ПОМИ Препринт — 2006/16

Тау-функция Бергмана на пространствах разветвленных накрытий сферы и абелевых дифференциалов

А. Ю. Кокотов

Санкт-Петербургский Государственный Университет Телекоммуникаций

Abstract

В работе вычисляется изомонодромная тау-функция фробениусова многообразия, построенного по пространству Гурвица разветвленных накрытий римановой сферы. При этом накрывающая компактная риманова поверхность может иметь произвольный род, а накрывающее отображение – произвольную степень. Изучены аналоги тау-функции на пространстве Гурвица в случае пространств модулей абелевых дифференциалов на римановых поверхностях. Показано, что эти аналоги играют важную роль в спектральной теории римановых поверхностей: детерминант оператора Лапласа в плоской конической метрике на компактной римановой поверхности выражается через квадрат модуля тау-функции.

Содержание

1 Введение

Теория изомонодромных деформаций фуксовой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} + \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k(\lambda_1, \dots, \lambda_M)}{\lambda - \lambda_k} \Psi = 0 \tag{1.1}$$

уже почти сто лет (если вести отсчет с работы Шлезингера 1912 года, где впервые появилась система уравнений, описывающая изомонодромные деформации) служит как областью приложений так и источником новых математических идей. Как было показано в основополагающей работе Мива и Джимбо [26], с системой Шлезингера естественно связана замкнутая 1-форма ω, определяющая так называемую *изомонодромную тау-функцию* τ равенством $\omega = d\tau$. Объяснение аналитической природы изомонодромной тау-функции было найдено Мальгранжем. Оказалось, что тау-функция совпадает с фредгольмовым детерминантом некоторого теплицева оператора. В работе Книжника [29] было высказано предположение, что для некоторых изомонодромных деформаций, связанных с разветвленным накрытием сферы компактной римановой поверхностью, изомонодромная тау-функция допускает явное выражение через тэта-функции накрывающей римановой поверхности.

Уже первый шаг, сделанный в направлении, указанном в работе Книжника, оказался плодотворным. Именно, сначала в работах Китаева и Короткина [28] и (независимо) Дейфта, Итса, Капаева и Жоу [10] было построено изомонодромное семейство решений задачи Римана-Гильберта, связанной с гиперэллиптическим накрытием сферы, при этом в работе Китаева и Короткина была явно найдена соответствующая изомонодромная тау-функция. Затем в работе Короткина [36] эти результаты были радикально обобщены: была решена задача Римана-Гильберта с произвольными квазиперестановочными монодромиями, связанная с общими разветвленными накрытиями произвольной степени и рода. Соответствующую изомонодромную тау-функцию в работе [36] найти не удалось, однако основная аналитическая трудность в ее вычислении была выделена и сформулирована: дело свелось к необходимости проинтегрировать следующую систему уравнений

$$\frac{\partial \ln \tau}{\partial \lambda_j} = S_B(x_j)\Big|_{x_j=0}, \quad j = 1, \dots, M \tag{1.2}$$

где S_B – проективная связность Бергмана на накрывающей поверхности, x_j – локальный параметр в окрестности простой точки ветвления λ_j, M – число точек ветвления. Совместность этой системы была одним из попутных результатов работы [36].

Сходные системы уравнений, связанные с проективными связностями на римановых поверхностях, в несколько другом контексте (производящие функции для акцессорных параметров) были проинтегрированы в серии работ Зографа и Тахтаджяна [67], [63], [62]. Производящие функции акцессорных параметров в этих работах были выписаны в терминах регуляризованного интеграла Лиувилля.

В работе [30] было обнаружено, что некоторый аналог интеграла Лиувилля (интеграл Дирихле, регуляризованный в точках ветвления и бесконечностях) дает вещественнозначное решение системы (1.2). Более того, в случае накрытий младшего рода интеграл Дирихле допускает явную голоморфную факторизацию, что приводит к замкнутому явному выражению для изомонодромной тау-функции. В этой же работе был найден правильный контекст для описания решения системы (1.2). Оказалось, что естественно определять его, как горизонтальное сечение некоторого линейного расслоения над пространством Гурвица разветвленных накрытий сферы.

Это сечение получило название *тау-функции Бергмана на пространстве Гурвица.* От изомонодромной тау-функции работы [36] тау-функция Бергмана отличается некоторым явно вычисляемым тэта-функциональным множителем.

В случае кривых старшего рода подход с использованием интеграла Дирихле, соответствующего фуксовой униформизации поверхности, не оказался достаточно эффективным - голоморфная факторизация этого интеграла невозможна a priori. Тем не менее этот подход был применен в [30] для выражения квадрата модуля тау-функции через детерминант лапласиана в метрике Пуанкаре.

В работе [33] была обнаружена связь тау-функции Бергмана с теорией фробениусовых многообразий. Именно для фробениусовых структур на пространствах Гурвица, введенных в работе Дубровина [6], изомонодромная тау-функция полупростого фробениусова многообразия была опознана в [33] как некоторая степень тау-функции Бергмана. В младших родах это привело к построению явного решения уравнения Гетцлера - так называемой G-функции фробениусова многообразия и доказательству гипотезы Строна о фробениусовых структурах, связанных с группами Якоби.

Другое применение бергмановской тау-функции было найдено в работе [14]. Оказалось, что первая поправка к свободной энергии в эрмитовой двухматричной модели совпадает (с точностью до некоторых простых добавочных слагаемых) с логарифмом тау-функции.

В полной общности (для накрытий произвольного рода и степени) бергмановская тау-функция была вычислена в работе [35]. Это немедленно привело к явной формуле факторизации детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре, являющейся альтернативой известному представлению этого детерминанта через дзета-функцию Сельберга, принадлежащего Докеру и Фонгу. (Позже нам стало известно о существовании неопубликованной рукописи Зографа [65], в которой явная факторизация детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре была выписана в терминах образующих группы Шоттки.)

К сожалению и формула Зографа и наша формула, выражающие детерминант лапласиана в метрике Пуанкаре через квадрат модуля некоторой голоморфной функции (на пространстве Шоттки в контексте Зографа, на пространстве Гурвица в нашем контексте) обладают существенным недостатком – трудно вычислимый вещественнозначный множитель, содержащий интеграл Лиувилля (Дирихле), препятствует полной голоморфной факторизации детерминанта лапласиана. При этом ясно, что полная голоморфная факторизация и невозможна – она запрещена теоремой Белавина-Книжника.

Попытка устранить этот недостаток привела к обобщению бергмановской тау-функции на случай пространств абелевых дифференциалов на римановых поверхностях [32]. Оказывается, что если в качестве конформной метрики взять не метрику Пуанкаре (т. е. метрику с равномерно распределенной кривизной), а сингулярную метрику с кривизной, сосредоточенной в конечном числе точек римановой поверхности, то соответствующий этой метрике лапласиан допускает полную явную голоморфную факторизацию (с точностью до двух простых вещественнозначных множителей: определителя мнимой части матрицы b-периодов и площади поверхности). В качестве такой сингулярной метрики естественно взять метрику, задаваемую квадратом модуля какого-либо абелева дифференциала. Эта метрика – плоская коническая, конические точки суть нули абелева дифференциала. Детерминант лапласиана в этой метрике (с точностью до простого множителя) совпадает с квадратом модуля голоморфной функции на пространстве абелевых дифференциалов. (Последнее пространство недавно было изучено в работе Зорича и Концевича [38].) Эта голоморфная функция (получившая название тау-функции Бергмана на пространстве абелевых дифференциалов) удовлетворяет системе уравнений, являющейся **прямым обобще-**

нием системы (1.2) со случая пространств разветвленных накрытий на случай пространства абелевых дифференциалов. Оказывается, что явное интегрирование этой системы, как и в случае системы (1.2), возможно и приводит к явным формулам для детерминанта лапласиана в плоских конических метриках.

Важную роль в наших вычислениях играют технические методы, содержащиеся в мемуаре Фэя [16], обобщающем и переизлагающем с единой точки зрения результаты работ Альвареса-Гоме, Мура, Докера и Фонга, Дугана и Соноды, Бейлинсона и Манина, Бисмю, Жийе, Суле и других.

Опишем содержание работы по главам. Во второй главе вводится тау-функция Бергмана на пространствах Гурвица и приводится ее явное вычисление для накрытий младшего рода. Здесь же проясняются ее связи с голоморфной функцией Зографа на пространстве Шоттки и доказывается формула факторизации детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре (или, что эквивалентно) формула для квадрата модуля тау-функции общего накрытия произвольного рода и степени.

В третьей, основной, главе работы проведено вычисление тау-функции Бергмана для общих пространств Гурвица.

В четвертой главе описаны приложения тау-функции Бергмана к различным задачам математической физики (фробениусовым многообразиям, эрмитовым одно и двухматричным моделям, спектральной теории римановых поверхностей).

В пятой главе обсуждаются пространства абелевых дифференциалов, вводится и явно вычисляется тау-функция Бергмана на этих пространствах.

В последней, шестой, главе обсуждается спектральная теория лапласианов в плоских конических метриках на римановых поверхностях и доказываются явные формулы для детерминантов таких лапласианов.

2 Тау-функция Бергмана на пространстве разветвленных накрытий сферы Римана

2.1 Пространства Гурвица

Пусть $\mathcal{L}$ - компактная риманова поверхность рода g, представленная, как N-листное разветвленное накрытие

$$\pi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{P}^1, \tag{2.1}$$

сферы Римана $\mathbb{P}^1$. Пусть отображение π разветвлено в точках $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_M \in \mathcal{L}$ с индексами ветвления $r_1, r_2, \dots, r_M$ соответственно (мы определяем индекс ветвления, как число листов накрытия, склеенных в точке ветвления). Пусть еще $\lambda_m = \pi(P_m),\ m = 1, 2, \dots, M$ - критические значения отображения π. (Далее, допуская некоторую вольность речи, мы говорим "накрытие $\mathcal{L}$", имея в виду в зависимости от контекста или отображение $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ или риманову поверхность $\mathcal{L}$.)

Мы предполагаем, что ни одна из точек λ_m не совпадает с бесконечностью и что $\lambda_m \neq \lambda_n$ для $m \neq n$.

Напомним, что два разветвленных накрытия $\pi_1 : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{P}^1$ и $\pi_2 : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{P}^1$ называются эквивалентными, если существует биголоморфное отображение $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ такое, что $\pi_2 f = \pi_1$. Обозначим символом $H(N, M, \mathbb{P}^1)$ пространство Гурвица классов эквивалентности N-листных разветвленных накрытий сферы $\mathbb{P}^1$ с M критическими значениями, ни одно из которых не совпадает с бесконечностью. Пространство Гурвица, снабженное естественной топологией (см. [17]), представляет собой (вообще говоря, несвязное) комплексное многообразие. Обозначим $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ связную компоненту $H(N, M, \mathbb{P}^1)$, содержащую класс эквивалентности накрытия $\mathcal{L}$. Согласно формуле Римана-Гурвица

$$g = \sum_{m=1}^{M} \frac{r_m - 1}{2} - N + 1,$$

где g - род поверхности $\mathcal{L}$.

Если все точки ветвления накрытия $\mathcal{L}$ просты (т. е. все числа r_m равны 2) то $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ совпадает с пространством $H_{g,N}(1, \dots, 1)$ мероморфных функций степени N на римановых поверхностях рода $g = M/2 - N + 1$ с N простыми полюсами и M простыми критическими значениями (см. [47]). Пространство $H_{g,N}(1, \dots, 1)$ также называется пространством Гурвица ([47]).

Следуя [6], введем множество $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$ пар

$$\Big\{\mathcal{L}_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{L})\ \Big|\ \text{канонический базис } \{a_i, b_i\}_{i=1}^{g} \text{ циклов на } \mathcal{L}_1\Big\}. \tag{2.2}$$

Пространство $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$ накрывает $\mathcal{U}(\mathcal{L})$.

Критические значения $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ накрытия $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{U}(\mathcal{L})$ могут служить локальными координатами на пространстве $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ равно как и на его накрывающей $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$.

Разветвленное накрытие $\mathcal{L}$ полностью определяется своими критическими значениями, если фиксировать представление σ фундаментальной группы $\pi_1\big(\mathbb{P}^1 \backslash \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}\big)$ элементами симметрической группы S_N. Элемент $\sigma_\gamma \in S_N$, соответствующий элементу $\gamma \in \pi_1\big(\mathbb{P}^1 \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}\big)$, задает перестановку листов накрытия $\mathcal{L}$, когда точка $\lambda \in \mathbb{P}^1$ описывает петлю γ. Малая окрестность данного разветвленного накрытия $\mathcal{L}$ получается малым шевелением его критических значений без изменения представления σ.

2.1.1 Проективные связности Бергмана и Виртингера

Выберем канонический базис циклов $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ на $\mathcal{L}$ и введем базис голоморфных дифференциалов v_i, нормализованных условием $\oint_{a_i} v_j = \delta_{ij}$. Введем канонический мероморфный бидифференциал Бергмана (иногда, терминологически неудачно, называемый ядром Бергмана) на $\mathcal{L}$ равенством

$$B(P,Q) = d_P d_Q \ln E(P,Q)\;, \tag{2.3}$$

где $E(P,Q)$ – главная форма Шоттки (см. [42] или [15]).

Инвариантный бидифференциал Виртингера $W(P,Q)$ на $\mathcal{L}$ определен равенством

$$W(P,Q) = B(P,Q) + \frac{2}{4^g+2^g}\sum_{i,j=1}^{g} v_i(P)v_j(Q)\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\ln \prod_{\beta\,\mathrm{even}} \Theta[\beta](z\,|\,\mathbb{B})\Big|_{z=0}\;, \tag{2.4}$$

где через $\mathbb{B} = ||\mathbb{B}_{ij}||_{i,j=1}^g$ обозначена матрица b-периодов поверхности $\mathcal{L}$; индекс β пробегает множество всех четных тэта-характеристик (см. [15, 58]).

В противоположность бидифференциалу Бергмана, инвариантный бидифференциал Виртингера *не зависит* от выбора канонического базиса циклов $\{a_i, b_i\}$.

С другой стороны, бидифференциал Виртингера не определен для поверхностей $\mathcal{L}$, имеющих хотя бы одну нулевую тэта-константу. Поэтому мы вводим "проколотое"пространство $\mathcal{U}'(\mathcal{L}) \subset \mathcal{U}(\mathcal{L})$, состоящее из классов эквивалентности разветвленных накрытий сферы, все тэта-константы которых - ненулевые. Во всех случаях, кроме случаев $g \le 2$ или $g > 2$ и $N = 2$, "тэта-дивизор"$\mathcal{Z} = \mathcal{U}(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{U}'(\mathcal{L})$ имеет коразмерность 1 в $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Если $g \le 2$ то множество $\mathcal{Z}$ пусто и $\mathcal{U}'(\mathcal{L}) = \mathcal{U}(\mathcal{L})$; для гиперэллиптических ($N = 2$) накрытий рода $g > 2$ среди тэта-констант всегда есть нулевая и, следовательно, для таких накрытий множество $\mathcal{U}'(\mathcal{L})$ пусто.

Бидифференциал Виртингера имеет следующую асимптотику вблизи диагонали:

$$W(P,Q) = \left\{\frac{1}{(x(P)-x(Q))^2} + \frac{1}{6}S_W\big(x(P)\big) + o(1)\right\} dx(P)dx(Q) \tag{2.5}$$

когда $P \to Q$, где $x(P)$ - локальная координата на $\mathcal{L}$. Величина S_W представляет собой проективную связность на $\mathcal{L}$ и носит название инвариантной проективной связности Виртингера. Для канонического бидифференциала Бергмана имеет место сходная асимптотика:

$$B(P,Q) = \left\{\frac{1}{(x(P)-x(Q))^2} + \frac{1}{6}S_B\big(x(P)\big) + o(1)\right\} dx(P)dx(Q)\;, \tag{2.6}$$

где S_B – проективная связность Бергмана. Проективные связности Бергмана и Виртингера связаны следующим образом:

$$S_W = S_B + \frac{12}{4^g+2^g}\sum_{i,j=1}^{g}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\ln \prod_{\beta\,\mathrm{even}} \Theta[\beta](z\,|\,\mathbb{B})\Big|_{z=0}\right\} v_i\, v_j\;. \tag{2.7}$$

Также как и бидифференциал Виртингера, проективная связность Виртингера не зависит от выбора базисных циклов на $\mathcal{L}$, в то время, как проективная связность Бергмана от этого выбора зависит.

Напомним, что любая проективная связность S при замене локального параметра $x = x(z)$ ведет себя следующим образом:

$$S(z) = S(x)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + R^{x,z}, \tag{2.8}$$

где

$$R^{x,z} \equiv \{x, z\} = \frac{x'''(z)}{x'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''(z)}{x'(z)}\right)^2 \tag{2.9}$$

– производная Шварца.

Следующее представление для проективной связности Бергмана в произвольной точке $P \in \mathcal{L}$ римановой поверхности рода $g \geq 1$ представляет собой немедленное следствие представления (2.3) бидифференциала Бергмана (см., напр., [15]):

$$S_B(x(P)) = -2\frac{T}{H} + \left\{\int^P H,\ x(P)\right\}, \tag{2.10}$$

где

$$H = \sum \Theta^*_{z_i}(0) f_i; \qquad T = \sum_{i,j,k} \Theta^*_{z_i z_j z_k}(0) f_i f_j f_k\ ; \tag{2.11}$$

Θ^* – тэта-функция с произвольной несингулярной нечетной полуцелой характеристикой; $f_i \equiv v_i(P)/dx(P)$.

2.1.2 Вариационные формулы

Обозначим через $x_m = (\lambda - \lambda_m)^{1/r_m}$ естественную локальный параметр вблизи точки ветвления P_m (здесь $\lambda = \pi(P)$).

Напомним формулу Рауха (см, напр., [16], формула (3.21)или классическую статью [52]), описывающую вариацию матрицы $\mathbb{B} = ||b_{ij}||$ b-периодов при вариации конформной структуры, задаваемой дифференциалом Бельтрами $\mu \in L^\infty$:

$$\delta_\mu b_{ij} = \int_{\mathcal{L}} \mu v_i v_j\ . \tag{2.12}$$

Нам также понадобится аналогичная формула для вариации бидифференциала Бергмана:

$$\delta_\mu B(P, Q) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{L}} \mu(\,\cdot\,) B(\,\cdot\,, P) B(\,\cdot\,, Q) \tag{2.13}$$

(см. [16], p. 57).

Рассмотрим следующий дифференциал Бельтрами

$$\mu_m = -\frac{1}{2\varepsilon^{r_m}}\left(\frac{|x_m|}{x_m}\right)^{r_m - 2} \mathbf{1}_{\{|x_m| \leq \varepsilon\}} \frac{\overline{d\,x_m}}{d\,x_m} \tag{2.14}$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число (здесь $\mathbf{1}_{\{|x_m| \leq \varepsilon\}}$ – функция, равная 1 внутри диска радиуса ε с центром в точке P_m и обращающаяся в нуль вне его); если $r_m = 2$ то этот дифференциал Бельтрами соответствует так называемой вариации Шиффера).

Полагая $\mu = \mu_m$ в (2.12) и используя формулу Коши, мы получаем

$$\delta_{\mu_m} b_{ij} = \frac{2\pi i}{r_m\,(r_m-2)!}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}\left\{\frac{v_i(x_m)v_j(x_m)}{(dx_m)^2}\right\}\Big|_{x_m=0}. \tag{2.15}$$

Заметим теперь, что правая часть формулы (2.15) совпадает с известным выражением для производной матрицы b-периодов по критическому значению λ_m:

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial \lambda_m} = 2\pi i \operatorname{res}\Big|_{\lambda=\lambda_m} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{d\lambda} v_i(\lambda^{(k)}) v_j(\lambda^{(k)}), \tag{2.16}$$

здесь $\lambda^{(k)}$ обозначает точку на k-м листе накрытия $\mathcal{L}$, лежащую над точкой $\lambda \in \mathbb{P}^1$. (Только листы, склеенные вместе в точке P_m, вносят ненулевой вклад в сумму, стоящую в правой части (2.16)). Таким образом мы приходим к следующему соотношению для вариаций матрицы b-периодов:

$$\partial_{\lambda_m} b_{ij} = \delta_{\mu_m} b_{ij}\,. \tag{2.17}$$

Это соотношение может быть обобщено для произвольной функции модулей. Пусть $Z : T_g \to H_g$ – стандартное голоморфное отображение пространства Тейхмюллера T_g в обобщенное верхнее полупространство Зигеля. (Отображение Z сопоставляет классу конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей матрицу b-периодов нормированных голоморфных дифференциалов.) Хорошо известно, что ранг отображения Z равен $3g-3$ во всех точках множества $T_g \setminus T_g'$, где T_g' – $(2g-1)$-подмногообразие T_g соответствующее гиперэллиптическим поверхностям. Таким образом, всегда можно выбрать $3g-3$ b-периода в качестве локальных координат в малой окрестности любой точки $T_g \setminus T_g'$. Используя эти координаты, получаем

$$\frac{\delta f}{\delta \mu_m} = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial b_{ij}} \delta_{\mu_m} b_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_m}, \tag{2.18}$$

для любой дифференцируемой функции f на T_g, при условии, что вариация в левой части (2.18) берется в точке $T_g \setminus T_g'$ (т. е. в точке, соответствующей негиперэллиптической поверхности).

Формула (2.16) хорошо известна в случае простых точек ветвления P_m (т. е., если $r_m = 2$, см, напр., [51]). Поскольку мы не нашли в литературе ее доказательства в общем случае, приведем здесь его краткий набросок.

Записывая базисный голоморфный дифференциал v_i в окрестности точки ветвления P_m как

$$v_i(x_m) = \Big(C_0 + C_1 x_m + \cdots + C_{r_m-1} x_m^{r_m-1} + O(|x_m|^{r_m})\Big)dx_m$$

и дифференцируя это выражение по λ_m, приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} v_i(x_m) = \Big\{C_0\left(1-\frac{1}{r_m}\right)\frac{1}{x_m^{r_m}} + \tag{2.19}$$

$$+C_1\left(1-\frac{2}{r_m}\right)\frac{1}{x_m^{r_m-1}} + \cdots + C_{r_m-2}\left(1-\frac{r_m-1}{r_m}\right)\frac{1}{x_m^2} + O(1)\Big\}dx_m.$$

Если $n \neq m$, то в окрестности точки ветвления P_n имеем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} v_i(x_n) = O(1)dx_n.$$

Следовательно, мероморфный дифференциал $\partial_{\lambda_m} v_i$ имеет единственный полюс в точке P_m и его главная часть в P_m задается выражением (2.19). Отметим, что все a-периоды $\partial_{\lambda_m} v_i$ нулевые. Это означает, что мы можем выразить $\partial_{\lambda_m} v_i$ через первые $r_m - 2$ производные бидифференциала Бергмана:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} v_i(P) = \frac{1}{r_m(r_m-2)!} \left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2} \left\{\frac{B(P,x_m)v_i(x_m)}{(dx_m)^2}\right\}\Big|_{x_m=0}. \tag{2.20}$$

Теперь, чтобы получить (2.16), достаточно проинтегрировать (2.20) по b-циклу b_j (можно считать, что проекция этого цикла на $\mathbb{P}^1$ не зависит от критических значений) и применить известное соотношение

$$\int_{b_j} B(\,\cdot\,, x_m) = 2\pi i v_j(x_m).$$

Сходные аргументы приводят к следующему выражению для производной бидифференциала Бергмана по критическому значению λ_m:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} B(P,Q) = -\operatorname{res}\Big|_{\lambda=\lambda_m} \frac{1}{d\lambda} \sum_{k=1}^{N} B(P,\lambda^{(k)})B(Q,\lambda^{(k)}). \tag{2.21}$$

Последняя формулу можно также вывести из соотношений (2.13) и (2.18).

Нам понадобится также другое выражение для той же производной бергмановского бидифференциала:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} B(P,Q) = \operatorname{res}\big|_{\lambda=\lambda_m} \left\{ \frac{1}{d\lambda} \sum_{j\neq k} B(P,\lambda^{(j)})B(Q,\lambda^{(k)}) \right\} . \tag{2.22}$$

Чтобы доказать его, заметим , что сумма $\sum_j B(P,\lambda^{(j)})$ по всем листам накрытия $\mathcal{L}$ совпадает с бидифференциалом Бергмана на римановой сфере $\mathbb{P}^1$

$$\frac{d\lambda d\mu(P)}{(\lambda-\mu(P))^2}$$

(здесь $\mu(P) = p(P)$) и, стало быть, справедливо равенство

$$\frac{(d\lambda)^2 d\mu(P) d\mu(Q)}{(\lambda-\mu(P))^2(\lambda-\mu(Q))^2} = \sum_j B(P,\lambda^{(j)}) \sum_k B(Q,\lambda^{(k)}) \tag{2.23}$$

$$= \sum_j B(P,\lambda^{(j)})B(Q,\lambda^{(j)}) + \sum_{j\neq k} B(P,\lambda^{(j)})B(Q,\lambda^{(k)}) . \tag{2.24}$$

Теперь, вычисляя вычет в точке $\lambda = \lambda_m$ и используя (2.21), мы приходим к выражению (2.22).

2.1.3 Проективные связности Бергмана и Виртингера на разветвленном накрытии сферы

В этом параграфе мы доказываем свойство проективной связности Бергмана на разветвленном накрытии, имеющее решающее значение во всех наших дальнейших конструкциях.

Положим

$$\mathcal{B}_m = -\frac{1}{6(r_m-2)!\,r_m} \left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2} S_B(x_m)\big|_{x_m=0} , \quad m = 1,2,\ldots,M, \tag{2.25}$$

где $S_B(x_m)$ обозначает значение проективной связности Бергмана в локальном параметре $x_m = (\lambda - \lambda_m)^{1/r_m}$ около точки ветвления P_m. (Появление "странного"коэффициента $-\frac{1}{6}$ в (2.25) найдет свое объяснение позже.)

При деформации накрытия (2.1) малым шевелением критических значений с сохранением элементов группы перестановок, соответствующих точкам ветвления, величина $\mathcal{B}_m$ становится функцией этих критических значений $(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$.

Теорема 1 *Для любых $m, n = 1, \ldots, M$ имеют место следующие равенства*

$$\frac{\partial \mathcal{B}_m}{\partial \lambda_n} = \frac{\partial \mathcal{B}_n}{\partial \lambda_m}. \tag{2.26}$$

Доказательство. Начнем со следующей леммы.

Лемма 1 *Функция $\mathcal{B}_m$ выражается через бергмановский бидифференциал следующим образом:*

$$\mathcal{B}_m = 2\,\mathrm{res}\big|_{\lambda=\lambda_m} \left\{ \frac{1}{d\lambda} \sum_{k,j=1; j\neq k}^{N} B(\lambda^{(j)}, \lambda^{(k)}) \right\}, \tag{2.27}$$

где $\lambda^{(j)}$ – точка на j-м листе накрытия (2.1), такая, что $p(\lambda^{(j)}) = \lambda$.

Обозначим через $H(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ несингулярную часть бергмановского бидифференциала, т. е.

$$B(P, Q) = \left(\frac{1}{(x(P) - x(Q))^2} + H(x(P), x(Q)) \right) dx(P)\, dx(Q),$$

при $P \to Q$.

Для доказательства леммы напомним, что нетривиальный вклад в сумму (2.27) вносят лишь те листы накрытия, которые склеиваются в точке P_m. Поэтому мы можем переписать правую часть равенства (2.27), как

$$\frac{1}{3}\,\mathrm{res}\big|_{\lambda=\lambda_m} \sum_{j,k=1,\, j\neq k}^{r_m} H(\gamma^j x_m, \gamma^k x_m) \gamma^{j+k} \left(\frac{dx_m}{d\lambda} \right)^2 d\lambda\ ,$$

где $\gamma = e^{2\pi i/r_m}$ - корень из единицы. В терминах коэффициентов тейлоровского разложения $H(x_m, y_m)$ в точке P_m:

$$H(x_m, y_m) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{s} \frac{H^{(p,s-p)}(0,0)}{p!(s-p)!} x_m^p y_m^{s-p}$$

это выражение выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{3 r_m^2} \sum_{p=0}^{r_m-2} \frac{H^{(p, r_m-2-p)}(0,0)}{p!(r_m - 2 - p)!} \sum_{j,k=1\,,\, j<k}^{r_m} \gamma^{(p+1)k + (r_m - p - 1)j}\ .$$

Суммируя геометрическую прогрессию, приходим к (2.27).

Из (2.27) и (2.22) следует, что

$$\frac{\partial \mathcal{B}_m}{\partial \lambda_n} = 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \mathrm{res}\big|_{\lambda_m} \frac{1}{d\lambda} \sum_{j\neq k} B(\lambda^{(j)}, \lambda^{(k)}) \right\} =$$

$$= 2\,\mathrm{res}\big|_{\lambda=\lambda_m}\mathrm{res}\big|_{\mu=\lambda_n}\left\{\frac{1}{d\lambda}\frac{1}{d\mu}\sum_{j\neq k}\sum_{j'\neq k'}B(\mu^{(j')},\lambda^{(j)})B(\mu^{(k')},\lambda^{(k)})\right\}\,. \tag{2.28}$$

Для окончания доказательства заметим, что последнее выражение симметрично по m и n. □

Аналогичное утверждение верно и для производных проективной связности Виртингера. Именно положим

$$\mathcal{A}_m = -\frac{1}{6(r_m-2)!\,r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2} S_W(x_m)\big|_{x_m=0}\,, \quad m=1,2,\dots,M, \tag{2.29}$$

где $S_W(x_m)$ – проективная связность Виртингера в локальном параметре x_m вблизи P_m. Следующее утверждение - простое следствие Теоремы 1.

Теорема 2 *Для любых $m,n=1,\dots,M$ имеют место следующие равенства*

$$\frac{\partial\mathcal{A}_m}{\partial\lambda_n} = \frac{\partial\mathcal{A}_n}{\partial\lambda_m}. \tag{2.30}$$

Доказательство. Простое вычисление показывает, что один-форма

$$\mathcal{V} = \sum_{m=1}^{M}(\mathcal{A}_m - \mathcal{B}_m)d\lambda_m$$

точна:

$$\mathcal{V} = -\frac{4}{4^g+2^g}d\ln\prod_{\beta\,\mathrm{even}}\Theta[\beta](0\,|\,\mathbb{B})\,. \tag{2.31}$$

Для доказательства (2.31) достаточно использовать уравнение теплопроводности для тэта-функций

$$\frac{\partial\Theta[\beta](z\,|\,\mathbb{B})}{\partial b_{jk}} = \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2\Theta[\beta](z\,|\,\mathbb{B})}{\partial z_j\partial z_k}\,, \tag{2.32}$$

формулу (2.15) для производной b-периода по критическому значению и соотношение (2.7) между проективными связностями Бергмана и Виртингера. □

2.2 Тау-функции Бергмана и Виртингера разветвленных накрытий сферы

2.2.1 Тау-функция Виртингера

Напомним, что через $\mathcal{U}'(\mathcal{L})$ мы обозначаем множество разветвленных накрытий из связной компоненты $\mathcal{U}(\mathcal{L}) \ni \mathcal{L}$ пространства Гурвица $H(N,M,\mathbb{P}^1)$ у которых все тэта-константы ненулевые. Введем связность

$$d_W = d - \sum_{m=1}^{M}\mathcal{A}_m d\lambda_m\,, \tag{2.33}$$

действующую в тривиальном расслоении $\mathcal{U}'(\mathcal{L})\times\mathbb{C}$, где d - оператор внешнего дифференцирования (по голоморфным и антиголоморфным переменным); коэффициенты связности $\mathcal{A}_m$ определены равенством (2.29).

Замечание 1 Если мы выберем другую глобальную голоморфную координату $\widetilde{\lambda}$ на $\mathbb{P}$, $\lambda = (a\widetilde{\lambda}+b)/(c\widetilde{\lambda}+d)$, где $ad - bc = 1$, то связность d_W перейдет в калибровочно эквивалентную. Для примера рассмотрим случай разветвленных накрытий с простыми точками ветвления (все числа r_m равны 2). Пусть $\widetilde{\lambda}_m$ - новые координаты критических значений,

$$\lambda_m = \frac{a\widetilde{\lambda}_m + b}{c\widetilde{\lambda}_m + d} ; \tag{2.34}$$

тогда калибровочное преобразование связности d_W в локальных координатах выглядит так:

$$d_W \mapsto G^{-1} d_W G , \tag{2.35}$$

где

$$G = \prod_{m=1}^{M} (c\widetilde{\lambda}_m + d)^{-1/4} . \tag{2.36}$$

Из Теоремы 2 следует следующее утверждение.

Теорема 3 *Связность d_W в тривиальном линейном расслоении над $\mathcal{U}'(\mathcal{L})$, определенная формулами (2.33) и (2.29) является плоской.*

Плоская связность d_W определяет характер фундаментальной группы пространства $\mathcal{U}'(\mathcal{L})$ т. е. представление

$$\rho : \pi_1\big(\mathcal{U}'(\mathcal{L})\big) \to \mathbb{C}^* . \tag{2.37}$$

Обозначим $\mathcal{E}$ универсальную накрывающую пространства $\mathcal{U}'(\mathcal{L})$; группа $\pi_1\big(\mathcal{U}'(\mathcal{L})\big)$ действует в прямом произведении $\mathcal{E} \times \mathbb{C}$ следующим образом:

$$g(e,z) = (ge, \rho(g)z) ,$$

где $e \in \mathcal{E}$, $z \in \mathbb{C}$, $g \in \pi_1\big(\mathcal{U}'(\mathcal{L})\big)$. Фактор-многообразие $\mathcal{E} \times \mathbb{C}/\pi_1\big(\mathcal{U}'(\mathcal{L})\big)$ имеет структуру голоморфного линейного расслоения над $\mathcal{U}'(\mathcal{L})$; обозначим это расслоение через $\mathcal{T}_W$.

Определение 1 Плоское линейное голоморфное расслоение $\mathcal{T}_W$, снабженное плоской свзностью d_W, называется линейным расслоением Виртингера над проколотым пространством Гурвица $\mathcal{U}'(\mathcal{L})$. Единственное с точностью до мультипликативной константы горизонтальное голоморфное сечение расслоения $\mathcal{T}_W$ называется тау-функцией Виртингера накрытия $\mathcal{L}$ и обозначается через τ_W.

Принимая во внимание выражения (2.35), (2.36) для калибровочного преобразования связности d_W под действием конформного автоморфизма базы, мы видим, что тау-функция Виртингера τ_W разветвленного накрытия с простыми точками ветвления преобразуется под действием преобразования Мебиуса следующим образом (2.34):

$$\tau_W \mapsto \prod_{m=1}^{M} (c\widetilde{\lambda}_m + d)^{-1/4} \tau_W . \tag{2.38}$$

Несложно также получить обобщение этой формулы для случая произвольного накрытия, но мы не будем здесь этого делать.

В заключение заметим, что

- В родах 0, 1 и 2 "тэта-дивизор"$\mathcal{Z} = \mathcal{U}(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{U}'(\mathcal{L})$ пуст. Следовательно в этих случаях расслоение $\mathcal{T}_W$ является расслоением надо всей связной компонентой $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ пространства Гурвица $H(N, M, \mathbb{P}^1)$.

- Гиперэллиптические накрытия ($N = 2$) входят в наше рассмотрение лишь в родах $g = 0, 1, 2$ поскольку для родов $g > 2$ одна из тэта-констант у них всегда нулевая [42].

- В случае простых точек ветвления пространство $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ есть ни что иное как пространство Гурвица $H_{g,N}(1, \ldots, 1)$, рассматривавшееся в работах ([6], [47]).

2.2.2 Тау-функция Бергмана

Рассмотрим теперь бесконечнолистное накрытие $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$ (множество пар (2.2)) пространства $\mathcal{U}(\mathcal{L})$. Повторяя конструкции предыдущего параграфа для плоской связности

$$d_B = d - \sum_{m=1}^{M} \mathcal{B}_m d\lambda_m \,, \tag{2.39}$$

в тривиальном линейном расслоении $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L}) \times \mathbb{C}$, мы строим плоское голоморфное линейное расслоение $\mathcal{T}_B$ над $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$. (Здесь коэффициенты $\mathcal{B}_m$ определены формулой (2.25), плоскость связности (2.39) следует из Теоремы 1.)

Определение 2 Плоское голоморфное линейное расслоение $\mathcal{T}_B$, снабженное плоской связностью d_B, называется линейным расслоением Бергмана над накрытием $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$ связной компоненты $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ пространства Гурвица $H(N, M, \mathbb{P}^1)$. Единственное с точностью до мультипликативной константы горизонтальное голоморфное сечение расслоения $\mathcal{T}_B$ называется тау-функцией Бергмана накрытия $\mathcal{L}$ и обозначается τ_B.

Согласно соотношению (2.7) между проективными связностями Бергмана и Виртингера, соответствующие тау-функции связаны следующим образом:

$$\tau_W = \tau_B \left\{ \prod_{\beta\,\mathrm{even}} \Theta[\beta](0\,|\,\mathbb{B}) \right\}^{-\frac{1}{4^{g-1}+2^{g-2}}} \,. \tag{2.40}$$

В противоположность тау-функции Виртингера, тау-функция Бергмана зависит от выбора канонического базиса циклов на поверхности $\mathcal{L}$.

2.3 Рациональный и эллиптический случаи

В случае $g = 0$ разветвленное накрытие $\mathcal{L}$ может быть биголоморфно отображено на риманову сферу $\mathbb{P}^1$. Пусть z - естественная координата на $\mathbb{P}^1 \setminus \infty$. Проективная связность $S_B(x_m)$ сводится к производной Шварца

$$S_B(x_m) = R^{z,x_m} = \{z(x_m), x_m\} \,.$$

Следовательно

$$\mathcal{B}_m = \frac{-1}{6r_m\,(r_m-2)!} \left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2} R^{z,x_m}|_{x_m=0} \,. \tag{2.41}$$

Если $g = 1$, то разветвленное накрытие $\mathcal{L}$ биголоморфно эквивалентно тору с периодами 1 и μ; заметим, что в роде 1 существует только одна тэта-функция с нечетной характеристикой — нечетная тэта-функция Якоби $\theta_1(z|\mu) = \theta\begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}(z\,|\,\mu)$. Используя (3.43) и уравнение теплопроводности $\partial_z^2\theta_1 = 4\pi i\partial_\mu\theta_1$, получаем

$$S_B(x_m) = -8\pi i\frac{\partial\ln{\theta_1}'}{\partial\mu}v^2(x_m) + R^{z,x_m}\ ,$$

где $\theta_1' \equiv \partial\theta_1/\partial z|_{z=0}$, $v = v(x_m)dx_m$ and $z = \int^P v$. Теперь из вариационной формулы (2.15) следует, что

$$\mathcal{B}_m = \frac{2}{3}\frac{\partial\ln{\theta_1}'}{\partial\lambda_m} - \frac{1}{6r_m\,(r_m-2)!}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}R^{z,x_m}|_{x_m=0}\ . \tag{2.42}$$

Наша ближайшая цель - получить явные выражения для бергмановской и виртингеровской тау-функций в простейших эллиптическом и рациональном случаях. Сначала мы получим выражения для квадрата модуля этих функций. Поскольку первый член в формуле (2.42) допускает немедленное интегрирование, в обоих случаях $g = 0$ и $g = 1$ нам необходимо будет лишь отыскать вещественнозначный потенциал $\mathbb{S}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, удовлетворяющий соотношению

$$\frac{\partial\mathbb{S}}{\partial\lambda_m} = \frac{1}{(r_m-2)!\,r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}R^{z,x_m}|_{x_m=0}\ , \tag{2.43}$$

где z – естественная координата на универсальной накрывающей поверхности $\mathcal{L}$ (т. е. на комплексной плоскости в случае $g = 1$ и сфере Римана для случая $g = 0$).

Решение уравнений (2.43) дается нижеследующей Теоремой 4. Функция $\mathbb{S}$ совпадает с подходящим способом регуляризованным интегралом Дирихле

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{L}}|\varphi_\lambda|^2, \tag{2.44}$$

где $e^\varphi|d\lambda|^2$ – плоская метрика на $\mathcal{L}$ полученная проектированием стандартной метрики $|dz|^2$ с универсального накрытия. (В случае $g = 0$ метрика $|dz|^2$ сингулярна.)

