ПРЕПРИНТ ПОМИ 01/2007

Двойственность Крейна, позитивные 2-алгебры и дилатация коумножений

А. М. Вершик*

05.01.07

К столетию Марка Григорьевича Крейна

Аннотация

Двойственность Крейна–Таннаки для компактных групп нашла приложения в теории тензорных категорий и квантовых групп, а также, что менее известно, в алгебраической комбинаторике («алгебры Крейна»). Позже выяснилось, что полезно расширить двойственность Крейна и рассматривать теорию алгебр в положительной двойственности, начатую в [5]. Мы переформулируем эти понятия, используя язык биалгебр (и алгебр Хопфа) и вводим класс инволютивных биалгебр и позитивных 2-алгебр. Показывается, что класс конечномерных инволютивных полупростых биалгебр совпадает с классом полугрупповых алгебр конечных инверсных полугрупп. Основная поставленная в работе проблема состоит в изучении возможности дилатации (вложения) позитивных 2-алгебр в инволютивные биалгебры или иначе в описании подобъектов того или иного типа в инволютивных биалгебрах. Мы определяем строгое вложения (строгие подобъекты биалгебр); лишь немногие позитивные 2-алгебры допускают строгое вложение в биалгебры; затем определяется более широкое понятие нестрогого вложения (нестрогого подобъекта) и приводятся примеры, различающие эти два класса дилатаций уже для двумерных позитивных 2-алгебр.

*С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН. E-mail: `vershik@pdmi.ras.ru`. Частично поддержано грантами РФФИ 05-01-00899 и CRDF RUM1-2622-ST-04.

1 Введение

Цель этой работы в постановке проблемы о подъеме (или дилатации коумножений, или дерандомизации умножений) алгебр с инволюцией и положительными умножением и коумножением (мы называем их позитивными 2-алгебрами) в инволютивную биалгебру, например в групповую биалгебру конечной группы или инверсной полугруппы. Эта задача возникла в связи с проблемами, относящимися к теории ассоциативных схем, а также в связи с комбинаторными вопросами теорией представлений. Но сама задача о дилатации родственна некоторым задачам теории операторов (дилатации полугрупп операторов), динамических систем (марковские полугруппы и случайных алгебраических систем (дерандомизация умножений).

Многие идеи берут начало от работ М.Г.Крейна о двойственности и положительности, поэтому мы начинаем (параграф §2) с краткого исторического очерка о положительных умножениях и двойственности, показывающего, каким сложным путем идеи М. Г. Крейна о двойственности и положительности алгебр наконец объединились в наше время. Этот очерк не полон и не затрагивает многих смежных вопросов (см. [4]).

Наиболее яркий конкретный пример нашей основной проблемы дан в параграфе (§3), - это вопрос об алгебре Гекке $H_n(q)$ и ее вложении в $GL(n, \mathbb{C})$, рассмотренный с разных точек зрения.

В §4 мы определяем категорию *позитивных инволютивных 2-алгебр*, т.е. пространств с положительными (относительно заданных инволюции и коинволюции) умножением и коумножением. Эта категория функториально эквивалентна категории $*$-*алгебр в положительной двойственности*, введенной автором в 1971 г. в [5], а сама идея двойственности является в известном смысле продолжением идей М. Г. Крейна.; в настоящей работе в основном используются более современные термины «умножения–коумножения» вместо умножений в спаренных алгебрах. Определяются два вида подобъектов в инволютивных биалгебрах (§5), а затем (§6) дается точная постановка общей задачи. За недостатком места мы откладываем изложение примеров и вычислений для некоторых (бикоммутативных) случаев, см. [32]. Общая проблема далека от своего решения.

2 Работы М. Г. Крейна о двойственности и положительности в алгебрах

В 40-х годах М. Г. Крейн занимался теорией представлений и опубликовал несколько статей на эту тему. Статьи [15, 16] посвящены инвариантным эрмитово-положительным ядрам на однородных пространствах и примыкают к излюбленной им тематике о положительной определенности и ее связях с теорией операторов.[1] Эти работы не были, насколько мне известно, продолжены им, но получили достаточную известность. В частности, один из результатов статьи [16] — теорема об эквивалентности алгебраической и скалярной положительности — понадобится нам далее. В довоенной статье [13] и более полной статье на ту же тему [14], которые внешне никак не связаны с предыдущими (хотя в [14] приведен основной результат из [16]), популярная тогда двойственность Понтрягина–Ван Кампена для локально компактных абелевых групп была перенесена на компактные неабелевы группы (несколько ранее это было сделано, правда в меньшей общности, Т. Таннакой, о чем М.Г. узнал от Д. А. Райкова после публикации работы [14]).

Если в абелевом случае двойственность не выводит за пределы категории абелевых групп — «функтор Фурье» сопоставляет данной группе группу ее характеров и обобщает классическую теорию преобразования Фурье с групп $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$ на все локально компактные абелевы группы, то в неабелевом случае двойственный объект есть не группа, а некоторая алгебра. То, что называют сейчас блок-алгеброй Крейна [15], есть коммутативная алгебра, разбитая в не более чем счетную сумму простых конечномерных алгебр над $\mathbb{C}$ с выделенным базисом. Этот базис есть базис матричных единиц во всех классах эквивалентных неприводимых представлений группы. Точнее, если G — компактная группа, то нетрудно увидеть в двойственной по Крейну блок-алгебре к компактной группе алгебру всех непрерывных функций на группе, снабженную разложением в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов и *базисом* из матричных элементов всех унитарных неприводимых представлений. Теорема двойственности Крейна состоит в том, что эта блок-алгебра определяет группу с точностью до изоморфизма, как группу мультипликативных на базисе скалярных гомоморфизмов. Доказательство эффектно использует теорию нормированных колец Гельфанда.[2] М.Г. реализует групповую алгебру компактной группы как, по его выражению, блок-алгебру, то есть как алгебру функций на счетном множестве классов неприводимых унитарных представлений с матричными значениями; выбирая определенным образом базис в этой алгебре, мы приходим к теореме двойственности.

Более симметричная формулировка теорем Крейна возникает, если освободиться от базисов и использовать инвариантный язык теории двойственности алгебр как векторных пространств. см. §5. Первая алгебра есть групповая алгебра группы G над неко-

[1] «Слова «положительно определенная функция» действуют на меня, как звук трубы на боевого коня», — в присущем ему приподнятом стиле сказал М.Г. в своем докладе на конференции по функциональному анализу в 1958 году в Одессе.

[2] Рискну предположить, что успехи только что появившейся гельфандовской теории нормированных колец и особенно теории бесконечномерных представлений и стимулировали занятия этими вопросами и М. Г. Крейна, и А. Н. Колмогорова (см. переписку в [12]).

торым полем со сверткой, а двойственная алгебра есть алгебра непрерывных функций на группе со значениями в том же поле. Такую формулировку в духе бурбакистской теории двойственности векторных пространств [1], предложил автор в работе [5], где вводилось понятие пар *-алгебр в двойственности. и геометрический ее аналог -теория пакетов. Эта теория была подробно развита С.В.Керовым в [9, 10] и в недавние годы в [6, 3, 7].

Современная формулировка такой двойственности, выработанная постепенно начиная с работ тех лет, использует термины биалгебр и алгебр Хопфа. Она заключается в том, что в групповой алгебре есть коммутативное коумножение, а в коммутативной алгебре функций на группе есть сверточное коумножение и каждая из этих двух биалгебр определяет другую. Эта формулировка без всяких дополнений годится для конечных групп; позже она была обобщена на универсальные обертывающие алгебры групп Ли. Но в общем случае локально компактных групп она требует серьезных топологических комментариев, и в работе М.Г. собственно и приводились те соображения из теории нормированных колец, которых достаточно для компактных групп. Двойственность для общих локально компактных групп в продолжение работ Таннаки–Крейна рассматривали В. Стайнспринг, Г. И. Кац (кольцевые группы -предшественницы квантовых групп) и др. Теория двойственности групповых алгебр и алгебр функций на группе привела в конце концов, правда не столько по внутренним причинам, к теории квантовых групп. Кроме того, эти работы стали основополагающими для ряда непосредственных обобщений: категории Таннаки—Крейна в алгебраической геометрии [22, 26], двойственность Таннаки–Крейна для группоидов, понятие моноидальных категорий (см. [25, 30, 23]), теория обобщенного сдвига, некоммутативное интегрирование И. Сигал и др. Всему этому посвящены не одна сотня работ и несколько десятков книг.

И все же следует заметить, что сама по себе двойственность для некоммутативных групп в абстрактной форме, если она не привлекает каких-либо специальных свойств группы, тавтологична и, не побоимся сказать, не имела серьезных аналитических последствий, сравнимых с теорией Фурье для абелевых групп. Причина этого в том, что категорию, двойственную к категории групповых алгебр, трудно описать независимо в инвариантных терминах, даже в конечномерном случае. Для содержательного обобщения теории Фурье и построения гармонического анализа требуется дополнительная структура на группе или алгебре, фиксирующая какую-либо инвариантно определенную коммутативную подгруппу (подалгебру) — например, картановскую подгруппу (в теории полупростых алгебр Ли), алгебру Гельфанда–Цетлина (в теории симметрических или подобных ей групп) и т.д. Тогда двойственность становится аналитическим инструментом для изучения групп или алгебр.

В то же время, истинное развитие идей двойственности М. Г. Крейна пошло совсем по другой линии, и в ней идеи двойственности объединились с теоремами положительности из работ [15, 16]. А именно, реальное и, по-видимому, не вполне предусмотренное авторами[3] приложение открылось гораздо позже, с одной стороны, в теории двойственности алгебр (см. выше), а с другой, с большим запозданием, в алгебраической комбинаторике и теории ассоциативных схем (см., например, [2]). Именно там понятие блок-алгебры (алгебры Крейна) стало образцом для обобщений и использовалось уже не только для групповых алгебр. Говоря современным языком, состоялся переход от рассмотрения биалгебр и алгебр Хопфа к системам (2-алгебрам) с *менее жестким согласованием умножений и коумножений.* И решающим аргументом в построении этой теории стала как раз одна из теорем работы [16] о положительности, а не сама по себе двойственность.

