ПОМИ ПРЕПРИНТ — 18/2006

АЛГЕБРЫ, СВЯЗАННЫЕ С БИГАМИЛЬТОНОВОЙ ОПЕРАДОЙ

В. Доценко

Независимый Московский университет
Большой Власьевский пер. д. 11,
г.Москва, Россия

dotsenko@mccme.ru

Ноябрь 2006

Аннотация. Мы вычисляем размерности и предъявляем мономиальные базисы для серии квадратичных алгебр, определённой Б. Л. Фейгиным. Эти алгебры в каком-то смысле обобщают хорошо известные алгебры Орлика–Соломона, но стандартные методы теории алгебр Орлика – Соломона для них не работают. Оказывается, что эффективным методом решения соответствующей задачи является привлечение методов теории operad (в первую очередь, недавних результатов о бигамильтоновой операде, которые получены автором и А. С. Хорошкиным).

Поддержано грантом INTAS 03-3350 и стипендией LIEGRITS (контракт MRTN-CT-2003-505078).

1. Введение.

1.1. История поставленных задач. В 1969 году в заметке В. И. Арнольда [**1**] были вычислены когомологии группы крашеных кос на n нитях. Конфигурационное пространство упорядоченных наборов n точек плоскости является пространством $K(\pi, 1)$ для этой группы, и в заметке [**1**] вычислены когомологии этого пространства, реализованного в виде дополнения в арифметическом векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ конфигурации плоскостей $\{z_i = z_j\}$. (Здесь и далее мы будем обозначать эту конфигурацию через A_{n-1}, имея в виду, что она состоит из зеркал соответствующей системы корней.) Оказывается, что алгебра когомологий этого пространства квадратична; её обычно называют алгеброй Орлика – Соломона в честь П. Орлика и Л. Соломона, изучавших аналогичные алгебры для различных конфигураций гиперплоскостей в конце 1970-х годов [**15**].

Конфигурационное пространство упорядоченных наборов n точек плоскости гомотопически эквивалентно n-му пространству топологической операды маленьких 2-дисков, поэтому гомологии этих дополнений образуют алгебраическую операду. В работе Коэна [**8**] было показано, что эта операда изоморфна операде Герстенхабера, которая описывает алгебраические структуры, возникающие на комплексе Хохшильда ассоциативной алгебры. В совокупности эти результаты означают, что компоненты операды Герстенхабера канонически изоморфны двойственным пространствам к соответствующим алгебрам Орлика – Соломона.

Операда Герстенхабера является нечётным аналогом операды Пуассона, описывающей алгебраические структуры на кольце функций на пуассоновом многообразии. Двойственные пространства к компонентам операды Пуассона тоже образуют семейство ассоциативных алгебр, которые естественно называть чётными алгебрами Орлика – Соломона $OS^+(n)$ (в отличие от антикоммутативных алгебр Орлика – Соломона, эти алгебры коммутативны). Эти алгебры подробно изучены в работе Матьё [**14**]. Интересно, что они связаны с геометрией вещественной конфигурации гиперплоскостей A_{n-1}: это градуированные версии алгебр Гельфанда – Варченко [**2**] локально постоянных функций на дополнениях к соответствующим конфигурациям.

Доказательства результатов Коэна и Арнольда независимы друг от друга; доказательства Матьё перерабатывают информацию о чётных алгебрах Орлика – Соломона (устроенных довольно несложно) в информацию об операде Пуассона.

Обобщения алгебр Орлика – Соломона даются двойными алгебрами Орлика – Соломона и их чётными версиями. Эти алгебры были определены несколько лет назад Б. Л. Фейгиным; их некоммутативные варианты изучались А. Н. Кирилловым [**11**]. Б. Л. Фейгин предложил также гипотетические формулы размерности и характера для этих алгебр. После сказанного выше не очень удивительно, что эти алгебры связаны с естественными удвоениями операд Герстенхабера и Пуассона. Существенное отличие от уже известного случая состоит в том, что эту связь приходится привлекать для исследования самих алгебр. В то время, как алгебры Орлика – Соломона и их чётные версии являются кошулевыми, а их определяющие идеалы имеют обладают квадратичным базисом Грёбнера, удвоенные алгебры не обладают этими свойствами. Это означает, что задача вычисления размерности и ряда Гильберта такой алгебры не сводится к аналогичной задаче для мономиального вырождения соотношений этой алгебры, и потому является довольно нетривиальной. Единственное известное на данный момент решение этой задачи опубликовано в данной работе и использует результаты теории операд.

Расширенная версия данной работы составляет содержание совместной статьи [**7**], которая готовится к печати.

1.2. Основные результаты. Все векторные пространства и алгебры в данной работе определены над полем $\mathbb{k}$ характеристики нуль. Иногда мы считаем это поле алгебраически замкнутым; в такие моменты мы это специально указываем.

Результаты работы естественно разделяются на две группы.

Во-первых, это результаты, известные из работ, перечисленных выше, для которых мы даём новые доказательства. Мы полагаем эту часть нашей работы достаточно важной; структура доказательства в модельном примере чётных алгебр Орлика – Соломона проясняет (технически трудное) доказательство новых результатов.

Во-вторых, это формулы размерности и мономиальные базисы для двойных чётных алгебр Орлика – Соломона. Соответствующие результаты опираются на сведения о размерностях однородных компонент бигамильтоновой операды, которые были получены независимо автором и А. С. Хорошкиным [**3**], [**4**].

1.3. Структура работы. Раздел 2 содержит сводку важнейших определений и используемых нами результатов. Он является служебным; доказательства в нём в основном отсутствуют, ибо формулируемые результаты довольно стандартны (исключением является определение хопфовой структуры на бигамильтоновой операде). В разделе 3 подробно обсуждается случай операды Пуассона и чётной алгебры Орлика – Соломона. Как мы отмечали выше, результаты этого раздела довольно хорошо известны, хотя многие из наших доказательств являются новыми. Раздел 4 содержит доказательства формул размерности компонент бигамильтоновой операды и двойных чётных алгебр Орлика – Соломона, а также явное описание мономиальных базисов в каждом из этих случаев. Приложение содержит краткое изложение аналогичных результатов в случае двойной алгебры Орлика – Соломона и двойной операды Герстенхабера. В заключении мы обсуждаем возможные обобщения наших результатов и дальнейшие направления исследований.

1.4. Благодарности. Я благодарен за плодотворные обсуждения М. А. Берштейну (сформулировавшему в виде гипотезы теорему о мономиальном базисе бигамильтоновой операды) и А. С. Хорошкину (обсуждения с которым привели к описанию мономиального базиса двойных алгебр Орлика–Соломона). Я также благодарен моему учителю Б. Л. Фейгину за постановку задачи и обсуждения промежуточных результатов. Наконец, я признателен А. Н. Кириллову за интерес к моей работе.

2. Основные понятия.

Раздел 2.1 содержит определения обычных и двойных алгебр Орлика – Соломона (и их чётных аналогов) как абстрактных алгебр, а также обозначения для них. Раздел 2.2 содержит определения рассматриваемых нами алгебраических структур. В разделе 2.3 определены две категории, которые не входят в список «стандартных» категорий алгебры. В разделах 2.4, 2.5, и 2.6 мы приводим определение операды и важные для нас результаты, касающиеся операд. Подробности можно найти в книгах [**5**] и [**13**]. Наконец, в разделе 2.7 мы определяем комбинаторные объекты, которыми нумеруются построенные нами далее мономиальные базисы.

2.1. Алгебра Орлика–Соломона и её аналоги. Алгебра Орлика–Соломона $OS(n)$ порождена антикоммутирующими образующими x_{ij}, $1 \le i \ne j \le n$, которые связаны соотношениями

$$x_{ij} - x_{ji} = 0 = x_{ij}^2,$$
$$x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij} = 0.$$

Чётная алгебра Орлика–Соломона $OS^+(n)$ порождена коммутирующими образующими x_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, которые связаны соотношениями

$$x_{ij} + x_{ji} = 0 = x_{ij}^2,$$
$$x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij} = 0.$$

Двойная алгебра Орлика–Соломона $OS_2(n)$ порождена антикоммутирующими образующими x_{ij}, y_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, которые связаны соотношениями

$$x_{ij} - x_{ji} = y_{ij} - y_{ji} = 0,$$
$$x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij} = 0,$$
$$x_{ij}y_{jk} + x_{jk}y_{ki} + x_{ki}y_{ij} + y_{ij}x_{jk} + y_{jk}x_{ki} + y_{ki}x_{ij} = 0,$$
$$y_{ij}y_{jk} + y_{jk}y_{ki} + y_{ki}y_{ij} = 0,$$
$$x_{ij}^2 = x_{ij}y_{ij} = y_{ij}^2 = 0.$$

Двойная чётная алгебра Орлика–Соломона $OS_2^+(n)$ порождена коммутирующими образующими x_{ij}, y_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, которые связаны соотношениями

$$x_{ij} + x_{ji} = y_{ij} + y_{ji} = 0,$$
$$x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij} = 0,$$
$$x_{ij}y_{jk} + x_{jk}y_{ki} + x_{ki}y_{ij} + y_{ij}x_{jk} + y_{jk}x_{ki} + y_{ki}x_{ij} = 0,$$
$$y_{ij}y_{jk} + y_{jk}y_{ki} + y_{ki}y_{ij} = 0,$$
$$x_{ij}^2 = x_{ij}y_{ij} = y_{ij}^2 = 0.$$

2.2. Алгебраические структуры. Все рассматриваемые нами алгебры снабжены одной или несколькими бинарными операциями, которые связаны определёнными тождествами. Наличие унарных операций (наподобие автоморфизмов) или 0-арных операций (наподобие единицы для умножения) не предполагается.

Простейшими ингредиентами для определения наших алгебраических структур являются коммутативные алгебры и алгебры Ли. Коммутативная алгебра — это векторное пространство с симметричной билинейной операцией (произведением) $a, b \mapsto a \star b$ и тождеством ассоциативности $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ для любых трёх элементов этого пространства. Алгебра Ли — это векторное пространство с кососимметричной билинейной операцией (скобкой) $a, b \mapsto \{a, b\}$ и тождеством Якоби

$$\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0. \tag{1}$$

Алгебра Пуассона — это векторное пространство с билинейными операциями $a, b \mapsto a \star b$ и $a, b \mapsto \{a, b\}$ и тождествами

(i) (коммутативность произведения) $a \star b = b \star a$,
(ii) (антикоммутативность скобки) $\{a, b\} = -\{b, a\}$,
(iii) (ассоциативность произведения) $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$,
(iv) (тождество Якоби для скобки)

$$\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0,$$

(v) («правило Лейбница дифференцирования произведения»)

$$\{a, b \star c\} = \{a, b\} \star c + b \star \{a, c\}.$$

Понятие алгебры Герстенхабера получается из понятия алгебры Пуассона внедрением градуировки; такая алгебра — это градуированное векторное пространство с билинейными операциями $a, b \mapsto a \cup b$ степени 0 и $a, b \mapsto [a, b]$ степени -1, удовлетворяющими (на однородных элементах) тождествам

(i) (супер-коммутативность произведения) $a \cup b = (-1)^{|a| \cdot |b|} b \cup a$,
(ii) (супер-антикоммутативность скобки) $[a, b] = (-1)^{|a| \cdot |b|}[b, a]$,
(iii) (ассоциативность произведения) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$,
(iv) (градуированное тождество Якоби)

$$(-1)^{|a|(|c|-1)}[a, [b, c]] + (-1)^{|b|(|a|-1)}[b, [c, a]] + (-1)^{|c|(|b|-1)}[c, [a, b]] = 0,$$

(v) (градуированное правило Лейбница)

$$[a, b \cup c] = [a, b] \cup c + (-1)^{|b| \cdot |c|}[a, c] \cup b.$$

Алгебра с парой согласованных (лиевских) скобок — это векторное пространство с двумя кососимметричными билинейными операциями $a, b \mapsto \{a, b\}_1$ и $a, b \mapsto \{a, b\}_2$, для которых любая линейная комбинация удовлетворяет тождеству Якоби (1). Эквивалентно, это означает, что выполнены тождества

(i) (тождества Якоби для скобок)

$$\{a, \{b, c\}_i\}_i + \{b, \{c, a\}_i\}_i + \{c, \{a, b\}_i\}_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

(ii) (условие согласованности, «шестичленное соотношение»)

$$\{a, \{b, c\}_1\}_2 + \{b, \{c, a\}_1\}_2 + \{c, \{a, b\}_1\}_2 + \\ + \{a, \{b, c\}_2\}_1 + \{b, \{c, a\}_2\}_1 + \{c, \{a, b\}_2\}_1 = 0.$$

Бигамильтонова алгебра — это векторное пространство с тремя билинейными операциями $a, b \mapsto a \star b$, $a, b \mapsto \{a, b\}_1$ и $a, b \mapsto \{a, b\}_2$. Тождества на эти операции таковы:

(i) (коммутативность произведения) $a \star b = b \star a$,
(ii) (антикоммутативность скобок) $\{a, b\}_i = -\{b, a\}_i$, $i = 1, 2$,