Интеграл Дирихле (2.44) может быть представлен, как квадрат модуля голоморфной функции переменных $\lambda_1,\dots,\lambda_M$. Голоморфная факторизация этого интеграла приводит к искомому явному выражению для тау-функции.

Эта программа реализуется в следующих двух параграфах.

2.3.1 Плоские метрики на римановой сфере и торе

Асимптотика плоской метрики вблизи точки ветвления. Пусть $J : \widetilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$ униформизационное отображение (римановой сферы на накрытие рода нуль или верхней полуплоскости на накрытие рода один) ; обозначим обратное отображение через $U = J^{-1}$. Пусть еще x какой-либо локальный параметр на $\mathcal{L}$. Проекция метрики $|dz|^2$ с универсальной накрывающей на $\mathcal{L}$ записывается следующим образом:

$$e^{\varphi(x,\overline{x})}|dx|^2 = |U_x(x)|^2|dx|^2; \tag{2.45}$$

где φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varphi_{x\overline{x}} = 0. \tag{2.46}$$

В случае $g = 1$ отображение $P \mapsto U(P)$ может быть определено равенством

$$U(P) = \int^P v$$

с любым голоморфным дифференциалом v на $\mathcal{L}$ (не обязательно нормированным).

В случае $g = 0$ мы выбираем один из листов накрытия $\mathcal{L}$ (будем считать его первым) и требуем соблюдения условия $U(\infty^{(1)}) = \infty$, где $\infty^{(1)}$ точка на бесконечности первого листа.

Возьмем некоторый лист накрытия $\mathcal{L}$ (т. е. копию римановой сферы $\mathbb{P}^1$ с разрезами, соединяющими точки ветвления; напомним, что точки на бесконечности листов не совпадают с точками ветвления) и вырежем из него малые окрестности точек ветвления и точки на бесконечности. В оставшейся области мы можем использовать координату λ как глобальную. Пусть $\varphi^{ext}(\lambda, \overline{\lambda})$ – функция из (2.45), соответствующая координате $x = \lambda$ и $\varphi^{int}(x_m, \overline{x}_m)$ – функция из (2.45), соответствующая координате $x = x_m$.

Лемма 2 *Производная функции φ^{ext} подчиняется следующим асимптотикам вблизи точек ветвления и точки на бесконечности:*

1. $|\varphi^{ext}_\lambda(\lambda, \lambda)|^2 = (\frac{1}{r_m} - 1)^2 |\lambda - \lambda_m|^{-2} + O(|\lambda - \lambda_m|^{-2+1/r_m})$ *при* $\lambda \to \lambda_m$,
2. $|\varphi^{ext}_\lambda(\lambda, \lambda)|^2 = 4|\lambda|^{-2} + O(|\lambda|^{-3})$ *при* $\lambda \to \infty$.
3. *в случае $g = 0$ на первом листе последняя асимптотика должна быть заменена на*

$$|\varphi^{ext}_\lambda(\lambda, \lambda)|^2 = O(|\lambda|^{-6})$$

при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. В малой проколотой окрестности точки P_m на выбранном листе справедлива соотношение

$$e^{\varphi^{int}(x_m, \overline{x}_m)} |dx_m|^2 = e^{\varphi^{ext}(\lambda, \overline{\lambda})} |d\lambda|^2. \tag{2.47}$$

Отсюда следует равенство

$$e^{\varphi^{ext}(\lambda, \overline{\lambda})} = \frac{1}{r_m^2} e^{\varphi^{int}(x_m, \overline{x}_m)} |\lambda - \lambda_m|^{2/r_m - 2}$$

из которого и вытекает первая асимптотика.

В окрестности точки на бесконечности выбранного листа можно ввести координату $\zeta = 1/\lambda$. Обозначим через $\varphi^\infty(\zeta, \overline{\zeta})$ функцию φ из (2.45), соответствующую координате $w = \zeta$. Теперь вторая асимптотика следует из равенства

$$e^{\varphi^{ext}(\lambda, \overline{\lambda})} = e^{\varphi^\infty(\zeta, \overline{\zeta})} |\lambda|^{-4}. \tag{2.48}$$

В случае $g = 0$ в окрестности точки на бесконечности первого листа имеем

$$U(\lambda) = c_1 \lambda + c_0 + c_{-1} \frac{1}{\lambda} + \dots$$

где $c_1 \neq 0$. Таким образом вблизи точки на бесконечности первого листа справедлива асимптотика

$$\varphi^{ext}_\lambda(\lambda, \overline{\lambda}) = \frac{U_{\lambda\lambda}}{U_\lambda} = O(|\lambda|^{-3}).$$

□

Шварцева связность в терминах плоской метрики. Пусть x – некоторый локальный параметр на $\mathcal{L}$. Положим $z = U(x)$; здесь z – точка универсальной накрывающей ($\mathbb{C}$ or $\mathbb{P}^1$). Набор шварцевых производных $R^{z,x}$ (каждая шварцева производная берется в своей собственной локальной карте) образует проективную связность на поверхности $\mathcal{L}$. Следуя [23], назовем этот набор шварцевой связностью.

Лемма 3 *1. Шварцева связность может быть выражена в терминах функции φ из (2.45) следующим образом:*

$$R^{z,x} = \varphi_{xx} - \frac{1}{2}\varphi_x^2 \ . \tag{2.49}$$

2. В окрестности точки ветвления P_m имеет место следующее соотношение между значениями шварцевой связности, вычисленной в локальных координатах λ и x_m:

$$R^{z,\lambda} = \frac{1}{r_m^2}(\lambda - \lambda_m)^{2/r_m - 2} R^{z,x_m} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2r_m^2}\right)(\lambda - \lambda_m)^{-2}. \tag{2.50}$$

3. Пусть ζ – локальная координата в окрестности точки на бесконечности любого листа накрытия (2.1) (в случае $g = 0$ — любого листа, кроме первого), $\zeta = 1/\lambda$. Тогда

$$R^{z,\lambda} = \frac{R^{z,\zeta}}{\lambda^4} = O(|\lambda|^{-4}). \tag{2.51}$$

Доказательство. Второе и третье утверждения леммы сводятся к известным правилам преобразования шварцевой производной при замене переменной. Формула (2.49) также хорошо известна и легко проверяется прямым вычислением.

□

Производная метрики по критическому значению. Положим для краткости $\varphi(\lambda, \overline{\lambda}) = \varphi^{ext}(\lambda, \overline{\lambda})$. Следующая лемма описывает зависимость функции φ от критических значений накрытия $\mathcal{L}$.

Лемма 4 *Пусть $g = 0, 1$. Производные функции φ по λ и по критическому значению λ_m связаны следующим образом:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_m} + F_m \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial F_m}{\partial \lambda} = 0 \ , \tag{2.52}$$

где

$$F_m = -\frac{U_{\lambda_m}}{U_\lambda} \ . \tag{2.53}$$

Доказательство. Имеем $\varphi = \ln U_\lambda + \ln \overline{U_\lambda}$; $\varphi_\lambda = \frac{U_{\lambda\lambda}}{U_\lambda}$, $\varphi_{\lambda_m} = \frac{U_{\lambda\lambda_m}}{U_\lambda}$ и

$$\frac{U_{\lambda\lambda_m}}{U_\lambda} = \frac{U_{\lambda_m}}{U_\lambda}\frac{U_{\lambda\lambda}}{U_\lambda} + \left(\frac{U_{\lambda_m}}{U_\lambda}\right)_\lambda .$$

(Мы использовали голоморфность зависимости отображения U от критических значений.)

□

Лемма 5 *Пусть $g = 0$ или $g = 1$ и пусть J – униформизационное отображение $J : \mathbb{C}P^1 \to \mathcal{L}$ или $J : \mathbb{C} \to \mathcal{L}$ соответственно. Обозначим суперпозицию $p \circ J$ символом R. Тогда*

1. Справедливы следующие соотношения:

$$F_m = \frac{\partial R}{\partial \lambda_m}. \tag{2.54}$$

2. В окрестности точки ветвления λ_l имеет место следующая асимптотика:

$$F_m = \delta_{lm} + o(1), \tag{2.55}$$

где δ_{lm} – символ Кронекера.

3. В окрестности точки на бесконечности любого листа (кроме первого в случае $g = 0$)

$$F_m(\lambda) = O(|\lambda|^2). \tag{2.56}$$

Proof. Выписывая зависимость от критических значений явно, мы имеем

$$U(\lambda_1, \ldots, \lambda_M; R(\lambda_1, \ldots, \lambda_M; z)) = z \tag{2.57}$$

для любой точки z универсального накрытия ($\mathbb{P}^1$ для $g = 0$ или $\mathbb{C}$ для $g = 1$). Дифференцируя (2.57) по λ_m, приходим к (2.54).

Пусть $z_0 = z_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ – точка универсального накрытия такая, что $J(z_0) = P_m$. Отображение R голоморфно, в окрестности z_0 имеет место представление

$$R(z) = \lambda_m + (z - z_0)^{r_m} f(z, \lambda_1, \ldots, \lambda_M) \tag{2.58}$$

с некоторой голоморфной функцией $f(\cdot, \lambda_1, \ldots, \lambda_M)$. Отсюда и из первого утверждения леммы следует (2.55).

Пусть теперь $z_\infty = z_\infty(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ – точка универсального накрытия такая, что $J(z_\infty) = \infty$, где ∞ - точка на бесконечности выбранного листа. Тогда в окрестности z_∞ имеем

$$\lambda = R(z) = g(z; \lambda_1, \ldots, \lambda_M)(z - z_\infty)^{-1}$$

с голоморфной функцией $g(\cdot, \lambda_1, \ldots, \lambda_M)$. Используя первое утверждение леммы, приходим к (2.56).

□

Следствие 1 *Фиксируем m и определим $\Phi_n(x_n) \equiv F_m(\lambda_n + x_n^{r_n})$. Тогда*

$$\Phi_n(0) = \delta_{nm}; \qquad \left(\frac{d}{dx_n}\right)^k \Phi_n(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, r_n - 2\ .$$

Это следует немедленно из (2.54) и (2.58).

2.3.2 Регуляризованный интеграл Дирихле

Напомним, что накрытие $\mathcal{L}$ — N-листно и $N = \sum_{m=1}^{M}(r_m - 1)/2 - g + 1$ согласно формуле Римана-Гурвица; k-му листу $\mathcal{L}_k$ накрытия $\mathcal{L}$ соответствует функция $\varphi_k^{ext} : \mathcal{L}_k \to \mathbb{R}$, гладкая в любой области Ω_r^k вида $\Omega_\rho^k = \{\lambda \in \mathcal{L}_k : \forall m \; |\lambda - \lambda_m| > \rho \;\; \& \;\; |\lambda| < 1/\rho\}$, где $\rho > 0$. Здесь λ_m – все точки ветвления, принадлежащие k-му листу $\mathcal{L}_k$ накрытия $\mathcal{L}$. В случае нулевого рода вышеприведенное определение области Ω_ρ^k годится для $k = 2, \dots, N$. Область Ω_ρ^1 в этом случае должна быть определена отдельно:

$$\Omega_\rho^1 = \{\lambda \in \mathcal{L}_1 \setminus \infty^1 : \forall m \; |\lambda - \lambda_m| > \rho\} \; .$$

(Здесь, снова, λ_m – все точки ветвления на первом листе.) Напомним, что в случае $g = 0$ мы выделили один из листов (первый в нашей нумерации). Функция φ_k^{ext} имеет конечные пределы на разрезах (за исключением их концевых точек - точек ветвления); в точках ветвления и точках на бесконечности она подчинена асимптотике из Леммы 3.

Введем регуляризованный интеграл Дирихле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} |\varphi_\lambda|^2 \, dS.$$

Именно, положим

$$Q^\rho = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega_\rho^k} |\partial_\lambda \varphi_k^{ext}|^2 \, dS \; , \tag{2.59}$$

где dS – элемент площади на $\mathbb{C}^1$: $dS = \frac{|d\lambda \wedge d\bar{\lambda}|}{2}$.

Согласно Лемме 3, существуют конечные пределы

$$\mathbb{S}_{ell}(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 0} \left(Q^\rho + \left\{ 4N + \sum_{m=1}^{M} \frac{(r_m - 1)^2}{r_m} \right\} 2\pi \ln \rho \right) + \sum_{m=1}^{M} (1 - r_m) \ln r_m \tag{2.60}$$

в случае $g = 1$ и

$$\mathbb{S}_{rat}(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 0} \left(Q_\rho + \left\{ 4(N-1) + \sum_{m=1}^{M} \frac{(r_m - 1)^2}{r_m} \right\} 2\pi \ln \rho \right) + \tag{2.61}$$

$$\sum_{m=1}^{M} (1 - r_m) \ln r_m$$

в случае $g = 0$; постоянная $\sum_{m=1}^{M}(1 - r_m) \ln r_m$ введена для удобства, ее роль станет ясна чуть позже.

Теорема 4 *Пусть $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{rat}$ for $g = 0$, $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{ell}$ для $g = 1$. Тогда для любых $m = 1, \dots, M$*

$$\frac{\partial \mathbb{S}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{(r_m - 2)! \, r_m} \left(\frac{d}{dx_m} \right)^{r_m - 2} R^{z, x_m}|_{x_m = 0} \; , \tag{2.62}$$

где z – естественная координата на универсальном накрытии.

Доказательство. Мы ограничимся случаем $g=1$. Доказательства в случаях $g=0$ и $g=1$ отличаются только деталями, относящимися к точке на бесконечности первого листа.

Пусть Q^ρ определено как в (2.59). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}Q^\rho=\frac{i}{2}\sum_{l=1}^{r_m}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_m^{(l)}|=\rho}|\partial_\lambda\varphi|^2d\overline{\lambda}+\sum_{k=1}^{N}\int\int_{\Omega_\rho^{(k)}}\frac{\partial}{\partial\lambda_m}|\partial_\lambda\varphi|^2dS\,. \tag{2.63}$$

Здесь первая сумма соответствует листам, склеенным в точке P_m; верхний индекс (l) означает, что интегрирование производится по контуру, лежащему на l-м листе.

Лемма 6 *Имеем*

$$\frac{2}{(r_m-2)!\,r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}R^{z,x_m}\big|_{x_m=0}= \tag{2.64}$$

$$-\sum_{n=1}^{M}\left(1-\frac{1}{r_n^2}\right)\frac{1}{(r_n-1)!}\left(\frac{d}{dx_n}\right)^{r_n}F_m(\lambda_n+{x_n}^{r_n})\big|_{x_n=0}.$$

Здесь x_n, x_m – локальные параметры около точек P_n и P_m. Суммирование справа проводится по всем точкам ветвления накрытия $\mathcal{L}$.

Доказательство. Используя (2.49) и голоморфность $R^{z,\lambda}$ относительно λ, имеем

$$0=\sum_{k=1}^{N}\oint_{\partial\Omega_\rho^k}F_m(2\varphi_{\lambda\lambda}-\varphi_\lambda^2)\,d\lambda=2\sum_{k=1}^{N}\oint_{|\lambda|=1/\rho}F_mR^{z,\lambda}\,d\lambda+ \tag{2.65}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{\lambda_n\in\mathcal{L}_k}\oint_{|\lambda-\lambda_n|=\rho}F_m(2\varphi_{\lambda\lambda}-\varphi_\lambda^2)\,d\lambda.$$

Из асимптотик (2.51) и (2.56) следует, что первая сумма в (2.65) есть $o(1)$ при $\rho\to0$. Вторая сумма совпадает с

$$\sum_{n=1}^{M}\oint_{|x_n|=\rho^{1/r_n}}\Phi_n(x_n)\left[\frac{2R^{z,x_n}}{r_nx_n^{2r_n-2}}+\frac{1}{x_n^{2r_n}}\left(1-\frac{1}{r_n^2}\right)\right]r_nx_n^{r_n-1}\,dx_n. \tag{2.66}$$

Здесь мы использовали (2.50); функция Φ_n – из Следствия 1. Теперь используя Следствие 1 и формулу Коши и переходя к пределу $\rho\to0$, получаем (2.64).

□

Оставшаяся часть доказательства основана на техническом приеме, использованном в [66]. Обозначим через Σ_2 второй член в (2.63). Используя (2.52) и равенство $F_{m\overline{\lambda}}=0$, приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}|\varphi_\lambda|^2=-(F_m|\varphi_\lambda|^2)_\lambda-(F_{m\lambda}\varphi_{\overline{\lambda}})_\lambda=-(F_m|\varphi_\lambda|^2)_\lambda-(F_{m\lambda}\varphi_\lambda)_{\overline{\lambda}}-(F_{m\lambda}\varphi_{\overline{\lambda}})_\lambda. \tag{2.67}$$

Это дает

$$\Sigma_2=-\frac{i}{2}\left(\sum_{k=1}^{N}\oint_{\partial\Omega_\rho^{(k)}}F_m|\varphi_\lambda|^2\,d\overline{\lambda}-\oint_{\partial\Omega_\rho^{(k)}}F_{m\lambda}\varphi_\lambda\,d\lambda+\oint_{\partial\Omega_\rho^{(k)}}F_{m\lambda}\varphi_{\overline{\lambda}}d\overline{\lambda}\right)=$$

$$= -\frac{i}{2}\sum_{\lambda_j}\sum_{p=1}^{r_j}\left(\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_j^{(p)}|=\rho} F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} - \oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_j^{(p)}|=\rho} F_{m\lambda}\varphi_\lambda d\lambda + \right.$$

$$\left.\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_j^{(p)}|=\rho} F_{m\lambda}\varphi_{\overline{\lambda}} d\overline{\lambda}\right)$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho} F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} - \oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho} F_{m\lambda}\varphi_\lambda\, d\lambda + \oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho} F_{m\lambda}\varphi_{\overline{\lambda}} d\overline{\lambda}\right), \tag{2.68}$$

Let

$$I_1^n(\rho) = \sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n^{(p)}|=\rho} F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda}\,; \qquad I_2^n(\rho) = \sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n^{(p)}|=\rho} F_{m\lambda}\varphi_\lambda\, d\lambda\,;$$

$$I_3^n(\rho) = \sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n^{(p)}|=\rho} F_{m\lambda}\varphi_{\overline{\lambda}} d\overline{\lambda}\,.$$

Имеем

$$I_1^n(\rho) = \delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n^{(p)}|=\rho} |\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda}$$

$$+\oint_{|x_n|=\rho^{1/r_n}}\left[\frac{1}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n-1)}(0)x_n^{r_n-1} + \frac{1}{r_n!}\Phi_n^{(r_n)}(0)x_n^{r_n} + O(|x_n|^{r_n+1}\right]$$

$$\times\left(\frac{|\varphi_{x_n}^{int}|^2}{r_n x_n^{r_n-1}\overline{x}_n^{r_n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1-r_n}{r_n^2}\frac{\varphi_{x_n}^{int}}{\overline{x}_n^{r_n}x_n^{r_n-1}} + \frac{1-r_n}{r_n^2}\frac{\varphi_{\overline{x}_n}^{int}}{\overline{x}_n^{r_n-1}x_n^{r_n}} + \left(\frac{1}{r_n}-1\right)^2\frac{1}{x_n^{r_n}\overline{x}_n^{r_n}}\right) r_n\overline{x}_n^{r_n-1}d\overline{x}_n$$

$$= \delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n^{(p)}|=\rho}|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} + 2\pi i\frac{(1/r_n-1)^2}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0) +$$

$$2\pi i\frac{1-r_n}{r_n(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n-1)}(0)\varphi_{x_n}^{int}(0) + o(1)$$

при $\rho \to 0$.

Имеем также

$$I_2^n(\rho) = \oint_{|x_n|=\rho^{1/r_n}}\left(\frac{1}{r_n {x_n}^{r_n-1}}\varphi_{x_n}^{int} + \left(\frac{1}{r_n}-1\right)\frac{1}{x_n^{r_n}}\right)\left(\frac{1}{(r_n-2)!}\Phi_n^{(r_n-1)}(0)x_n^{r_n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0)x_n^{r_n-1} + O(|x_n|^{r_n})\right)dx_n$$

$$= -2\pi i\left(\frac{1}{r_n}-1\right)\frac{1}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0) - 2\pi i\frac{1}{r_n(r_n-2)!}\varphi_{x_n}^{int}(0)\Phi_n^{(r_n-1)}(0) + o(1)$$

и

$$I_3^n(\rho) = \oint_{|x_n|=\rho^{1/r_n}}\left(\frac{1}{(r_n-2)!}\Phi_n^{(r_n-1)}(0)x_n^{r_n-2} + \frac{1}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0)x_n^{r_n-1} + O(|x_n|^{r_n})\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{r_n\overline{x}_n^{r_n-1}}\varphi^{int}_{\overline{x}_n}+(\frac{1}{r_n}-1)\frac{1}{\overline{x}_n^{r_n}}\right)(\frac{\overline{x}_n}{x_n})^{r_n-1}d\overline{x}_n=2\pi i\frac{(1/r_n-1)}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0)+o(1)\ .$$

Заметим, что

$$I_1^n-I_2^n+I_3^n=\delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n^{(p)}|=\rho}|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}+$$

$$\frac{2\pi i}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0)[(1/r_n-1)^2+2(1/r_n-1)]+o(1)$$

$$=\delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n^{(p)}|=\rho}|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}-\frac{2\pi i}{(r_n-1)!}\left(1-\frac{1}{r_n^2}\right)\Phi_n^{(r_n)}(0)+o(1)\ .$$

Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^N\Big(\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}F_m|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}-\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}F_{m\lambda}\varphi_\lambda\,d\lambda+\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}F_{m\lambda}\varphi_{\overline{\lambda}}d\overline{\lambda}\Big)=o(1)\ ,$$

и, таким образом,

$$\Sigma_2=-\frac{i}{2}\left(\sum_{l=1}^{r_m}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_m^{(l)}|=\rho}|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}-2\pi i\sum_{n=1}^M\frac{1}{(r_n-1)!}\left(1-\frac{1}{r_n^2}\right)\Phi_n^{(r_n)}(0)\right)+o(1)\ . \tag{2.69}$$

Теперь из Леммы 6, (2.63) и (2.69) выводим, что

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}Q^\rho=\frac{2\pi}{(r_m-2)!\,r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}R^{z,x_m}|_{x_m=0}+o(1). \tag{2.70}$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 4 достаточно заметить, что слагаемое $o(1)$ в (2.70) бесконечно мало равномерно относительно параметров $(\lambda_1,\dots,\lambda_M)$, принадлежащих некоторой малой окрестности начальной точки $(\lambda_1^0,\dots,\lambda_M^0)$.

□

Следствие 2 *Формулы для функций $\mathbb{S}_{ell}$ и $\mathbb{S}_{rat}$ могут быть переписаны следующим образом:*

$$\mathbb{S}_{ell}(\lambda_1,\dots,\lambda_M)=\sum_{m=1}^M\frac{r_m-1}{2}\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)\big|_{x_m=0}-\sum_{k=1}^N\varphi^\infty(\infty^{(k)}), \tag{2.71}$$

$$\mathbb{S}_{rat}(\lambda_1,\dots,\lambda_M)=\sum_{m=1}^M\frac{r_m-1}{2}\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)\big|_{x_m=0}-\sum_{k=2}^N\varphi^\infty(\infty^{(k)}). \tag{2.72}$$

Здесь $\infty^{(k)}$ – точка на бесконечности k-го листа накрытия (2.1); $\varphi^\infty(\infty^{(k)})=\varphi^\infty(\zeta,\overline{\zeta})\big|_{\zeta=0}$; $\zeta=1/\lambda$ – локальный параметр около $\infty^{(k)}$.

Доказательство. Используя уравнение Лапласа (2.46), теорему Стокса и асимптотики из Леммы 2, в случае $g=1$ имеем:

$$Q^\rho=\sum_{k=1}^N\int\int_{\Omega_\rho^k}(\varphi_\lambda\varphi)_{\overline{\lambda}}-\varphi_{\lambda\overline{\lambda}}\varphi\,dS=\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^N\int_{\partial\Omega_\rho^k}\varphi_\lambda\varphi\,d\lambda=$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{m=1}^{M}\oint_{|x_m|=\rho^{1/r_m}}\left\{\frac{1}{r_m}\varphi^{int}_{x_m}x_m^{1-r_m}+\right.\right.$$

$$\left.(\frac{1}{r_m}-1)x_m^{-r_m}\right\}\left\{\varphi^{int}+2(1-r_m)\ln|x_m|-2\ln r_m\right\}r_m x_m^{r_m-1}\,dx_m$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\oint_{|\lambda|=1/\rho}\left\{-\varphi^{\infty}_{\zeta}\lambda^{-2}-\frac{2}{\lambda}\right\}\{\varphi^{\infty}-4\ln|\lambda|\}\,d\lambda\right)=$$

$$-\pi\sum_{m=1}^{M}(1-r_m)\varphi^{int}(x_m)\big|_{x_m=0}-2\pi\sum_{k=1}^{N}\varphi^{\infty}(\infty^{(k)})$$

$$-\left(4N+\sum_{m=1}^{M}\frac{(r_m-1)^2}{r_m}\right)2\pi\ln\rho-2\pi\sum_{m=1}^{M}(1-r_m)\ln r_m+o(1)\;,$$

as $\rho\to 0$. Отсюда следует (2.71).

В случае $g=0$ мы повторяем то же вычисление, опуская интегралы вокруг точки на бесконечности первого листа.

□

2.3.3 Факторизация интеграла Дирихле и тау-функции рациональных и эллиптических накрытий

Теперь мы в состоянии вычислить саму тау-функцию. Для рациональных накрытий виртингеровская и бергмановские тау-функции, очевидно, совпадают, в эллиптическом случае они отличаются друг от друга легко выписываемым явным множителем.

Мы начнем с тау-функции эллиптического накрытия.

Теорема 5 *В случае $g=1$ тау-функция Бергмана накрытия $\mathcal{L}$ представима следующим образом:*

$$\tau_B=[\theta_1{}'(0\,|\,\mu)]^{2/3}\frac{\prod_{k=1}^{N}h_k^{1/6}}{\prod_{m=1}^{M}f_m^{(r_m-1)/12}}\;, \tag{2.73}$$

где $v(P)$ – нормированный абелев дифференциал на торе $\mathcal{L}$; $v(P)=f_m(x_m)dx_m$ при $P\to P_m$ и $f_m\equiv f_m(0)$; $v(P)=h_k(\zeta)d\zeta$ при $P\to\infty^{(k)}$ и $h_k\equiv h_k(0)$; μ – b-период дифференциала $v(P)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\varphi^{int}(x_m,x_m)=\ln U'(x_m)+\ln\overline{U'(x_m)}=\ln|f_m(x_m)|^2$$

в окрестности P_m и

$$\varphi^{\infty}(\zeta,\zeta)=\ln|h_k(\zeta)|^2$$

в окрестности точки на бесконечности $\infty^{(k)}$ и использовать соотношения (2.71) и (2.42). □

Теперь из теоремы Теоремы 5, соотношения (2.40) между виртингеровской и бергмановской тау-функциями и формулой Якоби $\theta_1'=\pi\theta_2\theta_3\theta_4$ следует следующее утверждение:

Следствие 3 *Тау-функция Виртингера эллиптического накрытия дается формулой*

$$\tau_W = \frac{\prod_{k=1}^N h_k^{1/6}}{\prod_{m=1}^M f_m^{(r_m-1)/12}} \quad . \tag{2.74}$$

Заметим, что формула (2.74) не зависит от нормировки голоморфного дифференциала $v(P)$: при преобразовании $v(P) \to Cv(P)$ с произвольной постоянной C, эта постоянная исчезает из (2.74), согласно формуле Римана-Гурвица.

В рациональном случае бергмановская и виртингеровская тау-функции совпадают.

Теорема 6 *В случае $g = 0$ тау-функция накрытия $\mathcal{L}$ представима следующим образом*

$$\tau_W \equiv \tau_B = \frac{\prod_{k=2}^N (\frac{dU}{d\zeta_k}\big|_{\zeta_k=0})^{1/6}}{\prod_{m=1}^M (\frac{dU}{dx_m}\big|_{x_m=0})^{(r_m-1)/12}}, \tag{2.75}$$

где x_m – локальный параметр около точки ветвления P_m, ζ_k – локальный параметр в окрестности точки на бесконечности k-го листа. (Напомним, что отображение U должно обладать свойством $U(\infty^{(1)}) = \infty$.)

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство предыдущей.

Замечание 2 Дробные степени в правой части формул (2.75) и (2.74) должны пониматься в смысле аналитического продолжения. Возникающие при этом монодромии – в точности монодромии плоской связности d_W. Нужно отметить, что 12-е степени тау-функций (2.75) и (2.74) – однозначные голоморфные функции на пространстве Гурвица $\mathcal{U}(\mathcal{L})$.

Полезно проиллюстрировать действие формул (2.75) и (2.73) в простейшем случае двулистных накрытий с двумя ($g = 0$) и четырьмя ($g = 1$) точками ветвления.

2.3.4 Тау-функция двулистного рационального накрытия

Рассмотрим двулистное накрытие сферы $\mathbb{P}^1$ с двумя критическими значениями λ_1 и λ_2. Тогда $g = 0$ и

$$U(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \sqrt{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}\right). \tag{2.76}$$

Имеем

$$\{U(x_1), x_1\}_{x_1=0} = \left\{x_1^2 + x_1\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2 + x_1^2}, x_1\right\}\Big|_{x_1=0}$$

$$= \left\{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}x_1 + x_1^2 + \frac{x_1^3}{2\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}, x_1\right\}\Big|_{x_1=0} = \frac{3}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

и

$$\{U(x_2), x_2\}|_{x_2=0} = \frac{3}{\lambda_1 - \lambda_2} \; . \tag{2.77}$$

Теперь непосредственное интегрирование (2.77) дает:

$$\tau_W = \tau_B = \; (\lambda_1 - \lambda_2)^{1/4} \tag{2.78}$$

(с точностью до постоянного множителя). С другой стороны, применяя общую формулу (2.75), получаем

$$U_{x_1}(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}\ ; \qquad U_{x_2}(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\ ,$$

$$U(\zeta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \frac{1}{\zeta_2}\sqrt{(1 - \zeta_2\lambda_1)(1 - \zeta_2\lambda_2)}\right)$$

$$= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{16}\zeta_2 + \dots\ .$$

Следовательно, выражение (2.75) также сводится к (2.78).

2.3.5 Тау-функция двулистных эллиптических накрытий

Рассмотрим двулистное накрытие $\mathcal{L}$ с четырьмя критическими значениями:

$$\mu^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)\ . \tag{2.79}$$

Для того. чтобы применит формулу (2.73) к этому случаю, заметим, что нормированный голоморфный дифференциал на $\mathcal{L}$ равен

$$v(P) = \frac{1}{\mathcal{A}}\frac{d\lambda}{\mu}\ ;$$

где $\mathcal{A} = \oint_a \frac{d\lambda}{\mu}$ — a-период ненормированного голоморфного дифференциала. Следовательно,

$$f_m = 2\mathcal{A}^{-1}\prod_{n \neq m}(\lambda_m - \lambda_n)^{-1/2}\ , \qquad h_k = (-1)^k\mathcal{A}^{-1}\ , \qquad k = 1, 2\ .$$

Согласно формуле Якоби $\theta_1' = \pi\theta_2\theta_3\theta_4$; более того, эллиптическая версия формул Томэ для тэта констант дает $\theta_k^4 = \partial_m \frac{\mathcal{A}^2}{(2\pi i)^2}(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2})(\lambda_{j_3} - \lambda_{j_4})$, где $k = 2, 3, 4$ и $(j_1, \dots, j_4)$ — соответствующие перестановки $(1, \dots, 4)$. Вычисляя θ_1', используя эти выражения, приходим к следующему выражению для тау-функции Бергмана:

$$\tau_B(\lambda_1, \dots, \lambda_4) = \mathcal{A}\prod_{m,n=1,\dots 4; m<n}(\lambda_m - \lambda_n)^{1/4}. \tag{2.80}$$

Последнее выражение совпадает с редукцией формулы Китаева-Короткина для гиперэллиптических накрытий.

2.4 Случай старшего рода

В этом разделе мы вычисляем квадрат модуля тау-функций Бергмана и Виртингера накрытий рода $g > 1$.

Пусть$\mathcal{L}_0$ – элемент $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$. В малой окрестности $\mathcal{L}_0$ мы можем рассматривать критические значения $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ как локальные координаты на $\widehat{\mathcal{U}}(\mathcal{L})$.

Тау-функция τ_B (сечение линейного расслоения Бергмана) может рассматриваться как голоморфная функция в малой окрестности $\mathcal{L}_0$. Квадрат ее модуля, $|\tau_B|^2$ – сужение сечения "вещественного"линейного расслоения $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \otimes \overline{\mathcal{T}_{\mathcal{B}}}$.

Для вычисления $|\tau_B|^2$ нам необходимо найти вещественнозначный потенциал $\ln|\tau_B|^2$ такой, что

$$\frac{\partial \ln|\tau_B|^2}{\partial\lambda_m} = \mathcal{B}_m \ ; \quad m = 1, \dots, M \ . \tag{2.81}$$

Поверхность $\mathcal{L}$ рода $g > 1$ биголоморфно эквивалентна фактору $\mathbb{H}/\Gamma$, где $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$; Γ – строго гиперболическая укусов группа. Обозначим через $\pi_F : \mathbb{H} \to \mathcal{L}$ естественную проекцию. Укусов проективная связность на $\mathcal{L}$ задается шварцевой производной $\{z, x\}$, где x – локальная координата точки $P \in \mathcal{L}$, $z \in \mathbb{H}$, $\pi_F(z) = P$.

Напомним вариационную формулу ([63], см. также [16])) для детерминанта лапласиана на $\mathcal{L}$:

$$\delta_\mu \ln\left(\frac{\det\Delta}{\det\Im\mathbb{B}}\right) = -\frac{1}{12\pi i}\int_{\mathcal{L}} (S_B - S_F)\mu,$$

где $\mathbb{B}$ – матрица b-периодов, S_B – проективная связность Бергмана, S_F – укусов проективная связность, μ – дифференциал Бельтрами. Как было объяснено выше, производная по λ_m соответствует вариации комплексной структуры, определяемой дифференциалом Бельтрами μ_m из (2.14), поэтому

$$-\frac{1}{6r_m\,(r_m-2)!}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}\left(S_B(x_m) - \{z, x_m\}\right)\Big|_{x_m=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda_m}\ln\left(\frac{\det\Delta}{\text{риз}\ \Im\mathbb{B}}\right) \tag{2.82}$$

Замечание 3 Эта формула объясняет появление множителя $-\frac{1}{6}$ в определении (2.25) связности $\mathcal{B}_m$.

Следовательно, вычисление модуля бергмановской тау-функции накрытия $\mathcal{L}$ сводится к поиску вещественнозначной функции $\mathbb{S}_{Fuchs}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ такой, что

$$\frac{\partial\mathbb{S}_{Fuchs}}{\partial\lambda_m} = \frac{1}{r_m\,(r_m-2)!}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}\{z, x_m\}\Big|_{x_m=0}, \qquad m = 1, \dots M. \tag{2.83}$$

Другая связь $|\tau_B|^2$ с уже известными объектами устанавливается рассмотрением униформизации Шоттки накрытия $\mathcal{L}$. Именно, поверхность $\mathcal{L}$ (рода $g > 1$) биголоморфно эквивалентна фактору

$$\mathcal{L} = \mathbf{D}/\Sigma \ ,$$

где Σ – (нормализованная) группа Шоттки, $\mathbf{D} \subset \mathbb{P}^1$ – область разрывности. Обозначим через $\pi_\Sigma : \mathbf{D} \to \mathcal{L}$ естественную проекцию.

Введем проективную связность Шоттки на $\mathcal{L}$ как шварцеву производную $\{\omega, x\}$, где x – локальный параметр для $P \in \mathcal{L}$; $\omega \in \mathbf{D}$; $\pi_\Sigma(\omega) = P$.

Согласно (2.18) и результатам Зографа [64] (см., в частности, Замечание 3.5 in [64]), имеет место соотношение

$$-\frac{1}{6r_m(r_m-2)!}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}\left(S_B(x_m) - \{\omega, x_m\}\right)\Big|_{x_m=0} = \frac{\partial}{\partial\lambda_m}\ln|\det\overline{\partial}|^2. \tag{2.84}$$

Здесь $\det\overline{\partial}$ – голоморфный детерминант семейства $\overline{\partial}$-операторов (этот голоморфный детерминант может рассматриваться, как голоморфная функция на пространстве Шоттки - см. Теорему 3.4 [64]).

Следовательно, вычисление квадрата модуля бергмановской тау-функции накрытия $\mathcal{L}$ сводится к интегрированию следующей системы уравнений для вещественнозначной функции $\mathbb{S}_{Schottky}$:

$$\frac{\partial \mathbb{S}_{Schottky}}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{r_m(r_m-2)!}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}\{\omega, x_m\}\Big|_{x_m=0}, \qquad m = 1, \dots M. \tag{2.85}$$

В следующих двух параграфах мы предъявляем явные решения системы (2.85) и, затем, системы (2.83).

2.4.1 Интеграл Дирихле и униформизация Шоттки

Униформизация Шоттки. Мы отсылаем читателя к статье to [62] за кратким обзором групп Шоттки и теоремы Шоттки об униформизации.

Отметим риманову поверхность $\mathcal{L}$ (т. е. выберем точку x_0 на $\mathcal{L}$ и некоторую систему образующих $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{L}, x_0)$ так, что $\Pi_{i=1}^g \alpha_i^{-1}\beta_i^{-1}\alpha_i\beta_i = 1$).

Отмеченная поверхность $\mathcal{L}$ биголоморфно эквивалентна фактору $\mathbf{D}/\Sigma$, где Σ нормализованная отмеченная группа Шоттки, $\mathbf{D} \subset \mathbb{P}^1$ – ее область разрывности. (Группа Шоттки называется отмеченной, если в ней выбрана свободная от соотношений система образующих $L_1, \dots, L_g$. Для нормализованной группы Шоттки $L_1(\omega) = k_1\omega$ с $0 < |k_1| < 1$ и притягивающая неподвижная точка преобразования L_2 совпадает с 1.)

Выберем фундаментальную область D_0 для Σ в $\mathbf{D}$. Это область в $\mathbb{P}^1$, ограниченная $2g$ непересекающимися жордановыми кривыми $c_1, \dots, c_g, c_1', \dots, c_g'$ с $c_i' = -L_i(c_i)$, $i = 1, \dots, g$; кривые c_i и c_i' ориентированы как компоненты границы ∂D_0, знак минус означает обращение ориентации.

Пусть $\pi_\Sigma : \mathbf{D} \to \mathcal{L}$ – естественная проекция. Положим $C_i = \pi_\Sigma(c_i)$.

Обозначим $\mathcal{L}_{\text{dissected}}$ рассеченную поверхность $\mathcal{L} \setminus \cup_{i=1}^g C_i$. Отображение $\pi_\Sigma : D_0 \to \mathcal{L}_{\text{dissected}}$ обратимо; обозначим обратное отображение через Ω_0.

2.4.2 Плоская метрика на $\mathcal{L}_{\text{dissected}}$.

Пусть x – локальный параметр на $\mathcal{L}_{\text{dissected}}$. Введем плоскую метрику $e^{\varphi(x,\overline{x})}|dx|^2$ на $\mathcal{L}_{\text{dissected}}$ как

$$e^{\varphi(x,\overline{x})}|dx|^2 = |d\omega|^2. \tag{2.86}$$

Здесь $\omega \in D_0$, $\pi_\Sigma(\omega) = x$. Таким образом, каждой локальной карте с локальной координатой x соответствует функция $\varphi(x, \overline{x})$. В частности, мы вводим функцию $\varphi^{ext}(\lambda, \overline{\lambda})$ локального параметра λ

$$e^{\varphi^{ext}(\lambda,\overline{\lambda})}|d\lambda|^2 = |d\omega|^2 = |\Omega_0'(\lambda)|^2|d\lambda|^2. \tag{2.87}$$

Здесь $\omega \in \mathbf{D}$, $\pi_\Sigma(\omega) = P \in \mathcal{L}$ и $p(P) = \lambda$.