Запутанная линия ссылок на эти работы М.Г. вкратце выглядит так. Условие положительности для очень специального случая было введено Д. Хигманом в 1964 году; затем Л. Скотт опубликовал коротенькое замечание в «Notices» [27] о том, что его коллега и специалист по гармоническому анализу С. Дункл обратил его внимание на то, что в работе М.Г. [15] есть общее условие положительности для однородных пространств и поэтому условие Хигмана, как пошутил Скотт, является новым только для рассмотренного Хигманом примера. За этим последовали работы Д. Хигмана [24], Л. Скотта [28] и многих других по алгебраической теории ассоциативных схем (см. [2]), после которых условие положительности констант Крейна стало общепринятым и использовалось постоянно. Интересно, что все эти работы, как и последующие работы по этой тематике, тяготеют к работе [14] о блок-алгебрах и именно блок-алгебры обобщают на негрупповую ситуацию (которой не было у М.Г.), но реально используются не столько результаты работы [14] о построении блок-алгебры компактной группы, сколько простое, но ключевое для всех этих рассмотрений условие положительности функций для однородных пространств из работы [16]. Заметим, что предварительная статья 1941-го года [13] была уже во время войны замечена С. Бохнером [19], и, видимо, поэтому этот результат М.Г. стал рано известен на Западе, во всяком случае специалистам по функциональному анализу. Любопытно еще и то, что эти работы М. Г. Крейна переоткрыли для себя и применили, с почти 30-летним запозданием, в своих исследованиях по алгебраической комбинаторике математики, работавшие в Соединенных Штатах и Японии, а не на Украине или в Москве, где было немало специалистов, занимавшихся ровно теми же вопросами, и где работы М. Г. Крейна, казалось бы, должны были быть более

[3]В 1980 году М.Г., показывая мне присланную ему автором (кажется, Ф. Дельсартом) книжку по алгебраическому кодированию и схемам отношений, где его имя появлялось через страницу, говорил с некоторым смущением: «Я тут ни при чем и совершенно этого не понимаю». «Это» и была двойственность Крейна, только не для групповых алгебр компактных групп, как у него, а для алгебр, порожденных ассоциативными схемами.

известными. Впрочем, при подготовке упомянутой выше работы [5], где введена так называемая положительная двойственность $*$-алгебр и постулированы положительность умножения и коумножения, я также в качестве образца имел в виду скорее теоремы Крейна–Таннаки, и др. о двойственности, нежели работу М. Г. Крейна [16]. Работа [5] о положительных спариваниях $*$-алгебр и была задумана как попытка обобщить двойственность Крейна с групп на однородные пространства двойных классов, но затем выяснилось, что введенное ослабление требования мультипликативности охватывает гораздо более общие объекты, не обязательно групповой природы. Но в этой работе мы соединяем основную тему и с другим направлением, которым также занимался М.Г. - теорией дилатаций; эта связка, по-видимому, является новой. В функциональном анализе она представлена работами Фойяша-Надя, школы Крейна, В. Стайнспринга (теорема о дилатации вполне положительных отображений) М.А.Наймарк (подъем положительных операторных мер до проекторных мер или спектральных мер) и др.; теперь она появляется и в задачах чисто алгебраической природы.

3 Пример основной задачи

3.1 Дилатация классической алгебры Гекке

Комплексная алгебра Гекке $H_n(q)$, $q \in (0, \infty)$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, задается образующими τ_i, $i = 1, \dots, n-1$, и соотношениями

$$\tau_i \tau_j = \tau_i \tau_j, \qquad |i-j| > 1,\ i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$(\tau_i + 1)(\tau_i - q) = 0, \qquad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, n-2.$$

Хорошо известно, что эта алгебра изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)$ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, а элементы τ_i, $i = 1, \dots, n-1$, суть деформации классических коксетеровских транспозиций σ_i. Линейный базис алгебры Гекке индексируется элементами симметрической группы: $\mathfrak{S}_n \ni g \to \tau_g$, причем коксетеровской транспозиции $\sigma_i = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$ сопоставляется образующая $\tau_{\sigma_i} \equiv \tau_i$, $i = 1, \dots, n-1$, а произвольной подстановке g с *приведенным* разложением в произведение коксетеровских транспозиций $g = \prod_k \sigma_{i_k}$ сопоставляется элемент $\tau_g = \prod_k \tau_{i_k}$. Рассмотрим в этой алгебре покоординатное кокоммутативное коумножение, т.е. диагональ на указанном базисе $\{\tau_g\}$:

$$\Delta(\tau_g) = \tau_g \bigotimes \tau_g, \qquad g \in \mathfrak{S}_n.$$

Поскольку при $q \neq 1$ линейный базис $\{\tau_g\}$, $g \in \mathfrak{S}_n$, не образует группу (произведение двух его элементов $\tau_{h_1} \cdot \tau_{h_2} = \sum_g c^g_{h_1,h_2} \tau_s$ есть лишь линейная комбинация элементов базиса), то это *коумножение уже не является гомоморфизмом алгебры* $H_n(q)$ в алгебру $H_n(q)\bigotimes H_n(q)$, и поэтому алгебра Гекке не является биалгеброй и тем более алгеброй Хопфа, каковыми являются групповые алгебры $\mathbb{C}(\mathfrak{S}_n)$. В то же время, если q есть степень простого числа p, $q=p^m$, то классический результат состоит в том, что алгебра Гекке $H_n(q)$ есть подалгебра групповой биалгебры $\mathbb{C}(GL_n(F_q))$ группы всех обратимых матриц $GL_n(F_q)$ над конечным полем F_q, а именно подалгебра двусторонних классов по борелевской подгруппе (группе верхнетреугольных матриц); при этом коумножение в $H_n(q)$, определенное выше, есть проекция коумножения в групповой алгебре. Тем самым, алгебра Гекке $H_n(q)$ при $q=p^m$ вкладывается в групповую алгебру группы $GL_n(F_q)$.

Однако при $q>1$ *коумножение в алгебре Гекке, не являясь гомоморфизмом, все же остается положительным отображением* в смысле конуса положительных элементов (относительно естественной инволюции), поскольку, как легко видеть, коэффициенты $c^s_{g,h}$ — структурные константы умножения — неотрицательны. Очевидно, что положительность коумножения и умножения является необходимым условием вложения в биалгебру, так как гомоморфизмы всегда являются положительными отображениями и положительность сохраняется при положительных проекциях (но, конечно, не всякое положительное отображение мультипликативно). Пользуясь языком теории операторов, можно сказать, что при $q=p^m$ удалось найти *дилатацию* (подъем) алгебры Гекке: исходные положительные, но не мультипликативные операции — умножение и коумножение в $H_n(q)$ — стали в объемлющей групповой биалгебре $\mathbb{C}(GL_n(F_q))$ ограничениями и проекциями мультипликативных операций.[4]

Поэтому возникает естественный вопрос: не является ли положительность умножения и коумножения достаточным условием вложимости в какую-либо биалгебру? Более конкретно:

нет ли подобного вложения и для других значений $q\neq p^m$, т.е. нельзя ли вложить алгебру Гекке $H_n(q)$ при других q с сохранением умножения и дилатацией коумножения в некоторую биалгебру, пусть не обязательно групповую, а в алгебру Хопфа,

[4]Примеры употребления термина «дилатация» таковы: унитарная дилатация сжатия T в гильбертовом пространстве K есть унитарный оператор U в некотором расширении $H\supset K$, такой, что для ортогонального проектора $P:H\to K$ и всех натуральных n имеет место равенство $T^n=PU^n$ (теоремы типа теорем Наймарка, Надя и др.); или более близкая к рассматриваемой ситуация: дилатацией положительного (марковского) оператора T в пространстве L^2 называется унитарный мультипликативный оператор U с аналогичным свойством: $T^n=PU^n$ для некоторого математического ожидания P и т.д. (см. [31]). В нашем случае речь идет о дилатации только коумножения, как операции из алгебры в ее тензорный квадрат, так как умножение непосредственно наследуется из расширенной биалгебры. Дилатациям также посвящены работы М. Г. Крейна и Фояша–Надя, см. [18]. В отличие от известных теорем о дилатациях одного оператора, мы ищем, например, согласованные дилатации семейства операторов умножения на каждый из элементов базиса алгебры.

быть может, даже бесконечномерную? Ведь необходимое условие — положительность умножения и коумножения — имеет место.

Ответ на этот вопрос автору неизвестен. Детальная постановка подобных вопросов для широкого класса алгебр и их предварительный анализ и частичное решение для двумерных алгебр есть основной предмет этой статьи.

Существование такого вложения в *групповую алгебру конечной группы* для общих q маловероятно; например, для алгебры Гекке с $n = 3$, $q \neq p^m$ таких групп не существует (замечание И. Н. Пономаренко). Наоборот, существование такой группы ($GL_n(q)$) при $q = p^m$ выглядит удивительным. Но, как мы увидим, инволютивные биалгебры далеко не исчерпываются групповыми биалгебрами, и вообще имеются иные потенциальные возможности для положительного решения вопроса и в других случаях. Примерами тавтологически утвердительных ответов для некоторых алгебр являются шуровские алгебры (S-кольца), в частности централизаторные алгебры индуцированных представлений (см. [2]); косетные многозначные группы (см. [21]) или, более общо, ассоциативные схемы группового происхождения, например алгебры функций, постоянных на орбитах групп автоморфизмов группы, в частности алгебры центральных функций с базисом из классов сопряженности, и т.д. Но есть немало естественных примеров таких алгебр, гораздо более простых, чем алгебра Гекке, для которых ответ на этот вопрос неочевиден: например, это так даже для двумерных алгебр.

Описание *препятствий для таких вложений* было бы не менее интересным для анализа таких объектов. Они встречаются уже в размерности 2. Очевидным препятствием к построению *конечномерных* накрывающих алгебр служит иррациональность структурных констант коумножения; препятствием к построению *групповых дилатаций* служит нарушение некоторых арифметических связей между структурными константами, или же такое препятствие может быть связано с условиями на порядки групп и подгрупп и т.д.

