ПОМИ ПРЕПРИНТ — 14/2006

ВЕЙЛЕВСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА МАКСВЕЛЛА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИПШИЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

М. Ш. БИРМАН, Н. Д. ФИЛОНОВ

[1]Санкт-Петербургский
государственный университет
РОССИЯ, 198504, С.-Петербург
Петродворец, ул. Ульяновская, 1

[2]Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
РОССИЯ, 191011, С.-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27

Октябрь 2006

АННОТАЦИЯ

Рассмотрим стационарный оператор Максвелла с негладкими коэффициентами (диэлектрическая и магнитная проницаемости) в ограниченной области с липшицевой границей. Обоснована вейлевская асимптотика для спектра такого оператора.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-01-01076-а.

1. Введение

1.1. Работа посвящена оправданию вейлевской асимптотики для частот электромагнитных колебаний резонатора $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с идеально проводящей границей $\partial\Omega$. Трудности здесь связаны с возможными нарушениями гладкости границы $\partial\Omega$ и с негладкостью матриц-функций $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, $x \in \Omega$; последние описывают соответственно диэлектрическую и магнитную проницаемости среды, заполняющей резонатор Ω. Пусть u, v – электрическая и магнитная напряженности электромагнитного поля в Ω. Частоты собственных колебаний соответствуют спектру стационарного оператора Максвелла $M = M_{\varepsilon,\mu}$, действующего на пару $\{u, v\}$ по формуле

$$M\{u, v\} = \{i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v, -i\mu^{-1} \operatorname{rot} u\}. \tag{1.1}$$

При этом предполагается, что выполнены условия соленоидальности

$$\operatorname{div}(\varepsilon u) = 0, \qquad \operatorname{div}(\mu v) = 0, \tag{1.2}$$

и граничные условия

$$u_\tau \mid_{\partial\Omega} = 0, \qquad (\mu v)_\nu \mid_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, индекс τ соответствует касательной составляющей вектора на $\partial\Omega$, а ν – нормальной составляющей. Однако формулы (1.1)–(1.3) недостаточны для однозначной реализации оператора $M_{\varepsilon,\mu}$ как самосопряженного оператора в надлежащем весовом пространстве типа L_2. Когда $\partial\Omega$ и матрицы ε, μ достаточно гладкие, существенных трудностей не возникает. Оператор (1.1) в этом случае следует определять на полях класса Соболева $H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$. Тогда граничные условия (1.3) можно понимать в смысле теорем вложения; не возникает трудностей и с пониманием условий (1.2). Совсем иначе обстоит дело в "негладких" ситуациях, которые представляют значительный прикладной интерес. Даже в случае, когда $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$ (пустой резонатор), но Ω – **невыпуклый** многогранник, определение оператора M только на полях класса $H^1(\Omega)$ приводит не к самосопряженному оператору, а к симметричному оператору с бесконечными индексами дефекта. Выбор "правильного" самосопряженного расширения диктуется физически естественным условием конечности электромагнитной энергии. Последнее в негладких ситуациях шире, чем привычное для эллиптических задач требование принадлежности полей классу Соболева.

Другие осложнения возникают при негладких ε, μ. Условия (1.2) теряют разумный смысл на полях класса $H^1(\Omega)$. Таким образом, в "негладких" ситуациях трудности возникают уже на уровне правильного определения оператора Максвелла. Обзор связанных с этим обстоятельств приведен в статьях [8] и [5], см. также ниже §2, 3.

1.2. Главный член асимптотики спектра для пустого резонатора был вычислен еще Г. Вейлем [13]. В то время Вейль разработал общую вариационную технику вычисления спектральной асимптотики для многомерных операторов математической физики. Задача об электромагнитном резонаторе явилась одним из примеров применения этой техники и не доставила больших затруднений. В [13] была получена асимптотическая формула

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1/3} m_k = \left(\frac{\operatorname{mes}\Omega}{3\pi^2}\right)^{-1/3}. \tag{1.4}$$

Здесь m_k – положительные собственные значения оператора Максвелла (при $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$), занумерованные в порядке неубывания. В общем случае асимптотическая формула несколько усложняется. Впрочем, стандартные эвристические соображения позволяют написать правильную асимптотическую формулу. Именно, пусть $r(\xi)$ – символическая матрица, отвечающая дифференциальному выражению rot:

$$r(\xi) = i \begin{pmatrix} 0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & -\xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим алгебраическую задачу

$$r(\xi)\mu(x)^{-1}r(\xi)h = \Lambda\varepsilon(x)h, \qquad h \in \mathbb{C}^3, \quad x \in \Omega, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^3. \tag{1.6}$$

Обозначим через Λ_1, Λ_2 два положительных собственных значения задачи (1.6) (третье собственное значение равно нулю). Положим

$$\Gamma(\varepsilon,\mu,\Omega) = \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{|\theta|=1} \left(\Lambda_1(x,\theta)^{-3/2} + \Lambda_2(x,\theta)^{-3/2}\right) dS(\theta)dx. \tag{1.7}$$

Тогда для $m_k = m_k(\varepsilon,\mu)$ справедлива асимптотика

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1/3}m_k = \Gamma(\varepsilon,\mu,\Omega)^{-1/3}. \tag{1.8}$$

Для гладких $\partial\Omega$, ε, μ асимптотику (1.8) нетрудно обосновать как вариационным, так и тауберовым методом. Авторы затрудняются указать работу, где соответствующий результат был получен впервые. Отметим, однако, что в гладком случае асимптотика (1.8) может считаться прямым следствием общих теорем о спектральной асимптотике для эллиптических систем. Подробнее об этом см. в обзоре [8].

1.3. Значительно труднее обосновать асимптотику (1.8) при нарушении гладкости. Здесь продвижения сильно задержались во времени. Они оказались связаны с общим усовершенствованием вариационной техники и с прогрессом в теоретико-функциональном описании самого оператора Максвелла. Содержательные результаты для негладких ситуаций были получены сравнительно недавно. Остановимся на этом несколько подробнее.

В случае, когда граница $\partial\Omega$ – гладкая, но матрицы-функции ε, μ измеримы и удовлетворяют лишь условиям (2.1), асимптотика (1.8) обоснована в работах [2, 3]. В [2] область определения оператора $M_{\varepsilon,\mu}$ была описана в терминах оператора $M_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$. Последний в случае гладкой границы определен на полях класса $H^1(\Omega)$. В результате вопрос свелся к вариационной задаче на классе H^1 при наличии “разрешимой связи” – эллиптического дифференциального уравнения. И в вариационной задаче, и в уравнении связи присутствуют негладкие коэффициенты. Последнее обстоятельство сильно усложняло задачу, но к тому времени уже была хорошо разработана техника работы с “негладкими” вариационными задачами без связей. На этой основе в [3] были установлены спектральные асимптотические формулы для широкого класса вариационных задач со связями. Отсюда, в частности, следовал нужный результат о задаче со связью, к которой в [2] была сведена задача об асимптотике спектра оператора $M_{\varepsilon,\mu}$.

Отметим, что в [2] по сути использовались абстрактные соображения. Они используются и в рассматриваемом ниже общем случае. В сообщении [3] доказательства не приводились. Хотя доказательства были полностью изложены в диссертации [1], журнальной публикации не последовало по техническим причинам.