Введем также функции $\varphi^{int}(x_m, \overline{x}_m)$, $m = 1, \dots, M$ и $\varphi^\infty(\zeta_k, \overline{\zeta_k})$, $k = 1, \dots, N$, соответствующие локальным параметрам x_m около точек ветвления P_m и локальным параметрам $\zeta_k = 1/\lambda$ около точек на бесконечности листов накрытия. В области пересечения локальных карт имеем

$$e^{\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)}|dx_m|^2 = e^{\varphi^{ext}(\lambda,\overline{\lambda})}|d\lambda|^2 \tag{2.88}$$

и

$$e^{\varphi^\infty(\zeta_k,\overline{\zeta}_k)}|d\zeta_k|^2 = e^{\varphi^{ext}(\lambda,\overline{\lambda})}|d\lambda|^2. \tag{2.89}$$

Выберем элемент $L \in \Sigma$ и рассмотри фундаментальную область $D_1 = L(D_0)$. Введем отображение $\Omega_1 : \mathcal{L}_{\rm dissected} \to D_1$ и метрику $e^{\varphi_1(x,x)}|dx|^2$ на $\mathcal{L}_{\rm dissected}$, соответствующие этому новому выбору фундаментальной области.

Поскольку $\Omega_1(x) = L(\Omega_0(x))$, мы имеем

$$\varphi_1(x,\overline{x}) = \varphi(x,\overline{x}) + \ln|L'(\Omega_0(x))|^2, \tag{2.90}$$

$$[\varphi_1(x,\overline{x})]_x = \varphi_x(x,\overline{x}) + \frac{L''(\Omega_0(x))}{L'(\Omega_0(x))}\Omega_0'(x) \tag{2.91}$$

и

$$[\varphi_1(x,\overline{x})]_{\overline{x}} = \varphi_{\overline{x}}(x,\overline{x}) + \frac{\overline{L''(\Omega_0(x))}}{\overline{L'(\Omega_0(x))}}\overline{\Omega_0'(x)}. \tag{2.92}$$

Следующие утверждения – полные аналоги соответствующих утверждений предыдущего раздела. Леммы 7 и 8 очевидны, чтобы получить Леммы 9, 10 и Следствие 4 надо лишь заменить в доказательствах отображение $U : \mathcal{L} \ni x \mapsto z \in \widetilde{\mathcal{L}}$ на отображение $\Omega_0 : \mathcal{L}_{\rm dissected} \ni x \mapsto \omega \in D_0$. Поскольку отображение Ω_0, подобно отображению U, зависит от критических значений $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ голоморфно, все рассуждения предыдущего раздела сохраняют свою силу.

Лемма 7 *Производная функции φ^{ext} обладает следующей асимптотикой вблизи точек ветвления и точек на бесконечности:*

1. $|\varphi_\lambda^{ext}(\lambda,\lambda)|^2 = (\frac{1}{r_m} - 1)^2|\lambda - \lambda_m|^{-2} + O(|\lambda-\lambda_m|^{-2+1/r_m})$ *as* $\lambda \to \lambda_m$,
2. $|\varphi_\lambda^{ext}(\lambda,\lambda)|^2 = 4|\lambda|^{-2} + O(|\lambda|^{-3})$ *as* $\lambda \to \infty$.

Пусть опять x – локальный параметр на $\mathcal{L}$. Положим $R^{\omega,x} = \{\omega, x\}$, где $\omega \in \mathbf{D}$, $\pi_\Sigma(\omega) = x$.

Лемма 8 1. *Шварцева производная выражается следующим образом в терминах функции φ из (2.86):*

$$R^{\omega,x} = \varphi_{xx} - \frac{1}{2}\varphi_x^2. \tag{2.93}$$

2. *В окрестности точки ветвления P_m имеет место следующее соотношение между шварцевыми производными, вычисленными относительно координат λ и x_m:*

$$R^{\omega,\lambda} = \frac{1}{r_m^2}(\lambda-\lambda_m)^{2/r_m-2}R^{\omega,x_m} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2r_m^2}\right)(\lambda-\lambda_m)^{-2}. \tag{2.94}$$

3. *Пусть ζ – координата в окрестности точки на бесконечности некоторого листа накрытия $\mathcal{L}$, $\zeta = 1/\lambda$. Тогда*

$$R^{\omega,\lambda} = \frac{R^{\omega,\zeta}}{\lambda^4} = O(|\lambda|^{-4}). \tag{2.95}$$

Лемма 9 *Производные функции φ по λ связаны с ее производными по критическим значениям следующим образом:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_m} + F_m\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \frac{\partial F_m}{\partial\lambda} = 0\ , \tag{2.96}$$

где

$$F_m = -\frac{[\Omega_0]_{\lambda_m}}{[\Omega_0]_\lambda}\ . \tag{2.97}$$

Лемма 10 *Обозначим суперпозицию $p \circ \pi_\Sigma$ через R. Тогда*

1.

$$F_m = \frac{\partial R}{\partial \lambda_m}. \tag{2.98}$$

2. В окрестности λ_l справедлива асимптотика:

$$F_m = \delta_{lm} + o(1). \tag{2.99}$$

3. На бесконечности каждого листа справедлива асимптотика:

$$F_m(\lambda) = O(|\lambda|^2). \tag{2.100}$$

Следствие 4 *Фиксируем m и определим $\Phi_n(x_n) \equiv F_m(\lambda_n + x_n^{r_n})$. Тогда*

$$\Phi_n(0) = \delta_{nm}; \qquad \left(\frac{d}{dx_n}\right)^k \Phi_n(0) = 0, \quad k = 1, \dots, r_n - 2\ .$$

2.4.3 Регуляризованный интеграл Дирихле

Мы предполагаем, что точки ветвления и точки на бесконечности не попадают на разрезы C_i.

Листу с номером k, $\mathcal{L}^{(k)}_{\text{dissected}}$, рассеченного накрытия $\mathcal{L}$ (с дополнительными разрезами, соединяющими точки ветвления) соответствует функция $\varphi_k^{ext} : \mathcal{L}^{(k)}_{\text{dissected}} \to \mathbb{R}$, гладкая в любой области Δ_r^k вида $\Delta_\rho^k = \{\lambda \in \mathcal{L}^{(k)}_{\text{dissected}} : \forall m\ |\lambda - \lambda_m| > \rho\ \ \&\ \ |\lambda| < 1/\rho\}$, где $\rho > 0$ и λ_m – точки ветвления принадлежащие k-му листу $\mathcal{L}^{(k)}_{\text{dissected}}$ накрытия $\mathcal{L}_{\text{dissected}}$.

Функция φ_k^{ext} имеет конечные пределы на разрезах (за исключением концевых точек – точек ветвления); в точках ветвления и на бесконечности справедливы асимптотики из Леммы 7.

Положим

$$Q_\rho = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Delta_\rho^k} |\partial_\lambda \varphi_k^{ext}|^2\, dS\ , \tag{2.101}$$

где dS – элемент площади на $\mathbb{C}^1$: $dS = \frac{|d\lambda \wedge d\overline{\lambda}|}{2}$.

Согласно Лемме 3 существует конечный предел

$$\operatorname{reg} \int_{\mathcal{L}_{\text{dissected}}} |\varphi_\lambda|^2\, dS = \lim_{\rho \to 0} \left(Q_\rho + (4N + \sum_{m=1}^{M} \frac{(r_m - 1)^2}{r_m}) 2\pi \ln \rho \right) \tag{2.102}$$

Теперь положим

$$\mathbb{S}_{Schottky}(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{reg} \int_{\mathcal{L}_{\text{dissected}}} |\varphi_\lambda|^2\, dS + \tag{2.103}$$

$$\frac{i}{4\pi} \sum_{k=2}^{g} \left\{ \int_{C_k} \varphi(\lambda, \overline{\lambda}) \frac{\overline{L_k''(\Omega_0(\lambda))}}{\overline{L_k'(\Omega_0(\lambda))}} \overline{\Omega_0'(\lambda)}\, d\overline{\lambda} - \right.$$

$$- \int_{C_k} \varphi(\lambda, \overline{\lambda}) \frac{L_k''(\Omega_0(\lambda))}{L_k'(\Omega_0(\lambda))} \Omega_0'(\lambda)\, d\lambda +$$

$$\int_{C_k} \ln |L_k'(\Omega_0(\lambda)|^2 \overline{\frac{L_k''(\Omega_0(\lambda))}{L_k'(\Omega_0(\lambda))}}\,\overline{\Omega_0'(\lambda)}\, d\overline{\lambda} \Bigg\} + 2\sum_{k=2}^{g} \ln |l_k|^2.$$

Здесь L_k – образующие группы Шоттки Σ, ориентация контуров C_k определена ориентацией контуров c_k и соотношениями $C_k = \pi_\Sigma(c_k)$; значение функции $\varphi(\lambda, \overline{\lambda})$ в точке $\lambda \in C_k$ определяется как предел $\lim_{\mu\to\lambda} \varphi(\mu, \overline{\mu})$, $\mu = \pi_\Sigma(\omega)$ и ω стремится к c_k изнутри области D_0; l_k – левый нижний элемент матричного представления преобразования $L_k \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. Суммирование в правой части (2.103) начинается с $k = 2$ из-за того, что группа Σ – нормированная (члены с $k = 1$ равны нулю).

Заметим, что выражение в правой части (2.103) вещественно и не изменяется при малых шевелениях разрезов C_k (т. н. не зависит от конкретного выбора фундаментальной области D_0). В частности, можно предполагать, что контуры C_k — $\{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$-независимы. (Это следует из простого вычисления, основанного на (2.91), (2.92) и формуле Стокса.) Таким образом, все члены этого выражения, за исключением последнего, вполне естественны. Роль последнего слагаемого станет ясна позже.

Теорема 7 *Для любого* $m = 1, \dots, M$ *имеет место следующее равенство*

$$\frac{\partial \mathbb{S}_{Schottky}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{(r_m - 2)!\, r_m} \left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m - 2} R^{\omega, x_m}\Big|_{x_m = 0}. \tag{2.104}$$

Замечание 4 Этот результат сходен с теоремой Зографа-Тахтаджана [62]. Тем не менее, отметим, что в противоположность работе [62] мы рассматриваем здесь интеграл Дирихле, соответствующий *плоской* метрике, что несколько проще.

Proof. Положим

$$S_\rho = Q_\rho + \frac{i}{2} \sum_{k=2}^{g} \Bigg\{ \int_{C_k} \varphi(\lambda, \overline{\lambda}) \overline{\frac{L_k''(\Omega_0(\lambda))}{L_k'(\Omega_0(\lambda))}}\,\overline{\Omega_0'(\lambda)}\, d\overline{\lambda} - \tag{2.105}$$

$$\int_{C_k} \varphi(\lambda, \overline{\lambda}) \frac{L_k''(\Omega_0(\lambda))}{L_k'(\Omega_0(\lambda))} \Omega_0'(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \int_{C_k} \ln |L_k'(\Omega_0(\lambda)|^2 \overline{\frac{L_k''(\Omega_0(\lambda))}{L_k'(\Omega_0(\lambda)}}\,\overline{\Omega_0'(\lambda))}\, d\overline{\lambda} \Bigg\}.$$

Напомним, что контуры C_k считаются $\{\lambda_1, \dots, \lambda_M\}$-независимыми. Отныне мы пишем $\Omega(\lambda)$ и φ вместо $\Omega_0(\lambda)$ и φ^{ext}. Так как $\varphi_{\lambda\overline{\lambda}} = 0$, имеем $|\varphi_\lambda|^2 = (\varphi_\lambda \varphi)_{\overline{\lambda}}$. Теорема Стокса и формулы (2.90), (2.91) дают

$$Q_\rho = -\frac{i}{2} \left[\sum_{n=1}^{M} \sum_{l=1}^{r_n} \oint_{|\lambda^{(l)} - \lambda_n| = \rho} \varphi_\lambda \varphi\, d\lambda + \sum_{k=1}^{N} \oint_{|\lambda^{(k)}| = 1/\rho} \varphi_\lambda \varphi\, d\lambda \right] - \tag{2.106}$$

$$-\frac{i}{2} \sum_{k=2}^{g} \int_{C_k} \left\{ \varphi_\lambda \varphi - \left[\varphi_\lambda + \frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))} \Omega'(\lambda)\right] \left[\varphi + \ln |L_k'(\Omega(\lambda))|^2\right] \right\} d\lambda\ .$$

Здесь $\lambda^{(k)}$ обозначает точку k-го листа накрытия $\mathcal{L}$, чья проекция на $\mathbb{P}^1$ совпадает с λ.

Обозначим первое слагаемое в (2.106) через $-\frac{i}{2}\big[T_\rho\big]$. Подставляя (2.106) в (2.105) и используя равенства

$$\int_{C_k} d[\varphi(\lambda,\overline{\lambda})\ln|L'(\Omega(\lambda))|^2]=0$$

и

$$\int_{C_k} d[\ln^2|L_k'(\Omega(\lambda))|^2]=0,$$

получаем

$$S_\rho=-\frac{i}{2}\Big[T_\rho\Big]-\frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\varphi_{\overline{\lambda}}(\lambda,\overline{\lambda})\ln|L_k'(\Omega(\lambda))|^2\,d\overline{\lambda}- \tag{2.107}$$

$$\frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\varphi(\lambda,\overline{\lambda})\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Omega'(\lambda)\,d\lambda.$$

Лемма 11 *Для первого слагаемого в (2.107) справедлива асимптотика*

$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\big[T_\rho\big]=\frac{2\pi}{(r_m-2)!\,r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}R^{\omega,x_m}\Big|_{x_m=0}+ \tag{2.108}$$

$$+\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g}\int_{C_k\cup C_k^-}\big\{F_m(2\varphi_{\lambda\lambda}-\varphi_\lambda^2)+[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\big\}\,d\lambda+o(1),$$

при $\rho\to 0$. Здесь C_k^- - контур C_k с противоположной ориентацией, значение выражения под интегралом в точке $\lambda\in C_k^-$ понимается как предел при $\mu\to\lambda$, где $\mu=\pi_\Sigma(\omega)$, ω стремится к c_k' изнутри области D_0; функция F_m – из Леммы 9.

Доказательство. Используя Лемму 9, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\sum_{n=1}^{M}\sum_{l=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_n|=\rho}\varphi_\lambda\varphi\,d\lambda=\sum_{l=1}^{r_m}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_m|=\rho}(\varphi_\lambda^2+\varphi\varphi_{\lambda\lambda})d\lambda- \tag{2.109}$$

$$-\sum_{n=1}^{M}\sum_{l=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_n|=\rho}(F_m\varphi_\lambda+[F_m]_\lambda)\varphi_\lambda+\varphi([F_m]_\lambda\varphi_\lambda+F_m\varphi_{\lambda\lambda}+[F_m]_{\lambda\lambda})\,d\lambda=$$

$$=-\sum_{l=1}^{r_m}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_m|=\rho}|\varphi_\lambda|^2\,d\overline{\lambda}+\sum_{n=1}^{M}\sum_{l=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_n|=\rho}F_m|\varphi_\lambda|^2\,d\overline{\lambda}+\varphi_{\overline{\lambda}}[F_m]_\lambda\,d\overline{\lambda}\ .$$

Для интегралов вокруг бесконечностей имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\sum_{k=1}^{N}\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}\varphi_\lambda\varphi\,d\lambda=\sum_{k=1}^{N}\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}F_m|\varphi_\lambda|^2\,d\overline{\lambda}+\varphi_{\overline{\lambda}}[F_m]_\lambda\,d\overline{\lambda}\ . \tag{2.110}$$

Применяя теорему Коши к (голоморфной) функции $[F_m]_\lambda\varphi_\lambda$, получаем

$$\sum_{k=1}^{g}\int_{C_k\cup C_k^-}[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\,d\lambda=-\left(\sum_{n=1}^{M}\sum_{l=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_n|=\rho}+\sum_{k=1}^{N}\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}\right)[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\,d\lambda\ . \tag{2.111}$$

Из (2.109), (2.110) и (2.111) следует, что

$$-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\Big[T_\rho\Big] = \frac{i}{2}\sum_{l=1}^{r_m}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_m|=\rho}|\varphi_\lambda|^2\,d\overline{\lambda}- \qquad (2.112)$$

$$-\frac{i}{2}\left\{\left(\sum_{n=1}^{M}\sum_{l=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_n|=\rho}+\sum_{k=1}^{N}\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}\right)\Big(F_m|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}-[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\,d\lambda+[F_m]_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}\,d\overline{\lambda}\Big)\right\}+$$

$$+\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{g}\int_{C_k\cup C_k^-}[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\,d\lambda\ .$$

Обозначим выражение в больших фигурных скобках через Σ_2. Мы утверждаем, что

$$-\frac{i}{2}\Sigma_2 = -\frac{i}{2}\left(\sum_{l=1}^{r_m}\oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_m|=\rho}|\varphi_\lambda|^2\,d\overline{\lambda}-2\pi i\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{(r_n-1)!}\left(1-\frac{1}{r_n^2}\right)\Phi_n^{(r_n)}(0)\right)+o(1)\ , \qquad (2.113)$$

где функция Φ_n – из Следствия 4.

Для доказательства положим

$$I_1^n(\rho)=\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n|=\rho}F_m|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}\ ;\qquad I_2^n(\rho)=\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n|=\rho}[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\,d\lambda\ ;$$

$$I_3^n(\rho)=\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n|=\rho}[F_m]_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}d\overline{\lambda}\ .$$

Из Следствия 4 получаем

$$I_1^n(\rho)=\delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n|=\rho}|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}$$

$$+\oint_{|x_n|=\rho^{1/r_n}}\left[\frac{1}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n-1)}(0)x_n^{r_n-1}+\frac{1}{r_n!}\Phi_n^{(r_n)}(0)x_n^{r_n}+O(|x_n|^{r_n+1}\right]$$

$$\times\left(\frac{|\varphi_{x_n}^{int}|^2}{r_nx_n^{r_n-1}\overline{x}_n^{r_n-1}}+\frac{1-r_n}{r_n^2}\frac{\varphi_{x_n}^{int}}{\overline{x}_n^{r_n}x_n^{r_n-1}}+\frac{1-r_n}{r_n^2}\frac{\varphi_{\overline{x}_n}^{int}}{\overline{x}_n^{r_n-1}x_n^{r_n}}+\left(\frac{1}{r_n}-1\right)^2\frac{1}{x_n^{r_n}\overline{x}_n^{r_n}}\right)r_n\overline{x}_n^{r_n-1}d\overline{x}_n$$

$$=\delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n|=\rho}|\varphi_\lambda|^2d\overline{\lambda}+2\pi i\frac{(1/r_n-1)^2}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0)+$$

$$2\pi i\frac{1-r_n}{r_n(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n-1)}(0)\varphi_{x_n}^{int}(0)+o(1)$$

as $\rho\to 0$.

Кроме того

$$I_2^n(\rho)=-2\pi i\left(\frac{1}{r_n}-1\right)\frac{1}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0)-2\pi i\frac{1}{r_n(r_n-2)!}\varphi_{x_n}^{int}(0)\Phi_n^{(r_n-1)}(0)+o(1)$$

и

$$I_3^n(\rho) = 2\pi i \frac{(1/r_n - 1)}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0) + o(1)\ .$$

Заметим, что

$$I_1^n - I_2^n + I_3^n = \delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n|=\rho}|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} + \frac{2\pi i}{(r_n-1)!}\Phi_n^{(r_n)}(0)[(1/r_n-1)^2 + 2(1/r_n-1)] + o(1)$$

$$= \delta_{nm}\sum_{p=1}^{r_n}\oint_{|\lambda^{(p)}-\lambda_n|=\rho}|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} - \frac{2\pi i}{(r_n-1)!}\left(1-\frac{1}{r_n^2}\right)\Phi_n^{(r_n)}(0) + o(1)\ .$$

Легко проверить, что

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} - \oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\, d\lambda + \oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho}[F_m]_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}} d\overline{\lambda}\Big) = o(1)\ ,$$

и мы приходим к (2.113).

Функция $F_m(2\varphi_{\lambda\lambda} - \varphi_\lambda^2)$ голоморфна вне точек ветвления, бесконечностей и разрезов. Применяя к ней теорему Коши и используя Лемму 8 и асимптотики Леммы 10, получаем равенство

$$2\pi i\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{(r_n-1)!}\left(1-\frac{1}{r_n^2}\right)\Phi_n^{(r_n)}(0) = \tag{2.114}$$

$$= -\frac{4\pi i}{(r_m-2)!\, r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2} R^{\omega,x_m}(x_m)\Big|_{x_m=0} + \sum_{k=1}^{g}\int_{C_k\cup C_k^-}\left\{F_m(2\varphi_{\lambda\lambda}-\varphi_\lambda^2)\right\}d\lambda.$$

Суммируя (2.112), (2.113) и (2.114), получаем (2.108).

□

Теперь мы продифференцируем по λ_m оставшиеся члены в (2.107). Обозначим через $L_{k;m}$, $\Omega_{;m}$ производные $\frac{\partial}{\partial\lambda_m}L_k$, $\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\Omega$. Поскольку φ_λ голоморфно по λ_m, имеем $[\varphi_{\overline{\lambda}}]_{\lambda_m} = 0$. Стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\left[-\frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\varphi_{\overline{\lambda}}(\lambda,\overline{\lambda})\ln|L_k'(\Omega(\lambda))|^2\, d\overline{\lambda} - \frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\varphi(\lambda,\overline{\lambda})\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Omega'(\lambda)\, d\lambda\right] = \tag{2.115}$$

$$= \frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\varphi_\lambda\frac{L_{k;m}'(\Omega(\lambda)) + L_k''(\Omega(\lambda))\Omega_{;m}(\lambda)}{L_k'(\Omega(\lambda))}\, d\lambda + \frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}(F_m\varphi_\lambda + [F_m]_\lambda)\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Omega'(\lambda)\, d\lambda.$$

(мы использовали равенство

$$\varphi_{\overline{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\ln|L_k'(\Omega(\lambda))|^2\, d\overline{\lambda} + \varphi\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\lambda_m}\ln|L_k'(\Omega(\lambda))|^2\, d\lambda =$$

$$= d\big(\varphi\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\ln|L_k'(\Omega(\lambda))|^2\big) - \varphi_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\ln|L_k'(\Omega(\lambda))|^2\, d\lambda$$

и Лемму 9.)

Чтобы закончить доказательство перепишем последний член в правой части (2.108) следующим образом:

$$\frac{i}{2}\int_{C_k\cup C_k^-}\left\{F_m(2\varphi_{\lambda\lambda}-\varphi_\lambda^2)+[F_m]_\lambda\varphi_\lambda\right\}\,d\lambda=\frac{i}{2}\int_{C_k\cup C_k^-}\varphi_\lambda\varphi_{\lambda_m}\,d\lambda= \tag{2.116}$$

$$=\frac{i}{2}\int_{C_k}\varphi_\lambda\varphi_{\lambda_m}-\Big(\varphi_\lambda+\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Omega'(\lambda)\Big)\Big(\varphi_{\lambda_m}+\frac{L_{k;m}'(\Omega(\lambda))+L_k''(\Omega(\lambda))\Omega_{;m}(\lambda)}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Big)\,d\lambda=$$

$$=-\frac{i}{2}\int_{C_k}\Big[\varphi_\lambda\frac{L_{k;m}'(\Omega(\lambda))+L_k''(\Omega(\lambda))\Omega_{;m}(\lambda)}{L_k'(\Omega(\lambda))}+\varphi_{\lambda_m}\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Omega'(\lambda)+$$
$$+\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Omega'(\lambda)\frac{L_{k;m}'(\Omega(\lambda))+L_k''(\Omega(\lambda))\Omega_{;m}(\lambda)}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Big]\,d\lambda.$$

собирая (2.107), (2.108), (2.115) и (2.116) и используя равенство

$$\varphi_{\lambda_m}=\frac{\Omega_{;m}'(\lambda)}{\Omega'(\lambda)},$$

получаем

$$\frac{\partial S_\rho}{\partial\lambda_m}+o(1)=\frac{2\pi}{(r_m-2)!\,r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}R^{\omega,x_m}\Big|_{x_m=0}- \tag{2.117}$$
$$\frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\frac{L_k''(\Omega(\lambda))L_{k;m}'(\Omega(\lambda))}{\big[L_k'(\Omega(\lambda))\big]^2}\Omega'(\lambda)\,d\lambda-$$
$$-\frac{i}{2}\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\left[\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\right]^2\Omega'(\lambda)\Omega_{;m}(\lambda)\,d\lambda-i\sum_{k=2}^{g}\int_{C_k}\frac{L_k''(\Omega(\lambda))}{L_k'(\Omega(\lambda))}\Omega_{;m}'(\lambda)\,d\lambda.$$

Поскольку $\{L_k(\omega),\omega\}\equiv 0$, последние два слагаемых в (2.117) сокращаются (предварительно надо проинтегрировать последний член по частям). Для второго слагаемого имеем ([62]):

$$-\frac{i}{2}\int_{C_k}\frac{L_k''(\Omega(\lambda))L_{k;m}'(\Omega(\lambda))}{\big[L_k'(\Omega(\lambda))\big]^2}\Omega'(\lambda)\,d\lambda=-4\pi\frac{l_{k;m}}{l_k}\ .$$

Для доказательства Теоремы 7 достаточно заметить, что слагаемое $o(1)$ в (2.117) равномерно по параметрам $(\lambda_1,\dots,\lambda_M)$ из малой окрестности начальной точки $(\lambda_1^0,\dots,\lambda_M^0)$.

□

2.4.4 Действие Лиувилля и фуксова униформизация

Метрика постоянной кривизны -1 на $\mathcal{L}$ и ее зависимость от точек ветвления. Накрытие $\mathcal{L}$ биголоморфно эквивалентно фактору $\mathbb{H}/\Gamma$, где $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\ :\ \Im z>0\}$, Γ – строго гиперболическая фуксова группа. Обозначим через $\pi_\Gamma:\mathbb{H}\to\mathcal{L}$ естественную проекцию. Пусть x – локальный параметр на $\mathcal{L}$, введем метрику $e^{\chi(x,\overline{x})}|dx|^2$ постоянной кривизны -1 на $\mathcal{L}$ равенством

$$e^{\chi(x,\overline{x})}|dx|^2=\frac{|dz|^2}{|\Im z|^2}, \tag{2.118}$$

где $z \in \mathbb{H}$, $\pi_\Gamma(z) = x$. Как обычно введем функции $\chi^{ext}(\lambda, \overline{\lambda})$, $\chi^{int}(x_m, \overline{x}_m)$, $m = 1, \dots, M$ и $\chi^\infty(\zeta_k, \overline{\zeta}_k)$, $k = 1, \dots, N$ полагая $x = \lambda$, $x = x_m$ и $x = \zeta_k$ в (2.118).

Положим $R^{z,x} = \{z, x\}$, где $z \in \mathbb{H}$, $\pi_\Gamma(z) = x$. Легко видеть, что Леммы 7 и 8 остаются в силе для χ^{ext}, $R^{z,x}$ вместо φ^{ext} и $R^{\omega,x}$, в то время, как Лемма 9 свою силу теряет, так как фуксова униформизация зависит от точек ветвления неголоморфно.

Введем метрику $e^{\psi(\omega,\overline{\omega})}|d\omega|^2$ постоянной кривизны -1 на D_0 уравнением

$$e^{\psi(\omega,\overline{\omega})}|d\omega|^2 = \frac{|dz|^2}{|\Im z|^2},$$

где $\pi_\Sigma(\omega) = \pi_\Gamma(z)$. имеет место следующее соотношение между производными функции ψ:

$$\psi_{\lambda_m}(\omega, \overline{\omega}) + \psi_\omega(\omega, \overline{\omega})\mathbb{F}_m(\omega, \overline{\omega}) + [\mathbb{F}_m]_\omega(\omega, \overline{\omega}) = 0, \tag{2.119}$$

где $\mathbb{F}$ – непрерывно дифференцируемая функция на D_0; (доказательство (2.119) почти дословно повторяет аргументы ([62]) и предоставляется читателю).

Докажем теперь аналог (2.119) и Леммы 9 для функции $\chi = \chi^{ext}$.

Лемма 12 *Имеют место следующие соотношения между производными функции χ:*

$$\frac{\partial\chi(\lambda, \overline{\lambda})}{\partial\lambda_m} + \mathcal{F}_m(\lambda, \overline{\lambda})\frac{\partial\chi(\lambda, \overline{\lambda})}{\partial\lambda} + \frac{\partial\mathcal{F}_m(\lambda, \overline{\lambda})}{\partial\lambda} = 0, \tag{2.120}$$

где

$$\mathcal{F}_m(\lambda, \overline{\lambda}) = \mathbb{F}_m(\Omega_0(\lambda), \overline{\Omega_0(\lambda)})\frac{1}{\Omega_0'(\lambda)} + F_m(\lambda). \tag{2.121}$$

Здесь $F_m = -\frac{[\Omega_0]_{\lambda_m}}{[\Omega_0]_\lambda}$ – функция из Леммы 9, $\mathbb{F}_m$ – из равенства (2.119).

Доказательство. Поскольку

$$e^{\chi(\lambda,\overline{\lambda})}|d\lambda|^2 = e^{\psi(\Omega_0(\lambda),\overline{\Omega_0(\lambda)})}|\Omega_0'(\lambda)|^2|d\lambda|^2,$$

имеем равенство

$$\chi(\lambda, \overline{\lambda}) = \psi(\Omega_0(\lambda), \overline{\Omega_0(\lambda)}) + \varphi(\lambda, \overline{\lambda}), \tag{2.122}$$

где $\varphi(\lambda, \overline{\lambda}) = \ln|\Omega_0'(\lambda)|^2$ – функция из (2.87). Дифференцируя (2.122) по λ_m используя (2.119) и (2.96), получаем (2.120).

□

Замечание 5 Заметим, что функция $\mathcal{F}_m$ не имеет скачка на циклах C_k, в то время как оба члена в правой части (2.121) его имеют. Это немедленно следует из формул

$$F_m^-(\lambda) = F_m^+(\lambda) - \frac{L_{k;m}(\Omega_0^+(\lambda))}{L_k'(\Omega_0^+(\lambda))[\Omega_0^+]_\lambda(\lambda)},$$

$$[\Omega_0^-]_\lambda(\lambda) = L_k'(\Omega_0^+(\lambda))[\Omega_0^+]_\lambda(\lambda)$$

и следующей формулы из [62]:

$$\mathbb{F}_m \circ L_k = \mathbb{F}_m L_k' + L_{k;m}.$$

Здесь индексы + и − означают значения соответствующих функций на "c_k"и "c_k'"сторонах цикла C_k.

Лемма 13 *Фиксируем $m = 1, \dots, M$. Тогда для любых $n = 1, \dots, M$ имеют место следующие асимптотики*

$$\mathcal{F}_m(\lambda_n + x_n^{r_n}, \overline{\lambda}_n + \overline{x}_n^{r_n}) = \delta_{mn} + a_n x_n^{r_n - 1} + b_n \overline{x}_n x_n^{r_n - 1} + c_n x_n^{r_n} + O(|x_n|^{r_n + 1}) \tag{2.123}$$

при $x_m \to 0$; здесь a_n, b_n, c_n – некоторые комплексные постоянные.

На бесконечности k-го листа накрытия $\mathcal{L}$ справедлива асимптотика

$$\mathcal{F}_m(\lambda, \overline{\lambda}) = A_k \lambda^2 + B_k \lambda + C_k \lambda^2 \overline{\lambda}^{-1} + O(1) \tag{2.124}$$

при $\lambda \to \infty^{(k)}$; здесь $\infty^{(k)}$ – точка на бесконечности k-го листа накрытия $\mathcal{L}$; A_k, B_k, C_k – некоторые комплексные постоянные.

Доказательство. Результат сразу выводится из Следствия 4, асимптотик (2.100) и формулы (2.121).

□

Регуляризованное действие Лиувилля. Здесь мы определяем регуляризованный интеграл

$$\mathrm{reg} \int_{\mathcal{L}} (|\chi_\lambda|^2 + e^\chi) \, dS$$

и вычисляем его производные по критическим значениям λ_m.

Положим $\Lambda_\rho^k = \{\lambda \in \mathcal{L}^{(k)} \ : \ \forall m \quad |\lambda - \lambda_m| > \rho \ \& \ |\lambda| < 1/\rho\}$, где P_m – точки ветвления на k-м листе $\mathcal{L}^{(k)}$ накрытия $\mathcal{L}$. Листу $\mathcal{L}^{(k)}$ соответствует функция $\chi_k^{ext} : \mathcal{L}^{(k)} \to \mathbb{R}$, гладкая в любой области Λ_ρ^k, $\rho > 0$.

Функция χ_k^{ext} имеет конечные пределы на разрезах (кроме концов – точек ветвления); в точках ветвления и на бесконечности ее асимптотики те же, что и у функции φ_k^{ext} из предыдущего раздела.

Заметим также, что функция $e^{\chi_k^{ext}}$ суммируема на $\mathcal{L}^{(k)}$. Положим

$$T_\rho = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Lambda_\rho^k} |\partial_\lambda \chi_k^{ext}|^2 \, dS. \tag{2.125}$$

Тогда существует конечный предел

$$\mathrm{reg} \int_{\mathcal{L}} (|\chi_\lambda|^2 + e^\chi) \, dS = \lim_{\rho \to 0} \left(T_\rho + \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathcal{L}^{(k)}} e^{\chi_k^{ext}} \, dS + (4N + \sum_{m=1}^{M} \frac{(r_m - 1)^2}{r_m}) 2\pi \ln \rho \right). \tag{2.126}$$

Положим

$$\mathbb{S}_{Fuchs}(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{reg} \int_{\mathcal{L}} (|\chi_\lambda|^2 + e^\chi) \, dS + \tag{2.127}$$

$$2 \sum_{n=1}^{M} (r_n - 1) \chi^{int}(x_n) \Big|_{x_n = 0} - 2 \sum_{k=1}^{N} \chi^\infty(\zeta_k) \Big|_{\zeta_k = 0}.$$

теперь можно сформулировать главный результат настоящего раздела.

Теорема 8 *Для любого $m = 1, \dots, M$ имеет место следующее равенство*

$$\frac{\partial \mathbb{S}_{Fuchs}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{(r_m - 2)! \, r_m} \left(\frac{d}{dx_m} \right)^{r_m - 2} R^{z, x_m} \Big|_{x_m = 0}. \tag{2.128}$$

Доказательство. Положим $\Lambda_\rho = \cup_{k=1}^N \Lambda_\rho^k$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} T_\rho = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{r_m} \oint_{|\lambda^{(k)}-\lambda_m|=\rho} |\partial_\lambda \chi|^2\, d\overline{\lambda} + \int_{\Lambda_\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda_m} |\partial_\lambda \chi|^2\, dS. \tag{2.129}$$

Согласно (2.120) последний член в (2.129) может быть переписан как

$$\int_{\Lambda_\rho} \frac{\partial}{\partial \lambda_m} |\partial_\lambda \chi|^2\, dS = \tag{2.130}$$

$$\int_{\Lambda_\rho} \Big(((2\chi_{\lambda\lambda} - \chi_\lambda^2)[\mathcal{F}_m])_{\overline{\lambda}} - 2(\chi_\lambda [\mathcal{F}_m]_{\overline{\lambda}})_\lambda + (\chi_\lambda [\mathcal{F}_m]_\lambda)_{\overline{\lambda}} - (\chi_{\overline{\lambda}}[\mathcal{F}_m]_\lambda)_\lambda - (|\chi_\lambda|^2 [\mathcal{F}_m])_\lambda \Big)\, dS =$$

$$= -\frac{i}{2}\int_{\partial\Lambda_\rho} (2\chi_{\lambda\lambda} - \chi_\lambda^2)\mathcal{F}_m\, d\lambda + 2\chi_\lambda [\mathcal{F}_m]_{\overline{\lambda}}\, d\overline{\lambda} + \chi_\lambda [\mathcal{F}_m]_\lambda\, d\lambda + \chi_{\overline{\lambda}} [\mathcal{F}_m]_\lambda\, d\overline{\lambda} + |\chi_\lambda|^2 \mathcal{F}_m\, d\overline{\lambda} =$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{M} \Big[I_1^n + 2I_2^n + I_3^n + I_4^n + I_5^n \Big] - \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{N} \Big[J_1^{\infty,k} + J_2^{\infty,k} + J_3^{\infty,k} + J_4^{\infty,k} + J_5^{\infty,k} \Big],$$

где

$$I_1^n = \sum_{l=1}^{r_n} \oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda_n|=\rho} (2\chi_{\lambda\lambda} - \chi_\lambda^2)\mathcal{F}_m\, d\lambda,$$

$$J_1^{\infty,k} = \oint_{|\lambda^{(k)}|=1/\rho} (2\chi_{\lambda\lambda} - \chi_\lambda^2)\mathcal{F}_m\, d\lambda$$

и члены I_p^n и $J_p^{\infty,k}$, $p = 2,3,4,5$ – аналогичные суммы интегралов и интегралы с подынтегральными выражениями $\chi_\lambda [\mathcal{F}_m]_{\overline{\lambda}}\, d\overline{\lambda}$, $\chi_\lambda [\mathcal{F}_m]_\lambda\, d\lambda$, $\chi_{\overline{\lambda}}[\mathcal{F}_m]_\lambda\, d\overline{\lambda}$ and $|\chi_\lambda|^2 \mathcal{F}_m\, d\overline{\lambda}$ соответственно. Следует отметить, что окружности $|\lambda - \lambda_n| = \rho$ ориентированы по часовой стрелке, а окружности $|\lambda| = 1/\rho$ – против. Используя (2.123), получаем

$$I_1^n = \oint_{|x_n|=\rho^{1/r_n}} \Big[\frac{2R^{z,x_n}(x_n)}{r_n x_n^{2r_n-2}} + \left(1 - \frac{1}{r_n^2}\right) \frac{1}{x_n^{2r_n}} \Big] \Big(\delta_{mn} + a_n x_n^{r_n-1} + b_n \overline{x}_n x_n^{r_n-1} + \tag{2.131}$$

$$+ c_n x_n^{r_n} + O(|x_n|^{r_n+1}) \Big) r_n x_n^{r_n-1}\, dx_n = -\delta_{nm} \frac{4\pi i}{(r_n-2)!\, r_n} \left(\frac{d}{dx_n}\right)^{r_n-2} R^{z,x_m}(0) -$$

$$-2\pi i r_n \left(1 - \frac{1}{r_n^2}\right) c_n + o(1).$$

Таким же образом получаем

$$I_2^n = o(1), \quad I_3^n = -2\pi i \left(\frac{r_n - 1}{r_n} a_n \chi_{x_n}^{int}(0) + r_n \big(\frac{1}{r_n} - 1\big) c_n \right) + o(1), \tag{2.132}$$

и

$$I_4^n = 2\pi i \left(\frac{1}{r_n} - 1\right) r_n c_n + o(1), \quad I_5^n = \delta_{mn} \sum_{l=1}^{r_n} \oint_{|\lambda^{(l)}-\lambda|=\rho} |\chi_\lambda|^2\, d\overline{\lambda} + \tag{2.133}$$

$$+2\pi i \chi_{x_n}^{int}(0) \frac{1 - r_n}{r_n} a_n + 2\pi i \left(\frac{1}{r_n} - 1\right)^2 r_n c_n + o(1).$$

Используя (2.124), получаем также

$$J_1^{\infty,k}=o(1),\quad J_2^{\infty,k}=o(1),\quad J_3^{\infty,k}=-4\pi i(A_k\chi_{\zeta_k}^{\infty}(0)+B_k)+o(1), \tag{2.134}$$

и

$$J_4^{\infty,k}=4\pi iB_k+o(1),\quad J_5^{\infty,k}=-4\pi i(A_k\chi_{\zeta_k}^{\infty}(0)+2B_k)+o(1). \tag{2.135}$$

Суммируя (2.129-2.135), имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}T_\rho=\frac{2\pi}{(r_m-2)!\,r_m}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{r_m-2}R^{z,x_m}(0)+2\pi\sum_{n=1}^{M}\frac{1-r_n}{r_n}\left(a_n\chi_{x_n}^{int}(0)+c_n\right)- \tag{2.136}$$

$$-4\pi\sum_{k=1}^{N}\left(A_k\chi_{\zeta_k}^{\infty}(0)+B_k\right)+o(1).$$

Для того, чтобы закончить доказательство необходима следующая лемма.