(iii) (ассоциативность произведения) $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$,
(iv) (тождество Якоби для скобок)

$$\{a, \{b, c\}_i\}_i + \{b, \{c, a\}_i\}_i + \{c, \{a, b\}_i\}_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

(v) (условие согласованности, «шестичленное соотношение»)

$$\{a, \{b, c\}_1\}_2 + \{b, \{c, a\}_1\}_2 + \{c, \{a, b\}_1\}_2 + \\ + \{a, \{b, c\}_2\}_1 + \{b, \{c, a\}_2\}_1 + \{c, \{a, b\}_2\}_1 = 0,$$

(vi) (правило Лейбница)

$$\{a, b \star c\}_i = \{a, b\}_i \star c + \{a, c\}_i \star b, \quad i = 1, 2.$$

Определение двойной алгебры Герстенхабера получается из приведённого добавлением градуировки. Такая алгебра — это градуированное векторное пространство с билинейной операцией $a, b \mapsto a \cup b$ степени 0 и ещё двумя билинейными операциями $a, b \mapsto [a, b]_1$, $a, b \mapsto [a, b]_2$ степени -1. Тождества на эти операции таковы:

(i) (супер-коммутативность произведения) $a \cup b = (-1)^{|a| \cdot |b|} b \cup a$,
(ii) (супер-антикоммутативность скобок) $[a, b]_i = (-1)^{|a| \cdot |b|} [b, a]_i$, $i = 1, 2$,
(iii) (ассоциативность произведения) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$,
(iv) (градуированное тождество Якоби)

$$(-1)^{|a|(|c|-1)}[a, [b, c]_i]_i + (-1)^{|b|(|a|-1)}[b, [c, a]_i]_i + \\ + (-1)^{|c|(|b|-1)}[c, [a, b]_i]_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

(v) (градуированное условие согласованности)

$$(-1)^{|a|(|c|-1)}[a, [b, c]_1]_2 + (-1)^{|b|(|a|-1)}[b, [c, a]_1]_2 + \\ + (-1)^{|c|(|b|-1)}[c, [a, b]_1]_2 + +(-1)^{|a|(|c|-1)}[a, [b, c]_2]_1 + \\ + (-1)^{|b|(|a|-1)}[b, [c, a]_2]_1 + (-1)^{|c|(|b|-1)}[c, [a, b]_2]_1 = 0,$$

(vi) (градуированное правило Лейбница)

$$[a, b \cup c]_i = [a, b]_i \cup c + (-1)^{|b| \cdot |c|}[a, c]_i \cup b, \quad i = 1, 2.$$

2.3. Категории $\mathscr{F}in$ и $\mathbb{S} - \mathrm{mod}$. Через $\mathscr{F}in$ мы будем обозначать категорию конечных множеств, в которой множество морфизмов между двумя объектами состоит из всевозможных биекций между ними. Обозначим через $[n]$ «стандартное» n-элементное множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Через $\mathbb{S}-\mathrm{mod}$ мы обозначаем категорию $\mathbb{S}$-модулей — наборов векторных пространств $\{\mathscr{V}(n), n \geq 1\}$, где каждое $\mathscr{V}(k)$ является S_k-модулем. Множество всех морфизмов между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ в этой категории есть по определению

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}-\mathrm{mod}}(\mathscr{V}, \mathscr{W}) = \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{Hom}_{S_n}(\mathscr{V}(n), \mathscr{W}(n)).$$

Определим прямую сумму, тензорное произведение и двойственный модуль равенствами $(\mathscr{V} \oplus \mathscr{W})(n) = \mathscr{V}(n) \oplus \mathscr{W}(n)$, $(\mathscr{V} \otimes \mathscr{W})(n) = \mathscr{V}(n) \otimes \mathscr{W}(n)$, $(\mathscr{V}^*)(n) = (\mathscr{V}(n))^*$.

Важным для нас примером $\mathbb{S}$-модуля является модуль Det, у которого $\mathrm{Det}(n)$ — знаковое представление симметрической группы S_n. Нам понадобится вариант двойственного модуля $\mathscr{V}^\vee$, получающийся из обычного подкручиванием на знаковое представление: $\mathscr{V}^\vee = \mathscr{V}^* \otimes \mathrm{Det}$. В некоторых случаях мы рассматриваем дифференциальные градуированные $\mathbb{S}$-модули. Для них все указанные конструкции определяются аналогичным образом. Градуированным аналогом модуля Det является модуль $\mathscr{E}$; пространство $\mathscr{E}(n)_{1-n}$ одномерно и является знаковым представлением симметрической группы, а остальные пространства $\mathscr{E}(n)_k$ нулевые.

Любому $\mathbb{S}$-модулю $\mathscr{V}$ можно сопоставить функтор из категории $\mathscr{F}in$ в категорию векторных пространств. А именно, положим для n-элементного множества I

$$\mathscr{V}(I) = \Bbbk \, \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}in}([n], I) \otimes_{\Bbbk S_n} \mathscr{V}(n).$$

Если отображение $f\colon I \to J$ сюръективно, положим

$$\mathscr{V}(f) = \bigotimes_{j \in J} \mathscr{V}(f^{-1}(j)).$$

Для $\mathbb{S}$-модулей $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ определим композицию $\mathscr{V} \circ \mathscr{W}$ по правилу

$$(\mathscr{V} \circ \mathscr{W})(n) = \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{f\colon [n] \twoheadrightarrow [m]} \mathscr{V}(m) \otimes_{S_m} \mathscr{W}(f), \tag{2}$$

где сумма берётся по всем сюръекциям f.

Чуть более обозримое, но менее инвариантное определение:

$$(\mathscr{V} \circ \mathscr{W})(n) = \bigoplus_{m=1}^{n} \mathscr{V}(m) \otimes_{\Bbbk S_m} \left(\bigoplus_{i_1+\ldots+i_m=n} \bigotimes_{l=1}^{m} \mathscr{W}(i_l) \right). \tag{3}$$

2.4. Операды. Операция композиции снабжает категорию $\mathbb{S}-\mathrm{mod}$ структурой моноидальной категории. Операда — это моноид в этой категории. Приведём для полноты изложения и более наглядное определение.

Операда (симметричная алгебраическая операда) $\mathscr{O}$ — это $\mathbb{S}$-модуль $\{\mathscr{O}(n), n \geq 1\}$ с набором отображений (операций композиции)

$$\gamma = \gamma_{k;i_1,\ldots,i_k} \colon \mathscr{O}(k) \otimes \mathscr{O}(i_1) \otimes \ldots \otimes \mathscr{O}(i_k) \to \mathscr{O}(i_1 + \ldots + i_k),$$

которые эквивариантны относительно действия симметрической группы (на тензорном произведении действуют группы S_k и $S_{i_1} \times \times \ldots \times S_{i_k}$, которые отображаются в группу $S_{i_1+\ldots+i_k}$, действующую на образе отображения γ: $i_1+\ldots+i_k$-элементное множество разбито на блоки, и разрешается переставлять элементы каждого блока, а также «тасовать» блоки, рассматривая каждый как единое целое) и удовлетворяют обычному закону ассоциативности, выраженному в коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}(l) \otimes \bigotimes\limits_{j=1,\ldots,l} \mathscr{O}(m_j) \otimes \bigotimes\limits_{\substack{j=1,\ldots,l\\ k=1,\ldots,m_j}} \mathscr{O}(n_{j,k}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\gamma^l"] \arrow[d, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & \mathscr{O}(l) \otimes \bigotimes\limits_{j=1,\ldots,l} \mathscr{O}(n_j) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathscr{O}(m) \otimes \bigotimes\limits_{\substack{j=1,\ldots,l\\ k=1,\ldots,m_j}} \mathscr{O}(n_{j,k}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathscr{O}(n),
\end{tikzcd}$$

где $m = \sum_j m_j$, $n_j = \sum_k n_{j,k}$, $n = \sum_j n_j$. (В терминах введённых ранее обозначений отображения композиции дают для цепочки отображений $f \colon I \to J$, $g \colon J \to K$ отображение

$$\gamma_{g,f} \colon \mathscr{O}(g) \otimes \mathscr{O}(f) \to \mathscr{O}(g \circ f),$$

а ассоциативность означает совпадение двух отображений

$$\mathscr{O}(h) \otimes \mathscr{O}(g) \otimes \mathscr{O}(f) \rightrightarrows \mathscr{O}(h \circ g \circ f),$$

определяемых очевидным образом.) В нашем случае для всех рассматриваемых операд пространство $\mathscr{O}(1)$ будет одномерным, операция композиции будет задавать в нём структуру алгебры, изоморфной основному полю $\Bbbk$, и в нём будет выделен базисный элемент e, являющийся единицей относительно композиции, т. е. $\gamma_{1;k}(e; f) = \gamma_{k;1,\ldots,1}(f; e, \ldots, e) = f$.

Морфизм операд $f \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — это морфизм $\mathbb{S}$-модулей, согласованный с композицией и сохраняющий единицу.

Аналогичным образом определяется теоретико-множественная операда. Отличие лишь в том, что в этом случае ключевым является понятие $\mathbb{S}$-множества (набора множеств $\{M_k, k \geq 1\}$ с действием симметрических групп; вместо тензорных произведений рассматриваются декартовы). По любой теоретико-множественной операде можно построить обычную операду, заменив все множества на их линейные оболочки и продолжив композиции на линейные комбинации по линейности.

Пусть V — векторное пространство. По определению, операда линейных отображений $\mathscr{E}nd_V$ — это набор

$$\{\mathscr{E}nd_V(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V), n \geq 1\}$$

всех полилинейных отображений пространства V в себя с очевидными операциями композиции.

Определим в терминах операды линейных отображений алгебру над операдой $\mathscr{O}$; задать на векторном пространстве структуру такой алгебры значит задать морфизм операды $\mathscr{O}$ в соответствующую операду линейных отображений. Таким образом, алгебра над операдой $\mathscr{O}$ — это векторное пространство W и набор отображений $\mathscr{O}(n) \otimes_{\Bbbk S_n} W^{\otimes n} \to W$ с очевидными условиями согласования. Свободная алгебра с пространством образующих X над операдой $\mathscr{O}$ — это $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathscr{O}(n) \otimes_{\Bbbk S_n} X^{\otimes n}$.

С другой стороны, каждой алгебраической структуре S отвечает операда $\mathscr{O}^S$. В качестве пространства $\mathscr{O}^S(n)$ возьмём пространство элементов свободной алгебры с n образующими для сигнатуры S, которые имеют степень 1 по каждой из образующих. Тогда $\mathscr{O}^S$, очевидно, является $\mathbb{S}$-модулем. Композиция определяется очевидным образом: вместо k-й образующей надо подставить моном из соответствующей свободной алгебры.

В пределах этой работы мы для упрощения формулировок рассматриваем только операды $\mathscr{Q}$ с $\mathscr{Q}(1) = \Bbbk$.

2.5. Задание операд образующими и соотношениями. Свободная операда $\mathscr{F}_{\mathscr{O}}$, порождённая $\mathbb{S}$-модулем $\mathscr{O}$ (с $\mathscr{O}(1) = 0$), определяется следующим образом. Как векторное пространство, эта операда порождена деревьями специального вида. Каждое из этих деревьев имеет выделенную вершину — корень, причём валентность этой вершины равна единице. Каждое дерево из $\mathscr{F}_{\mathscr{O}}(n)$ имеет ровно n листьев. В каждой внутренней вершине дерева (не являющейся ни корнем, ни листом) стоит элемент множества образующих $\mathscr{O}$, причём если у вершины k потомков, то стоящий в ней элемент должен принадлежать $\mathscr{O}(k)$. Единственное дерево с пустым множеством внутренних вершин порождает одномерное пространство $\mathscr{F}_{\mathscr{O}}(1)$. Композиция дерева t с l листьями и деревьев $t_1, \ldots, t_l$ состоит в том, что корневые вершины деревьев $t_1, \ldots, t_l$ склеиваются с соответствующими листьями дерева t (и в каждом случае два ребра, которые мы склеиваем, объединяются в одно — а вершина становится внутренней точкой этого ребра). Соотношения, связывающие всевозможные элементы такого вида, гласят, что дерево полилинейно по элементам, стоящим в его внутренних вершинах.

Свободные операды используются при задании операд образующими и соотношениями. Пусть $\mathscr{O}$ — образующие операды, $\mathscr{R}$ — $\mathbb{S}$-подмодуль в $\mathscr{F}_{\mathscr{O}}$. Идеал, порождённый $\mathscr{R}$ в $\mathscr{F}_{\mathscr{O}}$ — это линейная оболочка всех деревьев, у которых хотя бы в одной вершине стоит элемент из $\mathscr{R}$. Операда с образующими $\mathscr{O}$ и соотношениями $\mathscr{R}$ — это результат факторизации свободной операды по такому идеалу.

2.6. Операды Хопфа.

