных по устойчивым законам, но может быть доказано и непосредственно, исходя из определений этих мер.(См. Добавление.) Далее используется только это характеристическое свойство мер $PDC(\theta)$; оно показывает, как тесно связаны операции над мерами $PD(\theta)$ с допустимой независимостью членов ряда. Из этого свойства немедленно следует, что мера $\mathcal{L}^+_\theta$, есть продолжение слабого распределения, описанного в предыдущем пункте, и поэтому имеет нужное преобразование Лапласа. $\square$

Наиболее глубокие свойства вводимых мер $\mathcal{L}^+_\theta$, включая инвариантность относительно мультипликаторов, как видно, связаны со свойствами мер Пуассона–Дирихле. Но и наоборот, меры Пуассона–Дирихле могут быть определены через меры $\mathcal{L}^+_\theta$ как проекции на симплекс (или конус).

4.3 Связь с гамма-процессом и еще одно определение мер $\mathcal{L}^+_\theta$

Гамма-распределение на полупрямой $[0, \infty)$ есть распределение со следующей плотностью относительно лебеговой меры $\frac{t^{\theta-1}e^{-t}dt}{\Gamma(\theta)}$; это безгранично делимое распределение порождает процесс Леви y_θ с характеристическим функционалом

$$\chi_\theta(f) = \exp\{-\theta \int ln(1 + f(x))dx\}$$

.

Реализации этого процесс с вероятностью единица есть дискретные (со счетным носителем) положительные меры на X т.е. счетные линейные комбинации $\sum c_k\delta_{x_k}, c_k > 0, x_k \in X, k = 1\dots$ с конечным общим зарядом $\sum_k c_k < \infty$. Распределение этого заряда (т.е. суммы $\sum_k c_k$) есть гамма-распределение. Закон гамма-процесса обозначим $\mathcal{G}_\theta$

Теорема 5. *Мера* $\mathcal{L}^+_\theta$ *абсолютно непрерывна по мере, порожденной гамма-процессом* χ_θ*, с плотностью* $\frac{d\mathcal{L}_\theta}{d\mathcal{G}_\theta}(\xi) = \exp\{\sum_k c_k\}$*, где* $\xi = \sum_k c_k$*. Эта плотность неинтегрируема, что соответствует бесконечности сигма-конечной меры* $\mathcal{L}_\theta$*.*

Следствие 2. *Мера* $\mathcal{G}_\theta$ *квазиинвариантна относительно умножения на функции с конечным интегралом от логарифма.*

Заметим, что в [16, 19] утверждение предыдущей теоремы служило определением мер $\mathcal{L}_\theta$, и поэтому все свойства $\mathcal{L}_\theta$ выводились из свойств $\mathcal{G}_\theta$. Например, инвариантность относительно мультипликаторов выводилась из квазиинвариантности меры $\mathcal{G}_\theta$ и вида плотности, Здесь избран противоположный и более естественный путь (хотя квазиинвариантность меры $\mathcal{G}_\theta$ устанавливалась и в [16, 19] несложно), – с помощью слабой аппроксимации конечномерными инвариантными мерами, при этом используется важная сама по себе связь изучаемых мер с мерами Пуассона–Дирихле. Более того, замечательные и характеристические свойства гамма- процесса получают при таком подходе естественное объяснение.

В [32] показано, что сигма-конечную меру $\mathcal{L}_\theta$ можно трактовать, как производную бесконечномерного распределения устойчивых процессов Леви по параметру устойчивых законов α в точке $\alpha = 0$ (см. также [19]), в то же время для того, чтобы получить распределение гамма-процесса таким же образом, – также необходим переход к пределу (слабому) при $\alpha \to 0$ с одновременной перенормировкой мер. Поэтому мера $\mathcal{L}_\theta$ абсолютно непрерывна относительно распределения гамма-процесса, но более естественно получать ее как производную по α. Этот факт, несомненно имеет глубокую связь с теорией представлений группы $SL(2, R)$-токов, поскольку состояние, отвечающее основному представлению, по которому строится неприводимое представление группы токов (каноническое состояние) есть экспонента от производной сферических функций дополнительной серии по параметру в концевой точке (см.[16]). Это не есть внешнее сходство, поскольку указанная выше реализация представления, строится с помощью меры $\mathcal{L}_1$, которая есть также производная по тому же параметру. Связь устойчивых законов и сферических функций дополнительной серии несомненна. Все это наводит на мысль о сравнении винеровской меры, отвечающей параметру $\alpha = 2$ и меры $\mathcal{L}_1$, соответствующей, как было сказано $\alpha = 0$ как концов отрезка $[0, 2]$, точки которого параметризуют устойчивые законы. Группа симметрий обеих мер - бесконечномерная группа линейных преобразований - для винеровской меры это группа ортогональных операторов гильбертова пространства, а $\mathcal{L}_{1+}$ имеет в качестве группы сохраняющих меры преобразований бесконечномерную коммутативную группу мультипликаторов. Устойчивые законы образуют как бы деформацию, соединяющую оба закона, их группы симметрий (уже существенно нелинейные) пока не описаны. Можно предположить, что это нелинейная деформация аналогичная гомотопии ортогональной группы в диагональную.