3.2 Вероятностная трактовка: дерандомизация случайного умножения

На наш пример с алгеброй Гекке можно посмотреть иначе. Сделаем замену образующих:

$$\bar{\tau}_g = q^{-l(g)}\tau_g, \qquad g \in \mathfrak{S}_n,$$

где $l(g)$ — приведенная длина подстановки g, в частности, $\bar{\tau}_i = \frac{\tau_i}{q}$, $\bar{e} = e$. В этой нормировке в формуле

$$\bar{\tau}_{h_1} \cdot \bar{\tau}_{h_2} = \sum_g \mu^g_{h_1,h_2} \bar{\tau}_g$$

для умножения элементов нового базиса, как нетрудно проверить, сумма коэффициентов $\sum_s \mu^g_{h_1,h_2}$ (все они неотрицательны) стала равной единице, поэтому можно считать, что произведение любых двух элементов нового базиса есть вероятностная мера μ_{h_1,h_2} на множестве $\{\tau_g\}$, $g \in \mathfrak{S}_n$. Иначе говоря, умножение является «вероятностным», или «случайным», в противоположность умножению в группах или полугруппах, где оно является в понятном смысле «детерминированным».

Назовем устойчивым разбиением группы или полугруппы или более общей системы с бинарной операцией такое разбиение системы на подмножества (блоки), что векторное подпространство всех линейных комбинаций блоков есть алгебра. Тогда поставленный выше вопрос о дилатации умножения можно сформулировать так. Пусть задано «случайное» умножение на множестве $\mathfrak{S}_n$ (или на другом множестве); тем самым, векторное пространство функций на этом множестве есть алгебра. Не является ли умножение в этой алгебре проекцией (рандомизацией) детерминированного умножения? Более подробно, существуют ли такие группа или полугруппа (или даже G-пространство) и ее устойчивое разбиение, что для любых двух блоков разбиения (s и t) распределение их произведения как меры на множестве блоков совпадает с правилом умножения в исходной алгебре (мерой $\mu_{s,t}$ в вышеприведенном примере). В этой трактовке наш вопрос заключается в том, *как дерандомизировать случайное умножение или коумножение.* Аналогичные более простые задачи о дерандомизации встречаются, например, в общей теории марковских процессов, эргодической теории и др. Именно такая дерандомизация предлагается в конце статьи.

4 Биалгебры, инволютивные биалгебры.

4.1 Биалгебры

Определение 1. ***2-алгеброй*** *мы называем векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, в котором заданы структуры ассоциативной алгебры с единицей и коассоциативной коалгебры с коединицей над тем же полем (вообще говоря, без каких бы то ни было условий согласованности этих структур между собой).*

Биалгеброй *(см.* [8]*) называется 2-алгебра, удовлетворяющая следующим эквивалентным условиям: 1) коумножение и коединица являются гомоморфизмами соответствующих алгебр; 2) умножение и единица являются гомоморфизмами соответствующих коалгебр.*[5]

[5]Естественно было бы использовать термин «биалгебра» для объектов, названных выше 2-алгебрами, а ту или иную согласованность умножения и коумножения отмечать эпитетом к слову «биалгебра»; тогда то, что называется сейчас биалгеброй, следовало бы назвать «мультипликативной биалгеброй», то, что далее названо «позитивной 2-алгеброй», «позитивной биалгеброй» и т.д. Но такая

Обозначим умножение как оператор из A в $A \bigotimes A$ через δ, единицу через ϵ, коумножение через $\Delta : A \to A \bigotimes A$, а коединицу через ε. Определение биалгебры симметрично по отношению к парам (Δ, ε) и (δ, ϵ), что часто делает излишними доказательства параллельных утверждений. Иногда произведение в A мы будем записывать также обычным образом: $\delta(x, y) = x \cdot y$.

Нам понадобится еще некоторое промежуточное понятие, а именно понятие *ослабленной биалгебры*, в которой выполнено лишь условие гомоморфности умножения и коумножения, но без требования обязательного сохранения этими операциями соответственно коединицы и единицы и без условия того, что единица есть гомоморфизм коалгебр, а коединица — гомоморфизм алгебр. например, алгебра матриц $M_n(\mathbb{C})$ с покоординатным коумножением и естественными единицей и коединицей не является биалгеброй, но дает важный для дальнейшего пример ослабленной биалгебры. Заметим, попутно, что алгебра $M_n(\mathbb{C})$ есть 1) 2-алгебра гомоморфизмов в $\mathbb{C}$ некоторой бесконечномерной биалгебры (см. [8]), а также 2) сжатая полугрупповая алгебра инверсной полугруппы матричных единиц (см. ниже).

Полезно связать все эти и последующие определения с определениями пар конечномерных алгебр в двойственности. Пусть A - 2-алгебра. Определим умножение в сопряженном векторном пространстве A' с помощью отображения, сопряженного с коумножением Δ, а инволюцию — как операцию, сопряженную с коинволюцией в A, и единицу в A' — с помощью коединицы в A. Тогда можно говорить о паре алгебр F и A' в двойственности с теми или иными дополнительными свойствами (мультипликативность, положительность и т.д.). И наоборот, упорядоченная пара алгебр в невырожденной двойственности 2-алгебру. Этот переход будет использоваться далее.

Групповая алгебра конечной группы со структурой свертки и диагональным коумножением очевидно является кокоммутативной биалгеброй (и даже алгеброй Хопфа). Хорошо известно также, (см. [8]), что полугрупповая алгебра любой конечной полугруппы (моноида) с единицей есть также кокоммутативная биалгебра с естественными определениями операций. В дальнейшем мы будем говорить о *групповых или полугрупповых биалгебрах*, имея в виду обе мультипликативные структуры.

4.2 Инволютивные биалгебры

Наш план состоит во введении дополнительных структур в биалгебрах, так или иначе присутствующих в групповых и близких к ним биалгебрах, и в последующем ослаблении некоторых требований к структурам биалгебр (и алгебр Хопфа. Прежде всего, если не оговорено противное, в дальнейшем рассматриваются конечномерные биалгеб-

---

переделка терминологии, к сожалению, слишком запоздала.

ры, которые являются полупростыми алгебрами и коалгебрами (коалгебра полупроста, если полупроста двойственная ей алгебра). Снабдим биалгебру A инволюцией и коинволюцией; инволюцией алгебры A называется антилинейный антиавтоморфизм второго порядка этой алгебры; точно так же антилинейный антиизоморфизм второго порядка коалгебры A называется коинволюцией.[6] Будем обозначать инволюцию и коинволюцию в A через $\sharp$ и $\flat$ соответственно. В этих обозначениях связи инволюции и коинволюции с умножением и коумножением выглядят так:

$$\delta(\sharp\otimes\sharp)=\sharp\delta J,\qquad (\flat\otimes\flat)\Delta=J\Delta\flat,$$

где J — перестановка (флип) в тензорном произведении: $J(x\otimes y)=y\otimes x$.

Определение 2. *Биалгебра, снабженная инволюцией и коинволюцией, называется* ***инволютивной биалгеброй*** *или биалгеброй с инволюцией, если умножение коммутирует с коинволюцией, а коумножение — с инволюцией:*

$$\Delta\sharp=(\sharp\otimes\sharp)\Delta,\qquad \delta(\flat\otimes\flat)=\flat\delta.$$

В алгебре с инволюцией $\sharp$ определено понятие *неотрицательных элементов* — элементов вида $x\cdot x^\sharp$. Они образуют выпуклый *конус* $K^\sharp$, который мы будем называть *положительным конусом относительно инволюции* $\sharp$ (в конечномерном случае он будет замкнутым, а в общем случае надо рассматривать замыкание конической оболочки). *Положительный конус* $K^\flat$ *относительно коинволюции* $\flat$ определяется следующим образом: это полный прообраз относительно коумножения Δ конической оболочки элементов вида $x\otimes x^\flat\in A\bigotimes A$, $x\in A$, иначе говоря, $K^\flat=\{y\in A:\Delta y=\sum_i a_i\otimes a_i^\flat\}$.[7]

Теорема 1. *Коумножение в инволютивной биалгебре сохраняет конус, положительный относительно инволюции, а умножение сохраняет конус, положительный относительно коинволюции; или, коротко, в инволютивной биалгебре умножение и коумножение* ***положительны****.*

Замечание. Это утверждение содержит, в частности, алгебраическую часть теоремы Крейна о положительности умножения и коумножения для конечномерного случая.

Доказательство. Нужно доказать, что образ относительно копроизведения элемента, неотрицательного относительно инволюции, лежит в положительном конусе и что произведение элементов, неотрицательных относительно коинволюции, лежит в соответствующем конусе. В силу симметрии достаточно доказать одно из утверждений, второе

[6]Алгебры Хопфа с инволюцией (но без коинволюции) рассматривались ранее — см., например, [8].

[7]В терминах двойственности этот конус есть просто дуальный конус к конусу положительных элементов в двойственной алгебре относительно инволюции, сопряженной с инволюцией $\flat$.

будет следовать из первого заменой коумножения на умножение и инволюции на коинволюцию и переходом к дуальной биалгебре. При доказательстве положительности копроизведения положительных элементов можно ограничиться элементами вида $x \cdot x^\sharp$, $x \in A$, так как они порождают конус положительных элементов. Следующая выкладка использует коммутационные соотношения, сформулированные выше:

$$\Delta(x \cdot x^\sharp) = \Delta(x)\Delta(x^\sharp) = \Delta(x)[\Delta(x)]^\sharp.$$

Мы использовали мультипликативность коумножения и его коммутирование с инволюцией; аналогично при доказательстве второго утверждения используется мультипликативность умножения (относительно коумножения) и его коммутирование с коинволюцией. □

Замечание. Понятие ослабленной инволютивной биалгебры определяется аналогично тому, как это сделано ранее для биалгебр.

Комплексные групповые алгебры конечных групп являются с естественными структурами инволютивными биалгебрами в определенном выше смысле - инволюция порождена переходом к обратному в группе $g \to g^{-1}$, а коинволюция -сопряжением коэффициентов. Ниже мы рассмотрим класс полугрупп с аналогичными свойствами.