Определение 1. *Операда $\mathscr{Q}$ называется операдой Хопфа, если задан морфизм операд (коумножение) $\Delta_{\mathscr{Q}}\colon \mathscr{Q} \to \mathscr{Q} \otimes \mathscr{Q}$, для которого выполнено условие коассоциативности, т. е. следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{Q} \arrow[r, "\Delta_{\mathscr{Q}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathscr{Q}}"'] & \mathscr{Q} \otimes \mathscr{Q} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta_{\mathscr{Q}}"] \\
\mathscr{Q} \otimes \mathscr{Q} \arrow[r, "\Delta_{\mathscr{Q}} \otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{Q} \otimes \mathscr{Q} \otimes \mathscr{Q}.
\end{tikzcd}$$

Это значит, что каждое векторное пространство $\mathscr{Q}(n)^*$ снабжено структурой ассоциативной алгебры, а также что тензорное произведение двух алгебр над операдой $\mathscr{Q}$ является алгеброй над этой же операдой.

Замечание 1. *То, что отображение Δ является морфизмом операд, означает, в частности, что $\Delta(a \circ b) = \Delta(a) \circ \Delta(b)$. Поэтому для задания коумножения достаточно задать его на образующих операды.*

Приведём здесь несколько примеров.

Пример 1. *Пусть $\mathscr{A}$ — теоретико-множественная операда. Тогда её линейная оболочка является операдой Хопфа, причём коумножение переводит типичный элемент $a \in \mathscr{A}$ в $a \otimes a$.*

Пример 2. *Операда Ли не имеет нетривиальной (ненулевой) структуры операды Хопфа, поскольку не существует ненулевого морфизма S_2-модулей*

$$\mathscr{L}ie(2) \to \mathscr{L}ie(2) \otimes \mathscr{L}ie(2)$$

(первый из них отвечает знаковому представлению, а второй — тривиальному), а коумножение определяется значениями на образующих операды.

Операда Пуассона и бигамильтонова операда являются операдами Хопфа. Напомним доказательство первого из этих утверждений и совершенно аналогично докажем второе.

Определение 2. *Пусть отображение $\Delta_{\mathscr{P}}$ определено на образующих операды $\mathscr{P}$ формулами*

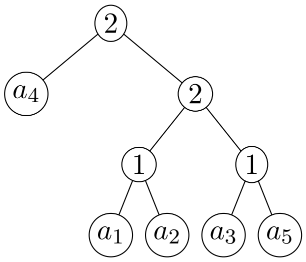
$$\Delta_{\mathscr{P}}(\star) = \star \otimes \star,$$
$$\Delta_{\mathscr{P}}(\{,\}) = \{,\} \otimes \star + \star \otimes \{,\}.$$

Определение 3. *Пусть отображение $\Delta_{\mathscr{P}_2}$ определено на образующих операды $\mathscr{P}_2$ формулами*

$$\Delta_{\mathscr{P}_2}(\star) = \star \otimes \star,$$
$$\Delta_{\mathscr{P}_2}(\{,\}_1) = \{,\}_1 \otimes \star + \star \otimes \{,\}_1,$$
$$\Delta_{\mathscr{P}_2}(\{,\}_2) = \{,\}_2 \otimes \star + \star \otimes \{,\}_2.$$

Предложение 1. *Морфизмы $\Delta_{\mathscr{P}}$ и $\Delta_{\mathscr{P}_2}$ могут быть корректно продолжены до морфизмов соответствующих операд и удовлетворяют условию коассоциативности.*

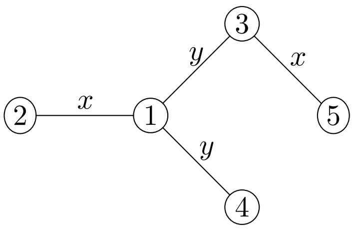
2.7. Комбинаторные структуры. Поскольку операда Ли получается факторизацией из свободной операды с одной образующей, её компонента $\mathscr{L}ie(I)$ порождена бинарными деревьями, листья которых находятся во взаимно однозначном соответствии с I. Мы рисуем эти деревья на плоскости, размещая корень выше других вершин.



В случае операды пары согласованных скобок пространства операды тоже линейно порождаются бинарными деревьями, только теперь эти деревья имеют дополнительную структуру: внутренние вершины помечены единицей или двойкой в соответствии с тем, какая из скобок применяется в соответствующем случае (на рисунке изображено дерево для монома $\{a_4, \{\{a_1, a_2\}_1, \{a_3, a_5\}_1\}_2\}_2$).

В случае операды Пуассона и бигамильтоновой операды любой элемент можно выразить через мономы, каждый из которых есть произведение нескольких мономов, использующих только скобки. Такому моному мы сопоставляем лес соответствующих бинарных деревьев.

В нашей работе мы широко используем комбинаторику графов двух типов. Первый тип — леса деревьев, которые мы только что определили. Эти деревья связаны с операдами, и мы называем их O-деревьями, когда хотим избежать путаницы. Второй тип графов используется для обозначения элементов наших алгебр. Вершины такого графа занумерованы элементами конечного множества I. В случае алгебры $OS_2^+(I)$ или $OS_2(I)$ рёбра графа помечены одной из букв x и y, что символизирует тип образующей, использованной в мономе. А именно, для данного монома мы соединяем вершины i и j ребром, если соответствующая образующая встречается в мономе, и пишем на ребре имя этой образующей (на рисунке изображён граф для монома $x_{12}y_{13}y_{14}x_{35}$). Обратное преобразование также возможно: каждому графу такого типа отвечает некоторый моном (в случае алгебр $OS_2(I)$ этот моном определён с точностью до знака). Ниже мы покажем, что моном, отвечающий графу с циклом, равен нулю, так что мы имеем дело с лесами деревьев данного типа.



3. Модельная задача: случай алгебр $OS^+(n)$.

В основном результаты этой главы хорошо известны. Мы приводим их для того, чтобы на модельном примере показать схему наших рассуждений в случае бигамильтоновой операды и двойных чётных алгебр Орлика – Соломона.

3.1. Структура кооперады на наборе $\{OS^+(n)\}$.

Определение 4. *Рассмотрим два конечных множества I, J; пусть $\sharp \notin I$. Определим гомоморфизм алгебр*

$$\phi^1_{IJ}\colon OS^+(I \sqcup J) \to OS^+(I \sqcup \{\sharp\}) \otimes OS^+(J)$$

формулами

$$\phi^1_{IJ}(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} \otimes 1, \text{если } i, j \in I, \\ 1 \otimes x_{ij}, \text{если } i, j \in J, \\ x_{i\sharp} \otimes 1, \text{если } i \in I, j \in J. \end{cases}$$

Лемма 1. *Для всех I, J гомоморфизм ϕ^1_{IJ} корректно определён.*

Доказательство. Достаточно проверить, что для любой тройки элементов $i, j, k \in I \sqcup J$ элемент

$$r_{ijk} = x_{ij}x_{jk} + x_{jk}x_{ki} + x_{ki}x_{ij}$$

переходит в нуль под действием ϕ^1_{IJ}. Если все три элемента i, j, k принадлежат одному из множеств I, J, то это очевидно. Поэтому надо рассмотреть случай, когда ровно один из них принадлежит I или ровно два из них принадлежат I. В первом случае без ограничения общности $i \in I$, и

$$\phi^1_{IJ}(r_{ijk}) = x_{i\sharp} \otimes x_{jk} + x_{\sharp i} \otimes x_{jk} + x_{\sharp i}x_{i\sharp} \otimes 1 = 0.$$

Во втором случае без ограничения общности $i, j \in I$, и

$$\phi^1_{IJ}(r_{ijk}) = x_{ij}x_{j\sharp} \otimes 1 + x_{j\sharp}x_{\sharp i} \otimes 1 + x_{\sharp i}x_{ij} \otimes 1 = 0.$$

□

Отображения ϕ^1_{IJ}, очевидно, удовлетворяют условиям коассоциативности для кокомпозиции, и набор двойственных пространств $\{OS^+(n)^*\}$ оказывается снабжённым структурой операды.

Приведём здесь геометрическую мотивацию для такого определения кокомпозиции. Из доказанного в статье [**2**] следует, что алгебра локально постоянных функций на дополнении к вещественной конфигурации гиперплоскостей A_{n-1} (алгебра Гельфанда – Варченко $GV(n)$) порождена характеристическими функциями полупространств $\{z_i < z_j\}$. Если обозначить через x_{ij} соответствующую характеристическую функцию, то соотношения между ними в нашей алгебре имеют вид

$$x_{ij} + x_{ji} = 1, x_{ij}^2 = x_{ij},$$
$$x_{ij}x_{jk} + x_{ik} = x_{ij}x_{ik} + x_{jk}x_{ik}.$$

Выбор образующих в алгебре задаёт на ней фильтрацию; элемент принадлежит k-му пространству фильтрации, если наименьшая степень полинома от образующих, равного этому элементу, равна k. Легко видеть, что присоединённая градуированная алгебра совпадает с чётной алгеброй Орлика – Соломона. На наборе алгебр Гельфанда – Варченко структура кооперады определяется так. Рассмотрим характеристическую функцию одной из связных компонент дополнения конфигурации. Такая связная компонента определяется тем, как упорядочены по возрастанию координаты её точек. Для алгебры $GV(I \sqcup J)$ отображение ϕ^1_{IJ} переводит соответствующую характеристическую функцию в нуль, при условии, что координаты, занумерованные J, не идут в этом линейном порядке подряд. В противном случае эти координаты заменяются на одну, получающущую номер $\sharp$, что определяет элемент алгебры $GV(I \sqcup \{\sharp\})$, а сами эти координаты определяют элемент алгебры $GV(J)$. Несложная проверка показывает, что это отображение согласовано с фильтрацией, и потому на присоединённых градуированных алгебрах тоже возникает кооперадная структура. Это как раз структура, описанная выше.

Замечание 2. *Операда $\{GV(n)^*\}$, как нетрудно проверить, изоморфна операде ассоциативных алгебр. Ниже мы покажем, что операда $\{OS^+(n)^*\}$ изоморфна операде Пуассона. Это наблюдение приводит к одному из возможных языков для описания деформаций пуассоновых структур.*

3.2. Спаривание с компонентами операды $\mathscr{P}$. Мы построили структуру кооперады на наборе чётных алгебр Орлика – Соломона. Оказывается, верна следующая

Лемма 2. *Бинарные операции соответствующей операды удовлетворяют соотношениям операды $\mathscr{P}$.*

Таким образом, существует отображение τ из операды $\mathscr{P}$ в операду $\{OS^+(n)^*\}$.

Определение 5. *Спаривание*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle \colon \mathscr{P}(n) \otimes OS^+(n) \to \Bbbk$$

определяется формулами $\langle \alpha, m \rangle = (\tau(\alpha))(m)$.

Другой способ определить это спаривание происходит из структуры операды Хопфа на операде $\mathscr{P}$. Чтобы сделать определение более компактным, мы используем следующие обозначения для операций:

$$\varepsilon \colon a_1, \dots, a_n \mapsto a_1 \star a_2 \star \ldots \star a_n,$$
$$\alpha_{ij} \colon a_1, \dots, a_n \mapsto \{a_i, a_j\} \star a_1 \star \ldots \star \hat{a}_i \star \ldots \star \hat{a}_j \star \ldots \star a_n.$$

Определение 6. *Определим спаривание*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle \colon \mathscr{P}(n) \otimes OS^+(n) \to \Bbbk$$

в случае, когда второй аргумент принадлежит пространству, порождённому 1 и образующими x_{ij}, полагая значения $\langle \varepsilon, 1 \rangle$ и $\langle \alpha_{ij}, x_{ij} \rangle$ равными 1, а все прочие значения спаривания с мономиальными операциями из $\mathscr{P}(n)$ равными 0. Продолжим это спаривание на всю алгебру $OS^+(n)$, полагая $\langle \lambda, gh \rangle = \langle \Delta_{\mathscr{P}}(\lambda), g \otimes h \rangle$ (по *определению, значение спаривания двух тензорных произведений равно произведению значений спаривания на сомножителях).*

Лемма 3. *Полученное спаривание корректно определено.*

Доказательство. Прямое вычисление. □

Дадим ещё третье, комбинаторное определение спаривания. Рассмотрим моном $m_{\mathcal{G}}$ из алгебры $OS^+(n)$ (отвечающий некоторому лесу A-деревьев $\mathcal{G}$) и элемент $\alpha_{\mathcal{F}} \in \mathscr{P}(n)$, отвечающий лесу O-деревьев $\mathcal{F}$. Определим следующее частичное отображение $f_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ множества рёбер $\mathcal{G}$ в множество вершин $\mathcal{F}$. Для ребра $e = (i \leftrightarrow j)$ рассмотрим листья i и j леса $\mathcal{F}$. Если они принадлежат разным компонентам $\mathcal{F}$, отображение не определено. В противном случае рассмотрим пути из этих листьев в корень соответствующей связной компоненты. Пусть κ — первая общая вершина этих путей. Тогда отображение $f_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ сопоставляет ребру e вершину κ. Следующее утверждение ясно из любого определения спаривания.