Симметризованный гамма-процесс, порожденный симметричным гамма- распределением $\frac{|t|^{\theta-1}e^{-|t|}dt}{2\Gamma(\theta)}$ на прямой, таким же образом связан с мерами $\mathcal{L}_{theta}$, вводимыми в п.5.1 далее.

4.4 Аддитивная версия лебеговой меры в бесконечномерном пространстве.

Построенные меры $\mathcal{L}_\theta^+$ были инвариантны относительно действия операторов умножения, более привычно рассматривать конечномерную меру Лебега как единственную (с точностью до множителя) меру, инвариантную относительно сдвигов. Логарифмируя элементы носителя построенной выше меры можно, переделать в меры, инвариантные относительно сдвигов.

Рассмотрим конус K^+, - см. параграф 3, - кусочно-постоянных положительных функций на X и меры на нем. Перейдем от мультипликативной записи действия группы мультипликаторов к аддитивной, т.е. прологарифмируем и элементы конуса K, и мультипликаторы. Тогда конус превратится в векторное пространство кусочно-постоянных функций V, а конечномерные картановские группы $SDiag_+(n\mathbb{R})$ - в векторные пространства размерности $n-1$ и будут аддитивно действовать на V. Мы получим следующую, возможно, более наглядную, ситуацию. Отображение Log переводит пространство D_+ дискретных положительных мер с конечной вариацией в некоторое векторное пространство $E(X)$ - дискретных сигма-конечных (знакопеременных) мер на отрезке X $E(X) = \{\{\sum_k b_k \delta_{x_k}\}, x_k \in X; \sum_k exp(-b_k) < \infty\}$:

$$Log(\{\sum_k c_k \cdot \delta_{x_k}\}) = \{-\sum_k log(c_k) \cdot \delta_{x_k}\}$$

- отсюда видно, что последовательности b_k должны стремиться к бесконечности и при этом расти. достаточно быстро. Это пространство и будет носителем некоторой меры $\bar{\mathcal{L}}_\theta \equiv Log\mathcal{L}_\theta^+$ являющейся образом меры $\mathcal{L}_\theta^+$ при логарифмическом отображении. Топология на $E(X)$ также определяется как образ топологии на при отображении Log. Меры $\bar{\mathcal{L}}_\theta$ являются бесконечными, сигма-конечными и конечными на всех компактах в $E(X)$. Рассмотрим банахово пространство $G(X)$ порожденное двумя пространствами - гиперплоскостью в L^1 - $L^1_{\mu,0}(X) = \{f \in L^1_\mu(X) : \int f = 0\}$ и пространством $E(X)$, - оба пространства являются пространствами мер, -соответственно абсолютно непрерывных и счетных знакопеременных, и, поэтому $G(X)$ тоже есть некоторое банахово пространство мер. Ограничимся мерой $\bar{\mathcal{L}}_(1)$, заданной в $E(X)$, которую будем рассматривать как меру в более широком банаховом пространстве $G(X)$.

Теорема 6. *Банахово пространство $L^1_{\mu,0}(X)$ действует сдвигами на пространстве $G(X)$, сохраняя меру $\bar{\mathcal{L}}_(1)$. Точнее, для любого элемента $f \in L^1_{\mu,0}(X)$ существует такое множество E_f полной $\bar{\mathcal{L}}_(1)$-меры, что $\forall \omega \in E_f, \omega \equiv \sum_k b_k \delta_{x_k}$, образ $(T_f)(\omega) \equiv \sum_k b_k + f(x_k)\delta_{x_k}$ лежит в $\Phi(X)$ и T_f сохраняет меру $\bar{\nu}$.*

Теорема следует из доказанной теоремы об инвариантности мультипликативного действия, т.е сохранение меры при умножении на функцию с нулевым интегралом от логарифма – теорема п.4.2. Инвариантность относительно сдвигов на любые элементы пространства $L^1_\mu(X)$ можно получить, если взять прямое произведение построенной меры на лебегову меру на прямой констант.

Таким образом определено банахово пространство и борелевская сигма-конечная мера на нем, инвариантная относительно трансляций на любые элементы некоторого бесконечномерного замкнутого подпространства. Именно эта формулировка позволяет назвать эту меру бесконечномерной аддитивной лебеговой мерой.

Отображение Log позволяет проанализировать свойства меры $\bar{\mathcal{L}}_(1)$, используя свойства меры Пуассона–Дирихле $PDC(1)$. Замечание о выборе множества полной меры в теореме – существенно (см. замечание к лемме Пуанкаре). Напомним, что $f \in L^1$ есть не индивидуальная функция, а класс совпадающих $\mod 0$ функций, поэтому действие сдвигами понимается в следующем смысле: возьмем индивидуальную функцию $\widehat{f}$ из класса f, которая определена на некотором множестве полной меры $A_{\widehat{f}} \subset X$ и выделим те $\omega \in \Phi(X)$, для которых $x_k, k = 1\dots$ лежат в множестве $A_{\widehat{f}}$. Тогда формула

$$(T_f)(\sum_k b_k \cdot \delta_{x_k}) = \sum_k (b_k + f(x_k)) \cdot \delta_{x_k}$$

определяет следующее действие - сдвиг коэффициентов конфигурации ω на значения функции f в соответствующих точках. Формула имеет смысл и является, очевидно, корректной по отношению к переходу $mod0$: если $f = f' mod0$, то $T_f = T_{f'} mod0$. Тем не менее общего множества, на котором были бы определены все сдвиги одновременно – нет, причина здесь несколько иная, чем в примере с леммой Пуанкаре: здесь уже само действие для фиксированного элемента $f \in L_1$ определено как класс $mod0$ совпадающих преобразований. Любопытно, что группа сдвигов при этом коммутативна: это алгебраический пример действия коммутативной группы с инвариантной мерой, которое не допускает одновременной индивидуализации (поточечного действия) всех элементов группы. См. комментарий об инвариантных мерах в Добавлении. Ниже эту модель мы не используем.