Лемма 14 *Имеют место равенства*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\chi^{int}(x_n)\Big|_{x_n=0}=-\frac{1}{r_n}(a_n\chi_{x_n}^{int}(0)+c_n) \tag{2.137}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\chi^{\infty}(\zeta_k)\Big|_{\zeta_k=0}=A_k\chi_{\zeta_k}^{\infty}(0)+B_k. \tag{2.138}$$

Доказательство. Докажем (2.137); (2.138) доказывается ровно так же. Так как

$$e^{\chi^{int}(x_n,\overline{x}_n)}|dx_n|^2=e^{\chi^{ext}(\lambda,\overline{\lambda})}|d\lambda|^2,$$

имеем

$$\chi^{int}(x_n,\overline{x}_n)=\chi^{ext}(\lambda,\overline{\lambda})-\left(\frac{1}{r_n}-1\right)\frac{1}{r_n^2}\ln|\lambda-\lambda_n|^2 \tag{2.139}$$

и

$$\chi_{\lambda_m}^{ext}(\lambda,\overline{\lambda})=\chi_{\lambda_m}^{int}(x_n,\overline{x}_n)+\mathrm{const}\,\delta_{mn}\frac{1}{x_n^{r_n}}. \tag{2.140}$$

Из (2.123) и (2.120) получаем

$$\chi_{\lambda_m}^{ext}(\lambda,\overline{\lambda})= \tag{2.141}$$

$$=-\Big(\delta_{mn}+a_nx_n^{r_n-1}+b_n\overline{x}_nx_n^{r_n-1}+c_nx_n^{r_n}+O(|x_n|^{r_n+1})\Big)\times$$

$$\Big[\frac{1}{r_nx_n^{r_n-1}}\chi_{x_n}^{int}(x_n,\overline{x}_n)+\left(\frac{1}{r_n}-1\right)\frac{1}{x_n^{r_n}}\Big]-$$

$$-\frac{r_n-1}{r_n}a_n\frac{1}{x_n}-\frac{r_n-1}{r_n}b_n\frac{\overline{x}_n}{x_n}-c_n+O(|x_n|).$$

Подставляя (2.141) в (2.140) и сравнивая коэффициенты при нулевой степени x_n, получаем (2.137).

□

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\int_{\mathcal{L}}e^{\chi}\,dS=0$$

по теореме Гаусса-Боннэ и что член $o(1)$ в (2.136) равномерен по $(\lambda_1,\dots,\lambda_M)$ в малой окрестности начальной точки $(\lambda_1^0,\dots,\lambda_M^0)$. Это вместе с (2.136) и Леммой 14 доказывает Теорему 8.

□

2.4.5 Квадрат модуля тау-функций Бергмана и Виртингера для накрытий старшего рода

Теперь мы в состоянии вычислить квадрат модуля бергмановской (и, стало быть, виртингеровской) тау-функции. На самом деле мы дадим два эквивалентных ответа на этот вопрос: один – в терминах фуксовой униформизации поверхности $\mathcal{L}$ и детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре, другой - в терминах униформизации Шоттки и голоморфного детерминанта оператора Коши-Римана, вычисленного Зографом.

В самом деле, из формул (2.82) и Теоремы 8 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9 *Пусть регуляризованное действие Лиувилля $\mathbb{S}_{Fuchs}$ определено формулой (2.127). Справедливо следующее выражение для квадрата модуля $|\tau_B|^2$ тау-функции Бергмана накрытия $\mathcal{L}$:*

$$|\tau_B|^2 = e^{-\mathbb{S}_{Fuchs}/6} \frac{\det \Delta}{\det \Im \mathbb{B}}. \tag{2.142}$$

Для квадрата модуля $|\tau_W|^2$ тау-функции Виртингера справедливо представление:

$$|\tau_W|^2 = e^{-\mathbb{S}_{Fuchs}/6} \frac{\det \Delta}{\det \Im \mathbb{B}} \prod_{\beta \,\mathrm{even}} \Big|\Theta[\beta](0\,|\,\mathbb{B})\Big|^{-\frac{2}{4^{g-1}+2^{g-2}}}. \tag{2.143}$$

С другой стороны, используя формулы (2.84) и Теорему 7, можно получить следующий, альтернативный, ответ.

Теорема 10 *Пусть регуляризованный интеграл Дирихле $\mathbb{S}_{Schottky}$ определяется формулой (2.103). Тогда квадраты модуля бергмановской и виртингеровской тау-функций накрытия $\mathcal{L}$ представимы в виде:*

$$|\tau_B|^2 = e^{-\mathbb{S}_{Schottky}/6} |\det \overline{\partial}|^2, \tag{2.144}$$

$$|\tau_W|^2 = e^{-\mathbb{S}_{Schottky}/6} |\det \overline{\partial}|^2 \prod_{\beta \,\mathrm{even}} \Big|\Theta[\beta](0\,|\,\mathbb{B})\Big|^{-\frac{2}{4^{g-1}+2^{g-2}}}. \tag{2.145}$$

3 Вычисление тау-функции Бергмана для накрытий старшего рода

Цель этой главы - основной главы работы - вычисление бергмановской тау-функции для произвольного пространства Гурвица $H_{g,N}(1,\dots,1)$. Напомним, что речь идет о явном построении голоморфного решения τ (поскольку в этой главе речь идет только о тау-функции Бергмана мы опускаем индекс B: везде в этой главе $\tau = \tau_B$) следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\ln\tau = -\frac{1}{12}S_B(x_m)|_{x_m=0}\;, \qquad m=1,\dots,M\;. \tag{3.1}$$

Введем дивизор $\mathcal{D}$ мероморфного дифференциала $d\pi$: $\mathcal{D}=\sum_{k=1}^{M+N} d_k D_k$, где $D_m = P_m$, $d_m = 1$ для $m=1,\dots,M$ и $D_{M+n}=\infty_n$, $d_{M+n}=-2$ для $n=1,\dots,N$. Здесь и везде ниже мы принимаем следующее соглашение: если аргумент тензора (в данном случае дифференциала) совпадает с какой-либо точкой D_k дивизора $\mathcal{D}$, то имеется в виду значение этого тензора в данной точке по отношению к локальному параметру x_k. В частности мы будем использовать следующее соглашение для значений главной формы:

$$E(D_k,D_l) := E(P,Q)\sqrt{dx_k(P)}\sqrt{dx_l(Q)}|_{P=D_k,\,Q=D_l}\;, \tag{3.2}$$

для $k,l=1,\dots,M+N$. Следующая система обозначений соответствует главным формам, вычисленным в точках дивизора $\mathcal{D}$ относительно только одного из аргументов:

$$E(P,D_k) := E(P,Q)\sqrt{dx_k(Q)}|_{Q=D_k}\;, \tag{3.3}$$

$k=1,\dots,M+N$; в противоположность значениям $E(D_k,D_l)$, которые представляют собой скаляры, выражение $E(P,D_k)$ есть $-1/2$-форма относительно P.

Разрежем риманову поверхность $\mathcal{L}$ вдоль базисных циклов, получившийся фундаментальный многоугольник обозначим через $\widehat{\mathcal{L}}$; выбрав некоторую начальную точку $P\in\widehat{\mathcal{L}}$ введем вектор римановых констант

$$K_\alpha^P = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{B}_{\alpha\alpha} - \sum_{\beta\neq\alpha}\oint_{a_\beta}\left(v_\beta(Q)\int_P^Q v_\alpha\right)\;;\quad \alpha=1,\dots,g \tag{3.4}$$

и отображение Абеля $[\mathcal{A}_P]_\alpha(Q)=\int_P^Q v_\alpha$, пути интегрирования предполагаются не пересекающими границу $\partial\widehat{\mathcal{L}}$.

Следующая теорема – основной результат настоящей главы.

Теорема 11 *Предположим, что фундаментальный многоугольник $\widehat{\mathcal{L}}$ выбран так, что*

$$\mathcal{A}(\mathcal{D})+2K^P=0. \tag{3.5}$$

Тау-функция Бергмана на пространстве Гурвица $H_{g,N}(1,\dots,1)$ задается следующим явным выражением:

$$\tau = \mathcal{F}^{2/3}\prod_{k,l=1\;\; k<l}^{M+N}[E(D_k,D_l)]^{\frac{d_kd_l}{6}} \tag{3.6}$$

где величина $\mathcal{F}$, определенная равенством

$$\mathcal{F} = \frac{[d\pi(P)]^{\frac{g-1}{2}}}{\mathcal{W}(P)} \left\{ \prod_{k=1}^{M+N} [E(P, D_k)]^{\frac{(1-g)d_k}{2}} \right\} \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_g=1}^{g} \frac{\partial^g \Theta(K^P)}{\partial z_{\alpha_1} \dots \partial z_{\alpha_g}} v_{\alpha_1}(P) \dots v_{\alpha_g}(P) \tag{3.7}$$

не зависит от точки $P \in \mathcal{L}$. Здесь Θ – тэта-функция поверхности $\mathcal{L}$;

$$\mathcal{W}(P) := \det_{1 \le \alpha, \beta \le g} ||v_\beta^{(\alpha-1)}(P)|| \tag{3.8}$$

— значение вронскиана базисных голоморфных дифференциалов в точке P.

3.1 Доказательство основной теоремы

3.1.1 Вариационные формулы на пространствах разветвленных накрытий

Здесь мы доказываем формулы, описывающие вариации основных голоморфных объектов (базисных голоморфных дифференциалов, канонического мероморфного бидифференциала, главной формы, вектора римановых констант и т. д.) на римановой поверхности $\mathcal{L}$ при вариации критических значений отображения $\pi : \mathcal{L} \to \mathbb{C}P^1$.

Напомним сначала основные свойства главной формы $E(P, Q)$ (см., [15, 16]), антисимметричного $-1/2$-дифференциала по P и Q:

- При обходе Q вдоль базисного цикла a_α главная форма не меняется; при обходе вдоль b_α она приобретает множитель

$$\exp(-\pi i \mathbf{B}_{\alpha\alpha} - 2\pi i \int_P^Q v_\alpha) . \tag{3.9}$$

- Главная форма выражается через канонический мероморфный бидифференциал $B(P, Q)$ следующим образом:

$$E^2(P, Q) dx(P) dy(Q) = \tag{3.10}$$

$$\lim_{P_0 \to P, Q_0 \to Q} (x(P_0) - x(P))(y(Q) - y(Q_0)) \exp\left(- \int_{P_0}^{Q_0} \int_P^Q B(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \right),$$

- На диагонали $Q = P$ главная форма имеет нуль первого порядка; справедлива асимптотика

$$E(x(P), x(Q)) \sqrt{dx(P)} \sqrt{dx(Q)} =$$

$$(x(Q) - x(P)) \left(1 - \frac{1}{12} S_B(x(P))(x(Q) - x(P))^2 + O((x(Q) - x(P))^3 \right), \tag{3.11}$$

  при $Q \to P$, где S_B – проективная связность Бергмана и $x(P)$ – произвольный локальный параметр.

Для любых двух точек $P, Q \in \widehat{\mathcal{L}}$ введем следующую величину:

$$\mathbf{s}(P, Q) := \exp\left\{ -\sum_{\alpha=1}^{g} \oint_{a_\alpha} v_\alpha(R) \ln \frac{E(R, P)}{E(R, Q)} \right\} \tag{3.12}$$

Этот объект представляет собой (многозначный) нигде не обращающийся в нуль голоморфный $g/2$-дифференциал на по P и $-g/2$-дифференциал по Q. При обходе вдоль циклов a_α и b_α он приобретает множители 1 и $\exp[(g-1)\pi i\mathbf{B}_{\alpha\alpha}+2\pi i K^P_\alpha]$ по P и множители 1 и $\exp[(1-g)\pi i\mathbf{B}_{\alpha\alpha}-2\pi i K^Q_\alpha]$ по Q.

Как и в случае главной формы, если один из аргументов совпадает с точкой дивизора $\mathcal{D}$, мы вычисляем $\mathbf{s}$ в соответствующем локальном параметре:

$$\mathbf{s}(D_k,Q):=\mathbf{s}(P,Q)(dx_k(P))^{-g/2}|_{P=D_k} \tag{3.13}$$

где $k=1,\dots,M+N$. Для произвольных двух точек $P,Q\notin\mathcal{D}$ введем следующее обозначение:

$$\sigma(P,Q):=\mathbf{s}(P,Q)(d\pi(P))^{-g/2}(d\pi(Q))^{g/2} \tag{3.14}$$

Фиксируя две точки P_0, $Q_0\in\mathcal{L}$ (вне дивизора $\mathcal{D}$), введем следующий (многозначный) голоморфный 1-дифференциал:

$$\omega(P)=\mathbf{s}^2(P,Q_0)E(P,P_0)^{2g-2}(d\pi(Q_0))^g(d\pi(P_0))^{g-1}\ ; \tag{3.15}$$

в согласии с предыдущими обозначениями $\omega(D_k):=\frac{\omega(P)}{dx_k(P)}|_{P=D_k}$. Дифференциал $\omega(P)$ обладает мультипликаторами 1 и $\exp(4\pi i K^{P_0}_\alpha)$ вдоль базисных циклов a_α и b_α соответственно. Единственный нуль 1-формы ω на $\widehat{\mathcal{L}}$ – в точке P_0; его кратность равна $2g-2$.

Рассмотрим следующую шварцеву производную (зависящую от выбора P_0, но не Q_0 из (3.15)):

$$S^{P_0}_{Fay}(x(P)):=\left\{\int^P\omega(P),\ x(P)\right\}\ , \tag{3.16}$$

где $x(P)$ – локальный параметр на $\mathcal{L}$; величина $S^{P_0}_{Fay}$ – проективная связность на $\mathcal{L}$; эта проективная связность впервые появилась (в несколько другой форме) в фундаментальном мемуаре Джона Фэя [16].

Введем также следующий голоморфный многозначный $g(1-g)/2$-дифференциал на $\widehat{\mathcal{L}}$, обладающий мультипликаторами 1 и $\exp\{-\pi i(g-1)^2\mathbf{B}_{\alpha\alpha}-2\pi i(g-1)K^P_\alpha\}$ вдоль базисных циклов a_α и b_α соответственно:

$$\mathcal{C}(P)=\frac{1}{\mathcal{W}[v_1,\dots,v_g](P)}\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_g=1}^{g}\frac{\partial^g\Theta(K^P)}{\partial z_{\alpha_1}\dots\partial z_{\alpha_g}}v_{\alpha_1}\dots v_{\alpha_g}(P)\ , \tag{3.17}$$

где $\mathcal{W}(P)$ – вронскиан базисных голоморфных дифференциалов.

Дифференциал $\mathcal{C}$ появляется в явном выражении для меры Мамфорда на пространстве модулей римановых поверхностей, полученном в мемуаре [16]. Для $g>1$ мультипликативный дифференциал $\mathbf{s}$ (3.12) выражается в терминах $\mathcal{C}$ следующим образом [16]:

$$\mathbf{s}(P,Q)=\left(\frac{\mathcal{C}(P)}{\mathcal{C}(Q)}\right)^{1/(1-g)} \tag{3.18}$$

Согласно Следствию 1.4 из [16], $\mathcal{C}(P)$ не имеет нулей. Более того, этот объект допускает следующее, альтернативное, представление:

$$\mathcal{C}(P)=\frac{\Theta(\sum_{\alpha=1}^{g-1}\mathcal{A}_P(R_\alpha)+\mathcal{A}_Q(R_g)+K^P)\prod_{\alpha<\beta}E(R_\alpha,R_\beta)\prod_{\alpha=1}^{g}\mathbf{s}(R_\alpha,P)}{\prod_{\alpha=1}^{g}E(Q,R_\alpha)\det||v_\alpha(R_\beta)||^g_{\alpha,\beta=1}\mathbf{s}(Q,P)}. \tag{3.19}$$

где $Q, R_1, \ldots, R_g \in \mathcal{L}$ – произвольные точки $\mathcal{L}$.

Далее мы используем обозначение

$$\partial_m T(P_m) := \frac{dT(x_m)}{dx_m}\Big|_{x_m=0}$$

для производной тензора $T(x_m)(dx_m)^r$ (возможно дробного) веса r в точке ветвления P_m по отношению к локальному параметру x_m.

Теорема 12 *Пусть координаты $\lambda(P) = \pi(P)$ и $\lambda(Q) = \pi(Q)$ точек P и Q не меняются при деформации накрытия $\pi : \mathcal{L} \to \mathbb{C}P^1$. При условии, что все тензорные объекты с аргументами P, Q и Q_0 вычисляются в локальном параметре λ поднятом с базы $\mathbb{C}P^1$ накрытия π и что все тензорные объекты с аргументом P_m вычисляются в локальном параметре $x_m = \sqrt{\lambda - \lambda_m}$, имеют место следующие вариационные формулы*

$$\frac{\partial v_\alpha(P)}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{2} B(P, P_m) v_\alpha(P_m), \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_m} = \pi i v_\alpha(P_m) v_\beta(P_m), \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial B(P,Q)}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{2} B(P, P_m) B(P_m, Q), \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial E(P,Q)}{\partial \lambda_m} = -\frac{1}{4}\left[\partial_m \ln \frac{E(P,P_m)}{E(Q,P_m)}\right]^2, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial K_\alpha^P}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{2} v_\alpha(P_k) \partial_m \ln\left(\mathbf{s}(P_m, Q_0) E(P_m, P)^{g-1}\right) - \frac{1}{4}\partial_m v_\alpha(P_m)\,, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \sigma(P,Q)}{\partial \lambda_m} = \frac{1}{4}\left\{\partial_m \ln \frac{E(P_m,P)}{E(P_m,Q)}\right\}\left\{\partial_m \ln\left[\mathbf{s}(P_m,Q_0)^2 E(P_m,P)^{g-1} E(P_m,Q)^{g-1}\right]\right\}$$
$$-\frac{1}{4}\partial_m^2 \ln \frac{E(P_m,P)}{E(P_m,Q)}\,, \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial \mathcal{C}(P)}{\partial \lambda_m} = -\frac{1}{8}(S_B - S_{Fay}^P)(P_m)\,, \tag{3.26}$$

где выражения в правых частях (3.24), (3.25) и (3.26) независимы от Q_0.

Доказательство. Элементарное доказательство (3.20-3.22) содержится в первой главе, соответствующие утверждения приведены здесь лишь для полноты. Как и в [16], формула (3.23) немедленно следует из (3.22) и (3.10). Докажем (3.24).

Можно предполагать, что проекции a- и b-циклов на λ-плоскость остаются неподвижными при деформации накрытия. варьируя правую часть (3.4) с использованием (3.21) и (3.20), получаем

$$\partial_{\lambda_m} K_\alpha^P = \frac{\pi i}{2} v_\alpha(P_m)^2 - \sum_{\beta \neq \alpha} \oint_{a_\beta} \frac{1}{2}\left\{\partial_\lambda \partial_m \ln E(\lambda, P_m) v_\beta(P_m) \int_P^\lambda v_\alpha\right\} d\lambda$$

$$
-\oint_{a_\beta} v_\beta(\lambda) \int_P^\lambda \left(\frac{1}{2}\partial_{\lambda'}\partial_m \ln E(\lambda', P_m) v_\alpha(P_m)\right) d\lambda' =
$$

$$
\frac{\pi i}{2} v_\alpha(P_m)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha} v_\beta(P_m) \oint_{a_\beta} \left\{(\partial_\lambda \partial_m \ln E(\lambda, P_m)) \int_P^\lambda v_\alpha \right\} d\lambda
$$

$$
-\frac{v_\alpha(P_m)}{2} \sum_{\beta\neq\alpha} \oint_{a_\beta} v_\beta(\lambda) \partial_m \ln \frac{E(\lambda, P_m)}{E(P, P_m)} =
$$

$$
\frac{\pi i}{2} v_\alpha(P_m)^2 + \frac{g-1}{2} v_\alpha(P_m) \partial_m \ln E(P, P_m) - \frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha} v_\beta(P_m) \oint_{a_\beta} \left\{\partial_\lambda \partial_m E(\lambda, P_m) \int_P^\lambda v_\alpha \right\} d\lambda
$$

$$
-\frac{v_\alpha(P_m)}{2} \sum_{\beta\neq\alpha} \oint_{a_\beta} v_\beta(\lambda) \partial_m \ln E(\lambda, P_m) =
$$

$$
= \frac{\pi i}{2} v_\alpha(P_m)^2 + \frac{v_\alpha(P_m)}{2} \partial_m \ln E^{g-1}(P, P_m) - \frac{1}{2}\sum_{\beta\neq\alpha} v_\beta(P_m) \oint_{a_\beta} \left\{\partial_\lambda \partial_m E(\lambda, P_m) \int_P^\lambda v_\alpha \right\} d\lambda
$$

$$
+\frac{v_\alpha(P_m)}{2} \partial_m \ln \mathbf{s}(P_m, Q_0) + \frac{v_\alpha(P_m)}{2} \oint_{a_\alpha} v_\alpha(\lambda) \partial_m \ln E(P_m, \lambda) =
$$

$$
\frac{v_\alpha(P_m)}{2} \partial_m \ln \mathbf{s}(P_m, Q_0) E^{g-1}(P, P_m) + \frac{\pi i}{2} v_\alpha(P_m)^2 + \tag{3.27}
$$

$$
\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{g} v_\beta(P_m) \oint_{a_\beta} \{\partial_m \ln E(\lambda, P_m)\} v_\alpha(\lambda)\,,
$$

где последнее равенство получено интегрированием по частям (что возможно, так как главная форма не имеет подкруток вдоль a-циклов). Заметим, что согласно (3.9) сумма двух последних слагаемых в последнем выражении совпадает со следующим интегралом по границе фундаментального многоугольника $\widehat{\mathcal{L}}$

$$
-\frac{1}{8\pi i} \oint_{\partial\widehat{\mathcal{L}}} v_\alpha(\lambda) \left(\partial_m \ln E(\lambda, P_m)\right)^2 \,. \tag{3.28}
$$

Из асимптотики (3.11) и формулы Коши следует, что интеграл (3.28) совпадает с

$$
-\frac{1}{4} v'_\alpha(x_m)\Big|_{x_m=0} \equiv -\frac{1}{4}\partial_m v_\alpha(P_m)\,,
$$

что и дает (3.24).

Докажем (3.25). Согласно (3.20) и (3.23), имеем

$$
\partial_{\lambda_m} \ln \mathbf{s}(P, Q) = -\partial_{\lambda_m} \sum_{\beta=1}^{g} \oint_{a_\beta} v_\beta(\lambda) \ln \frac{E(\lambda, P)}{E(\lambda, Q)} =
$$

$$
-\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{g} \oint_{a_\beta} [\partial_\lambda \partial_m \ln E(P_m, \lambda)] v_\beta(P_m) \ln \frac{E(\lambda, P)}{E(\lambda, Q)}\, d\lambda
$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\beta=1}^{g}\oint_{a_\beta} v_\beta(\lambda)\left\{\left(\partial_m \ln\frac{E(\lambda,P_m)}{E(P,P_m)}\right)^2-\left(\partial_m \ln\frac{E(\lambda,P_m)}{E(Q,P_m)}\right)^2\right\} := \Sigma_1+\Sigma_2. \tag{3.29}$$

Для упрощения первого слагаемого в (3.29) проинтегрируем его по частям, перепишем получившееся выражение, как интеграл по границе фундаментального многоугольника и применим формулу Коши:

$$\Sigma_1=\frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{g}\oint_{a_\beta} v_\beta(P_m)\partial_m \ln E(P_m,\lambda)\partial_\lambda \ln\frac{E(\lambda,P)}{E(\lambda,Q)}\,d\lambda=$$

$$-\frac{1}{8\pi i}\oint_{\partial\widehat{\mathcal{L}}}(\partial_m \ln E(P_m,\lambda))^2\partial_\lambda \ln\frac{E(\lambda,P)}{E(\lambda,Q)}\,d\lambda=$$

$$-\frac{1}{4}\left[\partial_m^2 \ln\frac{E(P_m,P)}{E(P_m,Q)}+(\partial_m \ln E(P,P_m))^2-(\partial_m \ln E(Q,P_m))^2\right]. \tag{3.30}$$

Здесь мы использовали тот факт, что функция

$$\lambda\mapsto\partial_\lambda \ln\frac{E(\lambda,P)}{E(\lambda,Q)}$$

однозначна на $\mathcal{L}$ и то, что

$$\oint_{a_\beta}\partial_\lambda \ln\frac{E(\lambda,P)}{E(\lambda,Q)}\,d\lambda=0,$$

поскольку главная форма однозначна вдоль a-циклов.

Вторая сумма в (3.29) переписывается в виде

$$\Sigma_2=\frac{1}{4}\sum_{\beta=1}^{g}\oint_{a_\beta} v_\beta(\lambda)\left\{2\partial_m \ln E(\lambda,P_m)\partial_m \ln\frac{E(Q,P_m)}{E(P,P_m)}\right.$$

$$\left.+\partial_m \ln(E(P,P_m)E(Q,P_m))\partial_m \ln\frac{E(P,P_m)}{E(Q,P_m)}\right\}=$$

$$-\frac{1}{2}\partial_m \ln\frac{E(P,P_m)}{E(Q,P_m)}\sum_{\beta=1}^{g}\left\{\partial_m\oint_{a_\beta} v_\beta(\lambda)\ln\frac{E(\lambda,P_m)}{E(\lambda,Q_0)}\right\}$$

$$+\frac{g}{4}\partial_m \ln(E(P,P_m)E(Q,P_m))\partial_m \ln\frac{E(P,P_m)}{E(Q,P_m)}$$

$$=\frac{1}{4}\partial_m \ln\frac{E(P,P_m)}{E(Q,P_m)}\partial_m \ln\left[\mathbf{s}^2(P_m,Q_0)E^g(P,P_m)E^g(Q,P_m)\right]. \tag{3.31}$$

Соотношение (3.25) следует из (3.30) и (3.31).

Теперь мы в состоянии доказать основное утверждение (3.26) теоремы.

Перепишем сначала определение проективной связности Фэя (3.16) в локальном параметре ζ следующим образом:

$$S^P_{Fay}(\zeta)=2\partial^2_{\zeta\zeta}\ln[\mathbf{s}(\zeta,Q_0)E(\zeta,P)^{g-1}(d\zeta)^{-1/2}]-2(\partial_\zeta \ln[\mathbf{s}(\zeta,Q_0)E(\zeta,P)^{g-1}(d\zeta)^{-1/2}])^2. \tag{3.32}$$

Чтобы получить (3.26) мы проварьируем логарифм правой части выражения (3.19) и перейдем к пределу $R_1,\dots,R_g\to P$ и, затем, $Q\to P_m$.

Следующая лемма описывает вариацию определителя $\det||v_\alpha(R_\beta)||$ из знаменателя выражения (3.19).

Лемма 15 *Предположим, что точки $R_1,\dots R_g$ отличны от точек ветвления $\{P_m\}$ и что проекции точек $\{R_\alpha\}$ на λ-плоскость не зависят от $\{\lambda_m\}$. Тогда справедливы следующие соотношения*

$$\lim_{R_1,\dots,R_g\to P}\frac{\partial\ln\det||v_\alpha(R_\beta)||}{\partial\lambda_m}=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{g}\partial^2_{z_\alpha z_\beta}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))v_\alpha(P_m)v_\beta(P_m). \tag{3.33}$$

Эта лемма немедленно выводится из (3.20) и формулы (35) из обзора Фэя [15], выражающей вторые производные тэта-функции $\Theta(\mathcal{A}|_P^Q-K)$ в терминах канонического бидифференциала Бергмана B. $\square$

Используя (3.21), перепишем вариацию тэта-функционального члена в знаменателе (3.19) следующим образом

$$\partial_{\lambda_m}\ln\Theta(\sum_{\gamma=1}^{g-1}\mathcal{A}_P(R_\gamma)+\mathcal{A}_Q(R_g)+K^P\,|\,\mathbf{B})=$$

$$\sum_{\gamma=1}^{g}\left[\partial_{\lambda_m}\int_{Q+(g-1)P}^{\sum_{\gamma=1}^{g}R_\gamma}v_\alpha+\partial_{\lambda_m}K^P_\alpha\right]\frac{\partial\ln\Theta}{\partial z_\alpha}+\pi i\sum_{\alpha,\beta=1}^{g}\frac{\partial\ln\Theta}{\partial\mathbf{B}_{\alpha\beta}}v_\alpha(P_m)v_\beta(P_m). \tag{3.34}$$

Имеем

$$\partial_{\lambda_m}\int_{Q+(g-1)P}^{\sum_{\gamma=1}^{g}R_\gamma}v_\alpha=\frac{1}{2}\int_{Q+(g-1)P}^{\sum_{\gamma=1}^{g}R_\gamma}\partial_m\partial_\lambda\ln E(\lambda,P_m)v_\alpha(P_m)\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2}\partial_m\ln E(P,P_m)v_\alpha(P_m)-\frac{1}{2}\partial_m\ln E(Q,P_m)v_\alpha(P_m)+o(1) \tag{3.35}$$

as $R_1,\dots,R_g\to P$. Теперь из (3.34), (3.35), (3.24), уравнения теплопроводности для тэта-функций и очевидного соотношения

$$\partial_m\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))\equiv\partial_{x_m}\ln\Theta(\int_{x_m}^{P}\vec{v}+K^P)|_{x_m=0}=-\sum_{\alpha=1}^{g}(\ln\Theta)_{z_\alpha}v_\alpha(P_m)$$

следует, что

$$\lim_{R_1,\dots,R_g\to P}\partial_{\lambda_m}\ln\Theta(\sum_{\gamma=1}^{g-1}\mathcal{A}_P(R_\gamma)+\mathcal{A}_Q(R_g)+K^P\,|\,\mathbf{B})=$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_m\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}(P_m))\partial_m\ln[\mathbf{s}(P_m,Q_0)E^g(P_m,P)]$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{g}\partial_{z_\alpha}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(Q))\partial_m v_\alpha(P_m)$$

$$+\frac{1}{4\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(Q))}\sum_{\alpha,\beta=1}^{g}\partial^2_{z_\alpha z_\beta}\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(Q))v_\alpha(P_m)v_\beta(P_m)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{g}\partial_{z_\alpha}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(Q))\partial_m[\ln E(Q,P_m)]v_\alpha(P_m)$$

$$=-\frac{1}{2}\partial_m\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}(P_m))\partial_m\ln[\mathbf{s}(P_m,Q_0)E^g(P_m,P)]+\frac{\partial^2_m\Theta(K^P-\mathcal{A}(P_m))}{4\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{g}\partial_{z_\alpha}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(Q))\partial_m[\ln E(Q,P_m)]v_\alpha(P_m)+o(1) \tag{3.36}$$

as $Q\to P_m$. Вариация оставшихся членов в правой части (3.19)много проще. Имеем

$$\lim_{R_1,\dots,R_g\to P}\partial_{\lambda_m}\sum_{\alpha<\beta}\ln E(R_\alpha,R_\beta)=0\,, \tag{3.37}$$

$$\lim_{R_1,\dots,R_g\to P}\partial_{\lambda_m}\sum_{\alpha=1}^{g}\ln \mathbf{s}(R_\alpha,P)=0 \tag{3.38}$$

$$\lim_{R_1,\dots,R_g\to P}\partial_{\lambda_m}\sum_{\alpha=1}^{g}\ln E(Q,R_\alpha)=-\frac{g}{4}\left(\partial_m\ln\frac{E(Q,P_m)}{E(P,P_m)}\right)^2 \tag{3.39}$$

согласно (3.23) и (3.25). Теперь используя (3.19), суммируя (3.25), (3.36 - 3.39) и (3.33), перегруппируя члены и переходя к пределу $Q\to P_m$, получаем

$$\partial_{\lambda_m}\mathcal{C}(P)=\frac{1}{4}\frac{\partial_m^2\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))}{\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))}-\frac{1}{2}\partial_m\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))\partial_m\ln[\mathbf{s}(P_m,Q_0)E^g(P_m,P)]$$

$$-\frac{1}{4}\partial_m^2\ln E(P_m,P)+\frac{1}{2}\partial_m\ln\mathbf{s}(P_m,Q_0)\partial_m\ln E(P_m,P)+\frac{2g-1}{4}(\partial_m\ln E(P_m,P))^2$$

$$-\frac{1}{2}\left[\partial_m\ln E(P_m,Q)\left(\sum_{\alpha=1}^{g}\partial_{z_\alpha}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(Q))v_\alpha(P_m)+\partial_m\ln[\mathbf{s}(P_m,Q_0)E^g(P_m,P)]\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial_m^2E(P_m,Q)}{E(P_m,Q)}-\sum_{\alpha,\beta=1}^{g}\partial^2_{z_\alpha z_\beta}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))v_\alpha(P_m)v_\beta(P_m)\right]_{Q=P_m}. \tag{3.40}$$

Согласно (3.11), имеем

$$\lim_{Q\to P_m}\partial_m\ln E(P_m,Q)\left(\sum_{\alpha=1}^{g}\partial_{z_\alpha}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(Q))v_\alpha(P_m)+\partial_m\ln[\mathbf{s}(P_m,Q_0)E^g(P_m,P)]\right)$$

$$=\lim_{x_m\to 0}\frac{1}{x_m}\left(\partial_m\ln\frac{\mathbf{s}(P_m,Q_0)E^g(P_m,P)}{\Theta(K^P-\mathcal{A}(P_m))}+\right.$$

$$\left.\sum_{\alpha,\beta=1}^{g}\partial^2_{z_\alpha z_\beta}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))v_\alpha(P_m)v_\beta(P_m)x_m+O(x_m^2)\right)$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{g}\partial^2_{z_\alpha z_\beta}\ln\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(P_m))v_\alpha(P_m)v_\beta(P_m)\;,$$

где мы использовали тот факт, что функция

$$R\mapsto\frac{\mathbf{s}(R,Q_0)E^g(R,P)}{\Theta(K^P-\mathcal{A}_P(R))} \tag{3.41}$$

для фиксированной точки P голоморфна и однозначна на $\mathcal{L}$ и, стало быть, постоянна. Используя (3.11), получаем, что

$$\lim_{Q\to P_m} \frac{\partial_m^2 E(P_m,Q)}{E(P_m,Q)} = -\frac{1}{2} S_B(x_m)|_{x_m=0} \,.$$

Таким образом, последние две строчки в (3.40) упрощаются до $-\frac{1}{8}S_B(x_m)|_{x_m=0}$. Используя R-независимость выражения (3.41) еще раз, мы можем переписать первые две строчки (3.40) как

$$\frac{1}{4}\partial_m^2 \ln[\mathbf{s}(P_m,Q_0)E(P_m,P)^{g-1}] - \frac{1}{4}(\partial_m \ln[\mathbf{s}(P_m,Q_0)E(P_m,P)^{g-1}])^2,$$

что совпадает с $\frac{1}{8}S_{Fay}(x_m)|_{x_m=0}$ согласно соотношению (3.32). Формула (3.26) доказана. □

3.1.2 Интеграл Дирихле: его вариация и голоморфная факторизация

Для локальных параметров в окрестностях точек на бесконечностях листов ∞_n мы будем использовать обозначение $\zeta_n := 1/\lambda$, во введении к настоящей главе, в целях унификации, эти локальные параметры обозначались x_{M+n}, что в конкретных вычислениях этого раздела неудобно.

Определение интеграла Дирихле. Разрежем разветвленное накрытие $\mathcal{L}$ на N листов, соединив разрезами точки ветвления P_m; в дополнение к этому сделаем разрезы вдоль всех a-циклов. На каждом листе рассеченного накрытия $\mathcal{L}$ определена вещественнозначная функция

$$\varphi(P) = \ln\left|\frac{\omega(P)}{d\pi(P)}\right|^2 \tag{3.42}$$

Разность значений функции φ на противоположных сторонах цикла a_α равна $4\pi i(K^P_\alpha - \overline{K^P_\alpha})$. Функция φ сингулярна в точках дивизора $\mathcal{D}$ (т. е. точках ветвления $P_1,\dots,P_M$ и точках на бесконечностях листов $\infty_1,\dots,\infty_N$) и в точке P_0. Производная $\partial_\lambda\varphi$ (где $\lambda = \pi(P)$) голоморфна вне сингулярностей φ и не меняется при обходе аргумента по a-циклу.

Лемма 16 *Проективная связность (3.16) связана с функцией φ следующим образом:*

$$S^{P_0}_{Fay}(\lambda) = \varphi_{\lambda\lambda} - \frac{1}{2}\varphi_\lambda^2 \tag{3.43}$$

Доказательство состоит в несложном вычислении.

В терминах функции φ определим M функций $\varphi^{int}(x_m)$, аналитичных в окрестностях точек ветвления P_m, следующим образом:

$$e^{\varphi^{int}(x_m)}|dx_m|^2 = e^{\varphi(P)}|d\lambda|^2\,; \tag{3.44}$$

аналогично (3.43) мы имеем $S^{P_0}_{Fay}(x_m) = \varphi^{int}_{x_m x_m} - \frac{1}{2}(\varphi^{int}_{x_m})^2$.

В окрестности точки на бесконечности ∞_n определим функцию $\varphi^\infty(\zeta_n)$ локального параметра ζ_n равенством $e^{\varphi^\infty}|d\zeta_n|^2 = e^{\varphi}|d\lambda|^2$. Проективная связность $S^{P_0}_{Fay}$ в локальном параметре ζ_n совпадает с $\varphi^\infty_{\zeta_n\zeta_n} - \frac{1}{2}(\varphi^\infty_{\zeta_n})^2$.

Используя взаимные соотношения между функциями φ, φ^{int} и φ^∞, приходим к следующим асимптотикам около точек ветвления P_m и точек на бесконечностях ∞_n:

$$|\varphi_\lambda(P)|^2 = \frac{1}{4}|\lambda-\lambda_m|^{-2} + O(|\lambda-\lambda_m|^{-3/2}) \quad \text{as } P\to P_m \tag{3.45}$$

и

$$|\varphi_\lambda(P)|^2 = 4|\lambda|^{-2} + O(|\lambda|^{-3}) \quad \text{as} \quad P \to \infty_n\,. \tag{3.46}$$

В нуле P_0 дифференциала ω имеем

$$|\varphi_\lambda(P)|^2 = 4(g-1)^2|\lambda-\lambda_0|^{-2} + O(|\lambda-\lambda_0|^{-1}) \;\; \text{as} \;\; P \to P_0. \tag{3.47}$$

где $\lambda_0 := \pi(P_0)$.

Эти асимптотики оправдывают введение следующего регуляризованного интеграла Дирихле

$$\mathbb{D} = \frac{1}{\pi}\text{reg}\int_{\mathcal{L}} |\varphi_\lambda|^2\widehat{d\lambda} = \frac{1}{\pi}\lim_{\rho\to 0}\left\{I_\rho + \pi(M+8N+8(g-1)^2)\ln\rho\right\}, \tag{3.48}$$

где $\widehat{d\lambda} = |d\lambda\wedge d\overline{\lambda}|/2$ и

$$I_\rho = \sum_{n=1}^{N}\int_{\mathcal{L}_\rho^{(n)}} |\varphi_\lambda|^2\widehat{d\lambda}\,. \tag{3.49}$$

Здесь $\mathcal{L}_\rho^{(n)}$ – подобласть n-го листа накрытия $\mathcal{L}$, полученная вырезанием малых дисков радиуса ρ с центрами в точках ветвления и (если случится) P_0 из (больших) дисков $\{\lambda\in\mathcal{L}^{(n)} : |\lambda| < 1/\rho\}$.

Голоморфная факторизация интеграла Дирихле.