Замечание 3. *Значение спаривания $\langle \alpha_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{G}} \rangle$ отлично от нуля если и только если отображение $f_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ всюду определено и является биекцией между множеством рёбер $\mathcal{G}$ и множеством внутренних вершин $\mathcal{F}$. (В последнем случае значение спаривания равно ± 1.)*

3.3. Формулы размерности.

Предложение 2 ([**12**]). *$\mathbb{S}$-модули $\mathscr{P}$ и $\mathscr{C}om \circ \mathscr{L}ie$ изоморфны.*

Предложение 3 ([**4**]). *Размерность пространства $\mathscr{L}ie(n)$ равна $(n-1)!$.*

Следствие 1. *Размерность пространства $\mathscr{P}(n)$ равна $n!$.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{S}$-модули $\mathscr{P}$ и $\mathscr{C}om \circ \mathscr{L}ie$ изоморфны, имеем равенство

$$f_{\mathscr{P}}(t) = f_{\mathscr{C}om} \circ f_{\mathscr{L}ie} = \exp(-\ln(1-x)) - 1 = \frac{x}{1-x},$$

что совпадает с экспоненциальной производящей функцией последовательности $\{n!\}$.

То же самое можно объяснить комбинаторно: последовательность $\{(n-1)!\}$ перечисляет циклы на $[n]$, в то время как композиция с $\mathscr{C}om$ отвечает комбинаторной структуре, задаваемой разбиением множества и выбором цикла на каждой из частей, что, как известно, кодирует перестановки (цикловой тип), так что число таких комбинаторных объектов равно $n!$. □

3.4. Полные системы мономов для $\mathscr{Lie}$ и $\mathscr{P}$. Мы знаем размерности операд $\mathscr{Lie}$ и $\mathscr{P}$, так что для нахождения мономиальных базисов компонент этих операд нам достаточно найти полные системы мономов правильной мощности. Это и будет сделано в данном разделе.

Следующая лемма является классической.

Лемма 4. *Элементы $\{a_{\sigma(1)}, \{a_{\sigma(2)}, \ldots, \{a_{\sigma(n-1)}, a_n\} \ldots\}\}$ для всевозможных $\sigma \in S_{n-1}$ линейно порождают $\mathscr{Lie}(n)$.*

Доказательство. Тождество Якоби

$$\{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\} + \{b, \{a, c\}\}$$

позволяет нам уменьшить степень (число использованных образующих) левого аргумента скобки. Поэтому можно переписать каждый моном в виде линейной комбинации мономов вида $\{a_i, m\}$, где левый аргумент является образующей. Используя антикоммутативность скобки, мы можем считать, что на каждом шаге образующая a_n используется в правом аргументе. Теперь доказательство леммы легко завершается по индукции. $\square$

Обозначим множество таких мономов через $\mathfrak{B}_{\mathscr{Lie}}(n)$. Мощность этого множества равна $(n-1)!$, поэтому оно образует базис в соответствующей компоненте операды Ли. Поскольку $\mathscr{P} \simeq \mathscr{Com} \circ \mathscr{Lie}$, имеет место

Теорема 1. *Множество $\mathfrak{B}_{\mathscr{P}}(n)$ всех мономов вида $c_1 \star \ldots \star c_k$, где $c_j \in \mathfrak{B}_{\mathscr{Lie}}(A_j)$ (для всевозможных разбиений $[n] = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ с $\max A_1 < \ldots < \max A_k$), образует базис компоненты $\mathscr{P}(n)$.*

3.5. Полные системы мономов для алгебр $OS^+(n)$. В этом разделе мы доказываем, что размерность алгебры $OS^+(n)$ не превосходит $n!$. Более того, мы доказываем следующее общее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $OS^+(n, \gamma)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с образующими x_{ij}, $1 \leq i \neq j \leq n$, и соотношениями*

$$x_{ij} + x_{ji} = 0,$$
$$x_{ij}^2 = 0,$$
$$\gamma_{ijk} x_{ij} x_{jk} + \gamma_{jki} x_{jk} x_{ki} + \gamma_{kij} x_{ki} x_{ij} = 0$$

для некоторых $\gamma_{abc} \in \Bbbk$. Тогда $\dim OS^+(n, \gamma) \leq n!$ для любого набора коэффициентов γ с $\gamma_{abc} \neq 0$ при всех $a, b, c \in [n]$.

Доказательство. В действительности мы покажем, что в качестве полной системы мономов для любой такой алгебры можно взять множество $\mathfrak{F}_{OS^+}(n)$ всех мономов $m_{\mathcal{G}}$, для которых каждая связная компонента графа $\mathcal{G}$ (являющаяся графом $\mathcal{G}_\pi$ на некотором подмножестве $\pi \subset [n]$) является деревом, каждая вершина которого имеет не более двух соседей, а вершина с максимальным номером является листом (имеет ровно одного соседа). Таким образом, любое дерево этого типа может быть вложено в прямую, причём вершина с наибольшим номером будет располагаться с краю.

Лемма 5. *В условиях предложения моном $m_{\mathcal{G}}$ равен нулю, если граф не является лесом (содержит цикл).*

Доказательство. Индукция по длине кратчайшего цикла в графе $\mathcal{G}$. Если эта длина равна 2, граф имеет кратное ребро и остаётся использовать соотношение $x_{ij}^2 = 0$. Если эта длина больше, рассмотрим два смежных ребра $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$ кратчайшего цикла. Используя соотношение $\gamma_{ijk}x_{ij}x_{jk} = -\gamma_{jki}x_{jk}x_{ki} - \gamma_{kij}x_{ki}x_{ij}$, мы видим, что моном $m_{\mathcal{G}}$ равен линейной комбинации мономов, для которых длина наименьшего цикла меньше, что и требовалось. $\square$

Таким образом, для доказательства предложения нам достаточно выразить через разрешённые мономы только те, что отвечают деревьям. Будем считать, что вершина с наибольшим номером является корнем нашего дерева и рассмотрим индуцированную на дереве ориентацию (ребро $i \leftrightarrow j$ ориентировано от i к j, если путь из корня в j проходит через i). Мы докажем наше утверждение убывающей индукцией по расстоянию D от корня до вершины с не менее чем двумя исходящими (направленными) рёбрами, а при фиксированном D — по числу исходящих рёбер для такой вершины.

База индукции: D не превосходит общего числа рёбер (и если D равно числу рёбер, утверждение доказано).

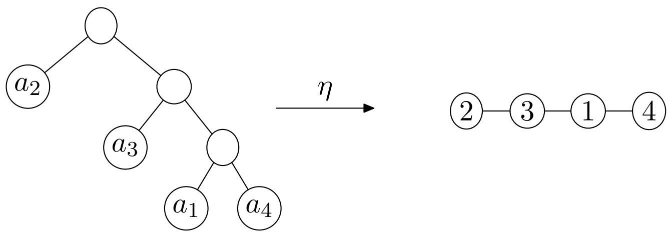
Шаг индукции: фиксируем $D \geq 0$, пусть i — ближайшая к корню вершина с не менее чем двумя исходящими рёбрами. Используя соотношение

$$\gamma_{kij}x_{ki}x_{ij} = -\gamma_{ijk}x_{ij}x_{jk} - \gamma_{jki}x_{jk}x_{ki},$$

мы можем заменить наш моном на линейную комбинацию мономов, для которых число исходящих рёбер у вершины i меньше, что уменьшает параметр N (а когда N становится равным 1, увеличивает D). Поэтому часть утверждения доказана: данные мономы действительно образуют полную систему.

Число элементов в нашем множестве может быть вычислено несколькими способами. Чтобы усилить сходство с доказательством в более содержательном случае, мы предъявим взаимно однозначное соответствие между нашим множеством и базисом компоненты операды Пуассона. Соответствующее отображение мы будем обозначать через η.

Заметим, что базис компоненты операды Ли можно описать рекуррентно: каждый элемент есть скобочное слово $\{a_i, b\}$, в котором $i < n$ и b принадлежит базису полилинейной части свободной алгебры, порождённой $\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$. Это рекуррентное определение немедленно приводит к рекуррентному определению взаимно однозначного соответствия: возьмём дерево, отвечающее элементу b, рассмотрим его вершину, которая отвечает наиболее высоко расположенной образующей (i, для которого $b = \{a_j, c\}$) и соединим эту вершину ребром с вершиной i. Комбинаторно, если мы нарисуем операдные деревья на плоскости так, что в каждой вершине правое поддерево содержит лист с наибольшим номером, то мы увидим, что листья наших деревьев собираются в цепочки по высоте, на которой они расположены, и мы соединяем соответствующие вершины в этом порядке (см. рис.).



Чтобы завершить определение отображения η, продолжим наше определение с деревьев на леса, беря несвязное объединение образов деревьев, из которых состоит данный лес, в качестве его образа. $\square$

3.6. Невырожденность спаривания.

Теорема 2. *Размерность алгебры $OS^+(n)$ равна $n!$; более того, множество $\mathfrak{F}_{OS^+}(n)$ образует базис этой алгебры.*

Доказательство. Мы предъявим линейное упорядочение системы мономов $\mathfrak{F}_{OS^+}(n)$ (а значит, и системы мономов $\mathfrak{B}_{\mathscr{P}}(n)$ — упорядочение переносится туда с помощью биекции η). После этого мы проверим, что матрица спаривания между $\mathfrak{B}_{\mathscr{P}}(n)$ и $\mathfrak{F}_{OS^+}(n)$ является невырожденной: для наших упорядочений она окажется верхнетреугольной (и — как совпадение — даже диагональной) с ненулевыми элементами на диагонали. Поскольку мономы из операды Пуассона линейно независимы, то же самое должно быть верно и для построенных нами элементов алгебры.

Фиксируем упорядочение $<_p$ на множестве всех (неупорядоченных) разбиений $[n] = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ множества $[n]$.

Рассмотрим два монома $m_{\mathcal{G}_1}$ и $m_{\mathcal{G}_2}$, для которых графы $\mathcal{G}_i$ — леса деревьев, являющихся цепочками с максимумом на конце. Каждый из этих лесов задаёт разбиение множества $[n]$ на подмножества в соответствии со своими компонентами связности. Будем считать, что первый моном больше, если соответствующее разбиение больше относительно упорядочения $<_p$.

Остаётся определить порядок на лесах, для которых эти разбиения совпадают (и равны, скажем, $[n] = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$). Без ограничения общности, имеем $\max A_1 < \max A_2 < \ldots < \max A_k$.

Мы определим упорядочение на двух деревьях с одним и тем же множеством вершин, после чего будем сравнивать для двух данных лесов деревья на подмножестве A_1, деревья на подмножестве A_2,..., деревья на подмножестве A_k. Еслина некоторых шагах сравнения соответствующие деревья не совпадают, мы выберем первый такой шас и скажем, что больше тот моном, для которого соответствующее дерево на этом шаге больше.

Итак, рассмотрим два дерева T и T' на одном и том же (упорядоченном) множестве вершин A. Каждое из этих деревьев — цепочка вершин, начинающаяся в $\max A$, и мы сравниваем элементы этих цепочек лексикографически: если для дерева T вершина, соединённая с $\max A$, больше, то $T' < T$, если эти вершины одинаковы, мы сравниваем их соседей и т. д.

Осталось проверить, что матрица спаривания между множествами векторов $\mathfrak{B}_{\mathscr{P}}(n)$ и $\mathfrak{F}_{OS^+}(n)$ невырожденна. Докажем, что $\langle \alpha_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{G}} \rangle = 0$ для $\mathcal{F} < \eta^{-1}(\mathcal{G})$ (и $\langle \alpha_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{G}} \rangle = \pm 1$ для $\mathcal{F} = \eta^{-1}(\mathcal{G})$).

Замечание 4. *В нашем случае в действительности верно более сильное утверждение $\langle \alpha_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{G}} \rangle = 0$ при $\mathcal{F} \neq \eta^{-1}(\mathcal{G})$, но мы предпочитаем более слабое утверждение, чтобы сделать более наглядным трудное доказательство для случая бигамильтоновой операды.*

Во-первых, из комбинаторного определения спаривания очевидно, что значение спаривания равно нулю, когда разбиения $[n]$, определяемые лесами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, различны. Поэтому мы можем ограничиться случаем, когда оба разбиения равны $[n] = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$. Как и выше, мы предполагаем, что $\max A_1 < \max A_2 < \ldots < \max A_k$, и достаточно проверить, что $\langle \alpha_{\mathcal{T}'}, m_T \rangle = 0$ для O-дерева $\mathcal{T}'$ и A-дерева T (с одним и тем же индексирующим множеством), если $\eta(\mathcal{T}') < T$. Положим $T' = \eta(\mathcal{T}')$. Для простоты обозначений мы будем считать, что общим множеством вершин T и T' является $[n]$, надеясь, что это не слишком перегружает обозначения.