5 Свойства и приложения построенных мер.

5.1 Отказ от положительности

До сих пор для упрощения мы предполагали неотрицательность параметров орбит и групп: мы рассматривали положительную часть картановской группы - ($SDiag_+$), положительность кусочно постоянных функций (конус K), действующих на них мультипликаторов, (.), положительность рядов (симплекс Σ_1 и конус Σ_∞), меры на полупрямых (L_θ) и т.д. Построенные меры $\mathcal{L}_\theta^+$ были определены на конусе D_+ дискретных положительных мер на пространстве X.

Нетрудно избавиться от ограничения положительности и распространить все рассмотрения и результаты на случай, когда все параметры являются вещественными. Мы упомянем очевидные замены - рассматривается вся картановская подгруппа - $SDiag \in SL(n, \mathbb{R})$ - вместо ее положительной части $SDiag_+$, ее полная орбита - $M_n = \{(x_1, \dots x_n) : |\prod x_k| = r > 0\}$, т.е. снимается условие $x_k > 0$; вместо конуса K рассматривается векторное пространство всех кусочно постоянных функций, наконец вместо мультипликаторов с нулевым или конечным интегралом от логарифма - мультипликаторы с нулевым или конечным интегралом от логарифма *модуля* функции: ($\int_X \ln |a(x)| dx = 0$). Пространство с мерой есть множество всех абсолютно сходящихся рядов с монотонно убывающими модулями слагаемых [4]; (вместо конуса Σ_∞ положительных монотонных сходящихся рядов и т.д. Все доказательства и построения остаются теми же и единственное существенное изменение, которое следует упомянуть, относится к построению мер (п.4). Что касается определения слабых распределений, то везде, где рассматривались меры на полупрямой $\mathbb{R}_+$ или конусе $\mathbb{R}_+^n$ надо их распространить на $\mathbb{R}$ или на $\mathbb{R}^n$ с помощью умножения конусов на 2^n векторов $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$, где $\varepsilon_k = \pm 1$ с равномерной мерой на них. Распространение меры $PD(\theta)$ с симплекса положительных монотонных рядов

[4] множество рядов, в которых встречаются члены с равными модулями имеет меру нуль для всех рассматриваемых мер, поэтому упорядочение определено однозначно на множестве полной меры

с суммой единица на октаэдр O_1 всех абсолютно сходящихся монотонных (по убыванию модулей) рядов с суммой модулей равной единице производится точно также: мера Пуассона–Дирихле умножается прямо на равномерную меру (меру Хаара) на бесконечных последовательностях плюс-минус единиц. Вместо конуса D_+ введем пространство D дискретных вещественных мер (зарядов) на X с конечной вариацией. Изоморфизм пространства D и произведения

$$O_1 \times \mathbb{R} \times X^\infty,$$

строится с помощью продолжения отображения T:

$$T(\{c_k\}, \{x_k\}) = \sum_k c_k \cdot \delta_{x_k} \in D_+,$$

разница лишь в том, что c_k могут быть и положительными, и отрицательными числами, причем $\sum_R |c_k| < \infty$. Полученные меры на D будем обозначать $\mathcal{L}_\theta, \theta > 0$, (опуская знак $+$). При $\theta = 1$ мера $\mathcal{L}_1$ называется бесконечномерной мерой Лебега. Как и ранее имеет место следующий основной факт:

Теорема 7. *Мера Лебега $\mathcal{L}_1$ есть слабый предел мер на полных орбитах, и ее характеристический функционал имеет вид:*

$$\int_D \exp\{-<f,\xi>\} d\mathcal{L}_1(\xi) = \exp\{-\int_X \ln|f(x)dx|\}.$$

Аналогичная формула имеет место для мер $\mathcal{L}_\theta$:

$$\int_D \exp\{-<f,\xi>\} d\mathcal{L}_\theta(\xi) = \exp\{-\theta \int_X \ln|f(x)dx|\}.$$

Дальнейшие свойства этих мер обсудим в следующем пункте. Заметим, что различия между положительным и знакопеременным вариантом невелики, и теоремы об инвариантности и единственности доказываются для общего случая так же, как для положительного.

5.2 Инвариантность, единственность

Утверждение 3. *Построенные меры $\mathcal{L}_\theta$ векторном пространстве D инвариантны относительно*

1)группы $\mathcal{M}$ - мультипликаторов M_a на функции $a \in L^0$ с нулевым интегралом от логарифма модуля: $\int_X \ln|a(x)|dx = 0$ и проективно инварианты (т.е. умножаются на константу) $\exp\int_X \ln|a(x)|dx$ если этот интеграл конечен.