4.3 Инволютивные биалгебры и полугрупповые алгебры инверсных полугруппы

Рассмотрим более подробно связь инволютивных биалгебр с полугрупповыми алгебрами некоторых полугрупп. Покажем, что класс конечных инверсных полугрупп порождает в точности класс инволютивных полупростых биалгебр. Напомним (см.[11]), что инверсной полугруппой называется полугруппа S, в которой каждый элемент $a \in S$ имеет единственный инверсный элемент: $b \in S : aba = a$. Единственность этого элемента гарантирует, что и инверсный к элементу b есть a, поэтому на инверсной полугруппе есть естественная инволюция: каждому элементу a сопоставляется инверсный ему, обозначаемый $a^* = a^{-1}$. Умножение, коумножение и коинволюция определяется также, как и в групповом случае. Если в полугруппе S есть двусторонняя единица, то функционал - значение в ней- есть коединица (в коалгебре).

Основным и наиболее интересным для нас примером инверсной полугруппы служит *симметрическая инверсная полугруппа* $\mathcal{I}_n$ взаимно-однозначных частичных отображений конечного множества в себя (с пустым отображением в качестве нуля полугруппы). Важная теорема, обобщающая теорему Кэли о группах, что всякая конечная инверсная полугруппа изоморфно вкладывается в симметрическую инверсную полугруппу.

Напомним, что *сжатой полугрупповой алгеброй* полугруппы с нулем (см.[11]) называется (полная) полугрупповая алгебра, профакторизованная по одномерному идеалу, отвечающему нулю полугруппы.

Пример. Рассмотрим инверсную полугруппу $\mathcal{I}_n^1$, состоящую из n^2 матричных единиц $\{_{i,j}\}, i,j = 1\dots n$ и нуля 0 с обычным матричным умножением. Обратный элемент определяется так: $e_{i,j}^* = e_{j,i}, 0^* = 0$, Полугрупповая алгебра $\mathbb{C}(\mathcal{I}_n^1)$ есть алгебра матриц с присоединенным одномерным двусторонним идеалом - $M_n(\mathbb{C}) \bigoplus \mathbb{C}$ с кронекеровским коумножением (т.е. покоординатным в двойственной формулировке). Сжатая полугрупповая биалгебра этой полугруппы есть просто матричная биалгебра $M_n(\mathbb{C})$ (с кронекеровским коумножением). Обе алгебры, как отмечалось, выше есть неунитальные инволютивные биалгебры. Полугруппа $\mathcal{I}_n^1$ есть подполугруппа упомянутой симметрической инверсной полугруппы $\mathcal{I}_n$.

Теорема 2. *Полугрупповая алгебра конечной инверсной полугруппы есть полупростая кокоммутативная инволютивная биалгебра. Аналогично, двойственная полугрупповая алгебра $\mathbb{C}(S)$ конечной инверсной полугруппы с единицей S является коммутативной инволютивной биалгеброй. Обратно, всякая конечномерная, полупростая, кокоммутативная (в двойственном варианте - коммутативная) инволютивная биалгебра изоморфна (как инволютивная биалгебра) полугрупповой алгебре (соотв.двойственной полугрупповой алгебре) конечной инверсной полугруппы с единицей.*

Для инверсных полугрупп без единицы надо лишь добавить к этой формулировке, что полугрупповая биалгебра является ослабленной биалгеброй (коединица не задает гомоморфизм).[8]

Доказательство. Пусть $\mathbb{C}(S)$ есть полугрупповая алгебра полугруппы S над полем $\mathbb{C}$ - конечной инверсной полугруппы S. Теорема Оганесяна [17] утверждает что полугрупповая алгебра всякой конечной инверсной полугруппы полупроста. Поэтому в проверке нуждается лишь то, что связано с инволюцией, а именно, что $(ab)^* = b^*a^*$, это, действительно, верно (см. [11] Лемма 1.18), проверка остальных свойств инволюции и коинволюции - очевидны. Если в полугруппе S нет двусторонней единицы, то нет и соответствующего гомоморфизма в $\mathbb{C}$, поэтому это, вообще говоря, ослабленная инволютивная биалгебра.

Для доказательства обратного утверждения нам удобнее рассматривать двойственную формулировку и двойственную алгебру A'. Поскольку A' коммутативна и полупроста то, как алгебра с инволюцией, она изоморфна алгебре $\mathbb{C}^n$. В силу мультипликативности коумножения Δ образ идемпотента в A относительно Δ есть идемпотент

[8] Полугрупповая биалгебра конечной инверсной полугруппы является кроме того *планшерелевой* в смысле [9, 6], из этого факта вытекают многие упомянутые выше свойства инверсных полугрупп.

в $A \bigotimes A$ и поэтому коумножение определяет бинарную операцию на спектре алгебры $\mathbb{C}^n$, т .е. на $1, 2 \ldots n$. В силу коассоциативности Δ эта операция задает на спектре структуру конечной ассоциативной полугруппы, возможно, без единицы, и, возможно, с нулем. Поскольку инволюция коммутирует с коумножением, то она определяет инволюцию на полугруппе. То, что эта полугруппа является инверсной вытекает того, что всякая конечная подполугруппа комплексных матриц замкнутая относительно обычной инволюции матриц является инверсной. Для того, чтобы убедиться в этом можно использовать следующий критерий инверсности: Полугруппа с инволюцией является инверсной в том и только в том случае, если подполугруппа идемпотентов - коммутативна (см. [11] теорема 1.17) или упомянутый аналог теоремы Кэли, (см. также [20]). Наличие коединицы в биалгебре эквивалентно наличию единицы в полугруппе.

$\square$

Мы охарактеризовали класс полупростых, кокоммутативных конечномерных инволютивных биалгебр. В отличие от групповых биалгебр полугрупповые биалгебрами инверсных полугрупп, вообще говоря, не являются алгебрами Хопфа, так как в них нет антипода. Но в них есть "почти антипод": рассмотрим в полугрупповой алгебре инверсной полугруппы линейное продолжение S операции перехода к инверсному элементу $a \to a^{-1}$; этот оператор удовлетворяет условию отличающемуся от обычного условия на антипод (см.[8]). А именно, свертка S слева и справа с тождественным отображением - $S \star id$ и $id \star S$ есть проекция не на одномерное подпространство скаляров биалгебры, как это должно быть для антипода S в алгебрах Хопфа, а на коммутативную подалгебру идемпотентов полугруппы. Таким образом, описанный класс биалгебр наиболее близок к классу алгебр Хопфа. [9]

5 Позитивные 2-алгебры

5.1 Определения

Теорема 1 дает основания к следующему основному определению:

Определение 3. *Полупростая 2-алгебра A над $\mathbb{C}$ с умножением $\delta : A \bigotimes A \to A$, единицей ϵ и инволюцией $\sharp$, коумножением $\Delta : A \to A \bigotimes A$, коединицей ε и коинволюцией $\flat$ называется* ***позитивной 2-алгеброй****, если связь между операциями такова:*

(1) *умножение и коумножение положительны, т.е. умножение δ сохраняет конус $K^\flat$: $\delta(K^\flat \bigotimes K^\flat) \subset K^\flat$, а коумножение Δ — конус $K^\sharp$: $\Delta K^\sharp \subset K^\sharp \bigotimes K^\sharp$.*

[9] Заметим, что и теория представлений инверсных полугрупп очень близка к теории представлений групп и, в частности, позволяет упростить доказательства многих упомянутых фактов.

(2) *Как и в определении инволютивных биалгебр, инволюция* $\sharp$ *коммутирует с коумножением:* $\Delta(x^\sharp) = \{\Delta(x)\}^{\sharp \bigotimes \sharp}$*; а коинволюция* $\flat$ *коммутирует с умножением:* $x^\flat \cdot y^\flat = (x \cdot y)^\flat$.

Понятие позитивной 2-алгебры расширяет понятие инволютивной биалгебры, заменяя условия *мультипликативности умножения и коумножения* на более слабое условие *положительности и того, и другого.* В терминах двойственности алгебр оно было введено в [5]. Из утверждения 1 вытекает такое следствие:

Следствие 1. *Инволютивная биалгебра удовлетворяет условиям* (1), (2) *и тем самым является позитивной 2-алгеброй.*

Действительно, условие (1) следует из мультипликативности умножения и коумножения для биалгебр, а условие (2) входит в определение инволютивных биалгебр.

Условие (1) для позитивных 2-алгебр нельзя заменить условием положительности только одной операции: здесь уже из положительности одной операции положительность второй, вообще говоря, не следует, как показывают простые примеры (см., например, [3, 6]), и это отличает позитивные 2-алгебры от биалгебр. Распознавание того, будет ли позитивной конечномерная 2-алгебра, по конечномерным тензорам, задающим умножение и коумножение в этой 2-алгебре, есть NP-полная задача (опять-таки в отличие от проверки свойства быть биалгеброй).

Если надо подчеркнуть наличие всех перечисленных структур в бипозитивной алгебре, мы будем записывать

$$A = A(\delta, \epsilon, \sharp, \Delta, \varepsilon, \flat).$$

Несколько вольно различие между биалгебрами и позитивными 2-алгебрами можно выразить следующим образом: умножение (и коумножение) в биалгебрах является «детерминированным», а в позитивных 2-алгебрах — «вероятностным» (многозначным). Этой формулировке можно придать абсолютно точный смысл (см. введение).

Наиболее важен и нужен более узкий класс инволютивных биалгебр и позитивных 2-алгебр, который получается добавлением еще двух двойственных между собой требований, связывающих обе структуры:

Определение 4. *Позитивная 2-алгебра называется* ***однородной позитивной 2-алгеброй****, если кроме условий* (1), (2) *выполнено условие*

(3) *коединица есть положительный гомоморфизм алгебры в поле:* $\varepsilon(x \cdot y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$, *а образ единицы при коумножении есть единица в тензорном произведении:* $\delta(\epsilon) = \epsilon \bigotimes \epsilon$. *(Эти два условия симметричны относительно перехода к двойственным алгебрам.)*

Условие однородности (названное так позже в [6]) и было первоначальным условием положительной двойственности пар алгебр в исходной работе [5], поскольку именно оно позволяло развить *геометрическую теорию двойственности пакетов*, т.е. пар компактных полугрупп состояний на алгебрах с инволюцией, см. [5, 9, 10]. Его роль в том, что умножение (коумножение) можно трактовать в этом случае как вероятностное умножение (коумножение).

В недавней работе [21] были описаны групповые алгебры n-значных групп (n-алгебры Хопфа). Это описание дается в терминах гомоморфизмов Фробениуса. Поскольку групповые алгебры инволютивных n-значных групп являются частным случаем позитивных 2-алгебр (а именно тем, в котором структурные константы рациональны), то было бы интересно распространить это описание на все позитивные 2-алгебры.