Начнём вычислять значение спаривания. Мы хотим, чтобы отображение $f_{\mathcal{T}',T}$ было биекцией. Это значит, что родитель v вершины n дерева $\mathcal{T}'$ отвечает некоторому ребру дерева T. Единственное возможное для этого ребро соединяет n с вершиной i, которая является вторым потомком v. Теперь рассмотрим родителя вершины v и продолжим рассуждать в том же духе: ребро, которое отвечает этой вершине, соединяет второго потомка этой вершины либо с n, либо с i, но вершина n не может иметь валентность 2, поэтому мы точно знаем, что второй конец этого ребра — вершина i. Продолжая, мы видим, что наши цепочки должны с необходимостью совпасть, что доказывает предложение. $\square$

4. Случай алгебр $OS_2^+(n)$.

В этой главе мы получаем ключевые результаты о связи двойных чётных алгебр Орлика – Соломона и бигамильтоновой операды. Все результаты этой главы являются новыми. Как и в предыдущей главе, название каждого из разделов главы довольно точно описывает содержание этого раздела. В дополнении к этой главе мы кратко обсуждаем градуированный случай (двойных алгебр Орлика – Соломона и операды Герстенхабера).

4.1. Структура кооперады на наборе $\{OS_2^+(n)\}$.

Определение 7. *Рассмотрим два конечных множества I, J; пусть $\sharp \notin I$. Определим гомоморфизм алгебр*

$$\phi^2_{IJ} \colon OS_2^+(I \sqcup J) \to OS_2^+(I \sqcup \{\sharp\}) \otimes OS_2^+(J)$$

формулами

$$\phi^2_{IJ}(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} \otimes 1, \text{если } i, j \in I, \\ 1 \otimes x_{ij}, \text{если } i, j \in J, \\ x_{i\sharp} \otimes 1, \text{если } i \in I, j \in J, \end{cases}$$

$$\phi^2_{IJ}(y_{ij}) = \begin{cases} y_{ij} \otimes 1, \text{если } i, j \in I, \\ 1 \otimes y_{ij}, \text{если } i, j \in J, \\ y_{i\sharp} \otimes 1, \text{если } i \in I, j \in J. \end{cases}$$

Лемма 6. *Для всех I, J гомоморфизм ϕ^2_{IJ} корректно определён.*

Доказательство. Аналогично случаю алгебр $OS^+(n)$. □

Отображения ϕ^2_{IJ}, очевидно, удовлетворяют условиям коассоциативности для кокомпозиции, и набор двойственных пространств $\{OS_2^+(n)^*\}$ оказывается снабжённым структурой операды.

4.2. Спаривание с компонентами операды $\mathscr{P}_2$. Мы построили структуру кооперады на наборе двойных чётных алгебр Орлика – Соломона. Оказывается, верна следующая

Лемма 7. *Бинарные операции соответствующей операды удовлетворяют соотношениям операды $\mathscr{P}_2$.*

Таким образом, существует отображение τ из операды $\mathscr{P}_2$ в операду $\{OS_2^+(n)^*\}$.

Определение 8. *Спаривание*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle \colon \mathscr{P}_2(n) \otimes OS_2^+(n) \to \Bbbk$$

определяется формулами $\langle \alpha, m\rangle = (\tau(\alpha))(m)$.

Другой способ определить это спаривание происходит из структуры операды Хопфа на операде $\mathscr{P}_2$. Чтобы сделать определение более компактным, мы используем следующие обозначения для операций:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \colon a_1, \ldots, a_n &\mapsto a_1 \star a_2 \star \ldots \star a_n,\\
\alpha_{ij} \colon a_1, \ldots, a_n &\mapsto \{a_i, a_j\}_1 \star a_1 \star \ldots \star \hat{a}_i \star \ldots \star \hat{a}_j \star \ldots \star a_n,\\
\beta_{ij} \colon a_1, \ldots, a_n &\mapsto \{a_i, a_j\}_2 \star a_1 \star \ldots \star \hat{a}_i \star \ldots \star \hat{a}_j \star \ldots \star a_n.
\end{aligned}$$

Определение 9. *Определим спаривание*

$$\langle \cdot,\cdot \rangle \colon \mathscr{P}_2(n) \otimes OS_2^+(n) \to \Bbbk$$

в случае, когда второй аргумент принадлежит пространству, порождённому 1 и образующими x_{ij}, y_{ij}, полагая значения спаривания $\langle \varepsilon, 1\rangle$, $\langle \alpha_{ij}, x_{ij}\rangle$ и $\langle \beta_{ij}, y_{ij}\rangle$ равными 1, а все прочие значения спаривания с мономиальными операциями из $\mathscr{P}_2(n)$ равными 0. Продолжим это спаривание на всю алгебру $OS_2^+(n)$, полагая $\langle \lambda, gh\rangle = \langle \Delta_{\mathscr{P}_2}(\lambda), g \otimes h\rangle$ (по определению, значение спаривания двух тензорных произведений равно произведению значений спаривания на сомножителях).

Лемма 8. *Полученное спаривание корректно определено.*

Доказательство. Прямое вычисление. □

Дадим ещё третье, комбинаторное определение спаривания. Рассмотрим моном $m_{\mathcal{G}}$ из алгебры $OS_2^+(n)$ (отвечающий некоторому лесу A-деревьев $\mathcal{G}$) и элемент $\alpha_{\mathcal{F}} \in \mathscr{P}_2(n)$, отвечающий лесу O-деревьев $\mathcal{F}$. Определим следующее частичное отображение $f_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ множества рёбер $\mathcal{G}$ в множество вершин $\mathcal{F}$. Для ребра $e = (i \leftrightarrow j)$ рассмотрим листья i и j леса $\mathcal{F}$. Если они принадлежат разным компонентам $\mathcal{F}$, отображение не определено. В противном случае рассмотрим пути из этих листьев в корень соответствующей связной компоненты. Пусть κ — первая общая вершина этих путей. Если метка вершины κ противоречит[1] метке ребра e, то отображение вновь не определено. Если же метки непротиворечивы, отображение $f_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ сопоставляет ребру e вершину κ. Следующее утверждение ясно из любого определения спаривания.

Замечание 5. *Значение спаривания $\langle \alpha_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{G}} \rangle$ отлично от нуля если и только если отображение $f_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ всюду определено и является биекцией между множеством рёбер $\mathcal{G}$ и множеством внутренних вершин $\mathcal{F}$. (В последнем случае значение спаривания равно ± 1.)*

4.3. Формулы размерности.

Предложение 5 ([**4**]). *$\mathbb{S}$-модули $\mathscr{P}_2$ и $\mathscr{C}om \circ \mathscr{L}ie_2$ изоморфны.*

Предложение 6 ([**4**]). *Размерность пространства $\mathscr{L}ie_2(n)$ равна n^{n-1}.*

Следствие 2. $\dim \mathscr{P}_2(n) = (n+1)^{n-1}$.

Доказательство. Мы знаем, что $\mathbb{S}$-модули $\mathscr{P}_2$ и $\mathscr{C}om \circ \mathscr{L}ie_2$ изоморфны. Размерности компонент операды $\mathscr{L}ie_2$ равны количествам корневых деревьев. комбинаторной структуре, задаваемой разбиением множества и выбором корневого дерева на каждой из частей. соединяя корни этих деревьев с новой вершиной $n+1$, мы получаем всевозможные деревья на $[n+1]$, количество которых, как известно, равно $(n+1)^{n-1}$. $\square$

4.4. Полные системы мономов для $\mathscr{L}ie_2$ и $\mathscr{P}_2$. Как и в случае операды Ли, найдём полные системы мономов нужной мощности.

Определение 10. *Для конечного упорядоченного множества $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ определим семейство мономов $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A)$*

[1] Мы считаем, что 1 отвечает x, 2 отвечает y, а во всех остальных случаях имеет место противоречие.

в свободной алгебре с двумя согласованными скобками, порождённой множеством A рекуррентно следующим образом.

- *Для $A = \{a_1\}$ положим $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A) = \{a_1\}$.*
- *При $n > 1$ моном b принадлежит $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A)$ при выполнении одного из условий:*
  1) $b = \{a_i, b'\}_1$, где $i < n$, $b' \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A \setminus \{a_i\})$;
  2) $b = \{b_1, b_2\}_2$, где $b_1 \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A_1)$, $b_2 \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A_2)$ для некоторого разбиения $A_1 \sqcup A_2 = A$, $\max(A_1) < \max(A_2)$ (т. е. $a_n \in A_2$), и либо $b_1 = a_i$ для некоторого i, либо $b_1 = \{c_1, c_2\}_1$, $c_i \in \mathfrak{B}(C_i)$, $A_1 = C_1 \sqcup C_2$.

Лемма 9. *(i) $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A)$ линейно порождает $\mathscr{L}ie_2(A)$.*
(ii) $|\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A)| = |A|^{|A|-1}$.

Доказательство. Докажем полноту данной системы. Здесь доказательство мало отличается от случая операды Ли. Мы используем тождество Якоби для первой скобки и шестичленное соотношение, чтобы переписать каждый моном в виде линейной комбинации мономов, каждый из которых имеет вид либо $\{a_i, m\}_1$ с $i < n$, либо $\{m_1, m_2\}_2$. Для мономов первого типа доказательство завершается по индукции. Что касается мономов второго типа, то мы вновь можем предположить, что на каждом шаге образующая a_n задействована в правом аргументе скобки, и единственный случай, в котором мы не можем применить предположение индукции, — это случай $m_1 = \{m_1', m_2'\}_2$. Применяя тождество Якоби для второй скобки, мы можем уменьшить степень левого аргумента скобки, что и завершает доказательство полноты.

Пусть $\beta_n = |\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}([n])|$. Для $i = 1, 2$ положим $\beta_{i,n} = |\mathfrak{B}^i_{\mathscr{L}ie_2}([n])|$, где $\mathfrak{B}^i_{\mathscr{L}ie_2}([n])$ — множество всех мономов, для которых выполнено i-е условие из определения. (Мы полагаем $\beta_{1,1} = 1$, $\beta_{2,1} = 0$.) Получим рекуррентные соотношения на эти последовательности.

Первое из условий означает, что

$$\beta_{1,n+1} = n\beta_n,$$

в то время как второе условие даёт соотношение

$$\beta_{2,n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \beta_{1,k}\beta_{n+1-k}$$

(мы выбираем k индексов для использования b_1; образующая a_{n+1} запрещена, так что число способов есть $\binom{n}{k}$).

Перепишем эти формулы в виде

$$\frac{(n+1)\beta_{1,n+1}}{(n+1)!} = \frac{n\beta_n}{n!},$$

$$\frac{(n+1)\beta_{2,n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{1,k}}{k!} \frac{(n+1-k)\beta_{n+1-k}}{(n+1-k)!}.$$

Используя экспоненциальные производящие функции

$$\beta(t) = \sum_{l\geq 1} \frac{\beta_l t^l}{l!}, \quad \beta_i(t) = \sum_{l\geq 1} \frac{\beta_{i,l} t^l}{l!},$$

мы можем заменить предыдущие формулы на дифференицальные уравнения

$$\beta_1'(t) - 1 = t\beta'(t), \tag{4}$$

$$\beta_2'(t) = \beta_1(t)\beta'(t). \tag{5}$$

Подставляя $\beta_2(t) = \beta(t) - \beta_1(t)$ в (5), имеем $\beta'(t) - \beta_1'(t) = \beta_1(t)\beta'(t)$, что эквивалентно

$$\beta'(t) = \frac{\beta_1'(t)}{1-\beta_1(t)}.$$

Интегрируя, получаем $\beta(t) = -\ln(1-\beta_1(t))$ (константа интегрирования получается сравнением первых коэффициентов), и потому $\exp(\beta(t)) = \frac{1}{1-\beta_1(t)}$. Переписывая эту формулу в виде $\beta_1(t) = 1 - \exp(-\beta(t))$ и подставляя в (4), имеем

$$\beta'(t)\exp(-\beta(t)) - 1 = t\beta'(t),$$

и потому $\beta'(t) = \exp(\beta(t)) + t\beta'(t)\exp(\beta(t))$. Интегрируя, получаем

$$\beta(t) = t\exp(\beta(t))$$

(выбор константы интегрирования делается аналогично). Единственным решением этого функционального уравнения является, как мы уже обсуждали выше, экспоненциальная производящая функция чисел корневых деревьев — последовательности $\{n^{n-1}\}$. □

Из доказанного нами следует, что множество $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}([n])$ образует базис компоненты операды $\mathscr{L}ie_2$. Для бигамильтоновой операды мы имеем изморфизм $\mathbb{S}$-модулей $\mathscr{P}_2 \simeq \mathscr{C}om \circ \mathscr{L}ie_2$, и потому верна

Теорема 3. *Множество $\mathfrak{B}_{\mathscr{P}_2}(n)$ всех мономов вида $c_1 \star \ldots \star c_k$, где $c_j \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A_j)$ (для всевозможных разбиений $[n] = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$ с $\max A_1 \leq \ldots \leq \max A_k$), образует базис компоненты $\mathscr{P}_2(n)$.*

4.5. Полные системы мономов для алгебр $OS_2^+(n)$. Здесь мы доказываем верхнюю оценку на размерность алгебры $OS_2^+(n)$. Вновь эта оценка верна для общей алгебры такого типа.