2)группы $\mathfrak{A}(X)$ всех преобразований, сохраняющих меру m на X.

Оба утверждения следуют непосредственно из конструкции этих мер. Тем самым, меры $\mathcal{L}_\theta$ инвариантны относительно скрещенного произведения $\mathfrak{A}(X) \leftthreetimes \mathcal{M}$.

Нетрудно доказать (см. [19]), что группа $\mathcal{M}$ и тем более скрещенное произведение, действует на $(D, \mathcal{L}_\theta)$ эргодично. В той же работе доказана единственность:

Утверждение 4. *Список мер, инвариантных и эргодических относительно группы* $\mathfrak{A}(X) \leftthreetimes \mathcal{M}$ *исчерпывается мерами* $\mathcal{L}_\theta, \theta > 0$.

Мера $\mathcal{L}_\theta$ сосредоточена на счетных линейных комбинациях дельта-функций с абсолютно сходящимся рядом вещественных коэффициентов. Распределение суммы коэффициентов есть лебегова мера на прямой. Свойство, мер $\mathcal{L}_\theta^+$, выраженное теоремой 4 также имеет место.

Напомним, что на пространстве счетных дискретных вещественных мер (или на пространстве счетных линейных комбинаций точек) есть эргодическое отношение эквивалентности: класс эквивалентности состоит из мер с одинаковым носителем. Относительно меры $\mathcal{L}_\theta$ это отношение эквивалентности является эргодическим, иначе говоря, соответствующее разбиение на классы - абсолютно неизмеримо; в существенном оно и есть разбиение на орбиты (mod 0) действия группы мультипликаторов. Любопытно, что такой огромной бесконечномерной группой линейных симметрий обладают меры $\mathcal{L}_\theta$, носитель которых состоит из дискретных мер. Для сравнения носитель белого шума, обладающий также большой группой симметрий (см. выше), состоит из обобщенных функций, а не мер.

5.3 Применение к представлениям групп токов группы SL(2,R).

Главное применение построенных мер, связано с теорией представлений групп токов. Именно так они и были впервые обнаружены в [15]: пространства L^2 по построенным мерам являются естественными гильбертовыми пространствами, в которых реализуются представления групп токов. При этом используется инвариантность меры относительно умножений на бесконечномерную диагональную подгруппу и, - что обобщает классический факт о представлениях $SL(2,\mathbb{R})$,- возможность продолжения представления с параболической подгруппы на инволюцию Картана и, тем самым на всю группу токов.

Рассмотрим группу нижне-треугольных матриц с определителем единица и с элементами принадлежащими пространству вещественных функций на с интегрируемым логарифмом модуля.

$$\begin{pmatrix} a(.) & 0 \\ b(.) & a(.)^{-1} \end{pmatrix}$$

Заметим, что эта группа вместе с инволюцией

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

порождает всю группу $SL(2,\mathcal{F})$, где $\mathcal{F} = \{f : \int_X \ln|f(x)|dx < \infty\}$.

Теорема 8. *Рассмотрим гильбертово пространство* $L^2(D,\mathcal{L}_\theta)$ *комплексных квадратично-интегрируемых по мере* $\mathcal{L}_\theta$ *функций на пространстве* D.

Унитарные операторы

$$(U_{a,b}F)(\xi) = \exp\{i \sum c_k b(x_k) + \int_X \ln|a(x)dx|\} F(M_a^2 \xi),$$

здесь $\xi = \sum_k c_k \delta_{x_k} \in D$, M_a мультипликатор на функцию a; - задают неприводимое унитарное представление указанной группы нижне-треугольных матриц, которое продолжается до неприводимого представления группы $SL(2, \mathcal{F})$. Это представление продолжается также до унитарного представления группы $\mathfrak{A}(X)$ преобразований X, сохраняющих меру m.

Корректность задания и унитарность операторов следует из того, что меры $\mathcal{L}_\theta$ проективно инвариантны относительно группы мультипликаторов, остальные свойства проверяются непосредственно; формулы для инволюции приведены в [14], но сам факт продолжения представления на группу $SL(2, \mathcal{F})$ был получен в [15] еще до открытия мер $\mathcal{L}_\theta$. Заметим еще, что при всех $\theta > 0$ представления эквивалентны, поэтому достаточно рассматривать только лебегову меру, т.е. $\theta = 1$. Приведенная коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathcal{F})$, является прямым континуальным аналогом классического представления группы $SL(2, \mathbb{R})$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ функций на прямой (или проективной прямой) с лебеговой мерой: прямая заменяется, в определенном смысле, континуальным произведением прямых - пространством D, а лебегова мера на прямой заменяется введенной здесь лебеговой мерой на пространстве D. Любопытно, что пространство $L^2(D, \mathcal{L})$ обладает структурой метрической факторизации, т.е. структурой континуального тензорного произведения пространств L^2, но эта метрическая факторизация не изоморфна гауссовой (т.е. фоковской), но изоморфна ей как гильбертова факторизация (см. [33]).