Если граница $\partial\Omega$ – не гладкая (например, липшицева), то даже вопрос о спектральной асимптотике (1.4) (т.е. в случае $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$) не сводится к вариационной задаче на классе $H^1(\Omega)$. Нужная вариационная задача должна ставиться на более широком классе, который ниже обозначен через $F(\tau, \mathbb{1})$. Этот класс удалось сравнительно явно описать в случае, когда граница $\partial\Omega$ – липшицева. Именно, тогда выполнено условие 5.1 (см. ниже). Этот факт по существу был установлен в [7] (приведенное там утверждение сформулировано в несколько более слабом виде), см. также [8, теорема 3.1]. Ниже дано несколько иное доказательство того, что условие 5.1 выполнено, если граница липшицева (см. теорему 5.4 и §7). Это доказательство заимствовано из [12]. Результата из [7] оказалось достаточно, чтобы обосновать вариационными средствами асимптотику (1.4) для областей с липшицевой границей. Это сделано в [9].

1.4. Следовало ожидать, что объединение подходов из [2, 3] и из [9] должно привести к следующему результату.

Теорема 1.1. *Пусть Ω – ограниченная область с липшицевой границей и измеримые матрицы-функции ε, μ удовлетворяют условию* (2.1). *Тогда для спектра оператора Максвелла $M_{\varepsilon,\mu}$ справедлива асимптотика* (1.8).

Однако такое объединение подходов не происходит автоматически. Оно требует преодоления определенных трудностей. Полное изложение доказательства теоремы 1.1 и являлось основной целью авторов. При этом выяснилось, что для оправдания асимптотики (1.8) нужно только, чтобы область Ω удовлетворяла условию 5.1. Липшицевость границы сама по себе больше нигде не используется. Таким образом, теорема 1.1 оказалась прямым следствием более общей теоремы 5.5 об асимптотике спектра и теоремы 5.4.

Доказательство теоремы 5.5 сведено к обоснованию спектральной асимптотики для одной вариационной задачи со связью. Соответствующий результат (теорема 6.1) содержится в общих результатах из [3]. Поскольку доказательства, содержащиеся в [1], трудно доступны, целесообразно адаптировать соответствующие рассуждения к условиям теоремы 6.1. При этом некоторое упрощение связано с тем, что в условиях теоремы 6.1 выполнены граничные условия Дирихле. Но и в этом случае изложение оказывается достаточно техническим и громоздким. Поэтому было решено выделить доказательство теоремы 6.1 в отдельную публикацию [4]. Вместе с ней настоящая работа завершит сильно затянувшуюся историю с доказательством теоремы 1.1.

1.5. Состав статьи следующий. В §2 обсуждаются нужные для дальнейшего функциональные классы. В §3 речь идет о точном определении оператора Максвелла. В §4 задача о спектре оператора Максвелла получает вариационную формулировку. В §5 формулируются результаты работы и преобразуется вариационная задача. В §6 доказательство основной теоремы 5.5 сводится к вариационной задаче со связью. В §7 устанавливается, что для липшицевых областей выполнено условие 5.1. Наконец, в §8 перечислены некоторые нерешенные вопросы.

2. Классы функций

2.1. Обозначения. Ниже $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное открытое множество. В Ω заданы две измеримые вещественные (3×3)-матрицы-функции ε и μ, играющие роль диэлектрической и магнитной проницаемостей. Предполагается, что почти везде

$$\varepsilon_0 \, \mathbb{1} \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \varepsilon_1 \, \mathbb{1}, \qquad \mu_0 \, \mathbb{1} \leqslant \mu(x) \leqslant \mu_1 \, \mathbb{1}, \quad x \in \Omega; \tag{2.1}$$

здесь ε_0, ε_1, μ_0, μ_1 – положительные числа, $\mathbb{1}$ – единичная матрица. Символы $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ и $| \, . \, |$ означают стандартное скалярное произведение и норму в векторном пространстве $\mathbb{C}^3$. Обозначения $L_2(\Omega) = L_2(\Omega, \mathbb{C})$ и $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ имеют обычный смысл; через $(\, . \, , \, . \,)$ и $\| \, . \, \|$ обозначаются скалярное произведение и норма в каждом из этих гильбертовых пространств. Далее, $H^l(\Omega) = H^l(\Omega, \mathbb{C})$, $H^l(\Omega, \mathbb{C}^3)$ – классы Соболева; символ $H^1_0(\Omega)$ означает замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ в норме класса $H^1(\Omega)$; аналогичный смысл имеет обозначение $H^1_0(\Omega, \mathbb{C}^3)$. Через $L_2(\Omega, \varepsilon)$ обозначается весовое гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\varepsilon u_1, u_2) = \int_\Omega \langle \varepsilon u_1, u_2 \rangle dx, \qquad u_1, u_2 \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3).$$

Аналогичный смысл имеет обозначение $L_2(\Omega, \mu)$. Дифференциальные операции div, rot понимаются в смысле теории распределений.

2.2. Граничные условия вида (1.3) для вектор-функций удобно понимать в следующем обобщенном смысле.

Определение 2.1. *Пусть* $u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$. *Тогда*

(ν). *Если* $\operatorname{div} u \in L_2(\Omega)$, *то условие* $u_\nu \, |_{\partial\Omega} = 0$ *означает, что*

$$(u, \nabla\omega) = -(\operatorname{div} u, \omega), \qquad \forall \omega \in H^1(\Omega).$$

(τ). *Если* $\operatorname{rot} u \in L_2(\Omega)$, *то условие* $u_\tau \, |_{\partial\Omega} = 0$ *означает, что*

$$(u, \operatorname{rot} z) = (\operatorname{rot} u, z), \qquad \forall z \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) \ : \ \operatorname{rot} z \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3).$$

2.3. Разложения Вейля. Введем в $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ подпространства

$$G(\Omega) = \{ u = \nabla\varphi; \quad \varphi \in H^1_{loc}(\Omega), \nabla\varphi \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) \},$$

$$G_0(\Omega) = \{ u = \nabla\varphi; \quad \varphi \in H^1_0(\Omega) \}$$

и определим подпространства $J(\tau, \varepsilon)$, $J(\nu, \mu)$ посредством *разложений Г. Вейля*

$$L_2(\Omega, \varepsilon) = G_0(\Omega) \oplus_\varepsilon J(\tau, \varepsilon), \tag{2.2}$$

$$L_2(\Omega, \mu) = G(\Omega) \oplus_\mu J(\nu, \mu), \tag{2.3}$$

ортогональных соответственно в $L_2(\Omega, \varepsilon)$ и в $L_2(\Omega, \mu)$. Ясно, что тогда

$$J(\tau, \varepsilon) = \{ u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{div}(\varepsilon u) = 0 \},$$

$$J(\nu, \mu) = \{ u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{div}(\mu u) = 0, (\mu u)_\nu \, |_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

2.4. Пространство $F(\tau,\varepsilon)$ вводится соотношением

$$F(\tau,\varepsilon)=\{u\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3):\operatorname{rot}u\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3),\operatorname{div}(\varepsilon u)\in L_2(\Omega),u_\tau\mid_{\partial\Omega}=0\}$$

и является полным гильбертовым пространством относительно метрической формы

$$\|u\|^2_{F(\tau,\varepsilon)}=\|\operatorname{rot}u\|^2+\|\operatorname{div}(\varepsilon u)\|^2+(\varepsilon u,u). \qquad (2.4)$$

В $F(\tau,\varepsilon)$ содержатся (замкнутые) подпространства

$$E(\tau,\varepsilon)=F(\tau,\varepsilon)\cap G_0(\Omega)=\{u=\nabla\varphi:\varphi\in H^1_0(\Omega),\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi)\in L_2(\Omega)\}, \qquad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\Phi(\tau,\varepsilon)&=F(\tau,\varepsilon)\cap J(\tau,\varepsilon)=\\&=\{v\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3):\operatorname{rot}v\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3),\operatorname{div}(\varepsilon v)=0,v_\tau\mid_{\partial\Omega}=0\}.\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Пространство (2.5) состоит из градиентов решений уравнения

$$-\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi)=f,\qquad \varphi\in H^1_0(\Omega),f\in L_2(\Omega), \qquad (2.7)$$