5.2 Алгебры в положительной двойственности

Позитивные 2-алгебры есть калька понятия пары алгебр в положительной двойственности, введенной в Совсем кратко приведем их определение. Пусть A и B - две инволютивные алгебры над $\mathbb{C}$ с единицами и определено их невырожденное комплексное спаривание $< A, B >$. *Пара алгебр A и B находится в однородной положительной двойственности*, если выпуклое подмножество в B состояний (=нормированных положительно определенных функционалов) алгебры A устойчивы относительно операций инволюции и умножения в B и, соответственно, выпуклое подмножество в состояний алгебры B), устойчивы относительно операций инволюции и умножения в , и единица алгебры A (соотв.единица алгебры B) есть коединица алгебры B (соотв. алгебры A). Положительная двойственность называется неоднородной или ослабленной, если устойчивы только конусы неотрицательных элементов в том же смысле, и не предполагается ничего о единицах. Если перенести умножению в B (соотв. в A) обычным образом в коумножение в A (соотв. в B), то полученная 2-алгебра является позитивной 2-алгеброй (соответственно двойственной позитивной 2-алгебры) в смысле данного в пункте 5.1.

Язык двойственности подчас удобнее языка биалгебр. Например, он позволяет развить содержательное исследование конечномерной и бесконечномерной геометрии пар *пакетов*, которая рассматривалась в [5] как геометрическая теория состояний на $*$-алгебрах. Пакет — это выпуклый компакт определенного вида (блок-симплекс) состояний на полупростой конечномерной $*$-алгебре, снабженный умножением. Геометрия пакетов нетривиальна уже в коммутативном случае, пакет в этом случае есть аффинный симплекс со структурой полугруппы с инволюцией. Эта геометрия была далеко продвинута в [9, 10]. Соответствующие определения охватывают, как частный случай групповые алгебры, алгебры, возникающие в алгебраической комбинаторике (клеточные алгебры) и некоторые новые примеры. Можно ввести дальнейшие ограничения на связь умножения и коумножения (планшерелевость и др.); они ранее по инициативе автора были подробно рассмотрены в кандидатской диссертации С. В. Керова [9, 10] и модифицированы в недавних работах, связанных с алгебраической комбинаторикой, многозначными группами и др., см. [3, 6, 7, 21]; мы не рассматриваем здесь этих вопросов.

6 Подобъекты инволютивных биалгебр и формулировка основной проблемы

6.1 Строгие подобъекты

Перед тем как сформулировать центральную проблему, мы должны определить понятие подобъекта в категории инволютивных биалгебр. Автору неизвестно, определялось ли такое понятие в категории биалгебр или алгебр Хопфа. Возможны различные понятия подобъекта мы рассмотрим два из них. Пусть A- инволютивная биалгебра и предположим, что B есть подалгебра с единицей биалгебры A (как алгебры), замкнутая относительно инволюции и коинволюции. Если выполнено условие

$$\Delta B \subset B \bigotimes B, \qquad (*)$$

то коумножение в B наследуется из A и поэтому автоматически выполнены условия коассоциативности и коммутирования с инволюцией. В этом случае B есть инволютивная биалгебра со структурами, наследуемыми из биалгебры A, и B, казалось бы, естественно считать подобъектом в A. Однако это эти условия почти никогда не выполнены, класс таких подобъектов слишком узок и не покрывает наиболее важных и нетривиальных приложений. Предположим, что вместо условия $(*)$ выполнено гораздо более слабое условие:

Определение 5. *Пусть B есть подалгебра биалгебры A (как алгебры), содержащая единицу и замкнутая относительно инволюции и коинволюции; предположим, что в A существует положительный оператор $P = P_B$ проектирования на подалгебру B* [10]*, такой, что отображение*

$$\Delta_{P_B} : B \to (P \otimes P)\Delta,$$

т.е. P-проекция коумножения Δ на подалгебру B, задает коассоциативное коумножение на B, и предположим, что ограничение коединицы в A на B есть коединица относительно этого коумножения. Если выполнены эти условия, назовем B ***строгим подобъектом в*** *A* ***или допустимой подалгеброй инволютивной биалгебры*** *A.*

[10] P_B есть положительный оператор математического ожидания.

Утверждение 1. *Умножение $\delta|_B$ и коумножение Δ_P на допустимой подалгебре B, введенные выше, положительны относительно коинволюции и инволюции соответственно.*

Доказательство. В проверке нуждается лишь положительность коумножения, но (положительное) математическое ожидание проектирует положительные операции (каковой является мультипликативное коумножение) в положительные. □

Отсюда и из непосредственной проверки условия (3) вытекает

Следствие 2. *Допустимая подалгебра инволютивной биалгебры является однородной позитивной 2-алгеброй.*

Строгие подобъекты (допустимые подалгебры) ослабленных инволютивных биалгебр определяются точно так же: требования к единицам и коединицам опускаются. Отметим однако, что допустимая подалгебра ослабленной инволютивной алгебры вполне может быть однородной позитивной 2-алгеброй.

Замечание. 1) Условие допустимости подалгебры $B \subset A$ очень ограничительно: хотя для всякой подалгебры существует, как правило, единственный положительный проектор P_B, коассоциативность проекции коумножения $(P_B \bigotimes P_B)\Delta$ имеет место лишь в специальных случаях (см. следующий пункт).

2) Кажущаяся асимметрия между умножением и коумножением в нашем определении вызвана только удобством формулировок — легко сформулировать эквивалентное двойственное определение, приводящее к тому классу подобъектов.

Сформулируем предыдущее определение в терминах пар алгебр в положительной двойственности с тем, чтобы затем в тех же терминах дать более расширенное определение подобъекта.

Рассмотрим инволютивную биалгебру $\widehat{A}$ над $\mathbb{C}$ как пару алгебр в двойственности $< A, A' >$, где A рассматривается как $\widehat{A}$ со структурой алгебры, а A' -(алгебраически) двойственное векторное пространство, снабжено структурой алгебры с умножением, двойственным к коумножению в $\widehat{A}$. Пусть $\widehat{B}$ -позитивная 2-алгебра и пусть ей том же смысле соответствует пара алгебр $< B, B' >$ в двойственности. По сказанному выше в обоих случаях (во втором из них - по определению) двойственность алгебр - положительная. Следующее утверждение есть тавтологическая переформулировка приведенного выше определения подобъекта.

Утверждение 2. *Пусть T изоморфное положительное вложение алгебры B в алгебру A, сохраняющее единицу и такое, что ограничение сопряженного отображения T' : $A' \longrightarrow B'$ на некоторую подалгебру C алгебры A' - есть изоморфизм C с алгеброй B', и T' есть оператор математического ожидания на $C \subset A'$. Тогда*

1) при отождествлении подалгебры C с помощью T' и алгебры B', умножение в $B' = C$ соответствует коумножению в B.

2) $T\widehat{B}$ есть подобъект $\widehat{A}$.

Обратно, для всякого подобъекта $\widehat{B}$ биалгебры $\widehat{A}$ оператор T вложения B как алгебры A в удовлетворяет указанному свойству.

6.2 Динамические вложения в инволютивные биалгебры: нестрогие подобъекты.

Оказывается, что для решения проблемы дилатации предыдущее определение подобъекта также слишком жесткое, как мы увидим, положительное решение возможно крайне редко даже в малых размерностях, а условия существование такого решения, по-видимому, трудно выразимы. Дадим более широкое понятие подобъекта, которое можно было бы назвать *динамическим.* Точнее, определим новое понятие вложения позитивных 2-алгебр в инволютивные биалгебры. По поводу понятий комодуля и кодействия см [8], их легко интерпретировать в терминах пар алгебр в двойственности.

Определение 6. *Скажем, что позитивная 2-алгебра $\widehat{B}$ динамически вкладывается в биалгебру $\widehat{A}$ или, что ее образ есть нестрогий подобъект $\widehat{A}$, если существует такое положительное, сохраняющее единицу, инволюцию и коинволюцию, изоморфное вложение алгебр $T : \widehat{B} \to \widehat{A}$, что (левое) кодействие $\widehat{B}$ как коалгебры на себе расширяется с алгебры TB до кодействия (левого) всей коалгебры $\widehat{A}$ на себе.*

В определении строгого подобъекта коумножение в подалгебре поднималось (с помощью проектора на подалгебру) до коумножения во всей биалгебре; в данном определении поднимается лишь кодействие, при этом способ поднятия никак не оговаривается. Можно сказать, что мы вкладываем в биалгебру не столько позитивную 2-алгебру, сколько ее, как алгебру с согласованной с ней структурой комодуля. Различие между двумя понятиями вложения видно уже на примерах бикоммутативных алгебр, где умножение и коумножения коммутативны. Двойственная формулировка получается, если перейти к двойственным коалгебрам.

6.3 Формулировка основной проблемы

6.3.1 Строгий вариант

Пусть

$$A = A(\delta, \epsilon, \sharp, \Delta, \varepsilon, \flat)$$

— конечномерная однородная позитивная 2-алгебра. Когда существует (возможно, ослабленная) инволютивная биалгебра $\mathcal{A}$, такая, что A изоморфна некоторому строгому подобъекту $\mathcal{B}$ биалгебры $\mathcal{A}$? Если ответ положителен, то будем говорить, что соответствующая инволютивная алгебра $\mathcal{A}$ есть строгая ***дилатация*** *позитивной 2-алгебры A. Когда существует минимальная каноническая строгая дилатация?*

Будем называть эту как и следующую проблему *проблемой подъема позитивной 2-алгебры в биалгебру* или *строгой дилатации позитивной 2-алгебры* (или, в вероятностном контексте, *проблемой дерандомизации вероятностного умножения*). В этой постановке важно, что исходная позитивная 2-алгебра однородна, а искомая инволютивная биалгебра может быть и ослабленной; однородность позволяет интерпретировать проблему как задачу «дерандомизации» вероятностного коумножения, а предположение, что биалгебра может быть ослабленной, не нарушает условие «детерминированности» расширенного коумножения с одной стороны и существенно расширяет круг возможных ответов с другой.