5.4 Многомерное обобщение мер Пуассона–Дирихле и представления групп токов групп $SO(n, 1)$

Выше мы рассматривали меры в пространстве D - счетных вещественных линейных комбинаций дельта-мер на пространстве X. Для приложений важно расширить область коэффициентов и перейти к векторным дельта-мерам. Обозначим через $D^n(X) \equiv D^n$ - векторное пространство счетных линейных комбинаций $\sum_K c_k \delta_{x_k}$ с коэффициентами в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и обладающими двумя свойствами:

1) $\sum_k ||c_k|| < \infty$

2) Пространство D^n инвариантно относительно поточечного действия ортогональной группы $SO(n-1)$ и группы гомотетий в $\mathbb{R}^n$, т.е. относительно группы токов с коэффициентами в группе $SO(n-1) \times \mathbb{R}^*$. Иначе говоря вместе с линейной комбинацией $\sum_k c_k \cdot \delta_{x_k} \in D^n$ линейная комбинация $\sum_k \varepsilon_k \cdot g_k(c_k) \cdot \delta_{x_k}$, где $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^*, g_k \in SO(n-1), k = 1 \ldots$, также лежит в D^n.

Топология в D^n определяется обычном образом. Заметим, что всюду плотное массивное множество в пространстве D^n есть прямое произведение $\Sigma^n \times X^\infty$, где Σ^n есть множество векторных сходящихся рядов с монотонно убывающими по эвклидовой норме членами. Эта биекция между двумя множествами - $\Sigma^n \times X^\infty$ и плотной частью D^n строится также, как и для $n = 1$: каждой линейной комбинации $\sum_k c_k \delta_{x_k} \in D^n$, в которой все c_k - $||c_k||$ - различны, сопоставляется упорядоченная по убыванию норм перестановка последовательности c_k и соответствующая этой перестановке, перестановка последовательности x_k; обратное отображение, обозначим его через T, очевидно.

Аналог меры $\mathcal{L}_\theta$ при $n > 1$ определен в [17, 18] по аналогии со случаем $n = 1$: сначала определяется векторный гамма-процесс с характеристическим функционалом

$$\Phi(f) = \exp\{-\theta \int \ln(1 + ||f(x)||^2)dx\},$$

и последующего введения плотности. Геометрическая конструкция и меры Пуассона–Дирихле при таком подходе никак не используются.

Здесь же мы определим эти меры опять-таки геометрическим способом с помощью аналога мер Пуассона–Дирихле. Вряд ли существует буквальный аналог мер Пуассона–Дирихле для $n > 1$, как мер на сходящихся векторных рядах для $n > 1$: неясно, что значит положительность и поэтому нет аналога симплекса рядов. Но есть естественный аналог конических мер Пуассона–Дирихле, который мы вводим, используя характеристическое свойство этих мер, данное в теореме 4; после чего сигма-конечные меры определяются также, как и при $n = 1$. Для краткости ограничимся случаем $\theta = 1$.

Определим обобщенную (коническую) меру Пуассона–Дирихле PDC^n в пространстве D^n, как меру на пространстве сходящихся векторных рядов с монотонно убывающими по эвклидовой норме членами и следующим свойством: для любого разбиения членов ряда независимым образом на произвольное конечное число r классов (см. теорему 4) совместное распределение r-мерного вектора сумм (по классам) есть r-мерная мера Лебега. Из определения следует сферическая (т.е. $SO(n-1)^X$)-инвариантность мер. Единственность такой меры доказывается также, как и одномерном случае. Мера $\mathcal{L}_1^n$ на векторном пространстве D^n определяется как T-образ произведения мер $PDC^n \times m^\infty$. Корректность определения следует из того что PDC^n-мера рядов, у которых есть хотя бы два члены с равными норами равна нулю.

Теорема 9. *1.Мера $\mathcal{L}_1^n$ сигма-конечна и конечна на компактах.*

2.Преобразование Лапласа меры $\mathcal{L}_1^n$ есть функционал

$$\Phi(f) = \exp\{-\int_X \ln ||f(x)||dx\}.$$

3.Поэтому мера инвариантна относительно действия (поточечного умножения) элементов группы измеримых токов $a(.)$ с коэффициентами $SO(n-1)\times\mathbb{R}^*$ и с условием

$$\int ln||a(x)||dx = 0,$$

кроме того она инвариантна относительно всех замен переменной (x), сохраняющих меру m.

4.В гильбертовом пространстве $L^2(D^n(X), \mathcal{L}_1^n)$ естественно действует представление группы токов $O(n,1)^X$ с условием конечности интеграла от логарифма модуля тока.

Пункты 1–3 доказываются также, как и для $n = 1$ в параграфах 3–4. По поводу пункта 4 см. [17, 18]; заметим лишь, что действие подгруппы коммутативных унипотентных токов – есть действие операторами умножения функционалов $h(.) \in L^2$ на экспоненту от линейных функционалов, а подгруппы компактных токов $SO(n-1)^X$ и гомотетий – описано выше – это действие на аргумент функционала $h(.)$ и эта модель есть обобщение формул предыдущего параграфа 5.3. Подобное определение мер Пуассона–Дирихле и лебеговских мер можно дать и для бесконечномерного гильбертово пространства. Подробности будут приведены в другой работе.