понимаемых в слабом смысле. Элементарно проверяется

Предложение 2.2. *Справедливо ортогональное относительно метрики* (2.4) *разложение*

$$F(\tau,\varepsilon)=E(\tau,\varepsilon)\oplus_{F(\tau,\varepsilon)}\Phi(\tau,\varepsilon). \qquad (2.8)$$

Справедливо также

Предложение 2.3. *Компактность вложения в* $L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)$ *пространств* $F(\tau,\varepsilon)$ *и* $\Phi(\tau,\varepsilon)$ *имеет место одновременно.*

Доказательство. В силу ограниченности множества Ω разрешающий оператор задачи Дирихле (2.7) компактен как оператор из $L_2(\Omega)$ в $H^1_0(\Omega)$. Это означает, что пространство $E(\tau,\varepsilon)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)$. Остается сослаться на (2.8). $\bullet$

В [10] содержится

Предложение 2.4. *Компактность вложения* $F(\tau,\varepsilon)$ *в* $L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)$ *имеет место одновременно для любых матриц* ε*, подчиненных условию вида* (2.1)*. В частности, можно принять* $\varepsilon=\mathbb{I}$*.*

Наряду с $F(\tau,\varepsilon)$, $\Phi(\tau,\varepsilon)$ можно ввести пространства $F(\nu,\mu)$, $\Phi(\nu,\mu)$. Именно,

$$F(\nu,\mu)=\{u\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3):\operatorname{rot}u\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3),\operatorname{div}(\mu u)\in L_2(\Omega),(\mu u)_\nu\mid_{\partial\Omega}=0\},$$

$$\|u\|^2_{F(\nu,\mu)}=\|\operatorname{rot}u\|^2+\|\operatorname{div}(\mu u)\|^2+(\mu u,u),$$

$$\begin{aligned}\Phi(\nu,\mu)&=F(\nu,\mu)\cap J(\nu,\mu)=\\&=\{v\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3):\operatorname{rot}v\in L_2(\Omega,\mathbb{C}^3),\operatorname{div}(\mu v)=0,(\mu v)_\nu\mid_{\partial\Omega}=0\}.\end{aligned}$$

Для этих пространств справедливы (см. [10]) аналоги предложений 2.2 и 2.4 (но не 2.3). Впрочем, они нам не понадобятся.

2.5. Операторы Π_ε, $\hat{\Pi}_\varepsilon$ определим как (ε)-ортогональные проекторы в разложении (2.2) на подпространства $G_0(\Omega)$, $J(\tau,\varepsilon)$ соответственно. В [3, 10] содержится следующее

Предложение 2.5. *Оператор* $\hat{\Pi}_{\mathbb{I}}$ *биективно и непрерывно отображает* $J(\tau,\varepsilon)$ *на* $J(\tau,\mathbb{I})$ *и* $\Phi(\tau,\varepsilon)$ *на* $\Phi(\tau,\mathbb{I})$*. При этом обратное отображение дается оператором* $\hat{\Pi}_\varepsilon$*.*

3. Оператор Максвелла

3.1. Операторы, порожденные выражением rot. В $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ свяжем с дифференциальным выражением rot три оператора $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_*$ соответственно на (плотных) областях определения

$$\operatorname{Dom} \mathcal{R}_0 = C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}^3),$$

$$\operatorname{Dom} \mathcal{R} = \{u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3), u_\tau \mid_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$\operatorname{Dom} \mathcal{R}_* = \{u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)\}.$$

Тогда $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{R}_*$, *операторы* $\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{R}_*$ *замкнуты и взаимно сопряжены в* $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$:

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}_*, \qquad (\mathcal{R}_*)^* = \mathcal{R}. \tag{3.1}$$

Оператор $\mathcal{R}$ *есть замыкание оператора* $\mathcal{R}_0$. Таким образом, $\mathcal{R}$ – *минимальный*, а $\mathcal{R}_*$ – *максимальный* операторы, порожденные в $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ дифференциальным выражением rot.

3.2. Определение оператора Максвелла. В ортогональной сумме гильбертовых пространств

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,\mu} := L_2(\Omega, \varepsilon) \oplus L_2(\Omega, \mu)$$

на области определения

$$\operatorname{Dom} \mathcal{M}_{\varepsilon,\mu} := \operatorname{Dom} \mathcal{R} \oplus \operatorname{Dom} \mathcal{R}^*$$

рассмотрим “блочный” оператор

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,\mu} := \begin{pmatrix} 0 & i\varepsilon^{-1}\mathcal{R}^* \\ -i\mu^{-1}\mathcal{R} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

В силу (3.1) *оператор* $\mathcal{M}_{\varepsilon,\mu}$ *самосопряжен в пространстве* $\mathcal{G}_{\varepsilon,\mu}$. Ортогональная сумма $G_0 \oplus G$ очевидно содержится в ядре оператора (3.2):

$$G_0 \oplus G \subset \ker \mathcal{M}_{\varepsilon,\mu}.$$

Поэтому, в соответствии с (2.2), (2.3), ортогональная сумма

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu} := J(\tau, \varepsilon) \oplus J(\nu, \mu) \tag{3.3}$$

приводит оператор $\mathcal{M}_{\varepsilon,\mu}$. Часть оператора $\mathcal{M}_{\varepsilon,\mu}$ в $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ обозначим через $M_{\varepsilon,\mu}$. *Оператор* $M_{\varepsilon,\mu}$ *по определению примем за оператор Максвелла, отвечающий резонатору* Ω *с идеально проводящей границей, заполненному средой с характеристиками* ε *и* μ. Легко понять, что оператор $M_{\varepsilon,\mu}$ имеет блочный вид относительно ортогональной суммы (3.3). Именно, введем операторы $R = R(\varepsilon, \mu)$ и $R_* = R_*(\varepsilon, \mu)$ следующими соотношениями:

$$R : J(\tau, \varepsilon) \to J(\nu, \mu), \qquad R_* : J(\nu, \mu) \to J(\tau, \varepsilon), \tag{3.4}$$

$$Ru = -i\mu^{-1} \operatorname{rot} u, \qquad u \in \operatorname{Dom} R = \Phi(\tau, \varepsilon), \tag{3.5}$$

$$R_* v = i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v, \qquad v \in \operatorname{Dom} R_* = \Phi(\nu, \mu). \tag{3.6}$$

Из (3.1) следует, что операторы R, R_* взаимно сопряжены:

$$R^* = R_*, \qquad (R_*)^* = R.$$

Самосопряженный в пространстве $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ оператор $M = M_{\varepsilon,\mu}$ записывается блочной формулой

$$M = M_{\varepsilon,\mu} = \begin{pmatrix} 0 & R(\varepsilon,\mu)^* \\ R(\varepsilon,\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Отметим, что соотношения (1.1) учтены формулами (3.5)–(3.7). Соотношения (1.2) и второе условие (1.3) автоматически учтены в (3.4); первое условие (1.3) учтено определением (2.6) пространства $\Phi(\tau,\varepsilon)$.

3.3. О спектре оператора Максвелла. Пусть σ – (третья) матрица Паули

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \sigma^* = \sigma^{-1}.$$

Тем же символом обозначим унитарный в $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ оператор умножения на матрицу σ. Очевидно,

$$\sigma^* M \sigma = -M,$$

т.е. операторы M и $(-M)$ унитарно эквивалентны. В частности, отсюда следует, что *спектр оператора M симметричен относительно точки 0.*

В соответствии с (3.7) имеем:

$$M^2 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S_* \end{pmatrix},$$

где

$$S = R^* R : J(\tau,\varepsilon) \to J(\tau,\varepsilon), \quad S_* = RR^* : J(\nu,\mu) \to J(\nu,\mu).$$

При этом

$$\ker M = \ker R \oplus \ker R^* = \ker S \oplus \ker S_*.$$

Части операторов S и S_*, действующие соответственно в $J(\tau,\varepsilon) \ominus_\varepsilon \ker S$ и в $J(\nu,\mu) \ominus_\mu \ker S_*$, унитарно эквивалентны. Отсюда следует, что спектральный анализ оператора M сводится к спектральному анализу строго положительной части оператора S (или оператора S_*) и указанию ядра M.