Предложение 7. *Пусть $OS_2^+(n,\gamma)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с образующими x_{ij}, y_{ij}, $1 \le i \neq j \le n$, и соотношениями*

$$\begin{gathered}
x_{ij} + x_{ji} = y_{ij} + y_{ji} = 0,\\
x_{ij}^2 = x_{ij}y_{ij} = y_{ij}^2 = 0,\\
\gamma_{xx,ijk}x_{ij}x_{jk} + \gamma_{xx,jki}x_{jk}x_{ki} + \gamma_{xx,kij}x_{ki}x_{ij} = 0,\\
\gamma_{xy,ijk}x_{ij}y_{jk} + \gamma_{xy,jki}x_{jk}y_{ki} + \gamma_{xy,kij}x_{ki}y_{ij} + \\
+ \gamma_{yx,ijk}y_{ij}x_{jk} + \gamma_{yx,jki}y_{jk}x_{ki} + \gamma_{yx,kij}y_{ki}x_{ij} = 0,\\
\gamma_{yy,ijk}y_{ij}y_{jk} + \gamma_{yy,jki}y_{jk}y_{ki} + \gamma_{yy,kij}y_{ki}y_{ij} = 0
\end{gathered}$$

для некоторых $\gamma_{\alpha\beta,abc} \in \Bbbk$. Тогда $\dim OS_2^+(n,\gamma) \le (n+1)^{n-1}$ для любого набора коэффициентов γ с $\gamma_{\alpha\beta,abc} \neq 0$ при всех $a,b,c \in [n]$, $\alpha,\beta \in \{x,y\}$.

Доказательство. Мы предъявим биекцию между базисом компоненты $\mathscr{P}_2(n)$ и некоторым семейством мономов в алгебре $OS_2^+(n)$, укажем комбинаторное описание этого семейства и затем докажем полноту этого семейства.

Построим отображение множества $\mathfrak{B}_{\mathscr{P}_2}([n])$ в множество всех лесов A-деревьев. В действительности, мы построим отображение множества $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}([n])$ в множество A-деревьев, после чего продолжим его очевидным образом на леса.

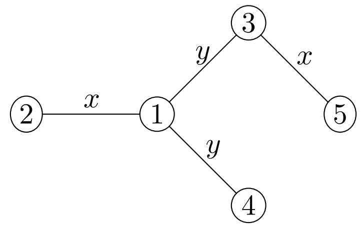
Возьмём элемент $b \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}([n])$. Объясним как построить дерево $\psi(b)$ с множеством вершин $[n]$ и рёбрами, помеченными множеством $\{x,y\}$. Определение будет рекуррентным. В случае $n=1$ оба множества одноэлементны, так что биекция единственна. Пусть $n>1$. Рассмотрим два случая.

1) $b = \{a_i, \{b_1, \{\ldots, \{b_k, b_{k+1}\}_2 \ldots\}_2\}_2\}_1$, где каждый моном b_s является либо образующей a_{i_s}, либо скобкой $\{a_{i_s}, b'_s\}_1$ для некоторого i_s и некоторого базисного элемента b'_s. Тогда множество рёбер нашего дерева есть объединение множеств рёбер деревьев $\psi(b_1)$, $\psi(b_2)$, $\ldots$, $\psi(b_{k+1})$, рёбер $i_1 \leftrightarrow i_2$, $i_2 \leftrightarrow i_3$,$\ldots$, $i_k \leftrightarrow i_{k+1}$ с пометкой y и ребра $i \leftrightarrow i_{k+1}$ с пометкой x.
2) $b = \{b', b''\}_2$, где b' — либо образующая a_i, либо скобка $\{a_i, c'\}_1$ для некоторого i и некоторого базисного элемента c', а b'' — либо образующая a_j, либо скобка $\{a_j, c''\}_1$, либо

> скобка $\{\{a_j, c''\}_1, d''\}_2$ для некоторого j и некоторых базисных элементов c'', d''. Тогда множество рёбер нашего дерева есть объединение множеств рёбер деревьев $\psi(b')$ и $\psi(b'')$ и ребра $i \leftrightarrow j$ с пометкой y.

Пример 3. *Мономы из раздела 2.7 отвечают друг другу при этом отображении:*

$$\{a_4, \{\{a_1, a_2\}_1, \{a_3, a_5\}_1\}_2\}_2 \longleftrightarrow$$



Инъективность отображения ψ очевидна. Опишем образ множества $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}([n])$ при отображении ψ.

Рассмотрим произвольное A-дерево T. Будем считать, что его корень — вершина с меткой n, так дерево оказывается снабжено ориентацией. Рассмотрим все деревья, которые удовлетворяют следующему условию:

> (‡) для каждой вершины найдётся не более одного исходящего ребра с меткой x и не более одного исходящего ребра с меткой y.

Для вершины v дерева T мы называем x-цепью с началом в v любую последовательность c вершин $v_0 = v$, $v_1, \ldots, v_k$, в которой все ориентированные рёбра $v_i \to v_{i+1}$ имеют метку x (и говорим, что длина цепи c равна k). Если x-цепь нельзя расширить до большей x-цепи, мы называем такую цепь максимальной. Если условие (‡) выполнено, то для каждой вершины v найдётся ровно одна максимальная x-цепь с началом в v. Мы обозначаем эту цепь через $c_x(v, T)$, а её длину — через $l_x(v, T)$. Максимальные y-цепи и соответствующие обозначения для них определяются аналогично.

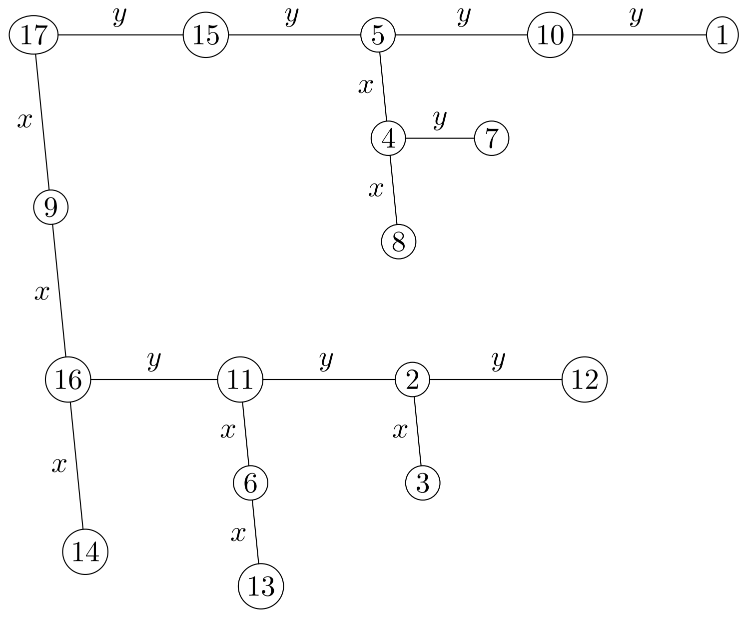
По каждому дереву T, удовлетворяющему условию (‡), мы определим некоторое разбиение множества $[n]$ следующим образом. Рассмотрим максимальную x-цепь $j_0(T) = n$, $j_1(T), \ldots, j_k(T)$ с началом в вершине n (здесь $k = l_x(n, T)$). Сотрём временно все рёбра нашего дерева, соединяющие вершины этой цепи. Связные компоненты получающегося графа — это деревья T_0, $T_1, \ldots, T_k$ на некоторых подмножествах множества $[n]$. Эти подмножества образуют разбиение $[n] = \xi_0(T) \sqcup \xi_1(T) \sqcup \ldots \sqcup \xi_k(T)$ (здесь $\xi_s(T)$ обозначает часть, содержащую элемент $j_s(T)$). Для каждого $p = 0, 1, \ldots, k$ рассмотрим максимальную y-цепь $i_{0,p}(T) = j_p$, $i_{1,p}(T)$,…, $i_{k_p,p}(T)$ с началом в вершине j_p дерева T (здесь $k_p = l_y(j_p, T)$). Эта цепь лежит, очевидно, в дереве T_p. Сотрём временно все рёбра дерева T_p, соединяющие вершины этой цепи. Связные компоненты получающегося графа — это деревья $T_{i,p}$ $(i = 1, \ldots, k_p)$ на некоторых подмножествах множества $\xi_p(T)$. Эти подмножества образуют разбиение

$$\xi_p(T) = \pi_{0,p}(T) \sqcup \ldots \sqcup \pi_{k_p,p}(T).$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_{OS_2^+}([n])$ множество всех A-деревьев, которые удовлетворяют условию (‡) и следующим рекуррентно заданным условиям:

(i) для любых $p = 0, \ldots, k$ и $s = 1, \ldots, k_p$ конец максимальной x-цепи с началом в вершине $i_{s,p}(T)$ является максимальным элементом множества $\pi_{s,p}(T)$;
(ii) каждое из деревьев $T_{i,p}$, полученных после стирания всех рёбер максимальных цепей (как это сделано выше), принадлежит множеству $\mathfrak{T}_{OS_2^+}(\pi_{i,p})$.

Пример 4. *Следующее дерево T принадлежит $\mathfrak{T}_{OS_2^+}(17)$.*



В частности,

$$l_x(17, T) = 3, l_y(17, T) = 4, c_x(5, T) = (5, 4, 8), \pi_{2,0}(T) = \{4, 5, 7, 8\}.$$

Определение 11. *Пусть $\mathcal{F}$ — лес на $[n]$, рёбра которого помечены множеством $\{x, y\}$. Пусть $[n] = \pi_1 \sqcup \ldots \sqcup \pi_m$ — разбиение*

$[n]$, определяемое компонентами связности $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ леса $\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathfrak{F}_{OS_2^+}([n])$ множество всех лесов $\mathcal{F}$, для которых дерево $\mathcal{F}_s$ принадлежит множеству $\mathfrak{T}_{OS_2^+}(\pi_s)$ при всех s.

Приведём набросок доказательства того, что образ $\psi(\mathfrak{B}_{\mathscr{P}_2}([n]))$ совпадает с множеством $\mathfrak{F}_{OS_2^+}([n])$. Возьмём элемент b множества $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}([n]))$ и рассмотрим отвечающее ему O-дерево. Рассмотрим в этом дереве путь из листа с меткой n к корню. Этот путь содержит несколько внутренних вершин с меткой 1, и несколько внутренних вершин с меткой 2, разбитых на отрезки между очередными вершинами с меткой 1. Из определения отображения ψ видно, что вершины с меткой 1 этого пути находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами $j_0(T) = n, \ldots, j_m(T)$ максимальной x-цепи с началом в вершине n дерева $\psi(b)$, а отрезок из вершин с меткой 2 между s-й и $(s+1)$-й вершиной с меткой 1 отвечает максимальной y-цепи с началом в вершине $j_s(T)$. Далее, нетрудно проверить, что условия макисмальности элементов на концах x-цепей отвечают условию $\max A_1 < \max A_2$ из определения $\mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(A)$. Мы опускаем дальнейшие детали.

Теперь мы докажем, что наши мономы образуют полную систему элементов в $OS_2^+(n)$.

Лемма 10. *Мономы, отвечающие всевозможных лесам, образуют полную систему в $OS_2^+(n)$.*

Доказательство. Докажем, что моном, отвечающий графу с циклом, равен нулю. Мы вновь докажем это индукцией по длине кратчайшего цикла в нашем мономе. Для цикла длины 2 (кратного ребра) это буквально следует из соотношений в алгебре $OS_2^+(n)$. Пусть длина кратчайшего цикла больше. Если цикл содержит два смежных ребра с меткой x (соотв., y), мы можем, как и в случае чётной алгебры Орлика – Соломона, использовать трёхчленное x-соотношение (соотв., y-соотношение) для уменьшения длины цикла. Единственный нетривиальный случай — цикл, в котором метки смежных рёбер чередуются. В этом случае мы используем шестичленное соотношение для двух смежных рёбер, заменяя наш моном на линейную комбинацию пяти мономов, четыре из которых имеют более короткий кратчайший цикл, а пятый имеет кратчайший цикл той же длины, но этот цикл содержит два смежных ребра с одинаковыми метками, что позволяет провести шаг индукции и в этом случае. $\square$

Докажем теперь, что для каждого леса $\mathcal{G}$ на $[n]$ моном $m_{\mathcal{G}}$ можно переписать в виде линейной комбинации мономов, отвечающих лесам из $\mathfrak{F}_{OS_2^+}(n)$. Мы доказываем это индукцией по n. Следующая лемма очевидна из индуктивного предположения.