6 ДОБАВЛЕНИЕ

6.1 О мерах Пуассона–Дирихле на пространстве положительных рядов

Меры Пуассона–Дирихле $D(\theta)$ получили широкую известность в 70-х годах по нескольким причинам (см. [20], [29] [22]). Они используются в комбинаторике, теории разбиений, популяционной генетике и др., но три самых эффектных появления этих мер мы приведем ниже. Глубокий, и до сих пор остающийся мало использованным, анализ меры $D(1)$ и связанной с ней любопытной марковской цепи, был проведен в 70-х гг. в статьях [21, 22, 24]. Хотя эти работы И цитируются (но недостаточно), развитые в них идеи, в частности, о редукция к стационарной марковской цепи, управляющей этими мерами, до сих пор не получили дальнейшего развития.

1.Процесс ломания палки. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных на единичном отрезке по мере Лебега случайных величин $\xi_1, \xi_2 \dots$, и будем разбивать отрезок на части:

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2(1-\xi_1), \dots x_n = \xi_n(1-\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k) \dots,$$

таким образом отрезок разбит случайным образом на счетное число частей. Соответствующая мера на множестве рядов с суммой 1 иногда называется мерой Ювенса. Мера Пуассона–Дирихле $PD(1)$ получается из нее, переходом к вариационному ряду – каждый из исходных рядов перестраивается с помощью (случайной) подстановки в порядке убывания величины членов. Если заменить лебегово распределение величин ξ_k на распределение с плотностью по лебеговой мере $\frac{1}{\Gamma(\theta)}t^{\theta-1}$ – мы получим с помощью той же процедуры меру $PD(\theta)$.

2.Предельное распределение длин циклов случайной подстановки([22], см. также [29] и литературу в ней). Рассмотрим симметрическую группу S_n и сопоставим каждой подстановке вектор из нормированных на n длин ее циклов в порядке их убывания. Обозначим образ равномерной меры на группе S_n при этом отображении группы в симплекс $\Sigma_n = \{(x_1 \dots x_n) : \sum_k x_k = 1\}$ через μ_n, и вложим симплексы в бесконечномерный симплекс Σ_∞. Последовательность мер μ_n слабо сходится к мере $PD(1)$. Меры $PD(\theta)$ получаются той же процедурой, если заменить равномерную меру на S_n мерой, плотность которой пропорциональна числу циклов подстановки в степени $\theta - 1$.

3.[28, 24, 29, 30]. Предельное распределение простых делителей натуральных чисел.

Рассмотрим разложение натуральных чисел в произведение простых, упорядоченных по убыванию

$$n = p_1 \cdot p_2 \dots p_k \quad p_1 \geq \dots \geq p_k > 1$$

и введем вектор $(\frac{\ln p_1}{\ln n}, \ldots, \frac{\ln p_k}{\ln n}) \in \Sigma_1$. Если взять первые N натуральных чисел и равномерное распределение на них, то *последовательность таким образом полученных мер на симплексах будет снова слабо сходиться в Σ_∞ к мере $PD(1)$.*

Здесь остается много открытых вопросов: несомненно есть загадочная универсальность меры $PD(1)$ в аддитивных задачах аналитической теории чисел с неограниченным числом слагаемых, а также в комбинаторике, понималась медленно, и до сих пор не выявлена до конца. [5] Техническая причина универсальности в том, что, как указывалось, слагаемые случайного ряда по этим мерам в определенном смысле обладают максимально возможной независимостью. Более точный смысл этого утверждения вскрывается при переходе от случайного ряда к марковской последовательности отношений слагаемых к оставшейся сумме см. [22]. Однако этого объяснения недостаточно, чтобы понять, почему такая независимость встречается в этих двух и многих других примерах. [6]

Использованное в п.4.2 поднятие (пуассонизация) мер $PD(\theta)$ с симплекса на конус положительных монотонных сходящихся рядов Σ_∞, снабженный конической мерой Пуассона–Дирихле $PDC(\theta) = PD(\theta) \times L_\theta$ играет не менее важную роль - см. его характеристическое свойство (см. теорему 4). Это свойство может быть доказано непосредственно, но кроме того, оно вытекает из теоремы [10] которая утверждает, что меры $PD(\theta)$ есть меры на множестве упорядоченных по убыванию скачков траекторий гамма-процесса с параметром θ. т.е. процесса Леви, построенного по гамма- распределению: $\frac{1}{\Gamma(\theta)} t^{\theta-1} e^{-t} dt$. (см. п.4.3)

Известны различные характеристические свойства этих мер, одно из них использовано выше. Другое – недавно доказанная в [27] гипотеза автора (см. важный предварительный результат в [26]): мера $PD(1)$ является единственной инвариантной мерой на симплексе Σ_1 для марковской цепи объединения и дробления слагаемых ряда. Меры Пуассона–Дирихле находят применения также в теории представлений бесконечной симметрической группы (см. [37]) Все эти факты показывают фундаментальный характер мер Пуассона–Дирихле. Эти меры играют такую же роль в комбинаторике, задачах о рядах и о разбиениях, как гауссовы мер в теории векторных пространств. О многомерном обобщении мер Пуассона–Дирихле см. пункт 5.4.