В дальнейшем будем использовать обозначение

$$Z_\varepsilon := \ker R(\varepsilon,\mu).$$

Ясно, что Z_ε не зависит от μ. Дополним теперь предложение 2.5.

Предложение 3.1. *Оператор $\hat{\Pi}_{\mathbb{I}}$ биективно отображает Z_ε на $Z_{\mathbb{I}}$. Обратное отображение дается оператором $\hat{\Pi}_\varepsilon$. В частности, выполнено равенство*

$$\dim Z_\varepsilon = \dim Z_{\mathbb{I}} =: l. \tag{3.8}$$

Отметим, что справедлив и аналог (3.8) для операторов $R(\varepsilon,\mu)^*$. Именно, величина

$$l_* := \dim \ker R(\varepsilon,\mu)^*$$

не зависит от ε и μ.

До сих пор предполагалось, что Ω – любое ограниченное открытое множество. Сейчас мы примем следующее

Условие 3.2. *Вложение в $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ пространства $\Phi(\tau, \varepsilon)$, снабженного метрикой (2.4), компактно.*

Замечание 3.3. Условие 3.2 равносильно предположению о компактности резольвенты оператора S или, что то же, дискретности спектра S. Другие очевидные переформулировки этого условия вытекают из предложений 2.3, 2.4. В частности, условие 3.2 есть условие только на Ω и не зависит от ε.

Замечание 3.4. В терминах оператора M условие 3.2 равносильно тому, что положительный (а тогда и отрицательный) спектр M дискретен и отделен от нуля. Точка 0 также может оказаться (изолированным) собственным значением (кратности $\dim\ker M = l + l_*$). При этом кратность точки 0 бесконечна тогда и только тогда, когда $l_* = \dim\ker R^* = \infty$.

Замечание 3.5. Спектр оператора M можно было бы изучать, рассматривая оператор S_*. Однако рассматривать оператор S технически удобнее, а получаемые на этом пути результаты более естествены.

Обозначим через m_k $(\to +\infty)$ *положительные* собственные значения оператора M, занумерованные в порядке неубывания с учетом кратностей. Тогда спектр M совпадает с последовательностью

$$..., -m_2, -m_1, 0, m_1, m_2, ...;$$

лишь в случае $\ker M = \{0\}$ точка 0 оказывается регулярной.

Наша цель состоит в отыскании главного члена асимптотики чисел m_k при $k \to \infty$. Пусть σ_k, $k \in \mathbb{N}$, – последовательные *положительные* собственные значения оператора S. Тогда, очевидно,

$$\sigma_k = m_k^2, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{3.9}$$

и дело сводится к нахождению асимптотики для последовательности чисел σ_k при $k \to \infty$.

4. Вариационная постановка задачи

4.1. Вариационное отношение. Для оператора $R = R(\varepsilon, \mu)$ рассмотрим отношение квадратичных форм (вариационное отношение)

$$\frac{\|Ru\|^2_{L_2(\Omega,\mu)}}{\|u\|^2_{L_2(\Omega,\varepsilon)}} = \frac{(\mu^{-1}\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u)}{(\varepsilon u, u)}, \qquad u \in \Phi(\tau, \varepsilon) \ominus_\varepsilon Z_\varepsilon. \tag{4.1}$$

При условии 3.2 спектр оператора S дискретен и его положительные собственные значения σ_k совпадают с последовательными минимумами отношения (4.1). Поэтому достаточно рассмотреть спектр вариационного отношения (4.1). Полезно, однако, перейти к рассмотрению последовательных максимумов $\lambda_k > 0$ обратного отношения

$$\frac{(\varepsilon u, u)}{(\mu^{-1}\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u)}, \qquad u \in \Phi(\tau, \varepsilon), \quad (\varepsilon u, z_\varepsilon) = 0 \quad \forall z_\varepsilon \in Z_\varepsilon; \tag{4.2}$$

тогда, очевидно,

$$\lambda_k = \sigma_k^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Все же и отношение (4.2) не вполне удобно, поскольку условие $u \in \Phi(\tau, \varepsilon)$ содержит "связь" $\operatorname{div}(\varepsilon u) = 0$, зависящую от (негладкой) матрицы ε. Поэтому мы подвергнем вариационную задачу (4.2) дальнейшему эквивалентному преобразованию.

4.2. Преобразование вариационной задачи (4.2). Напомним, что через Π_ε обозначен оператор проектирования $L_2(\Omega, \varepsilon)$ на $G_0(\Omega)$ в соответствии с ортогональным разложением (2.2). Другими словами, для $u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ выполнено $\Pi_\varepsilon u = \nabla\varphi$, где $\varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$ определено соотношением

$$(\varepsilon(u - \nabla\varphi), \nabla\zeta) = 0, \qquad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}). \tag{4.4}$$

На $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ определим непрерывную полуторалинейную форму

$$K_\varepsilon[u_1, u_2] = (\varepsilon u_1, u_2) - (\varepsilon \Pi_\varepsilon u_1, \Pi_\varepsilon u_2) = (\varepsilon(u_1 - \Pi_\varepsilon u_1), u_2 - \Pi_\varepsilon u_2), \qquad u_1, u_2 \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3). \tag{4.5}$$

Второе выражение для K_ε получается из первого на основании (4.4). Равенство (4.5) можно записать также в виде

$$K_\varepsilon[u_1, u_2] = \left(\varepsilon \hat{\Pi}_\varepsilon u_1, \hat{\Pi}_\varepsilon u_2\right), \quad \hat{\Pi}_\varepsilon = I - \Pi_\varepsilon. \tag{4.6}$$

Квадратичная форма $K_\varepsilon[u, u]$ неотрицательна. Ясно также, что

$$K_\varepsilon[u, v] = 0 \quad \text{при } u \in G_0(\Omega),\ v \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3), \tag{4.7}$$

$$K_\varepsilon[u_1, u_1] = K_\varepsilon[u_2, u_2] \quad \text{при } u_1 - u_2 \in G_0(\Omega). \tag{4.8}$$

Положим теперь в (4.2) $v = \hat{\Pi}_{\mathbb{1}} u \in \Phi(\tau, \mathbb{1})$. Тогда (см. предложение 2.5) $u = \hat{\Pi}_\varepsilon v$ и, в силу (4.6),

$$K_\varepsilon[v, v] = \left(\varepsilon \hat{\Pi}_\varepsilon v, \hat{\Pi}_\varepsilon v\right) = (\varepsilon u, u).$$

Кроме того, $u - v \in G_0(\Omega)$, а потому $\operatorname{rot} u = \operatorname{rot} v$. Остается пересчитать условие ортогональности в (4.2). Воспользовавшись предложением 3.1, имеем:

$$0 = (\varepsilon u, z_\varepsilon) = (\varepsilon \hat{\Pi}_\varepsilon v, z_\varepsilon) = (\varepsilon v, \hat{\Pi}_\varepsilon z_\varepsilon) = (\varepsilon v, z_{\mathbb{1}}), \qquad \forall z_{\mathbb{1}} \in Z_{\mathbb{1}}.$$

В итоге установлено

Предложение 4.1. *Спектр* $\{\lambda_k\}$ *отношения* (4.2) *совпадает со спектром (последовательными максимумами) отношения*

$$\frac{K_\varepsilon[v, v]}{(\mu^{-1} \operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v)}, \qquad v \in \Phi(\tau, \mathbb{1}), \quad (\varepsilon v, z_{\mathbb{1}}) = 0 \quad \forall z_{\mathbb{1}} \in Z_{\mathbb{1}}. \tag{4.9}$$

4.3. Дальнейшее преобразование вариационной задачи содержится в следующем утверждении.