Лемма 11. *Каждый моном $m_{\mathcal{G}}$ равен линейной комбинации мономов $m_{\mathcal{F}}$ для лесов $\mathcal{F}$, компоненты которых удовлетворяют следующим условиям (для некоторых k, l):*

- *Из вершины с максимальной меткой выходит k рёбер с меткой x и l рёбер с меткой y.*
- *Если стереть рёбра, выходящие из вершины с максимальной меткой, мы получим деревья T_1^x, …, T_k^x, T_1^y, …, T_l^y на некоторых подмножествах π_1^x, …, π_k^x, π_1^y, …, π_l^y. Условие заключается в том, что каждое из деревьев T_j^y принадлежит соответствующему множеству $\mathfrak{T}_{OS_2^+}(\pi_j^y)$.*

Для простоты будем работать с одной из связных компонент нашего леса. Чтобы обозначения были проще, быдем считать, что множество вершин этой компоненты есть $[n]$, т. е. максимальная метка есть n. Проверим, что мы можем добиться выполнения условия (i) для элементов y-цепей с началом в n. Докажем это убывающей индукцией по $k+l$, а для фиксированного $k+l$ — индукцией по l. База индукции — $k+l = n-1$, когда все условия выполнены, а для фиксированного $k+l$ — $l = 0$, когда y-цепей нет и доказывать нечего. Достаточно обработать так одну из y-цепей.

Рассмотрим одно из деревьев T_p^y. Пусть m_p^y — максимальный элемент множества π_p^y. Далее, пусть v_p^y — конец x-цепи с началом в m_p^y. Мы докажем, что

> (♦) по модулю мономов, отвечающих деревьям, для которых выполнено предположение индукции, наш моном равен моному, для которого вершина n соединена с вершиной v_p^y (а остальные рёбра не изменились).

Этот моном, очевидно, будет удовлетворять условиям максимальности для соответствующей y-цепи.

Обозначим через v вершину дерева T_p^y, соединённую с n. Рассмотрим путь из этой вершины в вершину v_p^y. Обозначим вершины этого пути через $v_0 = v_p^y$, …, $v_r = v$. Мы докажем (♦) индукцией по r (база $r = 0$ очевидна). Действительно, если ребро $v_r \leftrightarrow v_{r-1}$ имеет метку y, мы используем соотношение

$$\gamma_{yy,nv_rv_{r-1}} y_{nv_r} y_{v_rv_{r-1}} = -\gamma_{yy,v_{r-1}v_rn} y_{nv_{r-1}} y_{v_{r-1}v_r} + \gamma_{yy,v_rnv_{r-1}} y_{nv_{r-1}} y_{nv_r},$$

где для первого монома r уменьшилось, в то время как для второго l (а значит, и $k+l$) увеличилось. Если же ребро $v_r \leftrightarrow v_{r-1}$ имеет метку x, мы используем соотношение

$$\begin{aligned}\gamma_{yx,nv_rv_{r-1}} y_{nv_r} x_{v_rv_{r-1}} = -\gamma_{yx,v_{r-1}v_rn} y_{nv_{r-1}} x_{v_{r-1}v_r} + \\ + \gamma_{yx,v_rnv_{r-1}} y_{nv_{r-1}} x_{nv_r} - \gamma_{xy,nv_rv_{r-1}} x_{nv_r} y_{v_rv_{r-1}} - \\ - \gamma_{xy,v_{r-1}v_rn} x_{nv_{r-1}} y_{v_{r-1}v_r} + \gamma_{xy,v_rnv_{r-1}} x_{nv_{r-1}} y_{nv_r},\end{aligned}$$

где для первого монома r уменьшилось, для второго и пятого $k+l$ увеличилось, для третьего и четвёртого $k+l$ не изменилось, а k увеличилось, и потому l уменьшилось (возможно, некоторые из полученных мономов не принадлежат соответствующему множеству базисных, и нужно выразить их через базисные, но это не влияет на k и l).

Доказательство можно завершить следующим образом. Во-первых, мы можем выпрямить «остов», состоящий из всех y-цепей с началом в n. Это можно сделать так же, как и для алгебры $A(n)$, и условия максимальности будут всё ещё выполнены. Далее, используя ту же процедуру выпрямления, мы заменим моном на линейную комбинацию мономов, для которых соответствующие деревья имеют не более одного выходящего из n ребра с меткой x (а поддерево, соединённое с n ребром с меткой y, то же самое). Для каждого монома такого типа мы рассмотрим поддерево $\widetilde{T}$ (на множестве вершин $\widetilde{\pi}$), растущее из этого ребра с меткой x и перепишем соответствующий моном в виде линейной комбинации мономов из $\mathfrak{T}_{OS_2^+}(\widetilde{\pi})$ (с изменённым упорядочением множества $\widetilde{\pi}$; мы считаем метку вершины, соединённой с n, максимальным элементом этого множества). Это можно сделать по предположению индукции, и наше утверждение доказано. $\square$

4.6. Невырожденность спаривания.

Теорема 4. *Размерность алгебры $OS_2^+(n)$ равна $(n+1)^{n-1}$; более того, множество $\mathfrak{F}_{OS^+}(n)$ образует базис этой алгебры.*

Доказательство. Мы снова начнём с определения упорядочения множества $\mathfrak{F}_{OS_2^+}(n)$ (а значит, и множества $\mathfrak{B}_{\mathscr{P}_2}(n)$). После этого мы проверим, что матрица спаривания верхнетреугольна с ненулевыми элементами на диагонали и потому невырожденна. Поскольку мономы из бигамильтоновой операды линейно независимы, то же самое должно быть верно и для построенных нами элементов алгебры.

Рассмотрим два монома $m_{\mathcal{G}_1}$ и $m_{\mathcal{G}_2}$, каждый из которых отвечает лесу деревьев типа $\mathfrak{T}_{OS_2^+}$. Каждый из этих лесов определяет разбиение множества $[n]$ в соответствии со своими компонентами связности. Мы будем говорить, что первый элемент больше, если отвечающее ему разбиение больше относительно фиксированного нами ранее упорядочения $<_p$. Поэтому остаётся определить упорядочение на лесах, для которых разбиения совпадают и равны данному разбиению $[n] = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$. Как и выше, мы считаем, что $\max A_1 < \max A_2 < \ldots < \max A_k$.

Мы укажем, как сравнивать два дерева на одном и том же множестве вершин, и будем сравнивать деревья на подмножестве A_1, деревья на подмножестве $A_2, \ldots$, деревья на подмножестве A_k. Если на некоторых шагах соответствующие деревья различны, мы возьмём в качестве результата сравнения наших лесов результат сравнения деревьев на первом таком шаге.

Как и выше, для упрощения обозначений мы рассматриваем два дерева с множеством вершин $[n]$.

Упорядочение является отчётливо более нетривиальным, чем в случае операды Пуассона. Для $n = 2$ мы фиксируем любое из двух возможных упорядочений. Предположим, что $n > 2$ и рассмотрим два дерева T и T'. Процедура сравнения этих деревьев рекурсивна.

Обозначим через $\prec$ линейный порядок на подмножествах $[n]$, продолжающий частичный порядок по включению. Также введём обозначение $<_{dl}$ для лексикографически-степенного порядка на конечных последовательностях целых чисел ($s_1 <_{dl} s_2$, если либо длина s_1 меньше длины s_2, либо длины последовательностей совпадают, но s_1 лексикографически меньше s_2; так, пустая последовательность меньше любой другой).

В следующем определении мы интенсивно используем обозначения раздела 4.5.

- Положим $T' < T$, если $c_x(n, T') <_{dl} c_x(n, T)$. (Таким образом, при дальнейших сравнениях мы можем предполагать, что $c_x(n, T) = c_x(n, T')$.)
- Пусть $k = l_x(n, T) = l_x(n, T')$ и

$$(j_1, \ldots, j_k) = c_x(n, T) = c_x(n, T').$$

Положим $T' < T$, если $\xi_k(T') \prec \xi_k(T)$. (Таким образом, при дальнейших сравнениях мы можем предполагать, что $\xi_k(T) = \xi_k(T')$.) Обозначим через $\zeta_k(T) \subset [n]$ множество вершин цепи $c_y(j_k, T)$.
- Предположим, что поддерево T_k не содержит рёбер с меткой x. (Это значит, что $\zeta_k(T) = \xi_k(T)$.)

Положим $T' < T$, если

$$c_y(j_k, T') <_{dl} c_y(j_k, T).$$

В случае, когда эти две цепи совпадают, положим $T' < T$, если $T'_- < T_-$, где деревья T_-, T'_- получаются из T и T' стиранием ребра $j_{k-1} \leftrightarrow j_k$ и поддерева, растущего из вершины j_k. (Таким образом, если поддерево T_k не содержит рёбер с меткой x, процедура сравнения останавливается на этом шаге.)

Пусть поддерево T_k содержит рёбра с меткой x; рассмотрим максимальный элемент $\mu(T)$ множества $\xi_k(T) \setminus \zeta_k(T)$. Предположим, что этот элемент принадлежит подмножеству $\pi_{\alpha(T),k}$. Тогда в соответствии с определением цепь $c_x(i_{\alpha(T),k}, T)$ заканчивается этим элементом.

- Положим $T' < T$, если

$$c_x(i_{\alpha(T'),k}, T')^{rev} <_{dl} c_x(i_{\alpha(T),k}, T)^{rev},$$

где верхний индекс rev означает, что последовательность надо прочесть в обратном порядке (первый элемент становится последним и т. д.). (Таким образом, при дальнейших сравнениях мы можем предполагать, что $c_x(i_{\alpha(T'),k}, T') = c_x(i_{\alpha(T),k}, T)$.)
- Положим $T' < T$, если $\pi_{\alpha(T),k} \prec \pi_{\alpha(T'),k}$. Отметим, что меньшее множество здесь отвечает большему дереву. (Таким образом, при дальнейших сравнениях мы можем предполагать, что $\pi_{\alpha(T),k} = \pi_{\alpha(T'),k}$.)
- Положим $T' < T$, если $T'_{\alpha(T'),k} < T_{\alpha(T),k}$, где $T_{\alpha(T),k}$ и $T'_{\alpha(T'),k}$ — поддеревья, растущие из вершины $i_{\alpha(T),k} = i_{\alpha(T'),k}$ в деревьях T и T'. Если эти поддеревья совпадают, сотрём их (оставив на месте вершины $i_{\alpha(T),k} = i_{\alpha(T'),k}$) и сравним остающиеся деревья $\overline{T}_{\alpha(T),k}$ и $\overline{T'}_{\alpha(T'),k}$.

Ясно, что данная процедура определяет некоторое линейное упорядочение на множестве деревьев (и потому на множестве лесов) рассматриваемого нами типа. Рассмотрим матрицу спаривания, строки и столбцы которой упорядочены в соответствии с введённым порядком. Мы докажем, что $\langle \alpha_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{G}} \rangle = 0$, если $\mathcal{F} < \psi^{-1}(\mathcal{G})$. Из определения ясно, что $\langle \alpha_{\mathcal{F}}, m_{\mathcal{G}} \rangle = \pm 1$ для $\mathcal{F} = \psi^{-1}(\mathcal{G})$. Это значит, что матрица спаривания окажется невырожденной, будучи треугольной с ненулевыми элементами на диагонали.

Прежде всего, из комбинаторного описания спаривания очевидно, что значение спаривания равно нулю, если разбиения $[n]$, определяемые связными компонентами лесов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, различны. Это означает, что достаточно рассмотреть случай совпадающих разбиений $[n] = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$. Как и выше, мы предполагаем, что $\max A_1 < \max A_2 < \ldots < \max A_k$, и достаточно проверить, что $\langle \alpha_{\mathcal{T}'}, m_T \rangle = 0$ для O-дерева $\mathcal{T}'$ и A-дерева T (на одном и том же множестве вершин), для которых $\psi(\mathcal{T}') < T$. Обозначим через T' дерево $\psi(\mathcal{T}')$. Обозначения введены так, что $T' < T$. Для упрощения обозначений мы вновь считаем, что общее множество вершин деревьев T и T' есть $[n]$.

Рассмотрим внимательно процедуру сравнения. Путь в дереве $\mathcal{T}'$ из листа с меткой n к корню отвечает запиыванию монома $\alpha_{\mathcal{T}'}$ в виде $\{b_1, \{b_2, \ldots \{b_r, a_n\}_{\epsilon_r} \ldots\}_{\epsilon_2}\}_{\epsilon_1}$, где $b_\alpha \in \mathfrak{B}_{\mathscr{L}ie_2}(\omega_\alpha)$ и $\epsilon_\alpha \in \{1, 2\}$. По определению отображения ψ, имеем

$$r = l_x(n, T') + \sum_{p=0}^{l_x(n,T')} l_y(j_p(T'), T'),$$

и число единиц среди ϵ_i в точности равно $l_x(n, T')$. Более того, разбиения $[n] = \bigsqcup \pi_{q,p}(T')$ и $[n] = \{n\} \sqcup \bigsqcup \omega_\alpha$ в действительности совпадают (с точностью до перестановки частей). Обозначим через $V_n = V_n^1 \sqcup V_n^2$ множество внутренних вершин (с метками 1, 2 соотв.) дерева $\mathcal{T}'$, принадлежащих пути из листа с меткой n к корню. Рассмотрим нумерацию

$$\mathrm{ord}\colon V_n \to \{1, \ldots, r\}$$

этих вершин в соответствии с расстоянием до корня (если v ближе к корню, чем w, то $\mathrm{ord}(v) < \mathrm{ord}(w)$). Для вершины $v \in V_n^1$ с $\mathrm{ord}(v) = \alpha$ имеем $|\omega_\alpha| = 1$.