[5] Немецкий математик К.Дикман в 1930 г. первым поставил вопрос о распределении логарифма максимального простого делителя, а В.Л.Гончаров в 40-х гг. (по-видимому, не зная о работе Дикмана) изучал распределение длины максимального цикла случайной постановки. Понимание того, что это одно и тоже наступило только в 80-х гг.

[6] К дискуссии, инициированной письмом В.И.Арнольда в [25], можно добавить, что пионерская работа [22] и работа [24] связаны между собой теснейшим образом; при написании работы [24] статья [28] была неизвестна автору, однако в [24], хотя это и краткая публикация, содержались утверждения новые, по сравнению с [28], которые использовали результаты [22], в том числе функциональное уравнение для плотности распределения Дикмана–Гончарова, – заметим, что функциональные уравнения для этих плотностей, выведенные в [22] и [24] несколько различаются и вывод их различен, но решения совпадают? как и утверждение об инвариантной мере для марковского оператора. Поэтому цитирование обеих работ, в обзорах о мерах Пуассона–Дирихле и их приложениях совершенно необходимо.

6.2 Групповые ограничения, налагаемые инвариантностью или квазиинвариантностью мер.

То, что левоинвариантная относительно всех сдвигов борелевская, конечная или сигма-конечная, неотрицательная, ненулевая мера на сепарабельных группах существует только на локально-компактных группах, - есть классическая "обратная"теорема А.Вейля [38] к теореме Хаара о существовании инвариантной меры на локально-компактных группах. Ее наиболее простое (более позднее) доказательство использует теорию представлений. Небольшое усиление этого факта состоит в том, что тоже самое верно, если мера лишь квазиинвариантна относительно всех (левых) сдвигов. Поэтому на нелокально компактных группах можно ставить вопрос о (квази)инвариантности меры лишь относительно сдвигов на элементы некоторой подгруппы - подгруппы допустимых сдвигов. Для всякой квазиинвариантной меры на не локально-компактной группе эта подгруппа должна обязательно иметь меру нуль, однако, она может быть массивной. Для вероятностных мер на группах подгруппа допустимых сдвигов (с квазиинвариантной мерой) может быть и банаховым, и гильбертовым бесконечномерным пространством (например для - стандартной гауссовой меры в $\mathbb{R}^\infty$ группа допустимых сдвигов это l^2), – этому посвящены многочисленные вероятностные и аналитические работы, начиная с сороковых годов XX века. Такие меры по (неправильной) традиции называют квазиинвариантными, что все же не вызывает путаницу, так как "настоящих"(т.е. с множеством допустимых сдвигов положительной меры) квазиинвариантных мер на нелокально компактных группах не существует. Особенно интересны и все еще не достаточно изучены квазиинвариантные меры на неабелевых бесконечномерных группах; они необходимо для развития анализа и теории представлений таких групп и приложений к теоретической физике (группы диффеоморфизмов, группы токов, группы автоморфизмов тех или иных структур).

Если же требовать от неотрицательной и ненулевой меры инвариантности (а не квази-инвариантности) относительно сдвигов на элементы нелокально-компактной группы, то, разумеется, эта мера должна быть уже бесконечной; при этом интерес представляют лишь сигма-конечные, конечные на компактах борелевские меры. Нетрудно построить такие примеры с тощей группой допустимых сдвигов. Вот один из них: в пространстве всех вещественных последовательностей $\mathbb{R}^\infty$ рассмотрим бесконечное произведение m^∞ мер Лебега m на единичном интервале и сигма-конечную меру, получающаяся сдвигами на финитные целочисленные последовательности этой продакт-меры, эта мера инвариантна относительно трансляций на финитные векторы из подпространства $\mathbb{R}_\infty$. Но этот пример не очень содержателен из-за малого количества линейных симметрий меры; а группа допустимых сдвигов есть всего лишь сумма конечномерных пространств.

Наш пример (п.4.4), - аддитивной бесконечномерной меры Лебега $Log\mathcal{L}^+$, - является новым и неожиданным именно в этом отношении: *группа допустимых сдвигов, сохраняющих инвариантную сигма-конечную, конечную на компактах меру является бесконечномерным банаховым пространством* ($L^1(X)$), при этом мера сосредоточена на множестве счетных линейных комбинаций дельта функций. Не исключено, что в существенном этот пример исчерпывают все имеющиеся возможности для группы сдвигов, являющейся банаховым пространством. Очень интересно, какие неабелевы полные бесконечномерные группы могут группами допустимых сдвигов? Можно ожидать, что изучение подобных примеров приведет к полезным приложениям и в теории бесконечномерного интегрирования.

Список литературы

[1] H.Poincare. Le Calcul des Probabilites. Paris. 1912.

[2] E.Borel.Introduction geometrique a quelques theories physique. Gautiher-Villard Paris. 1914.

[3] E.Borel. Theorie Cinetique des Gaz. Annal.L'Ecole Norm. Sup. v.23.1906.2-32.

[4] R.Mehler. Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaseschen Functionen hoherer Ordnung. Journ. Reine und Angew. Math.1866. 161-176.

[5] On Boltzmann's theorem on average distribution energy in a system of material points. Cambr.Phil.Soc.Trans. 12, 1878.