Предложение 4.2. *Спектр* $\{\lambda_k\}$ *отношения* (4.9) *совпадает с положительным спектром отношения*

$$\frac{K_\varepsilon[w, w]}{(\mu^{-1} \operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + \| \operatorname{div} w \|^2}, \qquad w \in F(\tau, \mathbb{1}), \tag{4.10}$$

при условиях ортогональности

$$(\varepsilon\hat{\Pi}_{\mathbb{1}} w, z_{\mathbb{1}}) = 0 \quad \forall z_{\mathbb{1}} \in Z_{\mathbb{1}}. \tag{4.11}$$

Доказательство. Положим

$$v = \hat{\Pi}_{\mathbb{1}} w \in \Phi(\tau, \mathbb{1}), \quad \nabla\varphi = \Pi_{\mathbb{1}} w \in E(\tau, \mathbb{1}) \subset G_0(\Omega).$$

Тогда $w = v + \nabla\varphi$, и в силу (2.8), (4.8), отношение (4.10) принимает вид

$$\frac{K_\varepsilon[v, v]}{(\mu^{-1}\operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v) + \|\Delta\varphi\|^2}, \tag{4.12}$$

причем v и $\nabla\varphi$ не зависят друг от друга. Условие (4.11) совпадает с условием ортогональности в (4.9). Таким образом, последовательные (ненулевые) максимумы в (4.12) достигаются при $\varphi = 0$, что приводит к (4.9). •

Из доказательства ясно, что *перед слагаемым* $\|\operatorname{div} w\|^2$ *в знаменателе* (4.10) *можно поставить любой множитель* $\alpha > 0$*; спектр при этом не изменится.*

5. Формулировки результатов

5.1. Ужесточение условия на Ω. В дальнейшем станем предполагать, что ограниченное открытое множество Ω удовлетворяет более сильному условию, нежели условие 3.2.

Условие 5.1. *Существуют линейные непрерывные операторы*

$$X : F(\tau, \mathbb{1}) \to H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3), \qquad Y : F(\tau, \mathbb{1}) \to E(\tau, \mathbb{1}),$$

такие что $X + Y = I$.

Поясним, что непрерывность X и Y означает следующее. Пусть

$$w \in F(\tau, \mathbb{1}), \quad v = Xw, \quad \nabla\varphi = w - v = Yw.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|v\|^2_{H^1} + \|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 \leqslant C\|w\|^2_{F(\tau,\mathbb{1})}. \tag{5.1}$$

Легко понять, что ецли условие 5.1 выполнено, то операторы X и Y не определяются однозначно.

Так как $H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ и $E(\tau, \mathbb{1})$ компактно вкладываются в $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$, то *при условии* 5.1 *условие* 3.2 *также выполнено.* Обратное, вообще говоря, неверно. В связи с условием 5.1 отметим еще, что

$$\ker X \subset E(\tau, \mathbb{1}) \subset G_0(\Omega). \tag{5.2}$$

Далее, пусть выполнено

Условие 5.2. *Существуют линейные непрерывные операторы* $X_0 : \Phi(\tau, \mathbb{1}) \to H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$, $Y_0 : \Phi(\tau, \mathbb{1}) \to E(\tau, \mathbb{1})$, *такие что* $X_0 u_0 + Y_0 u_0 = u_0$ *при* $u_0 \in \Phi(\tau, \mathbb{1})$.

Предложение 5.3. *Условия* 5.1 *и* 5.2 *равносильны.*

Доказательство. Пусть выполнено условие 5.2. Тогда в силу (2.8) и условие 5.1 выполнено при $X = X_0\hat{\Pi}_{\mathbb{1}}$, $Y = \Pi_{\mathbb{1}} + Y_0\hat{\Pi}_{\mathbb{1}}$. •

5.2. Достаточные условия справедливости условия 5.1.

Теорема 5.4. *Для ограниченной области с липшицевой границей условие* 5.1 *выполнено.*

Все необходимое для доказательства этого утверждения фактически содержится в [7] (см. там доказательство теоремы 4.1). Однако в [7] формально проверялось более слабое свойство липшицевых областей, нежели условие 5.1. Для замкнутости изложения мы приведем в §7 доказательство теоремы 5.4. Оно заимствовано из [12] и технически несколько отличается от рассуждения из [7].

Другой класс областей, удовлетворяющих условию 5.1, представляют собой *"области с экранами"*, о которых идет речь в [11]. Для таких областей также установлена справедливость условия 5.1 (в [11] – в ослабленной форме, а в [12] – в полном объеме).

5.3. Основной результат об асимптотике спектра оператора Максвелла представляет собой

Теорема 5.5. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *– ограниченное открытое множество, удовлетворяющее условию* 5.1, *и пусть* ε *и* μ *– измеримые матрицы-функции, удовлетворяющие* (2.1). *Тогда для положительных собственных значений* m_k *оператора Максвелла* $M_{\varepsilon,\mu}$, *определенного в* (3.7), *справедлива асимптотика*

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1/3} m_k = \Gamma^{-1/3}, \tag{5.3}$$

где коэффициент $\Gamma = \Gamma(\varepsilon,\mu,\Omega)$ *определен в* (1.7).

Ясно, что теорема 1.1 получается простым сопоставлением теорем 5.4 и 5.5.

Введем в рассмотрение функцию распределения $n(\,.\,,(4.10))$ последовательных максимумов отношения (4.10):

$$n(\lambda,(4.10)) = \operatorname{card}\{n\in\mathbb{N} : \lambda_n > \lambda\}, \qquad \lambda > 0.$$

В соответствии со сказанным в §4 (см. (3.9), (4.3) и предложения 4.1, 4.2) *асимптотика* (5.3) *равносильна асимптотике*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{3/2} n(\lambda,(4.10)) = \Gamma(\varepsilon,\mu,\Omega). \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь наряду с отношением (4.10) отношение

$$\frac{K_\varepsilon[w,w]}{(\mu^{-1}\operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + \|\operatorname{div} w\|^2 + \|w\|^2}, \qquad w \in F(\tau,\mathbb{1}), \tag{5.5}$$

и соответствующую функцию распределения $n(\lambda,(5.5))$ его последовательных максимумов. Справедливо

Предложение 5.6. *Асимптотика* (5.4) *(а тогда и* (5.3)*) равносильна асимптотике*

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{3/2} n(\lambda,(5.5)) = \Gamma(\varepsilon,\mu,\Omega). \tag{5.6}$$

Доказтельство. Квадратичная форма $\|w\|^2$ *компактна* относительно формы, стоящей в знаменателе отношения (4.10). Поэтому (см. [6, лемма 1.16]) ее можно добавить в знаменатель отношения (4.10), не изменяя степенной асимптотики спектра (сам спектр при этом изменится). После этого можно устранить условия ортогональности (4.11) (их конечное число), что также не изменит степенной асимптотики спектра. $\bullet$

6. Сведение теоремы 5.5 к результатам работы [2]

6.1. Вариационные задачи со связями. Мы выведем теорему 5.5 из общих результатов статьи [2] о спектре задач с разрешимыми связями.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ произвольное ограниченное открытое множество. В качестве основной метрической формы на классе $H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$ ниже принимается форма

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}), \tag{6.1}$$

а на классе $H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ – форма

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = \int\limits_{\Omega} \left(|\operatorname{rot} w|^2 + |\operatorname{div} w|^2\right) dx, \quad w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3). \tag{6.2}$$

Пусть теперь b, f – две измеримые (3×3)-матрицы-функции, причем

$$0 < b_0\, \mathbb{1} \leqslant b(x) \leqslant b_1\, \mathbb{1}, \quad x \in \Omega, \tag{6.3}$$
$$f \in L_3(\Omega).$$

Отметим, что матрицы b, f могут не быть вещественными. Положим

$$B[\varphi, \varphi] = \int\limits_{\Omega} \langle b \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx, \quad \varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}). \tag{6.4}$$

Вследствие (6.3) форма B эквивалентна форме (6.1).