Если оставаться в классе конечномерных инволютивных биалгебр, то заведомо необходимо ввести дополнительные ограничения на позитивную 2-алгебру - у нее должны быть образующие с рациональными структурными константами; иррациональность констант в любых образующих требуют перехода к бесконечномерным алгебрам.

С учетом теоремы 2 основная проблема, сформулированная выше, может быть поставлена гораздо более конкретно: *Какие конечномерные полупростые кокоммутативные однородные позитивные 2-алгебры с рациональными структурными константами изоморфны допустимой подалгебре двойственной полугрупповой алгебры инверсной полугруппы (в частности группы)? Иначе говоря, когда существует строгая дилатация в полугрупповую алгебру инверсной полугруппы произвольной рациональной коммутативной позитивной 2-алгебры*? По аналогии с группами, про соответствующие позитивные 2-алгебры можно было бы сказать, что они имеют полугрупповое происхождение. Примеры ниже показывают, что такое расширение класса алгебр недостаточно для положительного решения проблемы, а для двумерных алгебр - это расширение не дает ничего нового по сравнению с групповыми биалгебрами - см. п.6.

6.3.2 Формулировка проблемы: нестрогий вариант

Менее жесткой является другая постановка вопроса, который названа динамической, она ближе к понятию дилатации в смысле теории операторов и др. Различие лишь в том. что понятие подобъекта здесь более широкое. Изменение формулировок по сравнению с предыдущим пунктом в том, что везде слова "строгий подобъект", строгая дилатация"и т.д., надо заменить на слова "нестрогий подобъект", "не строгая дилатация"и т.д. Однако, запас позитивных 2-алгебр, для которых нестрогая дилатация возможна, гораздо шире, чем в первом случае. Это видно уже при рассмотрении бикоммутативных позитивных 2-алгебр.

6.4 Примеры строгих и нестрогих подобъектов

6.4.1 Позитивные 2-алгебры, являющиеся строгими подобъектами инволютивных биалгебр

Комплексная групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ конечной группы G, рассматриваемая как алгебра формальных сумм элементов группы (или как алгебра комплексных мер на группе G с коумножением, которое переносит такую меру с группы G на диагональ прямого произведения $G \times G$, и обычными инволюцией и коинволюцией), есть инволютивная биалгебра (и даже алгебра Хопфа с антиподом $g \to g^{-1}$). Образ элемента g группы при коумножении есть сумма пар элементов группы, произведение которых равно g.

Двойственная инволютивная биалгебра к групповой алгебре конечной группы есть коммутативная инволютивная биалгебра: это пространство всех комплексных функций на группе с поточечным умножением и диагональным коумножением $\Delta : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \bigotimes \mathbb{C}[G]$, $(\Delta f)(g, h) = f(gh)$, с комплексным сопряжением функций в качестве инволюции и с заменой аргумента функции на обратный с комплексным сопряжением в качестве коинволюции. Единица есть функция, тождественно равная единице, а коединица есть функционал «значение функции в единице группы».

Общий пример допустимой подалгебры (строгого подобъекта) (групповой биалгебры таков.

Утверждение 3. *Подалгебра $\mathbb{C}[H \diagdown G \diagup H] \equiv \mathcal{B}_H$ двусторонних классов по подгруппе H (иногда называемая алгеброй Гекке, отвечающей подгруппе H) в групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$) есть позитивная 2-алгебра, являющаяся допустимой подалгеброй биалгебры $\mathbb{C}[G]$ в смысле, определенном выше.*

Доказательство. Проекция в $\mathbb{C}[G]$ на $\mathcal{B}_H$ есть усреднение по двойным классам по подгруппе; очевидно, что эта проекция есть положительное математическое ожидание, которое проектирует коумножение в алгебре в естественное коумножение на пространстве двойных классов (двойственное к умножению классов). Замкнутость относительно инволюций и коинволюций и наличие единиц и коединиц очевидны, как и выполнение соотношений между ними. □

Предыдущее предложение остается дословно верным, если заменить разбиение на двойные классы смежности по подгруппе произвольным *устойчивым разбиением* группы, т.е. таким разбиением, что пространство функций, постоянных на блоках разбиения, есть инвариантная подалгебра групповой алгебры, содержащая единицу; и тогда это пространство точно так же есть позитивная 2-алгебра относительно индуцированных структур. Примером устойчивых разбиений, отличных от разбиения на двойные классы по некоторой подгруппе, может служить разбиение на орбиты некоторой группы автоморфизмов группы.

Можно распространить этот пример на инверсные полугруппы. По теореме 2, эти биалгебры являются инволютивными и полупростыми, и в них можно рассматривать подобъекты в предыдущем понимании. Легко проверить, что устойчивому разбиению инверсной полугруппы, понимаемому в том же смысле, как и в случае групп, соответствует допустимая подалгебра (подобъект) полугрупповой биалгебры, структурные константы такой 2-алгебр рациональны. Наоборот, доказательство теоремы 2 фактически содержит утверждение, что допустимой подалгебре двойственной полугрупповой алгебры отвечает устойчивое разбиение инверсной полугруппы. Таким образом, получаем

Следствие 3. *Класс строгих подобъектов инволютивных конечномерных полупростых биалгебр совпадает с классом позитивных 2-алгебр, порождаемых устойчивыми разбиениями конечных инверсных полугрупп (в частности, групп).*

Действительно, по теореме 2 по такой биалгебре сначала строится инверсная полугруппа, а затем в ней устойчивое разбиение. В бикоммутативном случае запас строгих подобъектов для групповых и полугрупповых биалгебр -совпадает. Поэтому в этом случае основная задача (о дилатации или дерандомизации коумножения) свелась к описанию примеров группового происхождения (шуровских алгебр). Именно эти примеры усиленно изучались в работах по теории ассоциативных схем, но в другой интерпретации и с другой терминологией (шуровские алгебра и др.см [6]). Однако это лишь небольшая часть позитивных 2-алгебр, (или, на другом языке, клеточных алгебр, C-алгебр и т.д.). Подчеркнем, что теория ассоциативных схем занимается не просто алгебрами того или иного класса но их целочисленными представлениями. Рассмотрения этой работы носят алгебраический характер; вопрос о представлениях алгебр, тем более целочисленных, следует рассматривать особо.

6.4.2 Нестрогие подобъекты инволютивных бикоммутативных биалгебр

Класс нестрогих подобъектов выглядит гораздо более богатым и, видимо, не исследовался. За недостатком места мы ограничимся примером. оставляя подробности до другой возможности. А именно, проиллюстрируем отличие на бикоммутативном примере размерности 2.

Двумерная позитивная 2-алгебра с точностью до изоморфизма описывается следующим образом. Как векторное пространство она есть $\mathbb{C}^2$ со стандартным базисом, умножение - покоординатное инволюция - комплексное сопряжение, а вместо коумножения, рассмотрим второе умножение, которое происходит из коумножения, переписанного как умножения в сопряженном пространстве с последующим отождествлением (с помощью стандартного базиса) сопряженного пространства с исходным. Поэтому надо определить еще одно умножение и инволюцию в $\mathbb{C}^2$. Как и всякое коммутативное умножение в полупростой алгебре второе умножения определяется заданием идемпотентов, которые есть векторы в стандартных координатах $\mathbf{1} = (1,1)$ и $\mathbf{u} = (-\lambda, 1)$, где $\lambda \in [0,1]$; инволюция - комплексное сопряжение в базисе $\mathbf{1}, \mathbf{u}$. Обозначим эту 2-алгебру A_λ. Легко проверить, что A_λ позитивная 2-алгебра, так как выполнены все аксиомы (см. п.4). По второму умножения это - алгебра усеченных полиномов второй степени от $\mathbf{u}$ с соотношением

$$\mathbf{u}^2 = (1-\lambda)\cdot\mathbf{u} + \lambda\cdot\mathbf{1}$$

Утверждение 4. *Всякая двумерная позитивная полупростая 2-алгебра изоморфна одной из 2-алгебр $A_\lambda, \lambda \in [0,1]$.*

Теорема 3. *1.Позитивная 2-алгебра A_λ допускает строгую дилатацию в инволютивную биалгебру (т.е. вкладывается, как строгий подобъект в в инволютивную биалгебру, а именно в групповую) тогда и только тогда, когда λ есть положительный корень уравнения*

$$z^2 - (2+\alpha)z + 1 = 0,$$

где α имеет вид $\alpha = k \cdot \frac{(s-1)^2}{s}, k, s$- произвольные целые положительные числа. Рациональные значения λ получаются только при $k = 1$ и имеют вид $n^{-1}, n \in \mathbb{N}$.

2.Предположим, что λ произвольное рациональное число, тогда A_λ допускает нестрогую дилатацию в групповую алгебру.

7 Кокоммутативные позитивные 2-алгебры и анализ двумерного случая.

7.1 Кокоммутативные и бикоммутативные позитивные 2-алгебры

Предположим, что в полупростой конечномерной позитивной 2-алгебре A коумножение коммутативно. Тогда в двойственной алгебре A' есть базис из минимальных идемпотентов, с помощью которого A' обычным образом отождествляется с A; обозначим соответствующий изоморфизм через $T : A' \to A$. Это позволяет ввести в самой алгебре A второе умножение $\bar{\delta} = T\Delta^*(T^{-1} \otimes T^{-1})$, инволюцию $\bar{\sharp} = T^{-1}$ и, аналогичным образом, единицу (сопряженную с коединицей); здесь Δ^* — умножение в A', сопряженное с коумножением Δ. Именно так (неявно) делают обычно в алгебраической комбинаторике. Формально это можно сделать, используя произвольный изоморфизм T пространств A и A', но в кокоммутативном случае выбранный изоморфизм каноничен. Мультипликативность умножения и коумножения естественно пересказывается как перестановочность обоих умножений. Положительность двух умножений означает сохранение каждым из умножений конуса, определяемого другой инволюцией. Можно сказать, что в этой теории просто рассматриваются алгебры с инволюцией и некоторым фиксированным базисом минимальных идемпотентов относительно коммутативного умножения.