[6] P.Cartier. Le Calcul des Probabilites de Poincare. Institut des Hautes Etudes Scientifiques. September 2006, IHTS/M/06/47/

[7] D.Strook. Probability theory:an analitical point of view. Camd.Unv.Press (1997).

[8] M.Yor. Some aspects of Brownian Motion. Part.2.Birkhauser.1997.

[9] P.Diaconis, D.Fridman. A dozen de Finetti-style results in search of the theory. Annal.de l'Inst.H.Poincare.Prob.et Stat.23 (1987) n.2. 397-423.

[10] M.Yor, J.Pitman. The two-parameter PD-distribution derived from a stable subordinator. Ann.Prob.25(1997) No.2 855-900.

[11] А.М.Вершик. Измеримые реализации групп автоморфизмов и интегральные представления положительных операторов. Сиб мат ж. т.28 №1, 1987, 52-60.

[12] А.М.Вершик. Описание инвариантых мер для действия некоторых бесконечномерных групп. ДАН СССР т.218, №4 (1974) 749-752.

[13] А.М.Вершик. Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно рапределенные случайные матрицы. Функц.анал. и прил. т.36 №2 (2002), 12-28.

[14] А.М.Вершик, И.М.Гельфанд, М.И.Граев. Представления группы $SL(2, \mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ - кольцо функций. Усп.мат.н. т. 28, №5, (1973), 83-128.

[15] А.М.Вершик, И.М.Гельфанд, М.И.Граев. Коммутативная модель представления групп токов $SL(2, R)$, связанная с унипотентной подгруппой. Функц.анал и прил. т.17, 2, (1983), 70-72.

[16] I.M.Gelfand, M.I.Graev, A.M.Vershik. Models of representations of current groups. In Lie groups and Lie algebras. ed.Kirillov. Akademiai Kiado, Budapest. 1985.121-180.

[17] А.М.Вершик, М.И.Граев.О представлениях групп токов $SO(n,1)$. Функц.ан и прил. т. 39, №2 (2005) 1-12.

[18] M.I.Graev, A.M.Vershik. The basic representation of the current group and L^2 space on the generalized Lebesgue measure. Indag. Math. 16, 3/4 (2005).

[19] N.Tsilevich, A.Vershik, M.Yor. An infinite-dimensional analogue of Lebesgue measure and distinguish properties of the gamma process. Journ. of Func.Anal. v. 185 № 1, 274-296, 2001.

[20] J.F.C.Kingman. Poisson Processes. Oxford. Univ. Press. 1993.

[21] А.М.Вершик,А.А.Шмидт. Симметрические группы высокой степени. ДАН СССР, т.206 № 2. (1972), 269-272.

[22] А.М.Вершик,А.А.Шмидт. Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. Теор. вер. и прим. т.22, № 1 1977, 72-88, II т. 23 № 1,(1978) 42-54.

[23] Ц.Игнатов. Константа, возникшая в асимптотической теории симметрической группы и меры Пуассона–Дирихле. Теор.вер.и ее прим. 27(1982) №1 129-140.

[24] А.М.Вершик. Асимптотическое распределение разложения натуральных чисел на простые делители. ДАН СССР т 289, №2, 269-272 (1986).

[25] . "Notices of the AMS". Letters to Editors. v. 45, №5 (1998) 568-569.

[26] Н.В.Цилевич. Стационарное распределение случайного разбиения положительных целых чисел. Теор.Вер. и прим. т.44б 1999б 60-74.

[27] P.Diaconis, E.Meyer-Wolf, O.Zeitouni,M.Zerner. Uniqueness of invariant distirubution for split-merge transformation and Poisson-Dirichlet law. Ann of Prod. 32 (2004) 915-938.

[28] P.Billingsley On disrtirbution of larger prime divisors. Period Math.Hungar. 2(1972),283-89.

[29] M.Arratia, A.Barbour, S.Tavare. Logarithm combinatorics structure: a probabilistic approach. EMS Monograph in Math. EMS, Zurich 2003.

[30] G.Tanenbaum. Introduction to analytic and probabilistc number theory. Camb. Univ. Press 1995.

[31] M.Yor. Some remarkabe properties of Gamma processes. Preprint. Univ. Maryland. Sept. 2006.

[32] A.Vershik, M.Yor. Multiplicativite du processus gamma et eitude asymptotique des lois stables d'induce alpha, lorsque alpha tend vers 0, Prepubl. Lab. Prob. l'Univ. VI, 289 (1995), 1-10.

[33] А.М.Вершик, Н.В.Цилевич. Фоковские факторизации и разложение пространств L^2 над общими процессами Леви. Успехи матем. наук т.50 №3(351) (2003) 3-50.

[34] Дж.фон Нейманн.Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного поряд-ка.в сб."Избранные труды по функциональному анализу"т.1 "Наука"1987.277-327. Опубликована в Portugaliae Math. 1942, 1-62.

[35] И.С.Градштейн,И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.М. 1963.

[36] E.Glasner, B.Tsirelson, B.Weiss. The autormorphism grop of Gaussian measure can not acn poinwise. Israel J Maty. 148(2005), 305-329.

[37] S.Kerov, G.Olshansky, A.Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. Invent. Math. v.158 № 3, (2004) 551-642.

[38] А.Вейль. Интегрирование в топологических группах и его применение. ИИЛ. М. 1950.