Для $w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ определим функцию $\varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$ из уравнения

$$\operatorname{div}(b \nabla \varphi - f w) = 0,$$

понимаемого в том смысле, что

$$(b \nabla \varphi - f w, \nabla \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}). \tag{6.5}$$

В силу непрерывности вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_6(\Omega)$, уравнение (6.5) имеет единственное решение $\varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$. При этом линейный оператор $\Psi : w \mapsto \varphi$, непрерывен:

$$\Psi : H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3) \to H_0^1(\Omega, \mathbb{C}).$$

Введем форму $K_{b,f}$,

$$\begin{aligned} K_{b,f}[w, w] &= (b^{-1} f w, f w) - B[\Psi w, \Psi w] \\ &= \left(b^{-1}(f w - b \nabla(\Psi w)), f w - b \nabla(\Psi w)\right), \quad w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Ясно, что неотрицательная форма $K_{b,f}$ непрерывна на классе $H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$. Более того, нетрудно видеть, что эта форма компактна. Введем также форму

$$A_\alpha[w, w] = (\mu^{-1} \operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + \alpha \|\operatorname{div} w\|^2, \quad w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \alpha > 0.$$

В силу (2.1) эта форма метрически эквивалентна форме (6.2).

Рассмотрим теперь вариационное отношение

$$\frac{K_{b,f}[w, w]}{A_\alpha[w, w]}, \qquad w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \alpha > 0. \tag{6.7}$$

Числитель этого отношения содержит нелокальный оператор $\Psi : w \mapsto \varphi$. Относительно пары w, φ отношение (6.7) имеет локальный характер, но на аргументы w, φ наложена связь (6.5). Асимптотика спектра широкого класса вариационных задач со связями рассматривалась в [2].

Из общих результатов работы [2] можно, в частности, извлечь следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное открытое множество. Для спектра отношения* (6.7) *при любом $\alpha > 0$ справедлива асимптотика*

$$n(\lambda, (6.7), \alpha) \sim (2\pi)^{-3} \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^3} n(\lambda; x, \xi, \alpha) dx d\xi, \quad \lambda \to 0. \tag{6.8}$$

Здесь $n(\lambda; x, \xi, \alpha)$ – считающая функция λ-спектра конечномерной задачи

$$\begin{aligned} &f(x)^* b(x)^{-1} f(x) h - \langle b(x)\xi, \xi\rangle^{-1} \langle h, f(x)^*\xi\rangle f(x)^*\xi \\ &= \lambda \left(r(\xi)\mu(x)^{-1} r(\xi) h + \alpha \langle h, \xi\rangle \xi \right), \quad 0 \neq h \in \mathbb{C}^3; \end{aligned} \tag{6.9}$$

матрица $r(\xi)$ определена в (1.5), *$x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.*

субхеадинг**6.2** Следствием теоремы 6.1 является следующая

Теорема 6.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное открытое множество. Для функции распределения спектра вариационного отношения*

$$\frac{K_\varepsilon[w, w]}{(\mu^{-1} \operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + \alpha(\|\operatorname{div} w\|^2 + \|w\|^2)}, \qquad w \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \alpha > 0, \tag{6.10}$$

при любом $\alpha > 0$ справедлива асимптотика

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{3/2} n(\lambda, (6.10), \alpha) = \Gamma(\varepsilon, \mu, \Omega). \tag{6.11}$$

Доказательство. Непосредственно видно, что при $b = f = \varepsilon$ форма $K_{b,f}$ переходит в форму K_ε, определенную в (4.5), (4.6). Знаменатель отношения (6.10) отличается от знаменателя отношения (6.7) лишним слагаемым $\alpha\|w\|^2$. Оно является компактной в $H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ формой, а потому может быть устранено в (6.10) без нарушения асимптотики.

Остается проверить, что асимптотика (6.11) переходит в (6.8). Действительно, уравнение (6.9) при $b = f = \varepsilon$ переходит в соотношение

$$\varepsilon h - \langle \varepsilon\xi, \xi\rangle^{-1} \langle \varepsilon h, \xi\rangle \varepsilon\xi = \lambda \left(r(\xi)\mu^{-1} r(\xi) h + \alpha\langle h, \xi\rangle\xi \right),$$
$$0 \neq h \in \mathbb{C}^3, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}. \tag{6.12}$$

Вектор $h = \xi$ является, очевидно, собственным при $\lambda = 0$. Остальные два собственные вектора должны быть ортогональны к вектору ξ в метрике, задаваемой матрицей

$$r(\xi)\mu^{-1} r(\xi) + \alpha\langle\, . \,, \xi\rangle\xi.$$

Ясно, что это условие ортогональности сводится к равенству $\langle h, \xi\rangle = 0$. В результате (6.12) принимает вид

$$\varepsilon h - \langle \varepsilon\xi, \xi\rangle^{-1} \langle \varepsilon h, \xi\rangle \varepsilon\xi = \lambda r(\xi)\mu^{-1} r(\xi) h, \quad \langle h, \xi\rangle = 0, \qquad (6/13)$$

причем зависимости от α уже нет. После подстановки

$$h_* = h - \langle \varepsilon\xi, \xi\rangle^{-1}\langle \varepsilon h, \xi\rangle\xi,$$

задача (6.13) переходит в задачу

$$\varepsilon h_* = \lambda r(\xi)\mu^{-1} r(\xi) h_*, \quad \langle \varepsilon h_*, \xi\rangle = 0. \tag{6.14}$$

Поскольку заведомо $\lambda > 0$, уравнение (6.14) совпадает при $\lambda = \Lambda^{-1}$ с задачей (1.6) на положительные собственные значения Λ.

Далее, эти собственные значения $\Lambda_j(x,\xi)$, $j = 1,2$, положительно однородны второго порядка по ξ. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} n(\lambda; x, \xi, \alpha) d\xi = \frac{1}{3\lambda^{3/2}} \int\limits_{|\theta|=1} \left(\Lambda_1(\theta)^{-3/2} + \Lambda_2(\theta)^{-3/2}\right) dS(\theta).$$

С учетом сказанного асимптотика (6.8) при $b = f = \varepsilon$ переходит в асимптотику (6.11). $\bullet$

6.3. Вывод теоремы 5.5 из теоремы 6.2. Отношения (5.5) и (6.10) определены на разных пространствах функций. Это отличие существенно. Важно также, что на классе H_0^1 форма в знаменателе отношения (6.10) эквивалентна H^1-метрике. На классе $F(\tau, \mathbb{I})$ это, вообще говоря, не так. Например, если Ω – невыпуклый многогранник, то $F(\tau, \mathbb{I})$ содержит линейное бесконечномерное подмножество вектор-функций, не принадлежащих классу $H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$. Тем не менее, условие 5.1 позволяет вывести теорему 5.5 из теоремы 6.2.

Мы уже видели (предложение 5.6), что требуемая асимптотика (5.3) равносильна асимптотике (5.6) для спектра отношения (5.5).