Теорема 13 *Регуляризованный интеграл Дирихле представим в виде:*

$$\mathbb{D} = \ln\left|\frac{\sigma^{4-4g}(P_0,Q_0)\prod_{m=1}^{M}\omega(P_m)}{\prod_{n=1}^{N}\omega^2(\infty_n)}\exp\left\{4\pi i\langle\mathbf{r},K^{P_0}\rangle\right\}\right|^2 - 2M\ln 2, \tag{3.50}$$

где вектор $\mathbf{r}$ *имеет целочисленные компоненты, даваемые выражениями*

$$2\pi r_\alpha := Var|_{a_\alpha}\left\{Arg\,\frac{\omega(P)}{d\pi(P)}\right\}\,. \tag{3.51}$$

Доказательство. Применяя теорему Стокса, получаем

$$I_\rho = \frac{1}{2i}\left\{\sum_{m=1}^{M}\oint_{P_m} + \sum_{n=1}^{N}\oint_{\infty_n} + \oint_{P_0} + \sum_{\alpha=1}^{g}\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}\right\}\varphi_\lambda\varphi\,d\lambda, \tag{3.52}$$

Здесь $\oint_{P_m}$ и $\oint_{P_0}$ – интегралы по окружностям радиуса ρ с центром в P_m и P_0, ориентированным по часовой стрелке (следует отметить, что каждая из точек P_m принадлежит одновременно двум листам и, следовательно, интегрирование в $\int_{P_m}$ идет по двум окружностям). Здесь также $\oint_{\infty_n}$ обозначает интеграл по окружности радиуса $1/\rho$ на n-м листе ориентированной против часовой стрелки, ; a_α^+ и a_α^- – берега разреза вдоль цикла a_α, ориентированные противоположно. Имеем

$$\frac{1}{2i}\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}\varphi_\lambda\varphi\,d\lambda = \pi r_\alpha\ln|\exp 4\pi i K_\alpha^{P_0}|^2\,. \tag{3.53}$$

Заметим, что $\varphi_\lambda = \partial_\lambda\ln(\omega(P)/d\pi(P))$, где функция $\omega(P)/d\pi(P)$ однозначна вдоль цикла a_α; т. к. a-циклы не содержат точки P_0, функция $\omega(P)/d\pi(P)$ не обращается в нуль на a_α.

Также имеем

$$\frac{1}{2i}\oint_{P_m} = \frac{1}{2i}\oint_{|x_m|=\sqrt{\rho}} \left\{\varphi^{int}_{x_m}\frac{1}{2x_m} - \frac{1}{2x_m^2}\right\}\{\varphi^{int} - 2\ln|x_m| - 2\ln 2\}2x_m\,dx_m =$$
$$= \pi\varphi^{int}(x_m)|_{x_m=0} - 2\pi\ln 2 - \pi\ln\rho + o(1), \tag{3.54}$$

$$\frac{1}{2i}\oint_{\infty_n} = \frac{1}{2i}\oint_{|\lambda|=1/\rho}\left\{-\varphi^{\infty}_{\zeta_n}\lambda^{-2} - \frac{2}{\lambda}\right\}\{\varphi^{\infty} - 4\ln|\lambda|\}\,d\lambda =$$
$$= -2\pi\varphi^{\infty}(\zeta_n)|_{\zeta_n=0} - 8\pi\ln\rho + o(1), \tag{3.55}$$

и

$$\frac{1}{2i}\oint_{P_0} = \frac{1}{2i}\oint_{|\lambda-\lambda_0|=\rho} \ln|\sigma^2(P_0,Q_0)(\lambda-\lambda_0)^{2g-2}\{1+O(\lambda-\lambda_0)\}|^2\times$$
$$\times\left(\frac{2g-2}{\lambda-\lambda_0} + O(1)\right)d\lambda = -\pi\ln|\sigma^{4g-4}(P_0,Q_0)|^2 - 8\pi(g-1)^2\ln\rho + o(1), \tag{3.56}$$

при $\rho\to 0$. Эти асимптотики влекут (3.50). $\square$

Вариация интеграла Дирихле. Как обычно мы предполагаем, что проекции $\pi(P_0)$ и $\pi(Q_0)$ точек P_0 Q_0 из (3.15) не зависят от $\{\lambda_m\}$.

Теорема 14 *Вариация регуляризованного интеграла Дирихле $\mathbb{D}$ (3.48), (3.50) по критическому значению λ_m совпадает со значением проективной связности (3.16) в точке ветвления P_m, т. е.*

$$\frac{\partial\mathbb{D}}{\partial\lambda_m} = S^{P_0}_{Fay}(x_m(P))|_{P=P_m}, \quad m=1,\dots,M\ . \tag{3.57}$$

Начнем со следующей леммы.

Лемма 17 *На каждом листе накрытия $\mathcal{L}$, рассеченном вдоль a и b-циклов, производные функции $\varphi(P)$ по λ и λ_m связаны следующим образом:*

$$\varphi_{\lambda_m} + F_m\varphi_\lambda + (F_m)_\lambda = 0\ , \quad m=1,\dots,M, \tag{3.58}$$

где функции $F_m(P)$ определены на рассеченном накрытии $\mathcal{L}$ как:

$$F_m(P) = -\frac{\mathcal{U}(P)_{\lambda_m}}{\mathcal{U}(P)_\lambda}\ ,$$

и $\mathcal{U}(P) = \int_{P_0}^P\omega$. Около точек ветвления и точек на бесконечностях листов функции F_m подчиняются асимптотикам:

$$F_m(P) = O(|\lambda|^2)\ , \quad \text{as} \quad P\to\infty_n\ ,$$
$$F_m(P) = \delta_{lm} + o(1)\ , \quad \text{as} \quad P\to P_l\ .$$

Доказательство (3.58) получается прямым вычислением (надо использовать тот факт, что отображение $\mathcal{U}$ зависит от $\{\lambda_m\}$ голоморфно). Доказательство асимптотических формул в существенном повторяет доказательство Леммы 5 предыдущей главы.

Вводя точные формы $d((F_m)_\lambda\varphi)$, $d(F_m\varphi_\lambda\varphi)$, $d(F_m\varphi_\lambda)$ и используя (3.58), легко получить следующее утверждение.

Следствие 5 *Следующие 1-формы точны:*

$$\{(\varphi_\lambda\varphi)_{\lambda_m}d\lambda\} - \{F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} + (F_m)_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}d\overline{\lambda}\ \}\ , \tag{3.59}$$

и

$$\{F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} - (F_m)_\lambda\varphi_\lambda d\lambda + (F_m)_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}d\overline{\lambda}\} - \{F_m(2\varphi_{\lambda\lambda} - \varphi_\lambda^2)d\lambda + \varphi\varphi_{\lambda\lambda_m}d\lambda\}\ . \tag{3.60}$$

Используя (3.52), получаем

$$\frac{\partial I_\rho}{\partial\lambda_m} = \frac{1}{2i}\left\{\oint_{P_m}\left[(\varphi_\lambda\varphi)_{\lambda_m} + (\varphi_\lambda\varphi)_\lambda\right]d\lambda + \left(\sum_{l\neq m}\oint_{P_l} + \sum_{n=1}^{N}\oint_{\infty_n} + \oint_{P_0}\right)(\varphi_\lambda\varphi)_{\lambda_m}\,d\lambda\right\} +$$

$$+\frac{1}{2i}\sum_{\alpha=1}^{g}\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}(\varphi_\lambda\varphi)_{\lambda_m}\,d\lambda\ . \tag{3.61}$$

Используя голоморфность $(F_m)_\lambda\varphi_\lambda$ и соотношение $(\varphi_\lambda\varphi)_\lambda\,d\lambda = d(\varphi_\lambda\varphi) - \varphi_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}d\overline{\lambda}$, перепишем правую часть (3.61) как

$$\frac{1}{2i}\Big[-\oint_{P_m}|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} + \left\{\sum_{l=1}^{M}\oint_{P_l} + \sum_{n=1}^{N}\oint_{\infty_n} + \oint_{P_0}\right\}\{F_m|\varphi_\lambda|^2 - (F_m)_\lambda\varphi_\lambda\,d\lambda + (F_m)_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}\,d\overline{\lambda}\} -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{g}\left[\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-} + \int_{b_\alpha^+\cup b_\alpha^-}\right](F_m)_\lambda\varphi_\lambda\,d\lambda + \sum_{\alpha=1}^{g}\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}(\varphi_\lambda\varphi)_{\lambda_m}\,d\lambda\Big]. \tag{3.62}$$

Используя асимптотические разложения подынтегральных выражений в точках ветвления и бесконечностях (асимптотики из Леммы 17 играют здесь центральную роль, ср. с доказательством Теоремы 4 первой главы), приходим к соотношению

$$\frac{1}{2i}\left\{\sum_{l=1}^{M}\oint_{P_l} + \sum_{n=1}^{N}\oint_{\infty_n}\right\}\{F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} - (F_m)_\lambda\varphi_\lambda d\lambda + (F_m)_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}\,d\overline{\lambda}\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\oint_{P_m}|\varphi_\lambda|^2\,d\overline{\lambda} - \frac{3\pi}{4}\sum_{l=1}^{M}\frac{d^2F_m}{(dx_l)^2}\Big|_{x_l=0} + o(1) \tag{3.63}$$

при $\rho\to 0$.

Из (3.60) выводим

$$\frac{1}{2}\oint_{P_0}F_m|\varphi_\lambda|^2 d\overline{\lambda} - (F_m)_\lambda\varphi_\lambda d\lambda + (F_m)_\lambda\varphi_{\overline{\lambda}}\,d\overline{\lambda} = \frac{1}{2i}\oint_{P_0}F_m(2\varphi_{\lambda\lambda} - (\varphi_\lambda)^2)d\lambda + o(1). \tag{3.64}$$

Теперь из теоремы Коши, соотношения (3.43)и асимптотических разложений в точках ветвления и бесконечностях следует, что

$$0=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{l=1}^{M}\oint_{P_l}+\sum_{n=1}^{N}\oint_{\infty_n}+\oint_{P_0}+\sum_{\alpha=1}^{g}\left[\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}+\int_{b_\alpha^+\cup b_\alpha^-}\right]\right\}F_m(2\varphi_{\lambda\lambda}-(\varphi_\lambda)^2)\,d\lambda=$$

$$=-\frac{3\pi}{4}\sum_{l=1}^{M}\frac{d^2F_m}{(dx_l)^2}\Big|_{x_l=0}+\pi S_{Fay}^{P_0}(x_m)\Big|_{x_m=0}+ \tag{3.65}$$

$$\frac{1}{2i}\left\{\oint_{P_0}+\sum_{\alpha=1}^{g}\left[\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}+\int_{b_\alpha^+\cup b_\alpha^-}\right]\right\}F_m(2\varphi_{\lambda\lambda}-(\varphi_\lambda)^2)\,d\lambda+o(1)$$

(ср. с Леммой 6 первой главы). Заметим, что

$$\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}(\varphi_\lambda\varphi)_{\lambda_m}\,d\lambda=\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}[(2\varphi_{\lambda\lambda}-(\varphi_\lambda)^2)F_m+(F_m)_\lambda\varphi_\lambda]\,d\lambda$$

согласно (3.60) и очевидному равенству

$$\int_{a_\alpha^+\cup a_\alpha^-}\varphi\varphi_{\lambda\lambda_m}\,d\lambda=0.$$

Аналогично

$$\int_{b_\alpha^+\cup b_\alpha^-}[(2\varphi_{\lambda\lambda}-(\varphi_\lambda)^2)F_m+(F_m)_\lambda\varphi_\lambda]\,d\lambda=0,$$

согласно равенству

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_m}\int_{b_\alpha^+\cup b_\alpha^-}\varphi_\lambda\varphi\,d\lambda=0.$$

Чтобы закончить доказательство остается собрать вместе уравнения (3.61)-(3.65) и использовать тот факт, что все члены $o(1)$ выше равномерны по $(\lambda_1,\dots,\lambda_M)$ в малой окрестности начальной точки $(\lambda_1^0,\dots,\lambda_M^0)$. $\square$

3.2 Вычисление тау-функции

Теорема 15 *Тау-функция Бергмана на пространстве Гурвица $H_{g,N}(1,\dots,1)$ задается следующим, не зависящим от выбора точек P_0 и Q_0, выражением:*

$$\tau^{-6}=\frac{\{\mathbf{s}(P_0,Q_0)\}^{2-2g}e^{2\pi i\langle\mathbf{r},K^{P_0}\rangle}}{\mathcal{C}^4(P_0)(d\pi(P_0))^{g-1}}\prod_{k=1}^{M+N}\{\mathbf{s}(D_k,Q_0)\}^{d_k}\{E(D_k,P_0)\}^{(g-1)d_k}\ , \tag{3.66}$$

где целочисленный вектор $\mathbf{r}$ определен равенством:

$$\mathcal{A}(\mathcal{D})+2K^{P_0}+\mathbf{B}\mathbf{r}+\mathbf{s}=0\ ; \tag{3.67}$$

начальная точка отображения Абеля совпадает с P_0 и все пути интегрирования лежат внутри фундаментального многоугольника $\widehat{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Соотношение (3.66) немедленно следует из теорем 13, 14 и формулы (3.26). Единственное, что нужно проверить, это совпадение вектора $\mathbf{r}$, определенного формулой (3.51), с вектором $\mathbf{r}$ из (3.67). Это совпадение легко доказать в случае $g \geq 2$. Именно, вспомним, что выражение (3.66), с $\mathbf{r}$ из (3.51), совпадает с тау-функцией (3.1). Следовательно, если P_0 описывает базисный b-цикл, тау-функция может разве лишь приобрести $\{\lambda_m\}$-независимый множитель. Вычисляя монодромию выражения (3.66)вдоль цикла b_α, мы видим, что справедливо (3.67), если только $g-1 \neq 0$. Для $g=1$ соотношение (3.66) следует из формулы для тау-функции, найденной в предыдущей главе.

Теперь, поскольку формула (3.67) доказана, мы можем установить независимость выражения (3.66) от P_0 и Q_0. Простой подсчет тензорного веса показывает, что выражение (3.66) — скаляр по каждому из аргументов P_0 и Q_0, который в добавок несингулярен. Согласно соотношению (3.67) и мультипликативным свойствам дифференциалов $\mathcal{C}$ и $\mathbf{s}$, этот скаляр – однозначен на $\mathcal{L}$ и, стало быть, постоянен.

□

Для дальнейшего преобразования выражения (3.66) к форме (3.6) нам понадобятся две леммы.

Лемма 18 *Фундаментальный многоугольник $\widehat{\mathcal{L}}$ всегда может быть выбран так, что $\mathcal{A}(\mathcal{D}) + 2K^P = 0$.*

Доказательство. При любом выборе фундаментального многоугольника вектор $\mathcal{A}(\mathcal{D}) + 2K^P$ – нуль на якобиане поверхности $\mathcal{L}$, т. е. существуют целочисленные вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ такие, что

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) + 2K^P + \mathbf{Br} + \mathbf{s} = 0$$

Рассмотрим точку $P_1 \in \mathcal{D}$; согласно нашим предположениям это простой нуль $d\pi$. Деформацией цикла a_α внутри его класса гомологий мы можем заставить точку P_1 его пересекать; два возможных направления пересечения соответствуют подскоку компоненты $\mathbf{r}_\alpha$ вектора $\mathbf{r}$ на $+1$ и на -1. Аналогично,протягивая цикл b_α через точку P_1, компоненту $\mathbf{s}_\alpha$ вектора $\mathbf{s}$ можно уменьшить или увеличить на единицу. Повторяя этот процесс сколько нужно, мы придем к фундаментальному многоугольнику для которого $\mathbf{r} = \mathbf{s} = 0$. □

Из доказательства ясно, что справедливо и более сильное утверждение: выбор фундаментального многоугольника со свойством $\mathcal{A}(\mathcal{D}) + 2K^P = 0$ всегда возможен, если хотя бы одна из точек ветвления проста.

Лемма 19 *Пусть фундаментальный многоугольник выбран так, что*

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) + 2K^P = 0. \tag{3.68}$$

Тогда для любых двух точек $P, Q \in \mathcal{L}$ функция $\mathbf{s}(P,Q)$ переписывается через главные формы следующим образом:

$$\mathbf{s}^2(P,Q) = \frac{d\pi(P)}{d\pi(Q)} \prod_{k=1}^{M+N} \left(\frac{E(D_k,Q)}{E(D_k,P)}\right)^{d_k} \tag{3.69}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$(d\pi(P))^{1-g}\mathcal{C}^{-2}(P) \prod_{k=1}^{M+N} E^{d_k(g-1)}(D_k,P)\,. \tag{3.70}$$

Подсчитывая тензорный вес, видим, что это скаляр по P. Более того это выражение однозначно и не имеет нулей и полюсов (полюса и нули от главных форм компенсируются полюсами и нулями $d\pi(P)$). Следовательно (3.70) не зависит от P. Взяв частное двух значений (3.70) в различных точках P and Q и используя (3.18), приходим к (3.69). $\square$

Теперь выбирая в (3.66) $P_0 = Q_0$ и выражая $\mathbf{s}(D_k, P_0)$ в терминах главных форм с использованием (3.69), мы получаем выражение (3.6) для тау-функции Бергмана.

Замечание 6 Разумно предположить, что раз окончательное выражение (3.6) стало известным, то его справедливость можно проверить непосредственно, минуя технику, связанную с интегралом Дирихле. Подобное прямое вычисление действительно оказалось возможным провести в родах нуль и один (см. [31]); тем не менее, этот прямой путь оказался много сложнее (в том числе и идейно), чем рассуждение, использующее интеграл Дирихле. Это наводит на мысль, что и прямое вычисление в старшем роде, будь оно найдено, также окажется слишком сложным.

Замечание 7 Для страта $H_{2,g}(1, \dots, 1)$, состоящего из гиперэллиптических накрытий

$$\nu^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_j)$$

с $M = 2g + 2$ точками ветвления тау-функция Бергмана была найдена Китаевым и Короткиным [28] в следующем виде:

$$\tau = \det\mathbf{A} \prod_{j<k,\, j,k=1}^{2g+2} (\lambda_j - \lambda_k)^{1/4} \tag{3.71}$$

где $\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \oint_{a_\alpha} \frac{\lambda^{\beta-1}}{\nu}$ – матрица a-периодов ненормированных голоморфных дифференциалов на $\mathcal{L}$. Чтобы проверить, что (3.6) дает в гиперэллиптическом случае (3.71), необходимо использовать представление (3.19) для дифференциала $\mathcal{C}(P)$, формулу (3.69) для $\mathbf{s}(P, Q)$ и устремить $g+1$ произвольных точек $Q, R_1, \dots, R_g$ к $g+1$ точкам ветвления (скажем, к $\lambda_1, \dots, \lambda_{g+1}$). Тэта-функция, входящая в (3.19) может быть выражена с помощью формул Томэ в терминах $\det\mathbf{A}$ и попарных разностей точек ветвления. Определитель $\det||v_\alpha(R_\beta)||$ также несложно выразить в тех же терминах. Собирая все вклады, после несколько громоздкого вычисления, мы приходим к (3.71).

3.2.1 Род 1

Дифференциал $\mathcal{C}(P)$ в эллиптическом случае не зависит от P ([16], p.21):

$$\mathcal{C} = \eta^3(\mathbf{B}) e^{-\pi i \mathbf{B}/4} ,$$

где $\eta(\mathbf{B})$ – функция Дедекинда. Дифференциал $\mathbf{s}(P, Q)$ дается выражением

$$\mathbf{s}(P, Q) = \exp\left\{\pi i \int_Q^P v\right\} \frac{\sqrt{v(P)}}{\sqrt{v(Q)}} \tag{3.72}$$

Подставляя эти выражения в (3.66) и принимая во внимание (3.67), мы получаем следующее выражение:

$$\tau = \eta^2(\mathbf{B}) \prod_{k=1}^{M+N} \{v(D_k)\}^{-d_k/12} , \tag{3.73}$$

где, согласно обычным соглашениям, $v(D_k) := v(P)/dx_k(P)|_{P=D_k}$, $k = 1, \ldots, M+N$. Эта в точности совпадает с выражением, найденным в предыдущей главе, что и подтверждает правильность выбора целого числа $\mathbf{r}$ в (3.66) в случае $g = 1$.

3.2.2 Тау-функция на произвольном страте пространства Гурвица

Здесь мы кратко обсудим общий случай, когда критические значения и полюса функции $\pi(P)$ имеют произвольную кратность. Как и раньше, обозначим точки ветвления $P_1, \ldots, P_M$, предполагая, что их кратности суть $d_1, \ldots, d_M$; порядки полюсов $\infty_1, \ldots, \infty_L$ функции π обозначим через $d_{M+1} - 1, \ldots, d_{M+L} - 1$. Имеем $N = \sum_{s=1}^{L} d_{M+s}$. Дивизор $\mathcal{D} := (d\pi)$ записывается в том же виде, что и раньше:

$$\mathcal{D} = \sum_{k=1}^{M+L} d_k D_k \tag{3.74}$$

где $D_m := P_m$, $m = 1, \ldots, M$ и $D_{M+s} = \infty_s$, $s = 1, \ldots, L$. Род поверхности $\mathcal{L}$ дается формулой

$$g = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} d_m - \sum_{s=1}^{L} d_{M+s} + 1 \tag{3.75}$$

Определение (3.1) выглядит теперь так:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_m} \ln \tau = -\frac{1}{6(d_m - 1)!(d_m + 1)} \left(\frac{d}{dx_m(P)} \right)^{d_m - 1} S_B(x_m(P)) \Big|_{P_m = P}, \qquad m = 1, \ldots, M\,. \tag{3.76}$$

Формулировка основной теоремы в этом новом случае очень проста: формула (3.6) сохраняет свою силу. Доказательство отличается от приведенного выше лишь очевидными изменениями.

4 Приложения бергмановской тау-функции

Введение бергмановской тау-функции (в работе [30]) было мотивировано чисто технической необходимостью – частный случай системы 3.1 возник при вычислении изомонодромной тау-функции Джимбо-Мива для некоторого специального класса задач Римана-Гильберта. Впоследствии оказалось, что введенный объект почти вездесущ: он появляется сразу в нескольких, на первый взгляд довольно далеких друг от друга, областях математической физики: теории фробениусовых многообразий, теории случайных матриц, теории изомонодромных деформаций фуксовых систем дифференциальных уравнений, спектральной теории римановых поверхностей. Более того, его естественные обобщения играют важную роль в теории пространств модулей абелевых и квадратичных дифференциалов на римановых поверхностях и, скорее всего, список дальнейших обобщений и приложений тау-функции на этом еще не кончается. В этой главе мы кратко опишем часть этих приложений.

4.1 Тау-функция Бергмана как изомонодромная тау-функция фробениусова многообразия

Здесь предполагается, что читатель знаком с теорией фробениусовых многообразий, в частности с результатами Главы V фундаментальной работы Дубровина [6], где вводится структура фробениусова многообразия на пространстве Гурвица.

Пусть φ – примарный дифференциал (см. [6]) на римановой поверхности $\mathcal{L}$. Ему соответствует структура полупростого фробениусова многообразия M_φ на $\widehat{H}_{g,N}(k_1, \dots, k_l)$, вводимая следующим образом.

1) Закон умножения на касательном расслоение таков: $\partial_{\lambda_m} \circ \partial_{\lambda_n} = \delta_{mn}\partial_{\lambda_m}$;

2) Единицей является векторное поле $e = \sum_{m=1}^M \partial_{\lambda_m}$;

3) Эйлерово поле есть $E = \sum_{m=1}^M \lambda_m \partial_{\lambda_m}$

4) Один-форма есть $\Omega_{\varphi^2} = \sum_{m=1}^M \{\mathrm{Res}_{P_m}(\varphi^2/d\lambda)\} d\lambda_m$.

Инвариантная метрика $\xi(v, w) = \Omega_{\varphi^2}(v \circ w)$ на фробениусовом многообразии – плоская. В координатах $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ эта метрика диагональна: $\xi = \sum_{m=1}^M \xi_{mm}(d\lambda_m)^2$, $\xi_{mm} = \mathrm{Res}_{P_m}(\varphi^2/d\lambda)$. Коэффициенты вращения, γ_{mn} $(m \neq n)$, этой метрики определены равенством

$$\gamma_{mn} = \frac{\partial_{\lambda_n}\sqrt{\xi_{mm}}}{\sqrt{\xi_{nn}}}.$$

Коэффициенты вращения γ_{mn} не зависят от примарного дифференциала φ,т. е. они одни и те же для всех фробениусовых структур на пространстве Гурвица $\widehat{H}_{g,N}(k_1, \dots, k_l)$.

Пусть $\Gamma = ||\gamma_{mn}||_{m,n=1,\dots,M;m\neq n}$, $\mathcal{U} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ и

$$V = [\Gamma, \mathcal{U}].$$

Изомонодромная тау-функция τ_I полупростого фробениусова многообразия M_φ определяется системой уравнений

$$\frac{\partial \ln \tau_I}{\partial \lambda_m} = H_m, \quad m = 1, \dots, M, \tag{4.1}$$

где *квадратичные гамильтонианы* H_m даются соотношениями

$$H_m = \sum_{n\neq m; 1\leq n\leq M} \frac{V_{nm}^2}{\lambda_n - \lambda_m}, \quad m = 1, \dots, M. \tag{4.2}$$

Замечание 8 Введем матрицы A_k, $k = 1, \ldots, M$ равенствами $A_k = ||a^k_{mn}||_{m,n=1,\ldots M}$, где $a^k_{mn} = 0$ если $m \neq k$ и $a^k_{kn} = V_{kn}$ для $n = 1, \ldots M$. Меняя "параметр"$(\mathcal{L}, \lambda)$ внутри пространства Гурвица $\widehat{H}_{g,N}(k_1, \ldots, k_l)$, мы получаем изомонодромную деформацию фуксовой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} + \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)}{\lambda - \lambda_k} \Psi = 0. \tag{4.3}$$

Соответствующая изомонодромная тау-функция Джимбо-Мивы совпадает с τ_I.

Следующая теорема была доказана в [33].

Теорема 16 *Изомонодромная тау-функция τ_I полупростого фробениусова многообразия M_φ совпадает с тау-функцией Бергмана на пространстве Гурвица $\widehat{H}_{g,N}(k_1, \ldots, k_l)$.*

4.2 Вклад рода 1 в свободную энергию в эрмитовой двуматричной модели

Другое приложение тау-функция (3.6) находит в теории эрмитовых одно- и двуматричных моделей [14]. Соответствующие результаты не являются математически строгими (это общее положение дел: большинство рассуждений в обширной литературе, посвященной двуматричным моделям, проводится лишь на "физическом"уровне строгости, соответствующий математический аппарат еще не разработан) и этот параграф включен лишь в иллюстративных целях.

Рассмотрим статсумму в эрмитовой двуматричной модели

$$e^{-N^2 F} := \int dM_1 dM_2 e^{-N \mathrm{tr}\{V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2\}}\ . \tag{4.4}$$

где интегрирование идет по всем независимым матричным элементам $N \times N$ эрмитовых матриц M_1 и M_2; V_1 и V_2 – полиномиальные потенциалы (иногда удобно считать V_1 и V_2 бесконечными степенными рядами). Асимптотическое разложение $F = \sum_{G=0}^{\infty} N^{-2G} F^G$ при $N \to \infty$ (так называемое "разложение по родам") играет важную роль в теории, поскольку коэффициенты F^G появляются как в статистической физике (модель Изинга) так и в комбинаторике графов рода G (см., напр., [11]). Если полиномы V_1 и V_2 имеют четную степень и положительные старшие коэффициенты, то, асимптотически при $N \to \infty$, главный вклад в статсумму (4.4) дается матрицами, чьи собственные числа сконцентрированы на конечном объединении интервалов. Интервалы, заполненные собственными числами матрицы M_1, образуют окрестности минимумов потенциала V_1; собственные числа матрицы M_2 заполняют интервалы вокруг минимумов потенциала V_2.

Интервалы, заполненные собственными значениями матриц M_1 и M_2 соответствуют так называемой спектральной алгебраической кривой $\mathcal{L}$, определенной уравнением

$$(V_1'(x) - y)(V_2'(y) - x) - \mathcal{P}^0(x, y) + 1 = 0 \tag{4.5}$$

где полином от двух переменных $\mathcal{P}^0(x, y)$ представляет собой член нулевого порядка в $1/N^2$ разложении полинома

$$\mathcal{P}(x, y) := \frac{1}{N} \left\langle \mathrm{tr} \frac{V_1'(x) - V_1'(M_1)}{x - M_1} \frac{V_2'(y) - V_2'(M_2)}{y - M_2} \right\rangle ; \tag{4.6}$$

(обозначение $\langle Q(M_1, M_2) \rangle$ означает среднее значение функционала Q от матриц M_1 и M_2 по отношению к мере по которой ведется интегрирование в (4.4)). Разрезы на листах спектральной кривой $\mathcal{L}$ соответствующие проекции $\mathcal{L}$ на x-плоскость совпадают с интервалами, заполненными собственными значениями M_1 в пределе $N \to \infty$; разрезы на листах, соответствующих проекции $\mathcal{L}$ на y-плоскость суть интервалы, заполненные собственными значениями матрицы M_2.

Уравнения для производных функций F^G по коэффициентам полиномов $V_{1,2}$ являются следствием инвариантности относительно репараметризации матричного интеграла (4.4) (т. н. "петлевые"уравнения). В частности, в работе [1] была получена формула для главного члена F^0 ("свободная энергия в роде нуль") в терминах базисных голоморфных объектов, ассоциированных со спектральной кривой $\mathcal{L}$. Результаты [1] и [5], показывают, что F_0 удовлетворяет обобщенным уравнениям Виттена-Дайкграфа-Верлинде-Верлинде, вместе с уравнениями квазиоднородности, что подтверждает существование тесной связи между эрмитовыми матричными моделями и теории фробениусовых многообразий. Дополнительное подтверждения существования этой связи было получено в работе [14], где было показано, что вклад рода один F^1 в свободную энергию дается выражением

$$F^1 = \frac{1}{2}\ln\tau + \frac{1}{48}\ln\left\{ (v_{d_2+1})^{1-\frac{1}{d_2}} \prod_{m=1}^{M} \mathrm{res}|_{P_m} \frac{(dy)^2}{dx} \right\} + C \tag{4.7}$$

где v_{d_2+1} – старший коэффициент полинома V_2; $P_1, \dots, P_M$ – нули дифференциала dx на спектральной кривой (т. е. точки ветвления в реализации спектральной кривой как накрытия x-плоскости), которые предполагаются простыми; τ – тау-функция Бергмана, соответствующая спектральной кривой (4.5). Формула (3.6), доказанная в настоящей работе, дает явное выражение для вклада рода один в свободную энергию (4.7). Одноматричная модель появляется, когда степень полинома V_2 равна 2; в этом случае спектральная кривая (4.5) гиперэллиптична.

4.3 Детерминант Лапласиана в метрике Пуанкаре

Здесь мы еще раз обсудим Теорему 9 из первой главы. Переформулируем ее так:

Теорема 17 *Рассмотри пространство Гурвица $H_{g,N}(1,\dots,1)$. Пусть пара $(\mathcal{L},\pi)$ принадлежит $H_{g,N}(1,\dots,1)$. Тогда детерминант оператора Лапласа на $\mathcal{L}$ (действующего в тривиальном линейном расслоении) в метрике Пуанкаре задается следующим выражением:*

$$\det\Delta = c_{g,N}\,\{\det \Im \mathbf{B}\}\, e^{\frac{\mathbb{S}_F}{6}}\, |\tau|^2. \tag{4.8}$$

где $c_{g,N}$ – константа, независящая от точки $(\mathcal{L},\pi) \in H_{g,N}(1,\dots,1)$; $\mathbf{B}$ – матрица b-периодов $\mathcal{L}$; τ – тау-функция Бергмана на $H_{g,N}(1,\dots,1)$, задаваемая равенством (3.6).

Формула (4.8) может рассматриваться, как некоторое обобщение известной формулы Рэя-Зингера для детерминанта Лапласиана на плоском торе с периодами 1 и σ [50]:

$$\det\Delta = C|\Im\sigma|^2|\eta(\sigma)|^4 \tag{4.9}$$

где η - функция Дедекинда. Важной чертой (4.9) является то обстоятельство, что функция

$$\frac{\det\Delta}{\{\Im\sigma\}\{Area(\mathcal{L})\}}$$

представима в виде квадрата модуля голоморфной функции на пространстве модулей. В случае старшего рода это уже неверно: в (4.9) присутствует множитель $e^{\mathbb{S}_F/6}$, не допускающий голоморфной факторизации: производные $\mathbb{S}_F$ второго порядка по голоморфным и антиголоморфным переменным отличны от нуля [16, 67].

На самом деле гораздо более естественный аналог формулы Рэя-Зингера (4.9) в старшем роде возникает при рассмотрении детерминантов Лапласианов в плоских конических метриках - это вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

5 Тау-функция Бергмана на пространстве абелевых дифференциалов

Цель следующих двух глав - дать естественное обобщение формулы Рэя-Зингера для детерминанта лапласиана на плоских эллиптических кривых ([50]) на случай кривых старшего рода. Для этого мы развиваем формализм тау-функций на пространствах абелевых дифференциалов на компактных римановых поверхностях, эти тау-функции суть прямые аналоги тау-функции Бергмана, изученной в предыдущих главах.

Пусть A и B – два комплексных числа таких, что $\Im(B/A) > 0$. Факторизуя комплексную плоскость $\mathbb{C}$ по решетке, порожденной A и B, мы приходим к эллиптической римановой поверхности $\mathcal{L}$. Более того, голоморфный 1-дифференциал dz на $\mathbb{C}$ порождает абелев дифференциал w на $\mathcal{L}$, таким образом, мы получаем пару (эллиптическая риманова поверхность, абелев дифференциал на этой поверхности) и числа A, B являются естественными локальными координатами на пространстве таких пар. Далее мы будем называть их *модулями*.

Квадрат модуля $|w|^2$ абелева дифференциала w определяет гладкую плоскую метрику на $\mathcal{L}$. Введем детерминант лапласиана $\Delta^{|w|^2}$, соответствующего этой метрике, через стандартную дзета-функциональную регуляризацию:

$$\det\Delta^{|w|^2} = \exp\{-\zeta'_{\Delta^{|w|^2}}(0)\}, \tag{5.1}$$

где $\zeta_{\Delta^{|w|^2}}(s)$ – операторная дзета-функция. Теорема Рэя-Зингера [50] (точнее, ее незначительная переформулировка) утверждает, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{\det\Delta^{|w|^2}}{\Im(B/A)\mathrm{Area}(\mathcal{L}, |w|^2)} = C|\eta(B/A)|^4, \tag{5.2}$$

где $\mathrm{Area}(\mathcal{L}, |w|^2) = \Im(A\overline{B})$, C - константа, не зависящая от модулей (на самом деле, $C = 4$) и η – функция Дедекинда

$$\eta(\sigma) = \exp\left(\frac{\pi i\sigma}{12}\right)\prod_{n\in\mathbb{N}}\big(1 - \exp(2\pi i n\sigma)\big).$$

Основной результат настоящей главы – обобщение формулы (5.2) на случай кривых старшего рода.

Для того, чтобы объяснит план наших действий, нам нужно сперва слегка переформулировать теорему Рэя-Зингера.

Пусть w – некоторый абелев дифференциал на $\mathcal{L}$ и пусть $\zeta(P)$ – некоторый локальный параметр на $\mathcal{L}$. Обозначим через $S_w(\zeta(P))$ шварцеву производную $\left\{\int^P w, \zeta(P)\right\}$. Тогда разность проективных связностей $S_B - S_w$ представляет собой (мероморфный) квадратичный дифференциал на $\mathcal{L}$ [58]. Следовательно, отношение $(S_B - S_w)/w$ есть (мероморфный) 1-дифференциал. В эллиптическом случае, т. е. когда риманова поверхность $\mathcal{L}$ и абелев дифференциал w, получены из решетки $\{mA + nB\}$, этот 1-дифференциал голоморфен и допускает следующее явное выражение в локальном параметре z (см. [15]):

$$\frac{S_B - S_w}{w} = -24\pi i\frac{d\ln\eta(\sigma)}{d\sigma}\frac{1}{A^2}dz, \tag{5.3}$$

где $\sigma = B/A$.

Пусть $\{a, b\}$ – канонический базис циклов на эллиптической поверхности $\mathcal{L}$ (стороны фундаментального параллелограмма) такой, что числа A и B суть соответствующие a и b-периоды абелева дифференциала w. Полагая

$$\tau(A, B) := \eta^2(B/A), \tag{5.4}$$

мы видим, что (5.3) влечет, что функция τ подчинена системе уравнений

$$\frac{\partial \ln \tau}{\partial A} = \frac{1}{12\pi i} \oint_b \frac{S_B - S_w}{w}, \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial \ln \tau}{\partial B} = -\frac{1}{12\pi i} \oint_a \frac{S_B - S_w}{w}. \tag{5.6}$$

Теперь из формулы Рэя-Зингера следует, что вещественнозначное выражение

$$Q(A, B) = \frac{\det\Delta^{|w|^2}}{\Im(B/A)\mathrm{Area}(\mathcal{L}, |w|^2)} \tag{5.7}$$

удовлетворяет системе:

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial A} = \frac{1}{12\pi i} \oint_b \frac{S_B - S_w}{w}, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial B} = -\frac{1}{12\pi i} \oint_a \frac{S_B - S_w}{w}. \tag{5.9}$$

Ясно, что если $\tau(A, B)$ и $Q(A, B)$ суть (соответственно) голоморфное и вещественнозначное решения системы (5.5-5.6), то $Q(A, B) = C|\tau(A, B)|^2$ с некоторой постоянной C. Таким образом, результат Рэя-Зингера может быть переформулирован следующим образом:

Теорема 18 1. *Система (5.5-5.6) совместна и обладает голоморфным решением τ . Это решение может быть найдено явно и дается формулой (5.4).*

2. *Имеют место вариационные формулы (5.8, 5.9) для детерминанта лапласиана $\Delta^{|w|^2}$.*

3. *Выражение (5.7) может быть представлено как квадрат модуля голоморфной функции модулей A, B; эта функция совпадает с функцией τ с точностью до постоянного множителя.*

Ниже мы называем функцию τ (*голоморфное* решение системы (5.5-5.6)) *тау-функцией Бергмана*, указывая тем самым на ее связь с проективной связностью Бергмана.

Обобщая часть 1 Теоремы 18 на случай старшего рода, мы определяем и явно вычисляем бергмановскую тау-функцию на различных стратах пространств $\mathcal{H}_g$ абелевых дифференциалов на римановых поверхностях, т. е. пространств пар $(\mathcal{L}, w)$, где $\mathcal{L}$ – компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$ и w – абелев дифференциал (голоморфная 1-форма) на $\mathcal{L}$. В глобальных терминах тау-функция представляет собой сечение линейного расслоения над стратом $\widehat{\mathcal{H}}_g$ (пространства троек $(\mathcal{L}, w, \{a_\alpha, b_\alpha\})$, где абелев дифференциал w имеет фиксированные кратности нулей; (a_α, b_α) – канонический базис циклов).

Эта тау-фунция является прямым обобщением тау-функции на пространстве Гурвица, изученной в предыдущих главах. Эта аналогия становится совершенно ясной, если определить пространство Гурвица, как пространство пар $(\mathcal{L}, f)$, где f – мероморфная функция на компактной римановой поверхности $\mathcal{L}$ с фиксированными кратностями нулей и полюсов дифференциала df.

Обобщая часть 2 Теоремы 18, мы вводим лапласиан, $\Delta^{|w|^2}$ действующий в тривиальном линейном расслоении над $\mathcal{L}$, соответствующий плоской сингулярной метрике $|w|^2$. Так как абелевы дифференциалы на римановых поверхностях рода $g > 1$ обязательно имеют нули, метрика $|w|^2$ всегда имеет (конические) сингулярности и соответствующий лапласиан не является существенно самосопряженным оператором. Таким образом, приходится выбирать подходящее самосопряженное расширение – в этой статье мы будем рассматривать расширение по Фридрихсу. Оказывается, что в этом случае все еще возможно определить детерминант лапласиана через регуляризацию (5.1). Мы выводим формулы для вариаций $\det\Delta^{|w|^2}$ with respect to по отношению к естественным координатам на пространстве абелевых дифференциалов. Эти формулы суть прямые аналоги системы уравнений (5.8-5.9). В качестве существенного промежуточного шага мы обобщаем технику аналитической хирургии Бургли-Фридлендера-Каппелера [3] для случая метрик с коническими сингулярностями.