Замечание 6. *Рассмотрим отображение $f_{\mathcal{T}',T}$. Образ ребра $i \leftrightarrow j$ при этом отображении принадлежит множеству V_n если и только если $i \in \omega_\alpha$, $j \in \omega_\beta$ и $\alpha \neq \beta$. Более того, при $\alpha < \beta$ имеем $\mathrm{ord}(f_{\mathcal{T}',T}(i \leftrightarrow j)) = \alpha$.*

Напомним, что если $\langle \alpha_{\mathcal{T}'}, m_T \rangle \neq 0$, то отображение $f_{\mathcal{T}',T}$ должно быть биективно. Это простое наблюдение является ключевым в нашем доказательстве.

Рассуждения, использованные в случае алгебр $OS^+(n)$, показывают, что образ каждого ребра цепи $c_x(n, T)$ принадлежит V_n^1 и величина $\mathrm{ord}(f_{\mathcal{T}',T}(j_p \leftrightarrow j_{p+1}))$ убывает с ростом p. Поэтому при выполнении условия $c_x(n, T') <_{dl} c_x(n, T)$ имеем $\langle \alpha_{\mathcal{T}'}, m_T \rangle = 0$.

Пусть процедура сравнения останавливается на втором шаге. Чтобы отображение $f_{T',T}$ было биекцией, требуется, чтобы образы всех рёбер поддерева T_k принадлежали O-поддереву, растущему из вершины v_k в V_n с $\operatorname{ord}(v_k) = l_y(j_k(T'), T') + 1$, т. е. ближайшей к корню вершины множества V_n^1. Это противоречит условию $\xi_k(T') \prec \xi_k(T)$ сравнимости на втором шаге. Поэтому $\langle \alpha_{T'}, m_T \rangle = 0$.

Третий и четвёртый шаги аналогичны первому; для доказательства нужно использовать те же аргументы, что и в случае алгебр $OS^+(n)$.

Предположим, что процедура сравнения останавливается на пятом шаге. Это означает, что существует элемент $s \in \pi_{\alpha(T'),k} \backslash \pi_{\alpha(T),k}$. Пусть элемент $\mu(T) = \mu(T')$ принадлежит множеству листьев ω_{α_0}. Рассмотрим кратчайший путь

$$s_0 := \mu(T) \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow s_l = s$$

в дереве T между вершинами $\mu(T)$ и s. Ясно, что первый отрезок $s_0 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow s_{l_1}$ этого пути совпадает с $c_x(i_{\alpha(T),k}, T)^{rev}$. Заметим, что множество всех рёбер $s_i \leftrightarrow s_{i+1}$, образы которых при отображении $f_{T',T}$ лежат в множестве V_n, непусто (например, это так при $i = l_1$). Пусть $l_1, \ldots, l_q$ — номера этих рёбер. Для каждого $p = 1, \ldots, q-1$ образы рёбер отрезка $s_{l_p+1} \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow s_{l_{p+1}-1}$ принадлежат O-поддереву, отвечающему моному b_{α_p} (для некоторой вершины $\alpha_p \in V_n$). С другой стороны, образы рёбер отрезка $s_{l_q+1} \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow s_l$ вновь принадлежат O-поддереву b_{α_0}. Поэтому

$$\operatorname{ord}(f_{T',T}(s_{l_p} \leftrightarrow s_{l_p+1})) = \min(\alpha_p, \alpha_{p+1})$$

(мы полагаем $\alpha_{q+1} := \alpha_0$). Теперь обращение в нуль спаривания следует из следующей элементарной леммы.

Лемма 12. *Пусть $d_0, d_1, \ldots, d_q$ $(q > 1)$ — последовательность чисел с $d_0 = d_q$. Положим $e_k := \min(d_{k-1}, d_k)$, $k = 1, \ldots, q$. Тогда числа e_k не могут быть попарно различны.*

Теперь осталось применить предположение индукции на пятом шаге сравнения, завершая доказательство треугольности. □

Добавление. Случай алгебр $OS(n)$ и $OS_2(n)$.

Замечательным образом, структура кооперады на наборе алгебр Орлика – Соломона и двойных алгебр Орлика – Соломона определяется буквально теми же формулами, что и для чётных вариантов этих алгебр.

Определение 12. *Рассмотрим два конечных множества I, J; пусть $\sharp \notin I$. Определим гомоморфизм алгебр*

$$\rho^1_{IJ}\colon OS(I \sqcup J) \to OS(I \sqcup \{\sharp\}) \otimes OS(J)$$

формулами

$$\rho^1_{IJ}(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} \otimes 1, \text{если } i,j \in I, \\ 1 \otimes x_{ij}, \text{если } i,j \in J, \\ x_{i\sharp} \otimes 1, \text{если } i \in I, j \in J. \end{cases}$$

Определение 13. *Рассмотрим два конечных множества I, J; пусть $\sharp \notin I$. Определим гомоморфизм алгебр*

$$\rho^2_{IJ}\colon OS_2(I \sqcup J) \to OS_2(I \sqcup \{\sharp\}) \otimes OS_2(J)$$

формулами

$$\rho^2_{IJ}(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} \otimes 1, \text{если } i,j \in I, \\ 1 \otimes x_{ij}, \text{если } i,j \in J, \\ x_{i\sharp} \otimes 1, \text{если } i \in I, j \in J, \end{cases}$$

$$\rho^2_{IJ}(y_{ij}) = \begin{cases} y_{ij} \otimes 1, \text{если } i,j \in I, \\ 1 \otimes y_{ij}, \text{если } i,j \in J, \\ y_{i\sharp} \otimes 1, \text{если } i \in I, j \in J. \end{cases}$$

Лемма 13. *Для всех I, J гомоморфизмы ρ^1_{IJ} и ρ^2_{IJ} корректно определены.*

Как и в случае чётных алгебр Орлика – Соломона, для гомоморфизма ρ^1_{IJ} известно геометрическое описание. Дело в том, что, как мы упоминали во введении, дополнение комплексной конфигурации A_{n-1} гомотопически эквивалентно операде маленьких дисков. Если теперь принять во внимание, что алгебра $OS(n)$ совпадает с алгеброй когомологий дополнения, и элементам x_{ij} отвечают классы когомологий, двойственные «обходам» вокруг соответствующих гиперплоскостей, то выписанная нами кооперадная структура извлекается из структуры операды маленьких дисков.

Легко убедиться, что роль операды Пуассона (соотв., бигамильтоновой операды) в нашем случае будет играть операда Герстенхабера (соотв., двойная операда Герстенхабера).

Все наши доказательства проходят в градуированном случае без существенных изменений. А именно, ключевые используемые нами факты — кошулевость операд, верхняя оценка на размерность алгебры и невырожденность спаривания. Операдные утверждения верны, поскольку операда Герстенхабера получается с помощью дистрибутивного закона [**12**] из операды $\mathscr{C}om$ и операды, получаемой из операды Ли сменой чётности скобки (а в случае двойной операды Герстенхабера верно то же самое, но с заменой операды Ли на операду пары согласованных скобок). Доказательства верхней оценки размерности и невырожденности спаривания нечувствительны к замене коммутативности на антикоммутативность: для первого из них существенен лишь тип квадратичных соотношений, второе же использует комбинаторику мономов и факт наличия спаривания. Поэтому все полученные нами результаты верны в этом случае без изменений.

5. Возможные варианты и обобщения.

Во введении к данной работе мы привели геометрические описания для алгебры Орлика – Соломона (когомологии дополнения к комплексной конфигурации гиперплоскостей) и чётной алгебры Орлика – Соломона (градуированная версия алгебры локально постоянных функций на дополнении к вещественной конфигурации гиперплоскостей). Естественно задать вопрос, существуют ли столь же наглядные описания соответствующих двойных алгебр — например, в терминах геометрических данных, связанных с конфигурациями гиперплоскостей. На данный момент ответ на этот вопрос неизвестен.

Существует ли глубокое объяснение того, что и размерность алгебры $OS_2^+(n)$, и размерность алгебры диагональных коинвариантов для n точек на плоскости [**10**] равна $(n+1)^{n-1}$? Единственный известный план прояснения этой связи описан в работе А. Н. Кириллова [**11**], где определён некоммутативный аналог алгебры $OS_2^+(n)$, для которого алгебра $OS_2^+(n)$ и, предположительно, алгебра диагональных коинвариантов являются факторалгебрами. Возможно, что изучение этой алгебры приведёт к определению удвоенных операторов Данкла [**9**], и это новое семейство коммутирующих операторов будет полезно в теории интегрируемых систем.

Как мы отмечали выше, двойные алгебры Орлика – Соломона и двойные чётные алгебры Орлика – Соломона не являются кошулевыми. Вычисления А. Н. Кириллова [**11**], проведённые с помощью компьютерной программы `bergman` [**6**], показывают, что среди ненулевых чисел Бетти этих алгебр встречаются $b_{4,5} = 2$ для алгебры $OS_2^+(3)$ и $b_{3,4} = 1$ для алгебры $OS_2(3)$. В работе [**11**] предложен вариант удвоения алгебры Орлика – Соломона, который предположительно даёт кошулеву алгебру. А именно, рассмотрим алгебру $\widetilde{OS_2}(n)$, множество образующих которой то же, что у $OS_2(n)$, а множество соотношений получается из соотношений $OS_2(n)$ выбрасыванием соотношения $x_{ij}y_{ij} = 0$.

Гипотеза ([**11**]). *Алгебра $\widetilde{OS_2}(n)$ кошулева,*

$$\dim \widetilde{OS_2}(n) = 2^n(n+1)^{n-2}.$$

Замечание 7. *Напомним, что $2^n(n+1)^{n-2}$ — гипотетическая размерность алгебры тридиагональных коинвариантов* [**10**].

Замечание 8. *Алгебры $OS_2^+(n)$ и $\widetilde{OS_2}(n)$ во многом похожи. А именно, соотношения в них можно описать так. Положим $z_{ij} = \lambda x_{ij} + \mu y_{ij}$. Соотношения в алгебре $OS_2^+(n)$ (соотв., $\widetilde{OS_2}(n)$) означают, что для любых коэффициентов λ, μ элементы z_{ij} удовлетворяют соотношениям алгебры $OS^+(n)$ (соотв., $OS(n)$). Во втором случае соотношение $x_{ij}y_{ij} = 0$ теряется из-за антикоммутативности.*

Мы не знаем удовлетворительного определения чётных алгебр Орлика – Соломона с k наборами образующих. Мы предполагаем, что можно определить соотношения в этих алгебрах так, чтобы возникающая кооперадная структура давала k-гамильтонову операду, но соотношения уже не будут квадратичными и будут несколько менее прозрачны.

Литература

[1] *Арнольд В. И.* Кольцо когомологий группы крашеных кос. // Математические заметки. — 1969. — т. 5. — С. 227 – 231.

[2] *Варченко А. Н., Гельфанд И. М.* Функции Хевисайда конфигурации гиперплоскостей. // Функциональный анализ и его приложения. — 1987. — т. 21, вып. 4. — С. 1 – 18.

[3] *Доценко В. В.* О кошулевости бигамильтоновой операды. — Деп. в ВИНИТИ №1377–В2006. — 20 с.

[4] *Доценко В. В., Хорошкин А. С.* Формулы характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды. // Функциональный анализ и его приложения, в печати. — 26 с.

[5] *Смирнов В. А.* Симплициальные и операдные методы в теории гомотопий. — М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. — 272 с.

[6] *Backelin J., Cojocaru S., Ufnarovski V*. The Computer Algebra Package Bergman: Current State. // J. Herzog, V. Vuletescu (eds.). Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra. — Kluwer Academic Publishers, 2003. — P. 75–100.

[7] *Bershtein M., Dotsenko V., Khoroshkin A*. Quadratic algebras related to the bihamiltonian operad. // Готовится к печати.

[8] *Cohen F. R.* The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$-spaces, $n \geq 0$. // Lecture Notes in Math. — 1976. — Vol. 533. — P. 207–351.

[9] *Dunkl C. F*. Differential – difference operators associated to reflection groups. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 311. — P. 167 – 183.

[10] *Haiman M*. Vanishing theorems and character formulas for Hilbert scheme of points on a plane. // `math.AG/0201148.` — 33 p.

[11] *Kirillov A. N*. On some quadratic algebras II. — Preprint RIMS (Kyoto). — 45 p.

[12] *Markl M*. Distributive laws and Koszulness. // Ann.Inst.Fourier. — 1996. — Tome 46, № 2. — P. 307–323.

[13] *Markl M., Shnider S., Stasheff J. D*. Operads in Algebra, Topology and Physics. — Mathematical Surveys and Monographs, vol. 96, AMS, Providence, RI, 2002. — 299 p.

[14] *Mathieu O*. The symplectic operad. // “Functional analysis on the eve of the 21st century”, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993). — Progr. Math., 131, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995. — P. 223–243.

[15] *Orlik P., Solomon L.* Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. // Invent. Math. — 1980. — Vol. 56, №2. — P. 167–189.