Поскольку $H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3) \subset F(\tau, \mathbb{I})$, из (6.11) при $\alpha = 1$ сразу следует, что

$$\liminf_{\lambda \to 0} \lambda^{3/2} n(\lambda, (5.5)) \geqslant \Gamma(\varepsilon, \mu, \Omega). \tag{6.15}$$

Опираясь на условие 5.1, удается установить противоположное неравенство для верхнего предела. Воспользуемся леммой Глазмана применительно к функциям распределения спектра $n(\lambda, (5.5))$, $n(\lambda, (6.10), \alpha)$. Имеем:

$$n(\lambda, (5.5)) = \max \dim L, \quad L \subset F(\tau, \mathbb{I}),$$

где максимум берется по всем подпространствам L, для которых

$$K_\varepsilon[w,w] > \lambda\left((\mu^{-1}\operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + \|\operatorname{div} w\|^2 + \|w\|^2\right), \quad w \in L \setminus \{0\}. \tag{6.16}$$

В свою очередь,

$$n(\lambda, (6.10), \alpha) = \max \dim L_0, \quad L_0 \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3), \tag{6.17}$$

где максимум берется по всем подпространствам L_0, для которых выполнено

$$K_\varepsilon[v,v] > \lambda\left((\mu^{-1}\operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v) + \alpha\left(\|\operatorname{div} v\|^2 + \|v\|^2\right)\right), \quad v \in L_0 \setminus \{0\}. \tag{6.18}$$

Фиксируем $\lambda > 0$. Пусть $L \subset F(\tau, \mathbb{I})$ – подпространство, для которого выполнено (6.16) и такое, что $n(\lambda, (5.5)) = \dim L$. Рассмотрим подпространство $L_0 = XL \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$, где X – оператор из условия 5.1. В силу (5.2) и (4.7)

$\dim L_0 = \dim L$. Пусть $v = Xw$ $(\neq 0)$. Тогда $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot} w$ и, в силу (4.8), $K_\varepsilon[v,v] = K_\varepsilon[w,w]$. Далее, с учетом (5.1), имеем:

$$
\begin{aligned}
&(\mu^{-1}\operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v) + \alpha\left(\|\operatorname{div} v\|^2 + \|v\|^2\right)\\
\leqslant&(\mu^{-1}\operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + C\alpha\left(\|\operatorname{rot} w\|^2 + \|\operatorname{div} w\|^2 + \|w\|^2\right)\\
\leqslant&(1 + C\alpha\mu_1)(\mu^{-1}\operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + C\alpha\left(\|\operatorname{div} w\|^2 + \|w\|^2\right)\\
\leqslant&C(\alpha)\left((\mu^{-1}\operatorname{rot} w, \operatorname{rot} w) + \|\operatorname{div} w\|^2 + \|w\|^2\right),
\end{aligned}
$$

$$C(\alpha) := 1 + C\alpha(1 + \mu_1),$$

и с учетом (6.16)

$$(\mu^{-1}\operatorname{rot} v, \operatorname{rot} v) + \alpha\left(\|\operatorname{div} v\|^2 + \|v\|^2\right) \leqslant \lambda^{-1}C(\alpha)K_\varepsilon[w,w] = \lambda^{-1}C(\alpha)K_\varepsilon[v,v],$$
$$0 \neq v \in L_0 \subset H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3).$$

В силу (6.17), (6.18) это означает, что

$$n(\lambda, (5.5)) = \dim L = \dim L_0 \leqslant n(\lambda(C(\alpha))^{-1}, (6.10), \alpha).$$

Теперь из (6.11) следует, что

$$\limsup_{\lambda\to 0} \lambda^{3/2} n(\lambda, (5.5)) \leqslant (C(\alpha))^{3/2} \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{3/2} n(\lambda, (6.10), \alpha) = (C(\alpha))^{3/2}\Gamma(\varepsilon, \mu, \Omega).$$

В этом соотношении перейдем к пределу при $\alpha \to 0$. Тогда получим неравенство

$$\limsup_{\lambda\to 0} \lambda^{3/2} n(\lambda, (5.5)) \leqslant \Gamma(\varepsilon, \mu, \Omega),$$

которое вместе с (6.15) приводит к (5.6). $\bullet$

6.4. Комментарии. Доказательства результатов сообщения [2] не публиковались, но они подробно изложены в диссертации [1]. Полное доказательство теоремы 6.1, основанное на материале из [1], будет опубликовано в другом месте (см. [4]).

Отметим также, что мы использовали только теорему 6.2, фактически являющуюся частным случаем теоремы 6.1 $(b = f = \varepsilon)$. Формулировка более общей теоремы 6.1 существенна: благодаря независимости коэффициентов b и f, доказательство теоремы 6.1 оказывается проще, чем прямое доказательство теоремы 6.2.

7. Доказательство теоремы 5.4

Нам осталось привести доказательство теоремы 5.4.

7.1. Обозначения. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное открытое множество, $\mathcal{B}$ – некоторый фиксированный шар, $\mathcal{B} \supset \overline{\Omega}$ и $\mathcal{A} := B \setminus \overline{\Omega}$. В этом параграфе в обозначение функциональных классов будем включать соответствующее множество. Пусть $f \in J(\nu, \mathbb{1}, \Omega)$. Продолжая f нулем на $\mathcal{B} \setminus \Omega$, получим элемент пространства $J(\nu, \mathbb{1}, \mathcal{B})$, для которого сохраним обозначение f. Положим

$$w(x) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{f(y)\,dy}{|x-y|}, \quad x \in \mathcal{B}.$$

Тогда

$$w \in H^1(\mathcal{B}, \mathbb{C}^3), \qquad \|w\|_{H^1(\mathcal{B},\mathbb{C}^3)} \leqslant C_1 \|f\|_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)}, \tag{7.1}$$

$$\operatorname{rot} w(x) = f(x), \quad x \in \mathcal{B}. \tag{7.2}$$

Предположим теперь, что Ω – *ограниченная область с липшицевой границей, гомеоморфная шару.* Тогда область $\mathcal{A}$ односвязна. В силу (7.2) $\operatorname{rot} w(x) = 0$, $x \in \mathcal{A}$. Поэтому $w = \nabla\theta$ в $\mathcal{A}$, $\int_{\mathcal{A}} \theta dx = 0$, причем в силу (7.1), $\theta \in H^2(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ и

$$\|\theta\|_{H^2(\alpha A,\mathbb{C})} \leqslant C_2 \|f\|_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)}. \tag{7.3}$$

Так как граница $\partial\mathcal{A}$ – липшицева, то *существует линейный непрерывный оператор продолжения* $\Xi : H^2(\mathcal{A}, \mathbb{C}) \to H^2(\mathcal{B}, \mathbb{C})$. Положим $\theta_* = \Xi\theta$. В соответствии с (7.3)

$$\|\theta_*\|_{H^2(\mathcal{B},\mathbb{C})} \leqslant C_3 \|f\|_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)}. \tag{7.4}$$

7.2. Две леммы. В этом пункте по-прежнему считаем, что Ω – *область с липшицевой границей, гомеоморфная шару.*

Лемма 7.1. *Существует линейный непрерывный оператор* $\mathcal{W} : J(\nu, \mathbb{I}, \Omega) \to H^1_0(\Omega, \mathbb{C}^3)$, *такой что*

$$\operatorname{rot}(\mathcal{W}f) = f, \qquad f \in J(\nu, \mathbb{I}, \Omega). \tag{7.5}$$

Доказательство. Пусть f, w и θ_* – те же, что и в п. 7.1. Функция $w - \nabla\theta_* \in H^1(\mathcal{B}, \mathbb{C}^3)$, а потому имеет след на границе $\partial\Omega$ в смысле теорем вложения. Поскольку $w - \nabla\theta_* = 0$ в $\mathcal{A}$, этот след равен нулю. Положим $\mathcal{W}f = (w - \nabla\theta_*) |_\Omega$; тогда $\mathcal{W}f \in H^1_0(\Omega, \mathbb{C}^3)$ и $\operatorname{rot}(\mathcal{W}f) = \operatorname{rot} w = f$. Линейность $\mathcal{W}$ очевидна. Кроме того, в силу (7.1), (7.4) есть оценка

$$\|\mathcal{W}f\|_{H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)} \leqslant C_4 \|f\|_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)}, \qquad C_4 = C_1 + C_3. \tag{7.6}$$

•

Пусть теперь $\mathcal{R}$ – введенный в п.3.1 минимальный оператор, связанный с дифференциальным выражением rot.