Обобщая часть 3 Теоремы 18, мы получаем явную формулу для детерминанта лапласиана $\Delta^{|w|^2}$:

$$\det\Delta^{|w|^2} = C\text{Area}(\mathcal{L}, |w|^2)\, \det\Im\mathbf{B}\, |\tau|^2\ , \tag{5.10}$$

где $\mathbf{B}$ – матрица b-периодов римановой поверхности рода g и тау-функция Бергмана τ допускает явное выражении через главные формы и тэта-функции. Эта формула должна рассматриваться как естественное обобщение формулы Рэя-Зингера на случай кривых старшего рода.

Мы также выводим два аналога формулы Полякова для отношения детерминантов лапласианов, соответствующих двум различным конформно эквивалентным метрикам. Первая формула описывает связь между детерминантами лапласианов, соответствующим двум конформно эквивалентным плоским коническим метрикам, вторая – связь между детерминантами лапласианов в метрике Пуанкаре и в плоской конической метрике. В частности получается представление детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре, как произведения квадрата модуля бергмановской тау-функции, определителя мнимой части матрицы b-периодов и экспоненты некоторого регуляризованного интеграла Дирихле. Это представление представляет собой альтернативу как известной формуле Зографа, использующей униформизацию Шоттки [64], так и формуле 4.8.

5.1 Вариационные формулы на пространстве абелевых дифференциалов на римановых поверхностях

5.1.1 Координаты на пространстве абелевых дифференциалов

Пространство $\mathcal{H}_g$ абелевых дифференциалов на римановых поверхностях рода g определяется как пространство модулей пар $(\mathcal{L}, w)$, где $\mathcal{L}$ – компактная риманова поверхность рода g, а w – голоморфная 1-форма на $\mathcal{L}$. Это пространство стратифицировано по кратностям нулей w.

Возникающие страты могут иметь несколько связных компонент. Классификация этих компонент была недавно проделана в работе Зорича и Концевича [38]. В частности, страт пространства $\mathcal{H}_g$, имеющий максимально возможную размерность (этот страт состоит из дифференциалов с простыми нулями), – связен.

Обозначим через $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$ страт пространства $\mathcal{H}_g$, состоящий из дифференциалов w с M нулями на $\mathcal{L}$ кратностей $(k_1, \dots, k_M)$. Обозначим эти нули w через $P_1, \dots, P_M$; дивизор нулей дифференциала w записывается в виде $(w) = \sum_{m=1}^{M} k_m P_m$. Выберем канонический базис циклов (a_α, b_α) на римановой поверхности $\mathcal{L}$ и рассечем $\mathcal{L}$ вдоль этих циклов (предполагая их проходящими через общую точку). Получим фундаментальный многоугольник $\widehat{\mathcal{L}}$. Внутри $\widehat{\mathcal{L}}$ выберем $M - 1$ (классов гомологий) путей l_m на $\mathcal{L} \setminus (w)$, соединяющих нуль P_1 с остальными нулями

P_m дифференциала w, $m = 2, \dots, M$. Тогда локальные координаты на $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$ могут быть выбраны следующим образом [39]:

$$A_\alpha := \oint_{a_\alpha} w\ , \qquad B_\alpha := \oint_{b_\alpha} w\ , \qquad z_m := \int_{l_m} w\ , \qquad \alpha = 1, \dots, g;\ m = 2, \dots, M\ . \tag{5.11}$$

Площадь поверхности $\mathcal{L}$ в метрике $|w|^2$ выражается через эти координаты формулой:

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{L}) = \Im \sum_{\alpha=1}^{g} A_\alpha \overline{B_\alpha}\ .$$

Если все нули w просты, то $M = 2g-2$; и, стало быть, размерность старшего страта $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$ равна $4g-3$. Абелев интеграл $z(P) = \int_{P_1}^{P} w$ дает локальную координату на проверхности в окрестности любой точки $P \in \mathcal{L}$ за исключением нулей $P_1, \dots, P_M$. В окрестности нуля P_m локальная координата дается выражением $(z(P) - z_m)^{1/(k_m+1)}$.

Следующая конструкция помогает сделать эти координаты совершенно наглядными в случае старшего страта $H_g(1, \dots, 1)$.

Рассмотрим g параллелограммов $\Pi_1, \dots, \Pi_g$, лежащих в комплексной плоскости с координатой z, чьи стороны суть (A_1, B_1), $\dots$, (A_g, B_g). Снабдим эти параллелограммы системой разрезов

$$[0, z_2], \quad [z_3, z_4], \quad \dots, \quad [z_{2g-3}, z_{2g-2}]$$

(каждый разрез повторяется дважды на двух разных параллелограммах). отождествляя противоположные стороны параллелограммов и склеивая полученные таким образом g торов вдоль разрезов, мы получаем компактную риманову поверхность $\mathcal{L}$ рода g. Более того, дифференциал dz на комплексной плоскости порождает голоморфный дифференциал w на $\mathcal{L}$, имеющий $2g-2$ нулей в концах разрезов. Таким образом, мы пришли к элементу $(\mathcal{L}, w)$ пространства $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$. Можно показать, что общая точка пространства $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$ может быть получена с помощью этой конструкции; более хитрое склеивание позволяет получить элементы остальных стратов равно как и точки страта $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$ необщего положения.

Утверждение о том, что общая точка старшего страта может быть получена с помощью только что описанного склеивания параллелограммов следует из теоремы Мазура и Вича ([41], [59], см. также [39]) устанавливающей эргодичность естественного $SL(2, \mathbb{R})$-действия на связных компонентах стратов пространства (нормализованных) абелевых дифференциалов. Именно обозначим через $\mathcal{H}'_g(1, \dots, 1)$ множество пар $(\mathcal{L}, w)$ из $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$ таких, что $\int_{\mathcal{L}} |w|^2 = 1$. Пусть пара $(\mathcal{L}, w)$ из $\mathcal{H}'_g(1, \dots, 1)$ получены с помощью склеивания параллелограммов. Тогда под действием $A \in SL(2, \mathbb{R})$ она переходит в пару $(\mathcal{L}_1, w_1)$, полученную склеиванием параллелограммов $A(\Pi_1), \dots, A(\Pi_g)$ вдоль разрезов $[0, Az_2]$, $\dots$, $[Az_{2g-3}, Az_{2g-2}]$; здесь группа $SL(2, \mathbb{R})$ действует на z-плоскости следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto (a\Re z + b\Im z) + i(c\Re z + d\Im z)\,.$$

Таким образом, множество пар $(\mathcal{L}, w)$ из $\mathcal{H}'_g(1, \dots, 1)$, склеиваемых из параллелограммов, инвариантно относительно эргодического $SL(2, \mathbb{R})$-действия и, стало быть, есть множество полной меры.

Для сокращения обозначений удобно рассматривать координаты $\{A_\alpha,\, B_\alpha,\, z_m\}$ все вместе. Далее мы будем обозначать их как ζ_k, $k = 1, \dots, 2g + M - 1$, где

$$\zeta_\alpha := A_\alpha\ , \quad \zeta_{g+\alpha} := B_\alpha\ , \quad \alpha = 1, \dots, g\ , \quad \zeta_{2g+m} := z_{m+1} \quad m = 1, \dots, M-1 \tag{5.12}$$

Введем также соответствующие этим координатам циклы s_k, $k = 1, \ldots, 2g+M-1$ следующим образом:

$$s_\alpha = -b_\alpha \ , \quad s_{g+\alpha} = a_\alpha \ , \quad \alpha = 1, \ldots, g \ ; \tag{5.13}$$

циклом s_{2g+m}, $m = 1, \ldots, M-1$ считается (положительно ориентированная) малая окружность вокруг точки P_{m+1}.

Замечание 9 Ниже мы часто применяем следующий прием. Мы выбираем точку P на поверхности $\mathcal{L}$ таким образом, что ее z-координата, $z(P) = \int_{P_1}^P w$, не изменяется при вариации модулей ζ_k. (Иногда мы выбираем целый контур, лежащий на $\mathcal{L}$, все точки которого обладают этим свойством). В терминах только что объясненной конструкции это просто означает, что мы выбираем точку (контур) в z-плоскости, принадлежащую объединению параллелограммов Π_l и, затем, двигаем и растягиваем стороны параллелограммов и разрезы, оставляя выбранную точку (контур) неподвижной.

5.1.2 Вариационные формулы

Здесь мы доказываем вариационные формулы (аналоги классических формул Рауха), описывающие поведение базисных голоморфных объектов на римановых поверхностях (нормированных базисных голоморфных дифференциалов, матрицы b-периодов, канонического мероморфного бидифференциала, проективной связности Бергмана, главной формы и т. д.) при вариации координат (5.11) на пространстве $\mathcal{H}_g(k_1, \ldots, k_M)$.

Теорема 19 *Имеют место следующие вариационные формулы:*

$$\frac{\partial v_\alpha(P)}{\partial \zeta_k}\Big|_{z(P)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{s_k} \frac{v_\alpha(Q) B(P,Q)}{w(Q)} \ , \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{\alpha\beta}}{\partial \zeta_k} = \oint_{s_k} \frac{v_\alpha v_\beta}{w} \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial B(P,Q)}{\partial \zeta_k}\Big|_{z(P),\, z(Q)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{s_k} \frac{B(P,R) B(Q,R)}{w(R)} \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial \ln E(P,Q)}{\partial \zeta_k}\Big|_{z(P),\, z(Q)} = -\frac{1}{4\pi i} \oint_{s_k} \frac{1}{w(R)} \left[d_R \ln \frac{E(P,R)}{E(Q,R)} \right]^2 \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_k} (S_B(P) - S_w(P))\Big|_{z(P)} = \frac{3}{\pi i} \oint_{s_k} \frac{\mathbf{w}^2(P,R)}{w(R)} \ , \tag{5.18}$$

где $k = 1, \ldots, 2g+M-1$*; мы предполагаем, что локальная координаты* $z(P) = \int_{P_1}^P w$ *и* $z(Q) = \int_{P_1}^Q w$ *не меняются при дифференцировании.*

Proof. Рассмотрим (5.14). Запишем дифференциал v_α (вне точек P_m) в локальном параметре $z(P)$: $v_\alpha(P) = f_\alpha(z) dz$. Тогда вариационная формула (5.14) для $k = 2g+1, \ldots, 2g+M-1$ (т. е. по отношению к координатам z_m) – полный аналог формулы для производных нормализованного голоморфного дифференциала на разветвленном накрытии по критическим значениям порядка k_m (см. первую главу настоящей работы). В самом деле, в окрестности точки P_m, $z(P)$ есть просто функция на $\mathcal{L}$ с критическим значением z_m.

Докажем теперь (5.14) например для $k = g+1,\ldots 2g$. Рассмотрим точку $P_0 \in \mathcal{L}$ такую. что $z_0 := z(P_0)$ не зависит от модулей $\{A_\beta, B_\beta, z_m\}$. Рассечем поверхность $\mathcal{L}$ вдоль базисных циклов, начинающихся в P_0 и рассмотрим получающийся фундаментальный многоугольник $\widehat{\mathcal{L}}$. Обозначим образы разных берегов базисных разрезов в z-плоскости через a_β^-, a_β^+, b_β^- и b_β^+. Концы разрезов совпадают с точками z_0, $z_0 + A_\beta$, $z_0 + B_\beta$ и $z_0 + A_\beta + B_\beta$. Запишем дифференциал v_α в локальном параметре z следующим образом: $v_\alpha(P) = f_\alpha(z)dz$, где $z = z(P)$.

Значения функции $f_\alpha(z)$ совпадают на разных берегах разрезов a_β^- и a_β^+ т. е. $f_\alpha(z+B_\beta) = f_\alpha(z)$ для $z \in a_\beta^-$. Дифференцируя это соотношение по B_β, получаем

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial B_\beta}(z+B_\beta) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial B_\beta}(z) - \frac{\partial f_\alpha}{\partial z}(z)\;;$$

ясно, что это единственный скачок дифференциала $\frac{\partial v_\alpha(P)}{\partial B_\beta}|_{z(P)}$ на $\mathcal{L}$. Следовательно, дифференциал $\frac{\partial v_\alpha(P)}{\partial B_\beta}|_{z(P)}$ имеет все нулевые a-периоды и скачок $-\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}(z(P))dz(P)$ на контуре a_β^-; вне разреза по a_β-циклу он голоморфен (иными словами, он решает скалярную задачу Римана-Гильберта на контуре a_β). Такой дифференциал легко записывается (см., напр., [68]) в терминах канонического мероморфного бидифференциала $B(P,Q)$ как контурный интеграл по a_β вида (5.14) (в терминах координаты $z(P)$ имеет место соотношение $w(Q) = dz(Q)$).

Случай $k = 1,\ldots,g$ может быть рассмотрен аналогично; единственная разница будет в перемене знака, появляющейся из-за асимметрии между a_β и b_β-циклами, предписываемой их индексом пересечения $a_\beta \circ b_\beta = -b_\beta \circ a_\beta = 1$.

Интегрируя (5.14) по b-циклам и меняя порядок интегрирования, приходим к (5.15). Формула (5.16) доказывается аналогично формуле (5.14). Соотношение (5.18) следует из вариационных формул для бидифференциала $B(P,Q)$ (5.16) в пределе $P \to Q$, если мы перепишем эти формулы в координате $z(P)$ (в этой локальной координате проективная связность S_w – нулевая) и примем во внимание определение бергмановской проективной связности.

Как и в ([16]), формула (5.17) немедленно следует из (5.16). □

Зависимость вектора римановых констант и дифференциала $\mathcal{C}(P)$ от координат A_α, B_α и z_m дается следующей теоремой.

Теорема 20 *Имеют место следующие вариационные формулы на пространстве $\mathcal{H}(k_1,\ldots,k_M)$:*

$$\frac{\partial K_\alpha^P}{\partial \zeta_k}\Big|_{z(P)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{s_k} \frac{v_\alpha(R)}{w(R)}\partial_R \ln\frac{\sigma(R,Q_0)E(R,P)^{g-1}}{\sqrt{v(R)}} \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_k}\ln\{\mathcal{C}w^{\frac{g(g-1)}{2}}(P)\}\Big|_{z(P)} = -\frac{1}{8\pi i}\oint_{s_\alpha}\frac{1}{w}\left(S_B - S_{Fay}^P\right) \tag{5.20}$$

где $k = 1,\ldots,2g+M-1$; локальный параметр $z(P)$ держится фиксированным при дифференцировании; значения главной формы $E(R,P)$ и тензора $\sigma(R,Q_0)$ в R и Q_0 соответственно вычисляется в локальном параметре z.

(Заметим, что произведение C и степени w в левой части (5.20) представляет собой скаляр)

Доказательство. Это полный аналог соответствующей теоремы из второй главы, доказательство практически полностью сохраняется (надо лишь все вычеты заменить на контурные интегралы по циклам s_k); единственный новый нетривиальный момент (перестановка интегралов по пересекающимся циклам) возникает при доказательстве (5.19). Остановимся лишь на нем.

Из (5.14) и (5.15) получаем, что

$$\frac{\partial K_\alpha^P}{\partial \zeta_k} = \frac{1}{2}\oint_{s_k}\frac{v_\alpha^2}{w} - \sum_{\beta\neq\alpha;\beta=1,\dots,g}\delta_{k\beta}\frac{v_\beta(R^\beta)}{w(R^\beta)}\int_P^{R^\beta} v_\alpha$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\beta\neq\alpha;\beta=1,\dots,g}\oint_{x\in a_\beta}\left\{\oint_{Q\in s_k}\frac{v_\beta(Q)\partial_x\partial_Q\ln E(x,Q)}{w(Q)}\right\}\int_P^x v_\alpha$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\beta\neq\alpha;\beta=1,\dots,g}\oint_{x\in a_\beta}v_\beta(x)\int_{R=P}^{R=x}\oint_{Q\in s_k}\frac{v_\alpha(Q)\partial_R\partial_Q\ln E(R,Q)}{w(Q)}, \tag{5.21}$$

где $R^\beta = a_\beta \cap b_\beta$.

Заметим, что

$$\oint_{x\in a_\beta}\oint_{Q\in s_k}\left(\frac{v_\beta(Q)\partial_x\partial_Q\ln E(x,Q)}{w(Q)}\int_P^x v_\alpha\right) =$$

$$\oint_{Q\in s_k}\oint_{x\in a_\beta}\left(\frac{v_\beta(Q)\partial_x\partial_Q\ln E(x,Q)}{w(Q)}\int_P^x v_\alpha\right) - 2\pi i\delta_{k\beta}\frac{v_\beta(R^\beta)}{w(R^\beta)}\int_P^{R^\beta} v_\alpha, \tag{5.22}$$

согласно асимптотическому разложению канонического мероморфного бидифференциала вблизи диагонали. Таким образом, после изменения порядка интегрирования и интегрирования по частям правая часть (5.21) сводится к

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{s_k}\frac{1}{w(Q)}\left\{-\pi i v_\alpha^2(Q)-\right.$$

$$\left.\sum_{\beta\neq\alpha}\oint_{a_\beta}\left[\partial_Q\ln E(Q,x)v_\beta(Q)v_\alpha(x) - v_\beta(x)v_\alpha(Q)\partial_Q\ln\frac{E(Q,x)}{E(x,P)}\right]\right\}.$$

Как объяснено в ([16], p. 58) квадратичный дифференциал в фигурных скобках совпадает с

$$-v_\alpha(Q)\partial_Q\ln\frac{\sigma(Q,Q_0)E(Q,P)^{g-1}}{\sqrt{v(Q)}},$$

что дает (5.19).

5.1.3 Базисные дифференциалы Бельтрами для $\mathcal{H}_g(k_1,\dots,k_M)$

В теории Тейхмюллера вариация матрицы b-периодов при инфинитезимальной вариации конформной структуры, задаваемой дифференциалом Бельтрами μ, дается формулой

$$\delta_\mu \mathbf{B}_{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{L}}\mu v_\alpha v_\beta \tag{5.23}$$

Поскольку, согласно теореме Торелли, матрица b-периодов однозначно определяет риманову поверхность, то, отыскав дифференциалы Бельтрами, соответствующие дифференцированию по координатам $\{A_\alpha, B_\alpha, z_m\}$, мы сможем их использовать для вариации любого функционала на пространстве голоморфных дифференциалов, зависящего лишь от модулей подлежащей римановой поверхности. Здесь мы строим такие дифференциалы Бельтрами.

Пусть пара $(\mathcal{L}, w)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$. Рассмотрим тонкую полоску Π_k на поверхности $\mathcal{L}$ вокруг базисного цикла s_k; одна часть ориентированной границы Π_k гомологична s_k, другая – гомологична $-s_k$. Предположим, что эта полоска столь тонка, что ни один из нулей дифференциала w в нее не попадает. Пусть χ – функция из $C^\infty(\mathcal{L})$, равная 1 в окрестности цикла s_k и равная нулю в окрестности $-s_k$. Рассмотрим $(0,1)$-форму σ, совпадающую с $\overline{\partial}\chi$ в полосе Π_k и зануляющуюся вне Π_k.

Введем дифференциал Бельтрами μ_k из C^∞ равенством

$$\mu_k = \frac{\sigma}{w}. \tag{5.24}$$

Используя теорему Стокса, легко заметить, что

$$\int_{\mathcal{L}} \mu_k q = \oint_{s_k} \frac{q}{w} \tag{5.25}$$

для любого мероморфного квадратичного дифференциала q, голоморфного вне нулей w.

Следовательно, согласно (5.15), имеем соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta_k} = \delta_{\mu_k} F$$

для любой дифференцируемой функции F на пространстве Тейхмюллера T_g.

Мы будем называть дифференциалы Бельтрами μ_k *базисными.*

5.2 Тау-функция Бергмана

Определение 3 *Тау-функция Бергмана $\tau(\mathcal{L}, w)$ на страте $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$ пространства абелевых дифференциалов определяется локально следующей системой дифференциальных уравнений:*

$$\frac{\partial \ln \tau(\mathcal{L}, w)}{\partial \zeta_k} = -\frac{1}{12\pi i} \oint_{s_k} \frac{S_B - S_w}{w}\ , \tag{5.26}$$

где $k = 1, \dots, 2g + M - 1$; S_B – проективная связность Бергмана, $S_w(\zeta) := \left\{\int^P w, \zeta\right\}$; разность двух проективных связностей S_B и S_w — мероморфный квадратичный дифференциал с полюсами в нулях w.

Чтобы обосновать возможность такого определения, необходимо доказать совместность этой системы уравнений.

Предложение 1 *Система (5.26) совместна.*

Доказательство. Обозначим правые части уравнений (5.26) через H^{ζ_k}. По аналогии с конструкцией тау-функции Бергмана – изомонодромной тау-функции фробениусова многообразия – мы будем называть эти величины *гамильтонианами.* Нам нужно будет различать три группы координат на $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_M)$, и мы будем использовать (ясные сами по себе) обозначения H^{A_α}, H^{B_α} и H^{z_m} для этих гамильтонианов.

Нам необходимо показать, что $\frac{\partial H^{A_\alpha}}{\partial B_\beta} = \frac{\partial H^{B_\beta}}{\partial A_\alpha}$, $\frac{\partial H^{z_m}}{\partial A_\alpha} = \frac{\partial H^{A_\alpha}}{\partial z_m}$, и т. д. Большинство из этих соотношений немедленно следует из Теоремы 19 и симметричности бидифференциала $B(P, Q)$.

Например, для доказательства равенства

$$\frac{\partial H^{A_\alpha}}{\partial A_\beta} = \frac{\partial H^{A_\beta}}{\partial A_\alpha} \tag{5.27}$$

при $\alpha \neq \beta$, запишем левую его часть как

$$\frac{\partial H^{A_\alpha}}{\partial A_\beta} = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{a_\alpha} \oint_{a_\beta} \frac{\mathbf{w}^2(P,Q)}{w(P)w(Q)} \tag{5.28}$$

что, очевидно, инвариантно относительно перестановки A_α и A_β, поскольку циклы a_α и a_β всегда могут быть выбраны непересекающимися. Аналогично можно доказать и другие соотношения симметрии в случае, если контуры интегрирования не пересекаются (интерпретируя вычеты в P_m как контурные интегралы по малым окружностям вокруг P_m).

Единственные соотношения, для доказательства которых возникает необходимость в перестановке интегралов по пересекающимся циклам, суть

$$\frac{\partial H^{A_\alpha}}{\partial B_\alpha} = \frac{\partial H^{B_\alpha}}{\partial A_\alpha} \,. \tag{5.29}$$

Чтобы доказать (5.29) обозначим точку пересечения a_α и b_α через Q_α; тогда имеем:

$$\frac{\partial H^{A_\alpha}}{\partial B_\alpha} \equiv \frac{1}{12\pi i}\frac{\partial}{\partial B_\alpha}\left\{\oint_{b_\alpha} \frac{S_B - S_w}{w}\right\} = \frac{1}{12\pi i}\frac{S_B - S_w}{w}(Q_a) - \frac{1}{4\pi^2}\oint_{b_\alpha}\oint_{a_\alpha}\frac{\mathbf{w}^2(P,Q)}{w(P)w(Q)} \tag{5.30}$$

где значение 1-формы $\frac{1}{w}(S_B - S_w)$ в точке Q_α вычисляется в координате $z(P)$. Добавочное слагаемое в (5.30) возникает из-за зависимости цикла b_α в z-плоскости от B_α (разность конечной и начальной точки цикла b_α в z-плоскости есть в точности B_α), которую нужно принять во внимание при дифференцировании.

Ровно так же находим, что

$$\frac{\partial H^{B_\alpha}}{\partial A_\alpha} \equiv -\frac{1}{12\pi i}\frac{\partial}{\partial A_\alpha}\left\{\oint_{a_\alpha} \frac{S_B - S_w}{w}\right\} = -\frac{1}{12\pi i}\frac{S_B - S_w}{w}(Q_a) - \frac{1}{4\pi^2}\oint_{a_\alpha}\oint_{b_\alpha}\frac{\mathbf{w}^2(P,Q)}{w(P)w(Q)} \tag{5.31}$$

(следует обратить внимание перемену знака члена $\frac{1}{w}(S_B - S_w)(Q_\alpha)$ в (5.31) по сравнению с (5.30)). Теперь переставляя интегралы в, скажем, (5.30), приходим к (5.31) после несложного анализа поведения подынтегрального выражения в окрестности сингулярной точки Q_α (надо аккуратно учесть связь между разными ветвями логарифма).

□

5.2.1 Глобальное определение бергмановской тау-функции

Правые части формул (5.26) зависят не только от выбора канонического базиса циклов на $\mathcal{L}$, но и от взаимного расположения базисных циклов и точек дивизора (w), т. е. от выбора базиса (a_α, b_a, l_m) в $H^1(L, \{P_1, \dots, P_M\}; \mathbb{Z})$.

Однако на самом деле последняя зависимость совершенно несущественна и правильным глобальным определением тау-функции должно быть определение ее, как горизонтального сечения некоторого (плоского) линейного расслоения $\mathcal{T}$ над накрытием $\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1, \dots, k_M)$ пространства

$\mathcal{H}_g(k_1,\ldots,k_M)$. Здесь $\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\ldots,k_M)$ – пространство троек $(\mathcal{L},w,\{a_\alpha,b_\alpha\})$, где $\{a_\alpha,b_\alpha\}$ – канонический базис в $H^1(\mathcal{L},\mathbb{Z})$. Напомним (совершенно стандартную) конструкцию расслоения $\mathcal{T}$. В тривиальном линейном расслоении $\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\ldots,k_M)\times\mathbb{C}$ введем связность

$$d_B = d - \sum_{k=1}^{2g+M-1} H^{\zeta_k} d\zeta_k. \tag{5.32}$$

Следующая Лемма 20 показывает, что эта связность корректно определена, т. е. выражение (5.32) не зависит от взаимного расположения базисных циклов и точек дивизора (w).

Пусть две системы разрезов на $\mathcal{L}$, $\{a_\alpha,b_\alpha\}$ и $\{a'_\alpha,b'_\alpha\}$, определяют один и тот же канонический базис в $H^1(\mathcal{L},\mathbb{Z})$. Заметим, что циклы a_α и a'_α (как и циклы b_α и b'_α) могут соответствовать разным элементам группы

$$H^1(\mathcal{L},\{P_1,\ldots,P_M\};\mathbb{Z}).$$

Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ и $\widehat{\mathcal{L}}'$ – соответствующие фундаментальные многоугольники и пусть $\{\zeta_k\}=\{A_\alpha,B_\alpha,z_m\}$, $\{\zeta'_k\}=\{A'_\alpha,B'_\alpha,z'_m\}$ – соответствующие системы локальных координат на $\mathcal{H}_g(k_1,\ldots,k_M)$. Напомним, что когда мы определяем координату z_m (или z'_m) мы интегрируем дифференциал w по контуру, соединяющему нули P_1 и P_m и лежащему *внутри* фундаментального многоугольника $\widehat{\mathcal{L}}$ (или $\widehat{\mathcal{L}}'$). Пусть еще H^{ζ_k} и $H^{\zeta'_k}$ – соответствующие гамильтонианы.

Лемма 20 *Имеет место равенство*

$$\sum_{k=1}^{2g+M-1} H^{\zeta_k} d\zeta_k = \sum_{k=1}^{2g+M-1} H^{\zeta'_k} d\zeta'_k. \tag{5.33}$$

Доказательство. Мы можем продеформировать одну систему разрезов (держа ее, определяющей все тот же канонический базис в $H^1(\mathcal{L},\mathbb{Z})$) в другую, совершив конечное число элементарных ходов: каждый элементарный ход состоит в переправе некоторого выбранного нуля дифференциала w с одного берега разреза на другой. Достаточно показать, что равенство (20) имеет место, если система разрезов $\{a'_\alpha,b'_\alpha\}$ получается из системы $\{a_\alpha,b_\alpha\}$ за один элементарный ход.

Пусть нуль P_k переходит с правого берега (ориентированного) разреза a_γ на его левый берег. Используя теорему Коши, получаем

$$H^{B'_\gamma} = H^{B_\gamma} + H^{z_k} \tag{5.34}$$

и все другие гамильтонианы не меняются. Более того, мы имеем

$$dz'_k = dz_k - dB_\gamma \tag{5.35}$$

и все другие дифференциалы не меняются. Равенство (5.33) немедленно следует из (5.34) и (5.35).

Пусть теперь нуль P_k переходит с правого берега разреза b_γ на его левый берег. Тогда

$$H^{A'_\gamma} = H^{A_\gamma} - H^{z_k} \tag{5.36}$$

и все другие гамильтонианы не меняются. Имеем также

$$dz'_k = dz_k + dA_\gamma \tag{5.37}$$

и все другие дифференциалы не меняются. Равенство (5.33) снова выполнено. □

Предложение 5.2 означает, что связность (5.32) плоская.

Плоская связность d_B определяет характер фундаментальной группы пространства $\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M)$, т. е. представление

$$\rho : \pi_1\big(\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M)\big) \to \mathbb{C}^* \,. \tag{5.38}$$

Обозначим через $\mathcal{U}$ универсальную накрывающую $\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M)$; группа $\pi_1\big(\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M)\big)$ действует на прямом произведении $\mathcal{U}\times\mathbb{C}$ следующим образом:

$$g(u,z) = (gu, \rho(g)z) \,,$$

где $u\in\mathcal{U}$, $z\in\mathbb{C}$, $g\in\pi_1\big(\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M))\big)$. Фактормногообразие $\mathcal{U}\times\mathbb{C}/\pi_1\big(\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M)\big)$ имеет структуру голоморфного линейного расслоения над $\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M)$; мы обозначаем это расслоение через $\mathcal{T}$.

Определение 4 Плоское голоморфное линейное расслоение $\mathcal{T}$, снабженное плоской связностью d_B, называется расслоением Бергмана над пространством $\widehat{\mathcal{H}}_g(k_1,\dots,k_M)$. Единственное (с точностью до мультипликативной константы) горизонтальное голоморфное сечение расслоения $\mathcal{T}$ называется тау-функцией Бергмана.

5.3 Интеграл Дирихле: вариационные формулы и голоморфная факторизация

Пусть пара $(\mathcal{L},w)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_g(k_1,\dots,k_M)$. Напомним, что поверхность $\mathcal{L}$ снабжается системой локальных координат, определяемой голоморфным дифференциалом w. Вне нулей $P_1,\dots,P_M$ дифференциала w используется локальный параметр z, определяемый равенством $z(P)=\int_{P_1}^P w$. Как и раньше, мы полагаем $z_m=z(P_m)$. В малой окрестности нуля P_m кратности k_m используется локальный параметр x_m такой, что $w=(k_m+1)x_m^{k_m}dx_m$ или, что эквивалентно, $x_m(P)=(z(P)-z_m)^{1/(k_m+1)}$. Последнее равенство может быть также переписано, как $z(P)=z_m+x_m^{k_m+1}$.

Аналогично (3.15) для произвольных двух точек $P_0,Q_0\in\mathcal{L}$ введем следующий многозначный 1-дифференциал

$$\Omega^{P_0}(P) = \mathbf{s}^2(P,Q_0)E(P,P_0)^{2g-2}(w(Q_0))^g(w(P_0))^{g-1} \tag{5.39}$$

(зависимость от Q_0 выражения (5.39) не играет существенной роли и далее не будет учитываться в обозначениях).

Дифференциал $\Omega^{P_0}(P)$ имеет автоморфные множители 1 и $\exp(4\pi i K_\alpha^{P_0})$ вдоль базисных циклов a_α и b_α соответственно. Единственный нуль 1-формы Ω^{P_0} на $\widehat{\mathcal{L}}$ – точка P_0; его кратность – $2g-2$. Как и раньше, введем следующее определение:

Определение 5 *Проективная связность S^P_{Fay} on $\mathcal{L}$ заданная шварцевой производной*

$$S^P_{Fay}(x(Q)) = \left\{\int^Q \Omega^P, x(Q)\right\}, \tag{5.40}$$

где $x(Q)$ – локальная координата на $\mathcal{L}$, называется проективной связностью Фэя (точнее говоря, это целое семейство проективных связностей, параметризованное точкой $P\in\mathcal{L}$).

Введем вещественнозначную функцию φ (определенную на поверхности $\mathcal{L}$, рассеченной вдоль базисных циклов) равенством

$$\varphi(z,\overline{z}) = \ln\left|\frac{\Omega^{P_0}}{w}\right|^2 . \tag{5.41}$$

для фиксированной точки $P_0 \in \mathcal{L}$. Функция φ определена вне нулей P_m дифференциала w. Аналогично, в окрестности нулей P_m определим M функций $\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)$ равенствами

$$e^{\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)}|dx_m|^2 = |\Omega^{P_0}|^2.$$

Вблизи нулей P_m справедлива асимптотика

$$|\varphi_z(z,\overline{z})|^2 = \left(\frac{k_m}{k_m+1}\right)^2 |z-z_m|^{-2} + O\left(|z-z_m|^{-2+1/(k_m+1)}\right), \quad \text{as} \ \ P \to P_m\,. \tag{5.42}$$

Вблизи точки P_0 справедлива асимптотика

$$|\varphi_z(z,\overline{z})|^2 = 4(g-1)^2|z(P)-z(P_0)|^{-2} + O\left(|z(P)-z(P_0)|^{-1}\right) \ , \quad \text{as} \ \ P \to P_0. \tag{5.43}$$

Пусть $\rho > 0$, положим

$$\mathcal{L}_\rho = \mathcal{L} \setminus \left[\cup_{m=1}^{M}\{P \in \mathcal{L} : |z(P)-z_m| \le \rho\} \cup \{z \in \mathcal{L} : |z(P)-z(P_0)| \le \rho\}\right] \ .$$

Заметим, что функция $|\varphi_z|$ однозначна на $\mathcal{L}$, следовательно, мы можем определить *регуляризованный интеграл Дирихле* $\mathbf{D}$ равенством

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\pi}\lim_{\rho\to 0}\left\{\int_{\mathcal{L}_\rho}|\varphi_z|^2|dz|^2 + 2\pi\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{k_m^2}{k_m+1} + 4(g-1)^2\right)\ln\rho\right\} \ . \tag{5.44}$$

Согласно (5.42) и (5.43) предел в правой части (5.44) существует и конечен.

5.3.1 Голоморфная факторизация интеграла Дирихле

Напомним сначала, что для того, чтобы сделать z-координату $z(P) = \int_{P_1}^{P} w$ однозначной, необходимо выбрать фундаментальный многоугольник поверхности $\mathcal{L}$, разрезав $\mathcal{L}$ вдоль некоторой системы разрезов, гомотопных базисным циклам $\{a_\alpha, b_\alpha\}$; мы будем обозначать эти разрезы теми же буквами $\{a_\alpha, b_\alpha\}$.

Мы введем еще и вторую систему разрезов на $\mathcal{L}$ (обозначаемая $\{\widetilde{a}_\alpha, \widetilde{b}_\alpha\}$), чтобы сделать однозначным мультипликативный дифференциал Ω^{P_0}. Мы предполагаем, что на уровне гомологий $a_\alpha = \widetilde{a}_\alpha$ и $b_\alpha = \widetilde{b}_\alpha$.

По техническим причинам удобно считать эти две системы разрезов различными (хотя и определяющими один и тот же базис гомологий). В дальнейших вычислениях некоторые вспомогательные функции будут иметь скачки, появляющиеся либо из-за неоднозначности z-coordinate либо из-за неоднозначности дифференциала Ω^{P_0}. Проследить все эти скачки проще, анализируя их по-отдельности.

Положим также:

$$\Omega^{P_0}(P_m) = \frac{\Omega^{P_0}(x_m)}{dx_m}\Big|_{x_m=0}, \quad m = 1,\dots,M,$$

где x_m – локальный параметр около нуля P_m. Аналогично, положим

$$\sigma(P,Q) = \mathbf{s}(P,Q)w(P)^{-g/2}w(Q)^{g/2}. \tag{5.45}$$

Теорема 21 *Регуляризованный интеграл Дирихле* $\mathbf{D}$ *допускает следующее представление:*

$$\mathbf{D} = \ln\left|\sigma^{4-4g}(P_0, Q_0)\prod_{m=1}^{M}\left\{\Omega^{P_o}(P_m)\right\}^{k_m}\exp\{4\pi i\langle\mathbf{r}, K^{P_0}\rangle\}\right|^2 + \sum_{m=1}^{M} k_m\ln(k_m+1), \tag{5.46}$$

где вектор $\mathbf{r}$ *имеет целочисленные компоненты, определяемые равенствами*

$$2\pi r_\alpha = \mathrm{Var}\Big|_{\widetilde{a}_\alpha}\left\{\mathrm{Arg}\,\frac{\Omega^{P_0}(P)}{w(P)}\right\}.$$

Доказательство. Согласно теореме Стокса

$$\int_{\mathcal{L}_\rho}|\varphi_z|^2\widehat{dz} = \frac{1}{2i}\left\{\sum_{m=1}^{M}\oint_{P_m} + \oint_{P_0} + \sum_{\alpha=1}^{g}\int_{\widetilde{a}_\alpha^+\cup\widetilde{a}_\alpha^-}\right\}\varphi_z\varphi\,dz,$$

где $\oint_{P_m}$ и $\oint_{P_0}$ суть интегралы по окружностям радиуса ρ с центрами в P_m и P_0, $\widetilde{a}_\alpha^+$ и $\widetilde{a}_\alpha^-$ суть разные берега разреза $\widetilde{a}_\alpha$, снабженные противоположной ориентацией. Имеем

$$\frac{1}{2i}\int_{\widetilde{a}_\alpha^+\cup\widetilde{a}_\alpha^-}\varphi_z\varphi dz = \pi r_\alpha\ln\left|\exp 4\pi i K_\alpha^{P_0}\right|^2. \tag{5.47}$$

Имеем также

$$\frac{1}{2i}\oint_{P_m}\varphi_z\varphi dz = \frac{1}{2i}\oint_{|x_m|=\rho^{1/(k_m+1)}}\left(\frac{1}{k_m+1}\varphi_{x_m}^{int}x_m^{-k_m} + \left(\frac{1}{k_m+1}-1\right)x_m^{-k_m-1}\right)$$

$$(\varphi^{int} - 2k_m\ln|x_m| - 2\ln(k_m+1))(k_m+1)x_m^{k_m}dx_m =$$

$$= \pi k_m\varphi^{int}(x_m)|_{x_m=0} - \frac{k_m^2}{k_m+1}2\pi\ln\rho + 2\pi k_m\ln(k_m+1) + o(1)$$

и

$$\frac{1}{2i}\oint_{P_0}\varphi_z\varphi dz = \frac{1}{2i}\oint_{|z-z(P_0)|=\rho}\ln\left|\sigma^2(P_0,Q_0)(z-z(P_0))^{2g-2}\{1+O(z-z(P_0))\}\right|^2$$

-

$$\left(\frac{2g-2}{z-z(P_0)} + O(1)\right)dz = -\pi\ln\left|\sigma^{4g-4}(P_0,Q_0)\right|^2 - 8\pi(g-1)^2\ln\rho + o(1)$$

при $\rho\to 0$, откуда следует (5.46). □

5.3.2 Вариация интеграла Дирихле

Следующее предложение вместе с Теоремой 21 дают возможность получить явное выражение для бергмановской тау-функции на пространстве абелевых дифференциалов.

Предложение 2 *Интеграл Дирихле (5.44) удовлетворяет следующей системе уравнений:*

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial\zeta_k}\Big|_{z(P_0)} = \frac{1}{\pi i}\oint_{s_k}\frac{S_{Fay}^{P_0} - S_w}{w}, \tag{5.48}$$

где $k = 1,\ldots,2g+M-1$*; предполагается, что координата* $z(P_0) = \int_{P_1}^{P_0}$ *держится фиксированной при дифференцировании.*

Доказательство. Как и в предыдущих главах мы начнем со следующей стандартной леммы.