Особенно наглядно и геометрично это выглядит в случае коммутативности обоих умножений. Именно этот случай интенсивно изучается в теории ассоциативных схем и др. [2]. Пусть A — коммутативная и кокоммутативная (= бикоммутативная) позитивная 2-алгебра. Рассмотрим ее, как это сделано выше, как пространство с двумя коммутативными умножениями $\delta, \bar{\delta}$. Фиксируем базис из минимальных идемпотентов относительно умножения $\bar{\delta}$. Как и всякая полупростая коммутативная алгебра, A (с умножением δ) может быть реализована как $\mathbb{C}(\mathrm{Spec}(A)) \equiv \mathbb{C}^n$, $|\mathrm{Spec}(A)| = n$; спектр состоит из всех неприводимых (одномерных) представлений алгебры; в этой реализации алгебры (по Гельфанду) координаты элемента выбранного базиса в алгебре равны комплексному числу, соответствующему данному элементу в данном представлении. Поэтому выбранный базис переходит в набор из n векторов в $\mathbb{C}^n$; тем самым, канонически определена комплексная матрица

$$M_A = \{\chi(x, \pi)\},$$

где x — элемент выбранного базиса, а π — неприводимое одномерное представление алгебры A. Назовем ее *матрицей квазихарактеров* бикоммутативной 2-алгебры A. Если A — групповая алгебра конечной коммутативной группы с групповым базисом, то M_A есть в точности унитарная матрица характеров.

Теорема 4 (Классификация полупростых бикоммутативных конечномерных позитивных 2-алгебр)**.** *Пусть A — бикоммутативная полупростая конечномерная 2-алгебра. Тогда*

А. *Матрица квазихарактеров $M_{A'}$ двойственной алгебры (в которой умножение и коумножение и др. меняются местами) есть транспонированная матрица квазихарактеров алгебры A: $M_{A'} = (M_A)^T$.*

В. *Если алгебра A является позитивной однородной 2-алгеброй, то матрица квазихарактеров обладает следующими свойствами:*

В1) *один из столбцов и одна из строк состоит из единиц (наличие единицы и единичного представления (т.е. коединицы)), и*

В2) *произведение любых двух строк (столбцов) есть выпуклая комбинация строк (соответственно столбцов), т.е. симплекс, образованный строками (столбцами) в $\mathbb{C}^n$, есть аффинная полугруппа с единицей, являющейся одной из его вершин.*

C. *Всякая матрица со свойствами* B1), B2) *есть матрица квазихарактеров некоторой полупростой, коммутативной и кокоммутативной, позитивной, однородной, инволютивной 2-алгебры.*

D. *Две такие алгебры изоморфны (со всеми структурами) тогда и только тогда, когда их матрицы квазихарактеров совпадают с точностью до (раздельной) перестановки строк и столбцов.*

Все эти факты следуют из определений и фактически были сформулированы автором и С. В. Керовым в начале 70-х годов (см. [9]); более поздние формулировки, дополнения и связи см. в [6, 7].

Фактически в теореме говорится о двух симплексах (пакетов по терминологии [5]): один — S_1 — координатный, второй — S_2 — образован образами элементов базиса; эти два симплекса фиксируют матрицу. Симплекс S_2 лежит в аффинной гиперплоскости (одна из координат равна 1), при этом одна из его вершин есть вектор $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$. Каждый из симплексов является полугруппой относительно покоординатного умножения, определяемого вторым симплексом.

Дополнительное важное свойство, подробно рассмотренное в [9] по предложению автора, — *планшерелевость*; оно состоит в том, что в упомянутой аффинной гиперплоскости вектор $(1, 0, \dots, 0)$ лежит в относительной внутренности симплекса — этот вектор является нулем полугруппы и определяет инвариантную меру на полугруппе. Скалярное произведение, определяемое этой мерой, замечательно тем, что относительно него имеет место соотношение ортогональности (но не обязательно ортонормированности) одновременно и для координатного репера, и для репера векторов, образующих второй симплекс.

Заметим, что матрицы квазихарактеров бикоммутативной 2-алгебры и таблицы характеров абелевой группы, групповая алгебра которой является дилатацией этой 2-алгебры, связаны довольно сложным способом, поэтому отыскание дилатаций 2-алгебры по ее матрице характеров, по-видимому, трудная вычислительная задача.

Обобщение на кокоммутативные (некоммутативные) позитивные 2-алгебры также имеет геометрически прозрачный смысл, но более громоздко.

7.2 Явное описание двумерных позитивных 2-алгебр и теорема о дилатации.

Даже анализ двумерных позитивных 2-алгебр $A \backsim \mathbb{C}^2$ содержателен и не вполне тривиален. Он иллюстрирует почти все встречающиеся в общем случае возможности, и здесь мы ограничимся только этим случаем. Пусть A — двумерная позитивная 2-алгебра (такая 2-алгебра автоматически бикоммутативна). Первый базис — координатный в

$A \backsim \mathbb{C}^2$, он состоит из идемпотентов по первому (координатному) умножению. Из теоремы 3 вытекает, что матрица квазихарактеров двумерной однородной позитивной 2-алгебры должна иметь вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. При этом нетрудно видеть, что с необходимостью $a \in [-1, 0]$, так как только в этом случае возможно равенство $a^2 = (1 - \lambda)a + \lambda \cdot 1$ с $\lambda \in [0, 1]$, а именно $\lambda = -a$. *То есть класс изоморфизма двумерных позитивных 2-алгебр определяется числом* $a \in [-1, 0]$. При $a = -1$ это групповая алгебра группы $\mathbb{Z}/2$, при $a = 0$ — полугрупповая алгебра полугруппы $\{x^2 = x, 1\}$. Разумеется, все эти алгебры (как алгебры со вторым умножением) при всех значениях параметра a изоморфны алгебре усеченных полиномов первой степени (т.е. опять-таки $\mathbb{C}^2$). Минимальные идемпотенты по второму умножению записываются в координатах по первому базису: $\mathbf{1} = (1, 1)$ и $u = (a, 1)$.

Каноническое, или «выпуклое» соотношение (при фиксации первого базиса) между этими образующими таково:

$$u^2 = (1 - \lambda)u + \lambda \cdot \mathbf{1}, \qquad \lambda \in [0, 1],$$

это же соотношение определяет алгебру усеченных полиномов. Симплексы, о которых сказано выше, это отрезки: $S_1 = [(0, 1), (1, 0)]$, $S_2 = [(a, 1) = u, (1, 1)]$, $a = -\lambda$.

Меняя образующие, можно получить другие неинвариантные способы задания алгебры. Например, можно задать соотношение в виде

$$U^2 = p \cdot U + q \cdot 1, \qquad p, q \geq 0;$$

если положить в нем $u = tU$, где t — корень уравнения $qt^2 + pt - 1 = 0$, мы вернемся к канонической (см. выше) форме с $a = -\lambda = -tq^2$ и $u = (-\lambda, 1) \in \mathbb{C}^2$.

В этом задании возможны разные пары (p, q), отвечающие изоморфным 2-алгебрам.

Утверждение 5. *Полным инвариантом 2-алгебры является число* $\alpha = \frac{p^2}{q}$, *связанное с* λ *(или с* a*) соотношением*

$$\alpha \equiv \frac{p^2}{q} = \frac{(1 - \lambda)^2}{\lambda}, \qquad \lambda^2 - (2 + \alpha)\lambda + 1 = 0.$$

Действительно, достаточно убедиться, что для пар (p, q) с совпадающим $\alpha = \frac{p^2}{q}$ канонические формы совпадают и что при разных α идемпотенты u различны. Будем обозначать через A_α алгебру, отвечающую инварианту $\alpha \in (0, \infty)$.

Другая форма задания соотношений, полезная в алгебраической комбинаторике, такова:

$$U^2 = (q + 1)U + q\mathbf{1};$$

тогда $\alpha = (\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}})^2$, $q \geq 1$, $\lambda = q^{-1}$. Ей соответствует каноническая форма $u^2 = \frac{q-1}{q}u + \frac{1}{q} \cdot \mathbf{1}$, $q > 1$.

Заметим еще, что алгебра A_α планшерелева при $\alpha \in (0, \infty)$ (или, при $a \in [-1, 0)$), так как в этом случае 0 лежит во внутренности отрезка.

Приведем несколько значений параметров:

$$\begin{array}{lcccccc} \alpha = & 0 & 1/6 & 1/2 & 1 & 4/3 & 9/4 \\ \lambda = & 1 & 2/3 & 1/2 & \lambda_0 & 1/3 & 1/4 \end{array}$$

Значение $\alpha = 1$ отвечает соотношениям $U^2 = p \cdot U + p^2 \cdot \mathbf{1}$, $p > 0$, например $U^2 = U + \mathbf{1}$; при этом $\lambda_0 = 1/2(3 - \sqrt{5})$ — единица минус золотое сечение.

Итак, мы расклассифицировали однопараметрическое множество позитивных двумерных 2-алгебр.

Провести подобный анализ можно и в размерности три, там число параметров классов изоморфных алгебр равно четырем. Но с ростом размерности пространство параметров усложняется довольно быстро.

7.3 Строгая дилатация двумерных позитивных 2-алгебр.

Перейдем к рассмотрению основной проблемы — подъема двумерной позитивной 2-алгебры в биалгебру — и найдем возможные дилатации в групповые и полугрупповые биалгебры.