Лемма 21 *Пусть $\widehat{\mathcal{L}}$ – фундаментальный многоугольник, определенный системой разрезов $\{\widetilde{a}_\alpha, \widetilde{b}_\alpha\}$. Определим отображение $\mathcal{U} : \widehat{\mathcal{L}} \ni P \mapsto \xi \in \mathbf{C}$ равенством $\xi = \mathcal{U}(P) = \int_{P_1}^{P} \Omega$. Тогда*

- *Имеет место следующее соотношение:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_k} + F_k \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial F_k}{\partial z} = 0 \ , \qquad k = 1, \dots, 2g + M - 1 \ , \tag{5.49}$$

где

$$F_k = -\frac{\mathcal{U}_{\zeta_k}}{\mathcal{U}_z} \ , \tag{5.50}$$

Функции F_k ведут себя по-разному в зависимости от типа координаты ζ_k. Чтобы описать их свойства, удобно обозначать их в согласии с типом соответствующей координаты. В оставшейся части леммы мы полагаем:

$$F_\alpha^A = F_\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, g,$$

$$F_\alpha^B = F_{g+\alpha}; \quad \alpha = 1, \dots, g,$$

$$F_m^Z = F_{2g+m-1}; \quad m = 2, \dots, M.$$

- *Фиксируем m, $2 \le m \le M$. Вблизи точки P_n положим $\Phi_n^Z(x_n) := F_m^Z(z_n + x_n^{d_n})$; тогда*

$$\Phi_n^Z(0) = \delta_m^n \ ; \qquad \left(\frac{d}{dx_n}\right)^k \Phi_n^Z(0) = 0, \qquad k = 1, \dots, k_n - 1 \, , \tag{5.51}$$

где δ_m^n – символ Кронекера. Введем обозначения $\Phi_\alpha^A(x_n) := F_\alpha^A(z_n + x_n^{k_n+1})$, $\Phi_\alpha^B(x_n) := F_\alpha^B(z_n + x_n^{k_n+1})$ около P_n for $\alpha = 1, \dots, g$. Тогда

$$\left(\frac{d}{dx_n}\right)^k \Phi_\alpha^A(0) = \left(\frac{d}{dx_n}\right)^k \Phi_\alpha^B(0) = 0, \quad k = 0, \dots, k_n - 1 \, . \tag{5.52}$$

- *пусть P^+, P^- – точки на разных берегах разреза a_α, соответствующие одной и той же точке поверхности $\mathcal{L}$. Тогда*

$$F_\alpha^B(P^+) - F_\alpha^B(P^-) = -1, \tag{5.53}$$

$$F_\beta^B(P^+) - F_\beta^B(P^-) = 0, \quad \text{for} \quad \beta \ne \alpha, \quad \beta = 1, \dots, g \ , \tag{5.54}$$

и

$$F_\beta^A(P^+) - F_\beta^A(P^-) = 0, \quad \beta = 1, \dots, g \ , \tag{5.55}$$

$$F_n^Z(P^+) - F_n^Z(P^-) = 0, \quad n = 2, \dots, M \ . \tag{5.56}$$

- *Пусть Q^+, Q^- – точки на разных берегах разреза b_α, соответствующие одной и той же точке поверхности $\mathcal{L}$. Тогда*
$$F^A_\alpha(Q^+) - F^A_\alpha(Q^-) = 1, \tag{5.57}$$
$$F^A_\beta(Q^+) - F^A_\beta(Q^-) = 0, \quad \text{for} \quad \beta \neq \alpha, \quad \beta = 1, \dots, g \ , \tag{5.58}$$
и
$$F^B_\beta(Q^+) - F^B_\beta(Q^-) = 0, \quad \beta = 1, \dots, g \ , \tag{5.59}$$
$$F^Z_n(Q^+) - F^Z_n(Q^-) = 0, \quad n = 2, \dots, M \ . \tag{5.60}$$

Доказательство. Чтобы получить соотношения (5.49, 5.50) надо продифференцировать соотношение $\varphi(z, \overline{z}) = \ln |\mathcal{U}'(z)|^2$ по модулю $\{\zeta_k\}$. Поскольку отображение $\mathcal{U}$ зависит от модулей голоморфно, результат следует немедленно. Чтобы получить остальные утверждения леммы, положим $\mathcal{R} = z \circ \mathcal{U}^{-1}$; $z = \mathcal{R}(\xi)$. Записывая зависимость от модулей явно, имеем
$$\mathcal{U}\left(\{\zeta_k\}; \mathcal{R}(\{\zeta_k\}; \xi)\right) = \xi. \tag{5.61}$$

Дифференцируя это тождество по модулям и используя (5.50), приходим к соотношениям
$$F^Z_m = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z_m}, \quad F^A_\alpha = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial A_\alpha} \ , \quad F^B_\alpha = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial B_\alpha} \ . \tag{5.62}$$

Чтобы доказать (5.51), заметим, что $\mathcal{R}(\xi) = z_m + (\xi - \xi(P_m))^{k_m+1} f(\xi; \{\zeta_k\})$, где функция f голоморфна по ξ. Теперь (5.51) следует из первого из соотношений (5.62). Остальные утверждения леммы также следуют из (5.62).

Следствие 6 *Следующие 1-формы точны:*
$$(\varphi_z \varphi)_{\zeta_k} dz - \{F_k |\varphi_z|^2 d\overline{z} + (F_k)_z \varphi_{\overline{z}} d\overline{z}\}$$
и
$$\{F_k |\varphi_z|^2 d\overline{z} - (F_k)_z \varphi_z dz + (F_k)_z \varphi_{\overline{z}} d\overline{z}\} - \{F_k (2\varphi_{zz} - \varphi_z^2) dz + \varphi \varphi_{z \zeta_k} dz\} \ .$$

Доказательство состоит в прямом вычислении: надо рассмотреть точные формы $d(F_k \varphi_z \varphi)$, $d(F_k \varphi_z)$ и $d(F_{kz} \varphi)$ и воспользоваться соотношениями (5.49).

Теперь мы можем продолжить доказательство предложения 2. Рассмотрим, например, соотношение (5.48) для $k = 1, \dots, g$. Напомним, что мы предполагаем, что координата $z(P_0) := \int_{P_1}^{P_0} w$ точки P_0 не меняется при вариации модулей $\{\zeta_k\} = \{A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g, z_2, \dots, z_M\}$. Полагая $I_\rho := \int_{\mathcal{L}_\rho} |\varphi_z|^2 |dz|^2$, получаем
$$\frac{\partial I_\rho}{\partial A_\alpha} = \frac{1}{2i} \left\{ \oint_{P_0} + \sum_{m=1}^{M} \oint_{P_m} \right\} (\varphi_z \varphi)_{A_\alpha} dz + \frac{1}{2i} \sum_{\beta=1}^{g} \int_{\tilde{a}_\beta^+ \cup \tilde{a}_\beta^-} (\varphi_z \varphi)_{A_\alpha} dz. \tag{5.63}$$

Используя лемму 21 и ее следствие, голоморфность $(F^A_\alpha)_z \varphi_z$ и соотношение $(\varphi_z \varphi)_z dz = d(\varphi_z \varphi) - \varphi_z \varphi_{\overline{z}} d\overline{z}$, перепишем правую часть (5.63), как
$$\frac{1}{2i} \left(\left\{ \oint_{P_0} + \sum_{m=1}^{M} \oint_{P_m} \right\} \{F^A_\alpha |\varphi_z|^2 d\overline{z} - (F^A_\alpha)_z \varphi_z dz + (F^A_\alpha)_z \varphi_{\overline{z}} d\overline{z}\} - \right.$$

$$-\sum_{\beta=1}^{g}\left[\int_{\widetilde{a}_\beta^+\cup\widetilde{a}_\beta^-}+\int_{\widetilde{b}_\beta^+\cup\widetilde{b}_\beta^-}\right](F_\alpha^A)_z\varphi_z dz+\sum_{\beta=1}^{g}\int_{\widetilde{a}_\beta^+\cup\widetilde{a}_\beta^-}(\varphi_z\varphi)_{A_\alpha}dz\Bigg)\ , \tag{5.64}$$

где мы использовали тот факт, что $(F_\alpha^A)_z$ не имеет скачков на разрезах a_β и b_β, $\beta=1,\dots,g$. Используя асимптотические разложения подынтегральных выражений в нулях P_m дифференциала w (лемма 21 играет при этом важную роль), приходим к соотношению

$$\frac{1}{2i}\left\{\sum_{m=1}^{M}\oint_{P_m}\right\}\{F_\alpha^A|\varphi_z|^2 d\overline{z}-(F_\alpha^A)_z\varphi_z dz+(F_\alpha^A)_z\varphi_{\overline{z}}d\overline{z}\} \tag{5.65}$$

$$=-\pi\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{k_m!}\left(1-\frac{1}{(k_m+1)^2}\right)\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{k_m+1}\Phi_\alpha^A(x_m)\Big|_{x_m=0}+o(1)$$

при $\rho\to 0$. Из Следствия 6 выводим, что

$$\frac{1}{2i}\oint_{P_0}F_\alpha^A|\varphi_z|^2 d\overline{z}-(F_\alpha^A)_z\varphi_z dz+(F_\alpha^A)_z\varphi_{\overline{z}}d\overline{z}=\frac{1}{2i}\oint_{P_0}F_\alpha^A(2\varphi_{zz}-(\varphi_z)^2)dz+o(1)\ . \tag{5.66}$$

Из теоремы Коши и асимптотических разложений в P_m следует, что

$$0=\frac{1}{2i}\left\{\sum_{m=1}^{M}\oint_{P_m}+\oint_{P_0}+\right. \tag{5.67}$$

$$\left.\sum_{\beta=1}^{g}\left[\int_{\widetilde{a}_\beta^+\cup\widetilde{a}_\beta^-}+\int_{\widetilde{b}_\beta^+\cup\widetilde{b}_\beta^-}\right]+\sum_{\beta=1}^{g}\left[\int_{a_\beta^+\cup a_\beta^-}+\int_{b_\beta^+\cup b_\beta^-}\right]\right\}F_\alpha^A(2\varphi_{zz}-(\varphi_z)^2)dz$$

$$=-\pi\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{k_m!}\left(1-\frac{1}{(k_m+1)^2}\right)\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{k_m+1}\Phi_\alpha^A(x_m)\Big|_{x_m=0}$$

$$+\frac{1}{2i}\left\{\oint_{P_0}+\sum_{\beta=1}^{g}\left[\int_{\widetilde{a}_\beta^+\cup\widetilde{a}_\beta^-}+\int_{\widetilde{b}_\beta^+\cup\widetilde{b}_\beta^-}\right]+\sum_{\beta=1}^{g}\left[\int_{a_\beta^+\cup a_\beta^-}+\int_{b_\beta^+\cup b_\beta^-}\right]\right\}F_\alpha^A(2\varphi_{zz}-(\varphi_z)^2)dz+o(1)$$

(подчеркнем, что вообще говоря F_α^A имеет скачки на a и b-циклах, так же как и на $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$-циклах). Используя (5.65) и информацию о скачках F_α^A на a- и b-циклах, данную в Лемме 21, приходим к равенству

$$\frac{1}{2i}\sum_{m=1}^{M}\oint_{P_m}\{F_\alpha^A|\varphi_z|^2 d\overline{z}-(F_\alpha^A)_z\varphi_z dz+(F_\alpha^A)_z\varphi_{\overline{z}}d\overline{z}\}=$$

$$=-\frac{1}{2i}\oint_{P_0}F_\alpha^A(2\varphi_{zz}-(\varphi_z)^2)dz-\frac{1}{i}\oint_{b_\alpha}\{\varphi_{zz}-\frac{1}{2}(\varphi_z)^2\}dz- \tag{5.68}$$

$$-\frac{1}{2i}\sum_{\beta=1}^{g}\left[\int_{\widetilde{a}_\beta^+\cup\widetilde{a}_\beta^-}+\int_{\widetilde{b}_\beta^+\cup\widetilde{b}_\beta^-}\right]F_\alpha^A(2\varphi_{zz}-(\varphi_z)^2)dz+o(1).$$

Остается заметить, что согласно Следствию (6) мы имеем

$$\int_{\widetilde{a}_\beta^+\cup\widetilde{a}_\beta^-}(\varphi_z\varphi)_{A_\alpha}dz=\int_{\widetilde{a}_\beta^+\cup\widetilde{a}_\beta^-}[(2\varphi_{zz}-(\varphi_z)^2)F_\alpha^A+(F_\alpha^A)_z\varphi_z]dz \tag{5.69}$$

и что соответствующие интегралы по парам противоположных берегов $\widetilde{b}$-разрезов исчезают. Теперь подставляя (5.68),(5.66) и (5.69) в (5.64), получаем

$$\frac{\partial I_\rho}{\partial A_\alpha} = -\frac{1}{i}\oint_{b_\alpha}\{\varphi_{zz} - \frac{1}{2}(\varphi_z)^2\}dz + o(1). \tag{5.70}$$

Чтобы вывести (5.48) из (5.70) нужно использовать классическое соотношение

$$\varphi_{zz} - \frac{1}{2}(\varphi_z)^2 = \left\{\int^P \Omega^{P_0}, z\right\} = S_{Fay}^{P_0}(z)$$

и принять во внимание, что все слагаемые $o(1)$ выше равномерны по модулям.

Соотношения (5.48) с $k = g+1, \ldots, 2g+M-1$ доказываются тем же путем. Единственная незначительная модификация доказательства должна быть применена при проверке (5.48), когда $k = 2g+1, \ldots, 2g+M-1$:

- После дифференцирования I_ρ по z_m аналог уравнения (5.67) будет содержать дополнительный член

$$-\frac{2\pi}{(k_m-1)!(k_m+1)}\left(\frac{d}{dx_m}\right)^{k_m-1} S_{Fay}^{P_0}(x_m)\Big|_{x_m=0} = -2\pi\,\mathrm{res}|_{P_m}\left\{\frac{S_{Fay}^{P_0} - S_w}{w}\right\}$$

  в правой части;

- Правые части аналогов уравнений (5.63) и (5.65) будет содержать добавочные члены $-\frac{1}{2i}\oint_{P_m}|\varphi_z|^2 d\overline{z}$ и $\frac{1}{2i}\oint_{P_m}|\varphi_z|^2 d\overline{z}$ соответственно. После суммирования они сократятся.

5.4 Явное выражение для тау-функции Бергмана

Теорема 22 *Бергмановская тау-функция на пространстве $\mathcal{H}_g(k_1, \ldots, k_M)$ допускает следующее явное выражение:*

$$\tau(\mathcal{L}, w) = e^{-\frac{\pi i}{3}\langle \mathbf{r}, K^{P_0}\rangle}\mathcal{C}(P_0)^{2/3} w(P_0)^{\frac{g(g-1)}{3}}\left\{\sigma^{4-4g}(P_0, Q_0)\prod_{m=1}^{M}\left\{\Omega^{P_0}(P_m)\right\}^{k_m}\right\}^{-1/12}, \tag{5.71}$$

где целочисленный вектор $\mathbf{r}$ *определен равенством*

$$\mathcal{A}\big((w)\big) + 2K^{P_0} + \mathbf{B}\mathbf{r} + \mathbf{r_1} = 0\;; \tag{5.72}$$

$\mathbf{r_1}$ *– некоторый другой целочисленный вектор, (w) – дивизор дифференциала w, $\sigma(P_0, Q_0)$ определено в (5.45), начальная точка преобразования Абеля $\mathcal{A}$ совпадает с P_0 и все пути интегрирования лежат внутри фундаментального многоугольника $\widehat{\mathcal{L}}$.*

Доказательство. Согласно (5.20), имеем соотношения

$$\delta_\mu \ln|\tau(\mathcal{L}, w)|^2 = \delta_\mu \ln\{\mathcal{C}(P_0)w(P_0)^{\frac{g(g-1)}{2}}\}^{2/3} - \frac{1}{12\pi i}\mathrm{v.p.}\int_{\mathcal{L}}\mu(S_{Fay}^{P_0} - S_w)$$

для любого базисного дифференциала Бельтрами μ. Следовательно, принимая во внимание вариационную формулу (5.48) для интеграл Дирихле (5.46), мы имеем

$$|\tau(\mathcal{L}, w)|^2 = |\mathcal{C}(P_0)|^{4/3}|w(P_0)|^{\frac{2g(g-1)}{3}}\exp\{-\mathbf{D}/12\}. \tag{5.73}$$

Используя теорему 21, дающую голоморфную факторизацию интеграла Дирихле $\mathbf{D}$, мы приходим к формуле (5.71) для решения системы (5.26).

Выражение (5.71) независимо от выбора точки Q_0, что немедленно следует из соотношения $\sum k_m = 2g-2$. Кроме того, оно обязано быть независимым от выбора точки P_0. Анализируя монодромию (5.71) по P_0 вдоль a-циклов, мы приходим к (5.72).

□

Для упрощения выражения для тау-функции нам нужна следующая лемма.

Лемма 22 *Выражение*

$$\mathcal{F} := [w(P)]^{\frac{g-1}{2}} e^{-\frac{\pi i}{2}\langle \mathbf{r}, K^P\rangle} \left\{ \prod_{m=1}^{M} [E(P, P_m)]^{\frac{(1-g)k_m}{2}} \right\} \mathcal{C}(P) \tag{5.74}$$

не зависит от выбора точки P.

Чтобы доказать ее заметим, что выражение (5.74) — скаляр по P, несингулярно и обладает тривиальными монодромиями, когда P описывает a- и b-циклы.

Теперь полагая в (5.71) $Q_0 = P_0$ и используя равенство $\mathcal{C}(P)/\mathcal{C}(Q) = (\mathbf{s}(P,Q))^{1-g}$ и Лемму 22, мы приходим к следующему выражению для тау-функции.

Теорема 23 *Решение системы (5.26), определяющей тау-функцию Бергмана, дается следующим выражением*

$$\tau(\mathcal{L}, w) = \mathcal{F}^{1/3} \left\{ \prod_{m=1}^{M} \mathcal{C}^{k_m}(P_m) \right\}^{\frac{1}{6(g-1)}} , \tag{5.75}$$

где $\mathcal{F}$ определено формулой (5.74).

Выражения (5.75), (5.74) для тау-функции могут быть слегка упрощены в случае старшего страта $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$. Легко видеть, что справедлива следующая лемма.

Лемма 23 *Пусть хотя бы один из нулей дифференциала w прост. Тогда фундаментальный многоугольник $\widehat{\mathcal{L}}$ может быть выбран так, что $\mathcal{A}((w)) + 2K^P = 0$.*

Следствие 7 *Рассмотрим старший страт $\mathcal{H}(1, \dots, 1)$ пространства $\mathcal{H}_g$, содержащий абелевы дифференциалы w с простыми нулями. Выберем фундаментальный многоугольник $\widehat{\mathcal{L}}$ так, что $\mathcal{A}((w)) + 2K^P = 0$. Тогда бергмановская тау-функция на $\mathcal{H}(1, \dots, 1)$ записывается следующим образом:*

$$\tau(\mathcal{L}, w) = \mathcal{F}^{2/3} \prod_{m,l=1 \;\; m<l}^{2g-2} [E(P_m, P_l)]^{1/6} \tag{5.76}$$

где множитель

$$\mathcal{F} := [w(P)]^{\frac{g-1}{2}} \mathcal{C}(P) \prod_{m=1}^{2g-2} [E(P, P_m)]^{\frac{(1-g)}{2}} \tag{5.77}$$

не зависит от P; главные формы в нулях P_m вычисляются в локальном параметре $x_m(P) = \left(\int_{P_m}^{P} w\right)^{1/2}$.

6 Детерминанты лапласианов в плоских конических метриках $|w|^2$

6.1 Предварительные сведения о детерминантах лапласианов в гладких метриках

Рассмотрим гладкую конформную метрику

$$\mathbf{g} := \rho^{-2}(z,\overline{z})dxdy = \rho^{-2}(z,\overline{z})\widehat{dz} \tag{6.1}$$

на римановой поверхности $\mathcal{L}$. Здесь $z = x + iy$ – локальный параметр на $\mathcal{L}$, ρ – гладкая положительная функция локального параметра. Оператор Лапласа $\Delta^{\mathbf{g}} = 4\rho^2(z,\overline{z})\partial^2_{z\overline{z}}$ с областью определения, образованной C^∞-функциями на $\mathcal{L}$ существенно самосопряжен и спектр его дискретен. Его детерминант $\det\Delta^{\mathbf{g}}$ определяется с помощью стандартной ζ-регуляризации $\det\Delta^{\mathbf{g}} = \exp\{-\zeta'(0)\}$, где $\zeta(s)$ – ζ-функция оператора $\Delta^{\mathbf{g}}$ (см., например, [16]). Для двух произвольных конформных *гладких метрик* $\mathbf{g}_0 := \rho_0^{-2}(z,\overline{z})\widehat{dz}$ и $\mathbf{g}_1 := \rho_1^{-2}(z,\overline{z})\widehat{dz}$ имеет место следующая формула Полякова ([16] p. 62):

$$\frac{\det\Delta^{\mathbf{g}_1}}{\det\Delta^{\mathbf{g}_0}} = \frac{\int_{\mathcal{L}}\rho_1^{-2}(z,\overline{z})\widehat{dz}}{\int_{\mathcal{L}}\rho_0^{-2}(z,\overline{z})\widehat{dz}}\exp\left\{\frac{1}{3\pi}\int_{\mathcal{L}}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}\;\partial^2_{z\overline{z}}\ln\rho_1\rho_0\widehat{dz}\right\}, \tag{6.2}$$

где $\Delta^{\mathbf{g}_{0,1}} = 4\rho^2_{0,1}\partial\overline{\partial}$ (мы следуем здесь обозначениям из [16]). Мы будем также использовать оригинальную форму Полякова для этого соотношения:

$$\ln\frac{\det\Delta^{\mathbf{g}_1}}{\mathrm{Vol}(\mathcal{L},\mathbf{g}_1)} - \ln\frac{\det\Delta^{\mathbf{g}_0}}{\mathrm{Vol}(\mathcal{L},\mathbf{g}_0)} = -\frac{1}{3\pi}\left\{\int_{\mathcal{L}}\left|\partial_z\ln\frac{\rho_0}{\rho_1}\right|^2\widehat{dz} + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}}\left(\ln\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)K_0\rho_0^{-2}\widehat{dz}\right\}, \tag{6.3}$$

где K_0 – гауссова кривизна метрики $\mathbf{g}_0$. Чтобы вывести (6.3) из (6.2) достаточно переписать правую часть (6.2) в виде

$$\frac{1}{3\pi}\left(\int_{\mathcal{L}}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}\partial^2_{z\overline{z}}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}\widehat{dz} + \int_{\mathcal{L}}\left(\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\rho_0^2\{\partial^2_{z\overline{z}}\ln\rho_0^2\}\rho_0^{-2}\widehat{dz}\right) \tag{6.4}$$

и проинтегрировать первый член справа по частям.

Замечание 10 Обозначения мемуара ([16]), которым мы следуем здесь, очень удобны, хотя внешне и не инвариантны. Рутинное рассуждение показывает, что все объекты в (6.3, 6.4) на самом деле имеют инвариантный смысл: например, $\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}$ есть скаляр так же как и $\rho_0^2\{\partial^2_{z\overline{z}}\ln\rho_0^2\}$; $\overline{\partial}\partial\ln\frac{\rho_1}{\rho_0}$ представляет собой $(1,1)$-форму и может быть проинтегрировано по $\mathcal{L}$ и т. д.

Вариационная формула, описывающая зависимость детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре от модулей римановой поверхности принадлежит Зографу и Тахтаджяну [67]. Чтобы сформулировать их результат, напомним, что поверхность $\mathcal{L}$ биголоморфно эквивалентна фактору $\mathbb{H}/\Gamma$, где $\mathbb{H} = \{u \in \mathbb{C} : \Im u > 0\}$; Γ – строго гиперболическая фуксова группа. Обозначим через $\pi_F : \mathbb{H} \to \mathcal{L}$ естественную проекцию. Фуксова проективная связность S_F дается шварцевой производной $S_F(x) = \{u, x\}$, где x – локальная координата точки $P \in \mathcal{L}$, $w \in \mathbb{H}$, $\pi_F(u) = P$. Метрика Пуанкаре $\mathbf{g}^P$ на $\mathcal{L}$ дается проекцией на $\mathcal{L}$ метрики $|\Im u|^{-2}|du|^2$ на $\mathbb{H}$. Метрика Пуанкаре имеет постоянную кривизну -1 и, согласно теореме Гаусса-Боннэ, площадь $\mathrm{Vol}(\mathcal{L},\mathbf{g}^P)$ поверхности $\mathcal{L}$ в этой метрике не зависит от модулей и равен $2\pi(2g-2)$, где g – род поверхности $\mathcal{L}$. Обозначим через $\Delta^{\mathbf{g}^P}$ лапласиан в метрике Пуанкаре. Тогда

$$\delta_\mu\ln\left(\frac{\det\Delta^{\mathbf{g}^P}}{\det\Im\mathbf{B}\;\mathrm{Vol}(\mathcal{L},\mathbf{g}^P)}\right) = -\frac{1}{12\pi i}\int_{\mathcal{L}}(S_B - S_F)\mu\,, \tag{6.5}$$

где μ – дифференциал Бельтрами, определяющий деформацию комплексной структуры на $\mathcal{L}$, а разность двух проективных связностей $S_B - S_F$ — квадратичный дифференциал на $\mathcal{L}$. Постоянный множитель $\mathrm{Vol}(\mathcal{L}, \mathbf{g}^P)$ в левой части (6.5) не играет существенной роли и может быть опущен.

6.2 $\det\Delta$ в метрике $|w|^2$

Любой голоморфный абелев дифференциал w определяет плоскую метрику $|w|^2$ на $\mathcal{L}$. В нуле кратности k дифференциала w эта метрика имеет коническую сингулярность с коническим углом $2(k+1)\pi$. неограниченный симметрический оператор $4|w|^{-2}\partial\overline{\partial}$ in $L_2(\mathcal{L}, |w|^2)$ с областью определения $C_0^\infty(\mathcal{L} \setminus (w))$ допускает замыкание и обладает самосопряженным расширением по Фридрихсу, которое мы тоже будем обозначать через $\Delta^{|W|}$. Известно ([4, 44]), что спектр $\sigma(\Delta^{|w|^2})$ самосопряженного оператора $\Delta^{|w|^2}$ дискретен и имеет место асимптотика $N(\lambda) = O(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$, где $N(\lambda)$ — число собственных значений положительного оператора $-\Delta^{|w|^2}$, не превосходящих λ (учитывая кратность). Операторная дзета-функция $\Delta^{|w|^2}$, определенная как сумма по положительным собственным значениям: $\zeta(s) = \sum_{\lambda_j > 0} \lambda_j^{-s}$ для $\Re s > 1$, допускает аналитическое продолжение до функции, мероморфной в $\mathbf{C}$, причем известно ([24]), что точка $s = 0$ не является полюсом этого аналитического продолжения. Следовательно регуляризованный детерминант оператора $\Delta^{|w|^2}$ возможно определить обычным образом:

$$\det \Delta^{|w|^2} = \exp\{-\zeta'(0)\} \,.$$

Замечание 11 В случае гладких метрик аналоги вышеприведенных утверждений (спектральные свойства лапласиана, регулярность ζ-функции в $s = 0$, и т. д.) более или менее стандартны и обсуждаются в деталях в мемуаре [16] для лапласианов, действующих в голоморфных расслоениях произвольного ранга. (Здесь мы имеем дело только с тривиальными линейными расслоениями.) В нашем случае (когда метрики имеют конические сингулярности) доказательства не столь хорошо известны. Все необходимые ссылки можно найти в работе [24].

Введем обозначение

$$Q(\mathcal{L}, |w|^2) := \left\{ \frac{\det \Delta^{|w|^2}}{\mathrm{Vol}(\mathcal{L}, |w|^2) \det \Im \mathbf{B}} \right\} \tag{6.6}$$

где $\mathrm{Vol}(\mathcal{L}, \mathbf{g})$ обозначает площадь римановой поверхности $\mathcal{L}$ в метрике $\mathbf{g}$.

Теорема 24 *Имеют место следующие вариационные формулы*

$$\frac{\partial \ln Q(\mathcal{L}, |w|^2)}{\partial \zeta_k} = -\frac{1}{12\pi i} \oint_{s_k} \frac{S_B - S_w}{w} \,, \tag{6.7}$$

где $k = 1, \ldots, 2g + M - 1$; S_B – бергмановская проективная связность, S_w – проективная связность, задаваемая шварцевой производной $\left\{ \int^P w, \zeta \right\}$; $S_B - S_w$ – мероморфный квадратичный дифференциал с полюсами второго порядка в нулях P_m абелева дифференциала w.

6.3 Доказательство Теоремы 24

Доказательство Теоремы 24 использует следующие средства:

- Формулу Полякова и формулу Зографа-Тахтаджяна для вариации детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре (см. раздел 6.1).

- Технику интегралов Дирихле, дающих порождающие функции для значений фуксовой проективной связности в выделенном локальном параметре в нулях абелева дифференциалов (см. раздел 6.3.1).

- Модификацию формулы аналитической хирургии Бургли-Фридлендера-Каппелера для метрик с коническими сингулярностями (см. раздел 6.3.3).

6.3.1 Фуксов интеграл Дирихле для метрики $|w|^2$

Введем функции $\varphi^{ext}(z,\overline{z})$ локального параметра $z(P) = \int_{P_1}^P w$ на поверхности $\mathcal{L}$ вне нулей P_m дифференциала w:

$$e^{\varphi^{ext}(z,\overline{z})}|dz|^2 = \frac{|du|^2}{|\Im u|^2}\,, \tag{6.8}$$

где u – фуксова координата на универсальном накрытии $\mathbb{H}$ поверхности $\mathcal{L}$. Аналогично введем функции $\varphi^{int}(x_m)$ выделенного локального параметра x_m около P_m равенствами

$$\exp\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)|dx_m|^2 = |du|^2/|\Im u|^2. \tag{6.9}$$

Определим регуляризованный интеграл Дирихле равенством

$$\mathbb{D}_F^{reg} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(T_\epsilon + 2\pi\sum_{m=1}^M \frac{k_m^2}{k_m+1}\ln\epsilon\right), \tag{6.10}$$

где

$$T_\epsilon = \int_{\Lambda_\epsilon} |\varphi_z^{ext}|^2\widehat{dz} \tag{6.11}$$

и

$$\Lambda_\epsilon = \mathcal{L}\setminus\cup_{m=1}^M\{|x_m|\leq\epsilon\}.$$

Введем следующий *фуксов интеграл Дирихле*:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}} := \left\{\mathbb{D}_F^{reg} - 2\pi\sum_{m=1}^M k_m\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)\Big|_{x_m=0}\right\}\,. \tag{6.12}$$

Лемма 24 *Имеют место следующие равенства:*

$$\frac{\partial\mathcal{D}_{\mathcal{H}}}{\partial\zeta_k} = i\oint_{s_k}\left(\frac{S_F - S_w}{w}\right), \tag{6.13}$$

where $k = 1,\dots,2g+M-1$.

Доказательство. Сходные утверждения уже несколько раз встречались выше, их доказательства более или менее однотипны. Прототипом всех утверждений этого сорта служит Теорема 1 из работы [67]. Для краткости мы рассмотрим здесь только случай $k = 2g+1,\dots,2g+M-1$, оставив рассмотрение случая $k = 1,\dots,2g$ читателю. Так как нам будет необходимо различать три группы среди координат ζ_k (см. (5.12), мы возвратимся здесь к старым обозначениям z_m для группы ζ_{2g+m-1}, $m = 2,\dots,M$. Начиная с этого места мы всюду пишем просто φ вместо φ^{ext}. Следующая лемма – полный аналог соответствующей леммы первой главы, ее доказательство ровно такое же.

Лемма 25 *Имеют место следующие соотношения между производными функции* φ*:*

$$\frac{\partial\varphi(z,\overline{z})}{\partial z_m} + \mathcal{F}_m(z,\overline{z})\frac{\partial\varphi(z,\overline{z})}{\partial z} + \frac{\partial\mathcal{F}_m(z,\overline{z})}{\partial z} = 0, \tag{6.14}$$

где функции $\mathcal{F}_m$ *подчинены следующей асимптотике около нулей* P_n *дифференциала* w *(*$n = 1,\dots,M$*):*

$$\mathcal{F}_m(z_n + x_n^{k_n+1}, \overline{z}_n + \overline{x}_n^{k_n+1}) = \delta_{mn} + a_n x_n^{k_n} + b_n\overline{x}_n x_n^{k_n} + c_n x_n^{k_n+1} + O(|x_n|^{k_n+2}) \tag{6.15}$$

при $x_n \to 0$*; где* a_n, b_n, c_n *– некоторые комплексные постоянные.*

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z_m}T_\epsilon = \frac{i}{2}\oint_{|z-z_m|=\epsilon}|\partial_z\varphi|^2\,d\overline{z} + \int_{\Lambda_\epsilon}\frac{\partial}{\partial z_m}|\partial_z\varphi|^2\,\widehat{dz}. \tag{6.16}$$

Согласно (6.14), последний член в (6.16) переписывается в виде

$$\int_{\Lambda_\epsilon}\frac{\partial}{\partial z_m}|\partial_z\varphi|^2\,\widehat{dz} = \tag{6.17}$$

$$\int_{\Lambda_\epsilon}\Big(((2\varphi_{zz}-\varphi_z^2)[\mathcal{F}_m])_{\overline{z}} - 2(\varphi_z[\mathcal{F}_m]_{\overline{z}})_z + (\varphi_z[\mathcal{F}_m]_z)_{\overline{z}} - (\varphi_{\overline{z}}[\mathcal{F}_m]_z)_z - (|\varphi_z|^2[\mathcal{F}_m])_z\Big)\,\widehat{dz} =$$

$$= -\frac{i}{2}\int_{\partial\Lambda_\epsilon}(2\varphi_{zz}-\varphi_z^2)\mathcal{F}_m\,dz + 2\varphi_z[\mathcal{F}_m]_{\overline{z}}\,d\overline{z} + \varphi_z[\mathcal{F}_m]_z\,dz + \varphi_{\overline{z}}[\mathcal{F}_m]_z\,d\overline{z} + |\varphi_z|^2\mathcal{F}_m\,d\overline{z} =$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{M}\Big[I_1^n + 2I_2^n + I_3^n + I_4^n + I_5^n\Big],$$

где

$$I_1^n = \oint_{|z-z_n|=\epsilon}(2\varphi_{zz}-\varphi_z^2)\mathcal{F}_m\,dz,$$

и слагаемые I_p^n; $p = 2,3,4,5$ суть аналогичные интегралы с подынтегральными выражениями $\varphi_z[\mathcal{F}_m]_{\overline{z}}\,d\overline{z}$, $\varphi_z[\mathcal{F}_m]_z\,dz$, $\varphi_{\overline{z}}[\mathcal{F}_m]_z\,d\overline{z}$ и $|\varphi_z|^2\mathcal{F}_m\,d\overline{z}$ соответственно.

Обозначим через $R^{u,x_n}(x_n)$ шварцеву производную $\{u, x_n\}$, где u – фуксова координата. Используя (6.15), получаем

$$I_1^n = \oint_{|x_n|=\epsilon^{1/(k_n+1)}}\Big[\frac{2R^{u,x_n}(x_n)}{(k_n+1)x_n^{2k_n}} + \left(1 - \frac{1}{(k_n+1)^2}\right)\frac{1}{x_n^{2k_n+2}}\Big]\Big(\delta_{mn} + a_n x_n^{k_n} + b_n\overline{x}_n x_n^{k_n} + \tag{6.18}$$

$$+c_n x_n^{k_n+1} + O(|x_n|^{k_n+2})\Big)(k_n+1)x_n^{k_n}\,dx_n = -\delta_{nm}\frac{4\pi i}{(k_n-1)!\,(k_n+1)}\left(\frac{d}{dx_n}\right)^{k_n-1}R^{u,x_m}(0) -$$

$$-2\pi i(k_n+1)\left(1 - \frac{1}{(k_n+1)^2}\right)c_n + o(1).$$

Ровно так же имеем

$$I_2^n = o(1), \quad I_3^n = -2\pi i\left(\frac{k_n}{k_n+1}a_n\varphi_{x_n}^{int}(0) + (k_n+1)\Big(\frac{1}{k_n+1} - 1\Big)c_n\right) + o(1), \tag{6.19}$$

и

$$I_4^n = 2\pi i \left(\frac{1}{k_n+1} - 1\right)(k_n+1)c_n + o(1), \quad I_5^n = \delta_{mn} \oint_{|z-z_n|=\epsilon} |\varphi_z|^2\, d\overline{z} + \tag{6.20}$$

$$-2\pi i \varphi_{x_n}^{int}(0) \frac{k_n}{k_n+1} a_n + 2\pi i \left(\frac{1}{k_n+1} - 1\right)^2 (k_n+1)c_n + o(1).$$

Суммируя (6.16-6.20), получаем

$$\frac{\partial}{\partial z_m} T_\epsilon = \frac{2\pi}{(k_m-1)!\,(k_m+1)} \left(\frac{d}{dx_m}\right)^{k_m-1} R^{u,x_m}(0) - 2\pi \sum_{n=1}^{M} \frac{k_n}{k_n+1} \left(a_n \varphi_{x_n}^{int}(0) + c_n\right) + o(1). \tag{6.21}$$

Чтобы закончить доказательство, нам нужна следующая лемма.

Лемма 26 *Имеют место равенства*

$$\frac{\partial}{\partial z_m} \varphi^{int}(x_n)\Big|_{x_n=0} = -\frac{1}{k_n+1} (a_n \varphi_{x_n}^{int}(0) + c_n)\,. \tag{6.22}$$

Доказательство. Так как

$$e^{\varphi^{int}(x_n, \overline{x}_n)} |dx_n|^2 = e^{\varphi^{ext}(z,\overline{z})} |dz|^2,$$

мы имеем

$$\varphi^{int}(x_n, \overline{x}_n) = \varphi^{ext}(z, \overline{z}) - \left(\frac{1}{k_n+1} - 1\right) \frac{1}{(k_n+1)^2} \ln |z - z_n|^2 \tag{6.23}$$

и

$$\varphi_{z_m}^{ext}(z, \overline{z}) = \varphi_{z_m}^{int}(x_n, \overline{x}_n) + \mathrm{const}\, \delta_{mn} \frac{1}{x_n^{k_n+1}}. \tag{6.24}$$

Из (6.15) и (6.14) выводим, что

$$\varphi_{z_m}^{ext}(z, \overline{z}) = \tag{6.25}$$

$$= -\Big(\delta_{mn} + a_n x_n^{k_n} + b_n \overline{x}_n x_n^{k_n} +$$

$$c_n x_n^{k_n+1} + O(|x_n|^{k_n+2})\Big) \Big[\frac{1}{(k_n+1) x_n^{k_n}} \varphi_{x_n}^{int}(x_n, \overline{x}_n) + \left(\frac{1}{k_n+1} - 1\right) \frac{1}{x_n^{k_n+1}}\Big] -$$

$$-\frac{k_n}{k_n+1} a_n \frac{1}{x_n} - \frac{k_n}{k_n+1} b_n \frac{\overline{x}_n}{x_n} - c_n + O(|x_n|).$$

Теперь подставляя (6.25) в (6.24) и сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x_n, приходим к (6.22).

□

6.3.2 Сглаживание конической метрики

Доказательство Теоремы 24 основано на следующем ключевом наблюдении. В выделенном локальном параметре около конической точки все метрики $|w|^2$ имеют стандартную форму $|\zeta|^n |dz|^2$, где ζ – соответствующий выделенный локальный параметр и n – целое число. Сглаживая эти метрики в стандартных окрестностях $|\zeta| < \epsilon$ конических точек, мы получаем новые метрики уже без конических сингулярностей. Эти новые метрики можно выбрать так, что площадь поверхности останется той же. Оказывается, что вариации по модулям (координатам на пространстве абелевых дифференциалов) детерминантов лапласианов в старых (конических) и новых (гладких) метриках совпадают.

Чтобы доказать это совпадение, мы применяем формулы аналитической хирургии. Для гладких метрик формула хирургии (БФК-формула) принадлежит Бургли, Фридлендеру и Каппелеру [3]. Используя их идеи вместе с некоторой известной информацией об асимптотике ядра теплопроводности на многообразиях с коническими точками, мы доказываем вариант БФК-формулы для конических метрик. Вместе эти две версии БФК- формулы немедленно влекут совпадение вариаций.

Пусть x_m – выделенный локальный параметр $x_m(P) = \left(\int_{P_m}^{P} w\right)^{1/(k_m+1)}$ около нуля P_m абелева дифференциала w. Выберем $\epsilon > 0$. В дисках $\{|x_m| \leq \epsilon\}$ все метрики w записываются в виде $|x_m|^{2k_m}|dx_m|^2$. Пусть $f(x_m)$ – строго положительная C^∞-функция такая, что $f^{-2}(x_m) = |x_m|^{2k_m}$ для $\epsilon/2 \leq |x_m| \leq \epsilon$, $\int_{D_\epsilon} f^{-2}(x_m)|dx_m|^2 = \int_{D_\epsilon} |x_m|^{2k_m}|dx_m|^2$. Введем метрику $\mathbf{g} := \rho_\epsilon^{-2}|dz|^2$, совпадающую с $|w|^2$ вне дисков $D_\epsilon = \{|x_m| \leq \epsilon\}$ и равную $f^{-2}(x_m)|dx_m|^2$ внутри дисков. Эта метрика несингулярна, принадлежит тому же конформному классу, что и метрика $|w|^2$, и в ней поверхность $\mathcal{L}$ имеет ту же площадь, что и в метрике $|w|^2$.

Предложение 3 *Пусть ∂_t обозначает дифференцирование какой-либо координате на пространстве $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$ и пусть $\det\Delta^{\mathbf{g}}$ – детерминант лапласиана в метрике $\mathbf{g}$. Тогда имеет место соотношение*

$$\partial_t \ln \det\Delta^{|w|^2} = \partial_t \ln \det\Delta^{\mathbf{g}}. \tag{6.26}$$

Доказательство. Для простоты предположим сначала, что $M = 1$. Пусть $D = D_\epsilon = \{|x_1| \leq \epsilon\}$, $\Sigma = \mathcal{L} \setminus D$. Пусть $\Delta^{\mathbf{g}}$ – лапласиан, соответствующий метрике $\mathbf{g}$. Пусть $(\Delta^{|w|^2}|D)$ и $(\Delta^{|w|^2}|\Sigma)$ —- операторы краевых задач Дирихле для $\Delta^{|w|^2}$ в областях D и Σ соответственно. Введем оператор неймановского скачка (псевдодифференциальный оператор на ∂D порядка 1) $R : C^\infty(\partial D) \to C^\infty(\partial D)$ равенством

$$R(f) = \partial_\nu(V^- - V^+),$$

где ν – внешняя нормаль к ∂D, а функции V^- и V^+ суть решения краевых задач $\Delta^\rho V^- = 0$ в D, $V^-|_{\partial D} = f$ и $\Delta^\rho V^+ = 0$ в Σ, $V^+|_{\partial D} = f$ (для краткости не пишем индекс t у ρ_t). Для дальнейшего важно, что оператор неймановского скачка не меняется при изменении метрики в пределах одного и того же конформного класса (операторы $4|w|^{-2}\partial\bar\partial$ и $4\rho^2\partial\bar\partial$ порождают один и тот же оператор неймановского скачка). Согласно теореме B^* из [3], мы имеем

$$\ln \det\Delta^{\mathbf{g}} = \ln \det(\Delta^{\mathbf{g}}|D) + \ln\, \det(\Delta^{\mathbf{g}}|\Sigma) + \ln\, \det R + \ln \mathrm{Vol}(\mathcal{L}, \mathbf{g}) - \ln l(\partial D), \tag{6.27}$$

где $l(\partial D)$ – длина контура ∂D в метрике $\mathbf{g}$ [1].

Сходное утверждение справедливо, если метрика, определяющая лапласиан имеет коническую сингулярность внутри D. Единственное изменение нужно сделать в определении решения краевой задачи для лапласиана в D. Именно, нужно наложить на это решение асимптотическое условие $U(P) = O(1)$ около конической точки. Это условие соответствует выбору самосопряженного расширения по Фридрихсу лапласиана. (Напомним, что решения эллиптических краевых

[1]Мы исключили нулевые моды оператора из определения его детерминанта, таким образом, мы используем одно и то же обозначение $\det A$ для операторов A с нулевыми модами и без них. В ([3]) детерминант оператора A с нулевыми модами – всегда нуль, и то, что мы называем здесь $\det A$ в [3] называется модифицированным детерминантом и обозначается $\det^* A$.

задач обладают специальной асимптотикой вблизи конических точек, в частности, в двумерном случае слабое L_2-решение, неограниченное вблизи конической точки, обязано иметь по меньшей мере логарифмический рост и, следовательно, не может входить в область определения расширения по Фридрихсу.) Приняв это условие, имеем следующую формулу хирургии для оператора $\Delta^{|w|^2}$:

$$\ln \det \Delta^{|w|^2} = \ln \det(\Delta^{|w|^2}|D) + \ln\,\det\,(\Delta^{|w|^2}|\Sigma) + \ln \det R + \ln \mathrm{Vol}(\mathcal{L}, |w|^2) - \ln l(\partial D). \qquad (6.28)$$

Доказательство формулы (6.28) будет дано в следующем разделе. Заметим, что вариации первых слагаемых в правых частях (6.27) и (6.28) исчезают (эти слагаемые не зависят от t), в то время, как вариации всех остающихся слагаемых – одни и те же. Это немедленно влечет равенство (6.26). Для того, чтобы рассмотреть общий случай ($M > 1$), нужно применить очевидное обобщение формул хирургии для случая области D, состоящей из нескольких непересекающихся дисков, этот результат можно найти, например, в ([40], замечание на стр. 326). □

6.3.3 Аналитическая хирургия для плоских метрик с коническими сингулярностями.

Пусть $\mathbf{g}^c = \rho^{-2}|dz|^2$ – плоская метрика с конической сингулярностью на $\mathcal{L}$. пусть D – диск с центром в конической точке (для простоты предполагается, что коническая точка только одна, общий случай отличается лишь чуть более громоздкими обозначениями) и пусть $\Sigma = \mathcal{L} \setminus D$. Введем оператор неймановского скачка R и операторы краевых задач $(\Delta^{\mathbf{g}^c}|D)$ и $(\Delta^{\mathbf{g}^c}|\Sigma)$ для лапласиана $\Delta^{\mathbf{g}^c} = 4\rho^2\overline{\partial}\partial$, как и в предыдущем разделе.

Теорема 25 *Справедлива формула хирургии для оператора* $\Delta^{\mathbf{g}^c}$*:*

$$\ln \det \Delta^{\mathbf{g}^c} = \ln \det(\Delta^{\mathbf{g}^c}|D) + \ln\,\det\,(\Delta^{\mathbf{g}^c}|\Sigma) + \ln \det R + \ln \mathrm{Vol}(\mathcal{L}, \mathbf{g}^c) - \ln l(\partial D)\,. \qquad (6.29)$$

Доказательство. Для обоснования (6.29) необходимо тщательно проанализировать хорошо известное доказательство формулы (6.27) для гладких метрик и отыскать места, где эффекты, связанные с появлением конической точки, вносят в это доказательство изменения. Мы будем следовать плану оригинальной работы [3] и недавней статьи [25], посвященной детерминантам лапласианов во внешних областях. [2]

Как и в [3] и [25] доказательство состоит в установлении следующих трех фактов.

1. Пусть $s > 0$. Обозначим через $R(s)$ оператор неймановского скачка $R(s)f = \partial_\nu(V_s^- - V_s^+)$, где V_s^+ (соответственно V_s^-) – решение задачи Дирихле для оператора $\Delta^{\mathbf{g}^c} + s$ в области D (соответственно $\Sigma = \mathcal{L} \setminus D$) с краевым условием f. Тогда
$$\frac{d}{ds} \ln\,\det\,(\Delta^{\mathbf{g}^c} + s) =$$
$$= \frac{d}{ds} \left\{ \ln\,\det\,(\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|D) + \ln\,\det\,(\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|\Sigma) + \ln\,\det R(s) \right\},$$
и. следовательно,
$$\ln\,\det\,(\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|D) + \ln\,\det\,(\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|\Sigma) + \ln\,\det R(s) =$$
$$= \ln\,\det\,(\Delta^{\mathbf{g}^c} + s) + C \qquad (6.30)$$
с некоторой константой C.

[2]Автор приносит благодарность Стиву Зельдичу и Эндрью Хасселлу за необходимые разъяснения

2. В соотношении (6.30) константа C нулевая.

3. Переходя к пределу $s \to 0+$ в (6.30) с $C = 0$, мы получаем (6.28).

Доказательства утверждений 1 и 3 совпадают с доказательством формулы (3.1) в [25] и рассуждением из раздела 4.9 статьи [3] почти дословно. Единственный относительно новый момент возникает при доказательстве аналога леммы 3.9 из [3] и 3.1 из [25]. Именно, необходимо показать, что оператор
$$G = (\Delta^{\mathbf{g}^c} + s)^{-1} - (\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|\Sigma)^{-1} \oplus (\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|D)^{-1}$$
— ядерный. Пусть $\mathcal{O}$ – коническая точка. Введем весовое пространство Соболева $H_0^n(\mathcal{L})$, $n = 0, 1, 2, \dots$ как пополнение $C^\infty(\mathcal{L} \setminus \mathcal{O})$ в норме

$$||u; H_0^n(\mathcal{L})||^2 = \int_D \sum_{|\alpha| \le n} |r|^{2|\alpha|-2n} |D^\alpha(\chi_1 u)|^2 \, dx + ||\chi_2 u; H^n(\mathcal{L})||^2, \tag{6.31}$$

где χ_1, χ_2 образуют C^∞-разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathcal{L}$ (слегка расширенными) областями D и Σ. Здесь $H^n(\mathcal{L})$ – обычное пространство Соболева, r, ω — полярные координаты около $\mathcal{O}$, dx – некоторая (фиксированная) положительная плотность на $\mathcal{L}$, гладкая в $\mathcal{L} \setminus \mathcal{O}$ и совпадающая с $r\, dr\, d\omega$ около $\mathcal{O}$. Используя двойственность (относительно скалярного произведения в $L_2(\mathcal{L})$), определим пространства $H_0^n(\mathcal{L})$ с $n = -1, -2, \dots$

Пусть χ – C^∞-функция, равная 1 на носителе функции χ_1 из (6.31). Тогда $(1-\chi)(\Delta^{\mathbf{g}^c}+s)^{-1}\chi_1$ и $\chi_1(\Delta^{\mathbf{g}^c}+s)^{-1}(1-\chi)$ суть ограниченные операторы $H_0^n(\mathcal{L}) \mapsto H_0^{n+m}(\mathcal{L})$ для всех $n, m \in \mathbb{Z}, m > 0$ (ср., [27], Лемма 1). Норма в пространстве $H_0^n(\mathcal{L})$ с $n < 0$ оценивается через L_2-норму, в то время, как $H_0^n(\mathcal{L}) \subset H^n(\mathcal{L})$ для положительных n. Используя оценку (4.21) из ([20]), мы заключаем, что операторы $(1-\chi)(\Delta^{\mathbf{g}^c}+s)^{-1}\chi_1$ и $\chi_1(\Delta^{\mathbf{g}^c}+s)^{-1}(1-\chi)$ спектрально пренебрежимы в смысле определения данного на стр. 509 работы [20]. Теперь из доказательства Теоремы 5.1 из [20] следует, что s-числа $s_k(G)$ сингулярного оператора Грина G подчинены асимптотике $O(k^{-2})$ и, стало быть, оператор G ядерный.

Другой эффект, связанный с конической точкой, возникает при доказательстве предложения 2: некоторые асимптотические разложения могут иметь добавочные члены. Для доказательства предложения 2 необходимо рассмотреть асимптотические разложения

$$\ln \det (\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|D) + \ln \det (\Delta^{\mathbf{g}^c} + s|\Sigma) + \ln \det R(s) \tag{6.32}$$

и
$$\ln \det (\Delta^{\mathbf{g}^c} + s) \tag{6.33}$$

при $s \to \infty$ и показать, что они не содержат постоянных членов. Для этого, как и при доказательстве предложения 3.3 из [25], мы перепишем операторную дзета-функцию оператора $\Delta^{\mathbf{g}^c} + s$, как
$$\zeta_s(p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty t^p \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta^{\mathbf{g}^c}} e^{-ts} \frac{dt}{t}; \quad \Re p > 1\,. \tag{6.34}$$

Согласно теореме Чигера (см., напр., [27]), справедливо следующее асимптотическое разложение для ядра оператора теплопроводности на компактном двумерном многообразии с конической точкой:
$$\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta^{\mathbf{g}^c}} \sim \sum_{j=-2}^\infty a_j t^{j/2} + \sum_{j=0}^\infty b_j t^{\frac{j}{2}} \ln t \tag{6.35}$$

при $t \to 0+$. Более того, в нашем случае (когда метрика плоская) в этом разложении отсутствует чисто логарифмический член, т. е. $b_0 = 0$. (Доказательство этого факта может быть найдено в [24].) Чтобы получить асимптотическое разложение (6.33) при $s \to \infty$ надо подставить (6.35) в (6.34) и сделать замену переменной $\tau = ts$ во всех интегралах. Это дает разложение

$$\zeta_s(p) \sim \sum_{j=-2}^{\infty} a_j \frac{\Gamma(p+\frac{j}{2})}{\Gamma(p)} s^{-p-j/2} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j s^{-p-j/2} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \tau^{p+j/2-1} e^{-\tau} \ln \tau d\tau -$$

$$- \ln s \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{\Gamma(p+j/2)}{\Gamma(p)} s^{-p-j/2}.$$

Дифференцируя это (асимптотическое) разложение по p и подставляя $p = 0$ (законность этих операций объяснена в [40] стр. 332 и [60] стр. 445; необходимо отметить, что идея этой части доказательства восходит к [60]), мы получаем разложение

$$\ln \det (\Delta^{\mathbf{g}^c} + s) = \sum_j (p_j s^{-j/2} + q_j s^{-j/2} \ln s + r_j s^{-j/2} \ln^2 s)$$

с $p_0 = 0$. Согласно [3], аналогичное разложение с нулевым постоянным членом (но без квадратов логарифмов) справедливо для второго и третьего слагаемых в (6.32). Анализ асимптотического разложения первого члена в (6.32) в существенном совпадает с анализом (6.33): постоянный член в этом разложении также отсутствует. □

6.3.4 Связь детерминантов лапласианов в конической метрике и в метрике Пуанкаре

Здесь мы устанавливаем связь между вариациями детерминантов лапласианов в метрике Пуанкаре (метрике с равномерно распределенной кривизной)и в плоской конической метрике (метрике с кривизной, сконцентрированной в конечном числе точек). Это соотношение, вместе с формулой (6.5) приведет к результату, эквивалентному утверждению основной нашей основной теоремы 24. Из предложения 3 следует, что

$$\partial_t \left(\ln \frac{\det \Delta^{\mathbf{g}^P}}{\det \Im \mathbf{B} \mathrm{Vol}(\mathcal{L}, \mathbf{g}^P)} - \ln \frac{\det \Delta^{|w|^2}}{\det \Im \mathbf{B} \mathrm{Vol}(\mathcal{L}, |w|^2)} \right) \tag{6.36}$$

$$= \partial_t \left(\ln \frac{\det \Delta^{\mathbf{g}^P}}{\det \Im \mathbf{B} \mathrm{Vol}(\mathcal{L}, \mathbf{g}^P)} - \ln \frac{\det \Delta^{\mathbf{g}}}{\det \Im \mathbf{B} \mathrm{Vol}(\mathcal{L}, \mathbf{g})} \right),$$

где, как обычно, ∂_t обозначает производную по какой-нибудь координате на пространстве абелевых дифференциалов, $\mathbf{g}$ – сглаженная метрика, определенная в разделе 6.3.2.

Мы собираемся применить формулу Полякова (6.3) к правой части соотношения (6.36). Для этого введем, как и в разделе 6.3.1, функцию $\varphi^{ext}(z, \bar{z})$ локального параметра $z(P) = \int_{P_1}^{P} w$ вне нулей дифференциала w:

$$e^{\varphi^{ext}(z,\bar{z})} |dz|^2 = \frac{|du|^2}{|\Im u|^2}, \tag{6.37}$$

где u – фуксова координата. Определим функции $\varphi^{int}(x_m)$ выделенного локального параметра x_m около P_m равенствами

$$e^{\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)}|dx_m|^2 = \frac{|du|^2}{|\Im u|^2} \ . \tag{6.38}$$

Пусть в формуле (6.3) $\mathbf{g}_1$ — метрика Пуанкаре и $\mathbf{g}_0$ — метрика $\mathbf{g}$. Внутри диска $D_m = \{|x_m| \leq \epsilon\}$ имеет место соотношение $\frac{\rho_0}{\rho_1} = f \exp\left(\varphi^{int}/2\right)$, где функция f определена перед предложением 3. Вне дисков D_m имеем $\frac{\rho_0}{\rho_1} = \exp\left(\varphi^{ext}/2\right)$. Заметим также, что гауссова кривизна K_0 равна нулю вне дисков D_m. Более того, функция $K_0\rho_0^{-2} = K_0 f^{-2}$ стремится (в смысле теории распределений) при $\epsilon \to 0$ к линейной комбинации дельта-функций с носителем в нулях w. В частности,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{D_m} \varphi^{int} K_0 f^{-2}\widehat{dx_m} = -2\pi k_m \varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)\Big|_{x_m=0}. \tag{6.39}$$

Пусть, как в разделе, 6.3.1 $\Lambda_\epsilon := \mathcal{L}\setminus\cup_{m=1}^M D_m$. Теперь правая часть (6.36) может быть переписана как

$$-\frac{1}{12\pi}\partial_t\Bigg\{\int_{\Lambda_\epsilon}|\varphi_z^{ext}|^2\widehat{dz}+$$

$$\sum_{m=1}^M\int_{D_m}\left(4|\partial_{x_m}\ln f|^2+2(\ln f)_{x_m}\varphi^{int}_{\overline{x}_m}+2(\ln f)_{\overline{x}_m}\varphi^{int}_{x_m}+|\varphi^{int}_{x_m}|^2\right)\widehat{dx_m}+$$

$$+2\sum_{m=1}^M\int_{D_m}K_0 f^{-2}\ln f\widehat{dx_m}+\sum_{m=1}^M\int_{D_m}\varphi^{int}K_0 f^{-2}\widehat{dx_m}\Bigg\}.$$

Заметим, что

$$\partial_t\left\{4\sum_{m=1}^M\int_{D_m}|\partial_{x_m}\ln f|^2\widehat{dx_m}+2\sum_{m=1}^M\int_{D_m}K_0 f^{-2}\ln f\widehat{dx_m}\right\}=0,$$

поскольку выражение в фигурных скобках не зависит от модулей. Мы также имеем очевидную асимптотику

$$\partial_t\sum_{m=1}^M\int_{D_m}\left(2(\ln f)_{x_m}\varphi^{int}_{\overline{x}_m}+2(\ln f)_{\overline{x}_m}\varphi^{int}_{x_m}+|\varphi^{int}_{x_m}|^2\right)\widehat{dx_m}=o(1)$$

и

$$\partial_t\sum_{m=1}^M\int_{D_m}\varphi^{int}K_0 f^{-2}\widehat{dx_m}=-2\pi\sum_{m=1}^M k_m\partial_t\varphi^{int}(x_m,\overline{x}_m)\Big|_{x_m=0}+o(1)$$

при $\epsilon \to 0$.

Поскольку левая часть (6.36) не зависит от ϵ, то переходя в (6.36) к пределу $\epsilon \to 0$, мы получаем следующую лемму.

Лемма 27 *Имеют место вариационные формулы:*

$$\partial_t\left(\ln\frac{\det\Delta^{\mathbf{g}^P}}{\det\Im\mathbf{B}\mathrm{Vol}(\mathcal{L},\mathbf{g}^P)}-\ln\frac{\det\Delta^{|w|^2}}{\det\Im\mathbf{B}\mathrm{Vol}(\mathcal{L},|w|^2)}\right)=-\frac{1}{12\pi}\partial_t\mathcal{D}_{\mathcal{H}}\ , \tag{6.40}$$

где $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ определено в (6.12).

6.3.5 Редукция Теоремы 24 к вариационной формуле для интеграла Дирихле

Подставляя в (6.5) вместо μ базисные дифференциалы Бельтрами из раздела 5.1.3 и используя Лемму 27, приходим к следующему предложению.

Предложение 4 *Имеют место вариационные формулы*

$$\frac{\partial \ln Q(\mathcal{L},|w|^2)}{\partial \zeta_k} = -\frac{1}{12\pi i}\oint_{s_k}\frac{S_B - S_F}{w} + \frac{1}{12\pi}\frac{\partial \mathcal{D}_{\mathcal{H}}}{\partial \zeta_k}\,, \tag{6.41}$$

где $k = 1, \dots, 2g+M-1$; $Q(\mathcal{L},|w|^2)$ определено в (6.6); $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ определяется в (6.12).

Теорема 24 следует из этого предложения и Леммы 24.

6.4 Явные формулы для $\det\Delta^{|w|^2}$

Следующая теорема - основной результат настоящей главы. Она может рассматриваться, как естественное обобщение результата Рэя-Зингера (5.2) на случай кривых старшего рода.

Теорема 26 *Пусть пара $(\mathcal{L}, w)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_M)$. Тогда детерминант лапласиана $\Delta^{|w|^2}$, действующего в тривиальном линейном расслоении над римановой поверхностью $\mathcal{L}$, дается следующим выражением*

$$\det\Delta^{|w|^2} = C\ \mathrm{Vol}(\mathcal{L},|w|^2)\ \det\Im\mathbf{B}\ |\tau(\mathcal{L},w)|^2, \tag{6.42}$$

где $\mathrm{Vol}(\mathcal{L},|w|^2) := \int_{\mathcal{L}}|w|^2$ – площадь $\mathcal{L}$; $\mathbf{B}$ – матрица b-периодов; постоянная C не зависит от точки связной компоненты страта $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$. Здесь $\tau(\mathcal{L}, w)$ — бергмановская тау-функция на пространстве $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$, даваемая формулой (5.75).

Доказательство. Доказательство немедленно следует из определения бергмановской тау-функции и Теоремы 24. □

Замечание 12 Для произвольной конформной метрики $\mathbf{g}$ на $\mathcal{L}$ выражение

$$Q^{-1} := \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{L},\mathbf{g})\det\Im\mathbf{B}}{\det\Delta^{\mathbf{g}}} := ||1\otimes(v_1\wedge\dots\wedge v_g)||^2_{\mathbf{g}},, \tag{6.43}$$

где $\{v_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,g}$ — базис голоморфных 1-форм на $\mathcal{L}$, нормализованный условием $\int_{a_\alpha} v_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, определяет метрику Квиллена на одномерном слое (детерминантного расслоения)

$$\lambda(\mathcal{O}_{\mathcal{L}}) = \det H^0(\mathcal{L},\mathcal{O}_{\mathcal{L}})\otimes(\det H^1(\mathcal{L},\mathcal{O}_{\mathcal{L}}))^{-1} = \det H^0(\mathcal{L},\mathcal{O}_{\mathcal{L}})\otimes\det H^0(\mathcal{L},\Omega^1_{\mathcal{L}})\,.$$

Формула (5.10) показывает, что если $\mathbf{g} = |w|^2$, то соответствующая функция $Q(\mathcal{L}, w)$, определенная соотношением (6.43) (на самом деле, Q зависит еще от выбора канонического базиса циклов на $\mathcal{L}$, для краткости мы не обозначаем явно эту зависимость), является *квадратом модуля голоморфной функции модулей* (т. е. координат на пространстве голоморфных дифференциалов). Это свойство выделяет плоские конические метрики среди других метрик данного конформного класса, в некотором смысле свойства этих метрик лучше, чем свойства метрики постоянной кривизны: для метрики Пуанкаре $\mathbf{g}$ теорема Белавина-Книжника говорит, что вторые голоморфно-антиголоморфные производные $\ln||1\otimes(v_1\wedge\dots\wedge v_g)||_{\mathbf{g}}$ по (тейхмюллеровым) модулям нетривиальны (см. [16]).

6.5 Формулы Полякова

Здесь мы докажем аналоги формулы Полякова, связывающей детерминанты лапласианов в двух разных гладких конформных метриках, для случаев

а) двух конформных плоских конических метрик

б) метрики Пуанкаре и плоской конической метрики.

Лемма 28 *Пусть w и $\widetilde{w}$ – две голоморфные 1-формы с простыми нулями на римановой поверхности $\mathcal{L}$. Введем дивизоры $(w) := \sum_{m=1}^{2g-2} P_m$ и $(\widetilde{w}) := \sum_{m=1}^{2g-2} \widetilde{P}_m$. Тогда*

$$\frac{\tau(\mathcal{L},w)}{\tau(\mathcal{L},\widetilde{w})} = C\prod_{m=1}^{2g-2}\left\{\frac{\mathrm{res}|_{\widetilde{P}_m}\{w^2/\widetilde{w}\}}{\mathrm{res}|_{P_m}\{\widetilde{w}^2/w\}}\right\}^{1/24} . \tag{6.44}$$

где C – некоторая константа.

Доказательство. Введем выделенный локальный параметр в окрестности точки P_m, как $x_m(P) := \left[\int_{P_m}^P w\right]^{1/2}$; а в окрестности точки $\widetilde{P}_m$, как $\widetilde{x}_m(P) := \left[\int_{\widetilde{P}_m}^P w\right]^{1/2}$. Тогда формула (6.44) может быть переписана так:

$$\tau(\mathcal{L},w)\prod_{m=1}^{2g-2}\widetilde{w}^{1/12}(P_m) = \tau(\mathcal{L},\widetilde{w})\prod_{m=1}^{2g-2}w^{1/12}(\widetilde{P}_m) ,$$

где мы использовали наше обычное соглашение о вычислении 1-форм:

$$\widetilde{w}(P_m) := \frac{\widetilde{w}(P)}{dx_m(P)}\Big|_{P=P_m} , \qquad w(\widetilde{P}_m) := \frac{w(P)}{d\widetilde{x}_m(P)}\Big|_{P=\widetilde{P}_m} . \tag{6.45}$$

Предположим, что фундаментальный многоугольник $\widehat{\mathcal{L}}$ выбран так, что образ при отображении Абеля дивизоров (w) и $(\widetilde{w})$ совпадает с $2K^P$; напомним, что такой выбор всегда возможен (см. Лемму 23). Согласно формулам (5.76), имеем:

$$\frac{\tau^{12}(\mathcal{L},w)\prod_m\widetilde{w}(P_m)}{\tau^{12}(\mathcal{L},\widetilde{w})\prod_m w(\widetilde{P}_m)} = \prod_m\frac{\widetilde{w}(P_m)}{w(\widetilde{P}_m)}\prod_{m<n}\frac{E^2(P_m,P_n)}{E^2(\widetilde{P}_m,\widetilde{P}_n)}\left\{\frac{w(P)\prod_m E(P,\widetilde{P}_m)}{\widetilde{w}(P)\prod_m E(P,P_m)}\right\}^{4g-4} . \tag{6.46}$$

Поскольку это выражение не зависит от P, мы можем разбить степень $4g-4$ выражения в фигурных скобках на произведение по $4g-4$ произвольным точкам, в частности, в произведение по $P_1,\dots,P_{2g-2}$ и $\widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_{2g-2}$. Тогда большинство членов в (6.46) взаимно сокращаются. Те, что остаются, остаются потому, что главные формы равны нулю на диагонали; это компенсирует нули w и $\widetilde{w}$. В результате (6.46) переписывается следующим образом:

$$\prod_m\left\{\lim_{P\to P_m}\frac{w(P)}{E(P,P_m)(dx_m(P)^{3/2}}\lim_{P\to\widetilde{P}_m}\frac{E(P,\widetilde{P}_m)(d\widetilde{x}_m(P))^{3/2}}{\widetilde{w}(P)}\right\} , \tag{6.47}$$

что равняется 1, поскольку, скажем в окрестности P_m, мы имеем $w(P) = 2x_m(P)dx_m(P)$ и $E(P,P_m) = x_m(P)/\sqrt{dx_m(P)}$.

Следующая теорема – аналог формулы Полякова для двух плоских конических метрик.

Теорема 27 *Пусть w и $\widetilde{w}$ — два голоморфных дифференциала с простыми нулями на $\mathcal{L}$. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\frac{\det\Delta^{|w|^2}}{\det\Delta^{|\widetilde{w}|^2}} = \frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{L}, |w|^2)}{\mathrm{Vol}(\mathcal{L}, |\widetilde{w}|^2)} \prod_{k=1}^{2g-2} \left|\frac{w(\widetilde{P}_k)}{\widetilde{w}(P_k)}\right|^{1/6}, \tag{6.48}$$

где $\{P_k\}$ — нули w; $\widetilde{P}_k$ — нули $\widetilde{w}$.

Доказательство. Формула (6.48) следует из выражения (6.42) для детерминанта лапласиана в метрике $|w|^2$ и соотношения (6.44) между значениями бергмановской тау-функции в точках $(\mathcal{L}, w)$ и $(\mathcal{L}, \widetilde{w})$ пространства $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$. Постоянный множитель, который может появиться в (6.48), на самом деле равен 1 — чтобы это проверить, достаточно положить $w = \widetilde{w}$ и воспользоваться связностью страта $\mathcal{H}_g(1, \dots, 1)$, установленной в [38]. □

Наш последний результат — формула факторизации для детерминанта лапласиана в метрике Пуанкаре, которая в сущности является аналогом формулы Полякова для пары (метрика Пуанкаре, плоская коническая метрика).

Теорема 28 *Пусть регуляризованный интеграл Дирихле $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ определен равенством (6.12), а $\det\Delta^{\mathbf{g}^P}$ – детерминант лапласиана в метрике Пуанкаре. Имеет место соотношение*

$$\det\Delta^{\mathbf{g}^P} = \mathrm{C}\det\Im\mathbf{B}\exp\{-\frac{1}{12}\mathcal{D}_{\mathcal{H}}\}|\tau(\mathcal{L}, w)|^2, \tag{6.49}$$

где C — константа, зависящая только от связной компоненты страта $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$ и $\tau(\mathcal{L}, w)$ — бергмановская тау-функция на $\mathcal{H}_g(k_1, \dots, k_M)$.

Доказательство. Это утверждение сразу следует из Теоремы 26 и Леммы 27. □

Список литературы

[1] Bertola, M., Free energy of the two-matrix model/dToda tau-function, Nucl.Phys. **B669** (2003) 435-461

[2] Brüning, J. and Seeley, R., The resolvent expansion for second order operators, J. Funct. Anal. **73** 369-429 (1987)

[3] Burghelea, D., Friedlander, L., and Kappeler, T., Meyer-Vietoris type formula for determinants of elliptic differential operators, J. of Funct. Anal., **107** 34-65 (1992)

[4] Cheeger, J., On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **76** 2103-2106 (1979)

[5] Chekhov, L., Marshakov, A., Mironov, A., Vasiliev, D., DV and WDVV, Phys.Lett. B562 (2003) 323-338

[6] Dubrovin, B., Geometry of 2D topological field theories, in: *Integrable systems and quantum groups. Proceedings,* Montecatini Terme, 1993, pp. 120-348, Lecture Notes in Math., v.1620, Berlin: Springer, 1996

[7] Dubrovin B., Zhang Y., Extended affine Weyl groups and Frobenius manifolds, Comp. Math., 111 (1998) 167-219

[8] Dubrovin B., Zhang Y., Bihamiltonian hierarchies in 2D topological field theory at one-loop approximation, Commun. Math. Phys., 198 (1998), 311-361

[9] Dubrovin B., Zhang Y., Frobenius manifolds and Virasoro constraints, Selecta Math. (N. S.) 5 (1999), 423–466

[10] Deift, P., Its, A., Kapaev, A., Zhou, X., On the algebro-geometric integration of the Schlesinger equation, Comm. Math. Phys., 203 (1999), N3, 613-633

[11] P. Di Francesco, P.Ginzparg, J.Zinn-Zustin, “2D Gravity and Random matrices”, Phys.Rep. **254**, 1 (1995)

[12] D'Hoker E., Phong, D.H., Functional determinants on Mandelstam diagrams. Comm. Math. Phys. **124** 629–645 (1989)

[13] Dugan, M., Sonoda, H., Functional determinants on Riemann surfaces, Nuclear Phys. **B289** 227-252 (1987)

[14] B.Eynard, A.Kokotov, D.Korotkin, Genus one contribution to free energy in Hermitian two-matrix model, Nucl.Phys **B694** 443-472 (2004)

[15] Fay, John D., Theta-functions on Riemann surfaces, Lect.Notes in Math. **352**, Springer (1973)

[16] Fay, John D., Kernel functions, analytic torsion, and moduli spaces, Memoirs of the AMS (464), 1992

[17] Fulton, William, Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, Annals of Math., 90 (1969), 542–575

[18] Forman R., Functional determinants and geometry, Invent. Math. **88** 447-493 (1987)

[19] Enolskii, V., Grava, T., Singular Z_N curves, Riemann-Hilbert problem and modular solutions of the Schlesinger equation, IMRN, **2004** 1619-1683 (2004)

[20] Grubb G., Singular Green operators and their spectral asymptotics. Duke Math. J., 51(1984), N3, pp. 477-528

[21] Givental, A., Elliptic Gromov-Witten invariants and the generalised mirror conjecture, in "Integrable systems and algebraic geometry" (Kobe/Kyoto, 1997), 107–155, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (1998)

[22] Getzler E., The jet-space of a Frobenius manifold and higher-genus Gromov-Witten invariants, arXiv: math.AG/0211338

[23] Hawley, N. S., Schiffer, M., Half-order differentials on Riemann surfaces, Acta Math., 115 (1966), 199–236

[24] Hala Khuri King, Determinants of laplacians on the space of conical metrics on the sphere, Transactions of AMS, **339**, 525-536 (1993)

[25] Hassell, A., and Zelditch, S., Determinants of laplacians in exterior domains, IMRN, **1999** N18, 971-1004 (1999)

[26] Jimbo, M., Miwa, M., Ueno, K., Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients, I, Phys. D **2** 306-352 (1981)

[27] Karol' A. I., Asymptotics of the parabolic Green function for an elliptic operator on a manifold with conical points, Math. Notes, **63** N1, 28-36(1998)

[28] Kitaev, A., Korotkin, D., On solutions of Schlesinger equations in terms of theta-functions, International Mathematics Research Notices No. 17 p. 877-905 (1998)

[29] Knizhnik, V.G., Multiloop amplitudes in the theory of quantum strings and complex geometry, Sov.Phys.Usp. **32** (11) 945-971 (1989)

[30] Kokotov A., Korotkin D., Tau-functions on Hurwitz spaces, "Mathematical Physics, Analysis and Geometry", **7** (2004), no. 1, 47-96

[31] Kokotov, A., Strachan, I., On the isomonodromic tau-function for the Hurwitz spaces of branched coverings of genus zero and one, Math.Res.Letters, 12, 857-875 (2005)

[32] Kokotov, A., Korotkin, D., Tau-functions on spaces of holomorphic differentials over Riemann surfaces and determinants of Laplacians in Strebel metrics of finite volume, math.SP/0405042; preprint of Max-Planck Institute for Mathematics in the Science, Leipzig, 46/2004

[33] Kokotov A., Korotkin D., On G-function of Frobenius manifolds related to Hurwitz spaces, Internat. Math. Res. Notices, **2004** N 7, 343-360 (2004)

[34] Kokotov A., Korotkin D., Bergman tau-function on Hurwitz spaces and its applications, math-ph/0310008, Max-Planck-Institut für Mathematik preprint 03-101

[35] Kokotov A., Korotkin D., Isomonodromic tau-function of Hurwitz Frobenius manifolds and its applications, IMRN (2006)

[36] Korotkin, D., Solution of matrix Riemann-Hilbert problems with quasi-permutation monodromy matrices, Math.Ann., 329 (2004), N2, 335-364

[37] Korotkin, D., Matrix Riemann-Hilbert problems related to branched coverings of CP1, archive math-ph/0106009, to appear in "Operator Theory: Advances and Application", Proceedings of the Summer School on Factorization and Integrable Systems, Algarve, September 6-9, 2000. Ed by I.Gohberg, A. F. dos Santos and N.Manojlovic, Birkhauser, Boston, 2002

[38] Kontsevich, M., Zorich, A., Connected components of the moduli spaces of holomorphic differentials with prescribed singularities, Invent. Math. **153** 631-678 (2003)

[39] Kontsevitch, M., Zorich A., Lyapunov exponents and Hodge theory, hep-th/9701164

[40] Yoonweon Lee, Mayer-Vietoris formula for determinants of elliptic operators of Laplace-Beltrami type (after Burghelea, Friedlander and Kappeler), Differential Geometry and its Appliccations 7(1997), 325-340

[41] H. Masur, Interval exchange transformations and measured foliations, Ann. of Math., 115 (1982), 169–200

[42] Mumford, D., Tata Lectures on Theta, Birkhäuser, 1984

[43] Manin Yu. I., Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces, AMS, 1999

[44] Nagase, N., The fundamental solution of the heat equation on Riemannian spaces with cone-like singular points, Kodai Math. J. **7** 382-455 (1984)

[45] Natanzon S., Hurwitz spaces, in "Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups", Madrid, 1998, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 287, 165-177

[46] Natanzon S., Turaev V., A compactification of the Hurwitz space., Topology 38 (1999), N 4, 889-914

[47] Natanzon, S.M., Topology of 2-dimensional coverings and meromorphic functions on real and complex algebraic curves, Selecta Mathematica (formely Sovietica), vol. 12 (1993), N.3, 251-291

[48] Polyakov, Quantum geometry of bosonic strings, Phys.Lett. **103B**, 211-213 (1981)

[49] Polchinski J., Evaluation of the one-loop string path integral, Comm. Math. Phys., **104** 37-47 (1986)

[50] Ray, D. B.; Singer, I. M. Analytic torsion for complex manifolds. Ann. of Math. (2) **98** 154–177 (1973)

[51] Rauch, H.E., Weierstrass points, branch points, and moduli of Riemann surfaces, Comm. Pure Appl. Math. **12** 543-560 (1959)

[52] Rauch, H. E., A transcendental view of the space of algebraic Riemann surfaces. Bull. Amer. Math. Soc., **71** (1965), 1-39

[53] V.Shramchenko, Deformations of Frobenius structures on Hurwitz spaces, IMRN **2005** N0.6 339-387 (2005)

[54] Sonoda, H., Functional determinants on punctured Riemann surfaces and their application to string theory. Nuclear Phys. **B294** 157-192 (1987)

[55] Strebel, K., Quadratic differentials, Springer, 1984

[56] V.Shramchenko, "Real doubles"of Hurwitz Frobenius manifolds, Commun.Math.Phys. **256** 635-680 (2005)

[57] Strachan I. A. B., Symmetries and solutions of Getzler's equation for Coxeter and extended affine Weyl Frobenius manifold, Intern. Math. Research Notices (2003) No 19, 1035-1051 (2003)

[58] Tyurin, A.N., Periods of quadratic differentials (Russian), Uspekhi Mat. Nauk **33** , no. 6(204), 149-195 (1978)

[59] W. Veech, Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps, Ann. of Math., 115 (1982), 201-242

[60] Voros A., Spectral Functions, Special Functions and the Selberg Zeta Function, Commun. Math. Phys., 110, 439-465 (1987)

[61] R.Wentworth, Asymptotics of determinants from functional integration, J. Math. Phys., 32(7), 1991, 1767-1773

[62] Zograf, P. G.; Takhtajan, L. A. On the uniformization of Riemann surfaces and on the Weil-Petersson metric on the Teichmüller and Schottky spaces. Math. USSR-Sb. **60** (1988), no. 2, 297–313

[63] Zograf P. G., Takhtajan, L. A., Potential of the Weil-Peterson metric on Torelli space, J. Sov. Math., 52(1990), 3077-3085

[64] Zograf, P. G. Liouville action on moduli spaces and uniformization of degenerate Riemann surfaces. Leningrad Math. J. **1** (1990) no. 4, 941-965

[65] Zograf, P., Determinants of Laplacians, Liouville action, and an analog of the Dedekind η-function on Teichmüller space, unpublished manuscript (1997)

[66] Zograf, P., Takhtajan, L., On the Liouville equation, accessory parameters and the geometry of Teichmüller space for Riemann surfaces of genus 0. Math. USSR-Sb. **60** No.2 297-313 (1988)

[67] Zograf, P., Takhtajan, L., A local index theorem for families of $\overline{\partial}$-operators on Riemann surfaces (Russian) Uspekhi Mat. Nauk 42 (1987), N6 (258), 133-150

[68] Zverovich, E.I., Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces, *Russ. Math. Surveys* **26** 117-192 (1971)