Посмотрим, какие инварианты соответствуют возможности подъема 2-алгебры A_α в групповую биалгебру некоторой конечной группы G. Поскольку структурные константы должны быть рациональны. то рациональность α -необходимое условие дилатации. Далее, предполагаемая группа G должна быть разбита на два подмножества: $G = H \cup H'$, $H' = G \setminus H$, и при этом H должна быть подгруппой ($H \cdot H = k \cdot H$, $|H| = k$ (в частности, возможна единичная подгруппа ($k = 1$)); и, конечно, должна иметь место делимость $k|n$). Тогда, приняв $\mathbf{1} = k^{-1} \sum_{h \in H} h$ и $U = \sum_{g \in H'} g$, мы получим следующие соотношения в групповой алгебре:

$$\mathbf{1}^2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \cdot U = U, \quad U^2 = (n - 2k) \cdot U + (n - k) \cdot 1.$$

Таким образом, в наших обозначениях

$$p = n - 2k, \quad q = n - k, \quad \alpha = \frac{(n - 2k)^2}{n - k} = k\frac{(s - 2)^2}{s - 1}.$$

В частном случае, если $k = 1$, $p = n - 2$, $q = n - 1$, $n > 1$ (то есть H — единичная подгруппа), то

$$\alpha = \frac{(n - 2)^2}{n - 1} \quad \text{или} \quad \lambda = (n - 1)^{-1}$$

(при $k > 1$ число λ иррационально). Заметим,что существенны лишь порядок группы n и порядок подгруппы k: для подъема двумерной позитивной 2-алгебры можно брать групповую алгебру любой пары (G, H) с этими параметрами, например циклическую группу $G = \mathbb{Z}/n$ и ее подгруппу $H = \mathbb{Z}/k$, $k|n$. Мы получаем следующее

Утверждение 6. *Строгая дилатация алгебры A_α возможна только при следующих значениях: $\alpha = \frac{(n-2k)^2}{n-k} = n - 3k + \frac{k^2}{n-k}$, $k|n$. Положив $n = (s+1)k$, получим список $\alpha = k \cdot \frac{(s-1)^2}{s}$, где s, k — произвольные положительные целые.*

Значение $\alpha = 1$ отвечает соотношению $U^2 = U + \mathbf{1}$ (что дает ту же алгебру, что и соотношения $U^2 = p \cdot U + p^2 \cdot \mathbf{1}$ при произвольном положительном p), и алгебра A_1 реализуется, например, как подобъект групповой биалгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}/6)$ с разбиением группы на подгруппу $\mathbb{Z}/2$ и ее дополнение.

Алгебра $A_{1/2}$ (соотношение $U^2 = U + 2 \cdot \mathbf{1}$) реализуется как подобъект групповой биалгебры $\mathbb{C}(\mathbb{Z}/3)$ с разбиением на единичный элемент и его дополнение.

Очевидно, что в указанный список входят далеко не все рациональные значения α. Например, в него не входят значения $\alpha = 1/m$, при $m \neq 1, 2$, иначе говоря, алгебры с соотношением $U^2 = U + m \cdot \mathbf{1}$, $m \neq 1, 2$, не имеют групповой дилатации, т.е. не являются позитивными 2-алгебрами группового происхождения. Анализ ответа (утверждение 4) показывает, что привлечение инверсных полугрупп не расширяет списка двумерных позитивных 2-алгебр, допускающих жесткую дилатацию.

Таким образом, далеко не все двумерные позитивные 2-алгебры имеют групповое или даже полугрупповое происхождение.

7.4 Нестрогая дилатации двумерных алгебр.

Расширяется ли список возможных значений α, если использовать бесконечные группы или полугруппы или иные алгебраические системы?

Дадим частичный ответ на вопрос, поставленный в начале статьи и в более строгой постановке в параграфе 5, но в ситуации намного более простой, чем в случае классических алгебр Гекке. Мы приведем ответа на вопрос о дилатации в динамической постановке. Для дальнейшего важно, что алгебра A_α действует на себе эндоморфизмами и, в частности, выделены элемент u и единица, фигурирующие в каноническом задании алгебры ($u^2 = (1-\lambda)u + \lambda\mathbf{1}$, $0 \leq \lambda \leq 1$). Отождествив их с векторами $u = (-\lambda, 1)$ и $(1, 1)$ (как было сделано выше), мы можем сказать, что структура алгебры возникла из свободного действия алгебры на себе (или, по-другому, совпадает с ним). Хотя рассматривается двумерный случай, ясно, что возможность такого решения гораздо шире.

Теорема 5. *Для любой двумерной позитивной 2-алгебры A_α, для которой корень λ уравнения $\lambda^2 - (2+\alpha)\lambda + 1 = 0$ рационален, существует конечное пространство X, $|X| = n = n(r,s)$, действие на нем циклической группы $\mathbb{Z}/n$ с образующей g и такое разбиение ξ на два подмножества X_1, X_2, что двумерное пространство E функций, постоянных на элементах этого подмножества, получает заданную структуру двумерной позитивной 2-алгебры A_α следующим образом: первое умножение определяется базисом из идемпотентов, который есть базис характеристических функций подмножеств X_1, X_2, а структура второй алгебры в A_α (задающая действие алгебры на себе) совпадает со структурой, получаемой из действия проекции $P_E g$ образующей $g \in \mathbb{Z}/n$, где P_E — проектор на подпространство E.*

Доказательство. Доказательство основано на следующей простой лемме, которая использовалась в [31] для доказательства существования дилатаций (или дерандомизаций) полиморфизмов, сохраняющих меру. Предположим, что имеется марковская матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

с рациональным $\lambda = \frac{r}{s}$, $0 < r < s$. Тогда существует циклическая подстановка порядка $N = 2s - r$ и разбиение множества $\{1, \ldots, N\}$ на два подмножества N_1 и N_2 мощности $s - r$ и s, таких, что

$$|N_1 \cap g(N_1)| = 0, \quad |N_1 \cap g(N_2)| = s - r, \quad |N_2 \cap g(N_1)| = s - r, \quad |N_2 \cap g(N_2)| = r.$$

□

Тот же прием годится для позитивных 2-алгебр с одной (рациональной) образующей произвольной размерности, поскольку лемма верна для произвольной марковской матрицы. При наличии иррациональностей понадобятся уже бесконечномерные системы.

Рациональность числа λ — достаточное, но не необходимое условие конечности указанной дерандомизации: например, для $\alpha = 1$ число λ есть золотое сечение (см. выше), а дилатация в конечную группу $\mathbb{Z}/6$ существует. Но более важно, что последняя конструкция дает конечную дерандомизацию для всех рациональных λ, а дилатации в инволютивную (групповую) алгебру возможна лишь для тех из них, которые отвечают числам α очень специального вида (см. Утверждение 4). Поэтому предлагаемый класс дерандомизаций шире класса дилатаций в инволютивные биалгебры, фигурировавших в постановке основной проблемы (4.1).

Гипотетически дерандомизация указанного вида применима ко всем бикоммутативным позитивным 2-алгебрам.

Список литературы

[1] Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. ИИЛ. М. 1959.

[2] Э. Баннаи, Е. Ито. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений. Мир, Москва, 1987.

[3] В. М. Бухштабер, А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко. Комбинаторные алгебры и многозначные инволютивные группы. Функц. анал. и его прилож., т. 30, вып. 3 (1996), 12–18.

[4] Л. Вайнерман. О работах М. Г. Крейна по теории представлений и гармоническому анализу на топологических группах. Укр. мат. журнал, т. 46, вып. 3 (1994), 198–211.

[5] А. М. Вершик. Геометрическая теория состояний, граница фон Неймана, двойственность C^*-алгебр. Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 29 (1972), 147–154. English translation: J. Sov. Math., V. 3 (1975), 840–845.

[6] А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко. Алгебры в планшерелевой двойственности и алгебраическая комбинаторика. Функц. анал. и его прилож., т. 31, вып. 4 (1997), 34–46.

[7] С. А. Евдокимов. Шуровость и отделимость ассоциативных схем. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Санкт-Петербургский государственный университет, 2005.

[8] К. Кассель. Квантовые группы. Фазис, Москва, 1999.

[9] С. В. Керов. Двойственность конечномерных алгебр. Вестник ЛГУ, сер матем., вып. 7 (1974), 23–29.

[10] С. В. Керов. Двойственность C^*-алгебр и ее примеры в теории представлений групп. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Ленинградский государственный университет, 1974.

[11] А. Клиффорд, Д. Престон. Алгебраическая теория полугрупп, т. 1. Мир, Москва, 1972.

[12] А. Н. Колмогоров. Собр. соч., т. 3 (2003).

[13] М. Г. Крейн. О положительных функционалах на почти периодических функциях. ДАН СССР, т. 30, вып. 1 (1941), 9–12.

[14] М. Г. Крейн. Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры. ДАН СССР, т. 69, вып. 6 (1949), 725–728.

[15] М. Г. Крейн. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах, часть 1. Укр. мат. журнал, т. 1, вып. 4 (1949), 64–98.

[16] М. Г. Крейн. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах, часть 2. Укр. мат. журнал, т. 2, вып. 1 (1950), 10–59.

[17] В. А. Оганесян. О полупростоте системной алгебры. ДАН Арм.ССР, т. 21 (1955), 145–147.

[18] Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. Мир, Москва, 1970.

[19] S. Bochner. On a theorem of Tannaka and Krein. Ann. Math., V. 43 (1942), 56–58.

[20] G.I.Olshansky. Unitary represnetations of the infinite symmetric group: semigroup approach. In: Lie groups and Lie algebras. Akad.Kiado.Budapest. 1985.181-198.

[21] V. M. Buchstaber. n-valued groups: theory and applications. Moscow Math. J., V. 6, No. 1 (2006), 57–84.

[22] P. Deligne. Catégories tannakiennes. Progr. Math., V. 87. Birkhäuser Boston, Boston, 1990, pp. 111–195.

[23] A. Joyal, R. Street. An introduction to Tannaka duality and quantum groups. Lecture Notes in Math., V. 1448. Springer, Berlin, 1991, pp. 413–492.

[24] D. G. Higman. Invariant relations, coherent configurations, generalized polygons. In: Combinatorics (Proc. Advanced Study Inst., Breukelen, 1974), Part 3: Combinatorial Group Theory. Math. Centre Tracts, No. 57, Math. Centrum, Amsterdam, 1974, pp. 27–43.

[25] A. Massoud. Tannaka–Krein duality for compact groups, `arXiv:math.OA/0308259`.

[26] N. Saavedra Rivano. Catégories Tannakienns. Lecture Notes in Math., V. 265. Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.

[27] L. Scott. A condition on Higman parameters. Notices Amer. Math. Soc., 701-20-45 (1972).

[28] L. Scott. Modular permutation representations. Trans. Amer. Math. Soc., V. 175 (1973), 101–121.

[29] T. Tannaka. Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologishen Gruppen, Tohoku Math. J., V. 45 (1938), 1–12.

[30] A. Van Daele. Quantum groups with invariant integrals. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, V. 97, No. 2 (2000), 541–546.

[31] A. Vershik. Polymorphisms, Markov processes, and quasi-similarity. Discrete Contin. Dyn. Syst., V. 13, No. 5 (2005), 1305–1324.

[32] А. Вершик. Строгая и нестрогая дилатации конечномерных позитивных 2-алгебр в полугрупповые биалгебры. Препринт ПОМИ РАН. 2007 №1.