Лемма 7.2. *Существуют линейные непрерывные операторы* $\mathcal{X} : \operatorname{Dom}\mathcal{R} \to H^1_0(\Omega, \mathbb{C}^3)$ *и* $\mathcal{Y} : \operatorname{Dom}\mathcal{R} \to \nabla H^1_0(\Omega, \mathbb{C})$, *такие что* $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = I$.

Доказательство. Для $u \in \operatorname{Dom}\mathcal{R}$ положим $\operatorname{rot} u = f \in J(\nu, \mathbb{I}, \Omega)$ и

$$v = \mathcal{X}u = \mathcal{W}f \in H^1_0(\Omega, \mathbb{C}^3).$$

При этом, согласно (7.6),

$$\|v\|_{H^1(\Omega,\mathbb{C}^3)} \leqslant C_4 \|\operatorname{rot} u\|_{L_2(\Omega,\mathbb{C}^3)}, \tag{7.7}$$

т.е. оператор $\mathcal{X}$ непрерывен. Далее, продолжим функции u и v нулем в $\mathcal{A}$. В силу (7.5), $\operatorname{rot}(u - v) = 0$ в $\mathcal{B}$. Поэтому для некоторой функции $\psi \in H^1(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ будет $u - v = \nabla\psi$. Так как $(\nabla\psi) |_{\mathcal{A}} = 0$ и $\mathcal{A}$ – связно, то можно считать $\psi |_{\mathcal{A}} = 0$. Таким образом, $\psi |_\Omega \in H^1_0(\Omega)$ и остается принять $\mathcal{Y}u = \nabla\psi |_\Omega$. •

7.3. Справедливость леммы 7.2 без условия гомеоморфности Ω шару. Поскольку граница области Ω – липшицева, то найдется конечный набор функций $\{\xi_j\}$, $j = 1, ..., k$, таких что

$$\xi_j \in C^1(\overline{\Omega}); \qquad \sum_{j=1}^{k} \xi_j(x) = 1, \quad x \in \overline{\Omega}; \qquad \xi_j(x) = 0, \quad x \notin \Omega_j;$$

при этом области $\Omega_j \subset \Omega$ *гомеоморфны шару* и имеют липшицеву границу. Пусть $\mathcal{R}_j$, $\mathcal{X}_j$, $\mathcal{Y}_j$ – операторы вида $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ соответственно, построенные для области Ω_j. Для $u \in \operatorname{Dom}\mathcal{R}$ запишем равенство $u = \sum_j \hat{u}_j$, где $\hat{u}_j = \xi_j u$. Тогда $u_j = \hat{u}_j \mid_{\Omega_j} \in \operatorname{Dom}\mathcal{R}_j$. Отметим, что

$$\|\operatorname{rot} u_j\|_{L_2(\Omega_j, \mathbb{C}^3)} \leqslant c_j \left(\|\operatorname{rot} u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)} + \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)}\right). \tag{7.8}$$

Применительно к области Ω_j лемма 7.2 дает

$$u_j = \mathcal{X}_j u_j + \mathcal{Y}_j u_j = v_j + \nabla\psi_j, \qquad v_j \in H_0^1(\Omega_j, \mathbb{C}^3),\ \psi_j \in H_0^1(\Omega_j, \mathbb{C}).$$

Будем считать функции v_j, ψ_j распространенными нулем до функций класса $H_0^1(\Omega)$. Тогда $u = v + \nabla\psi$, где $v = \sum_j v_j$, $\psi = \sum_j \psi_j$. Можно положить $\mathcal{X}u = v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3)$ и $\mathcal{Y}u = \nabla\psi$, $\psi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C})$. Непрерывность $\mathcal{X}$ следует (см. (7.7), (7.8)) из оценки

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)} &\leqslant \sum_j \|v_j\|_{H^1(\Omega_j, \mathbb{C}^3)} \leqslant \left(\max_j \|\mathcal{X}_j\|\right) \left(\sum_j \|\operatorname{rot} u_j\|_{L_2(\Omega_j, \mathbb{C}^3)}\right) \\ &\leqslant C_5 \left(\|\operatorname{rot} u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)} + \|u\|_{L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)}\right), \qquad C_5 = \left(\max_j \|\mathcal{X}_j\|\right) \sum_j c_j. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Лемма 7.2 доказана в полном объеме. $\bullet$

7.4. Доказательство теоремы 5.4. Пусть $u \in \Phi(\tau, \mathbb{1}, \Omega)$ (этого достаточно в силу предложения 5.3). Используем лемму 7.2:

$$u = v + \nabla\psi, \quad \mathcal{X}u = v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}^3), \quad \mathcal{Y}u = \nabla\psi, \quad \psi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{C}).$$

Поскольку $\operatorname{div} u = 0$, то $\Delta\psi = -\operatorname{div} v$ и, в силу 7.9,

$$\|\Delta\psi\|_{L_2(\Omega, \mathbb{C})} \leqslant \|v\|_{H^1(\Omega, \mathbb{C}^3)} \leqslant C_6 \|u\|_{F(\tau, \mathbb{1})}. \tag{7.10}$$

Таким образом, $\nabla\psi \in E(\tau, \mathbb{1})$. Положим

$$X_0 = \mathcal{X} \mid_{\Phi(\tau, \mathbb{1})}, \qquad Y_0 = \mathcal{Y} \mid_{\Phi(\tau, \mathbb{1})}.$$

Тогда $u = v + \nabla\psi = X_0 u + Y_0 u$. Непрерывность X_0 и Y_0 следует из (7.10). $\bullet$

8. Некоторые нерешенные задачи

Мы перечислим здесь некоторые проблемы, естественно возникающие в связи с настоящей работой. Ниже $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ открытое ограниченное множество; матрицы-функции ε, μ удовлетворяют условию (2.1).

8.1. Найти необходимое и достаточное условие (критерий) отделенности от нуля и дискретности положительного спектра оператора Максвелла $M_{\varepsilon,\mu}$. Этот вопрос эквивалентен выполнимости условия 3.2. Его достаточно решить (см. замечание 3.3) для случая $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$. Ответ должен быть сформулирован в терминах геометрии области Ω.

8.2. Пусть условие 3.2 выполнено. Указать критерий справедливости вейлевской асимптотики (5.3) для спектра оператора Максвелла. Авторы ожидают, что такой критерий не должен зависеть от ε и μ и может быть выражен в терминах геометрии области Ω.

8.3. Найти "явно геометрическую" переформулировку условия 5.1.

8.4. При условии 5.1 и при $\varepsilon = \mu = \mathbb{1}$ найти точную по порядку оценку остатка в асимптотической формуле (5.4). Решить указанный вопрос хотя бы для случая, когда граница $\partial\Omega$ – липшицева. Тот же вопрос при произвольных ε, μ.

Литература

1. А. Б. Алексеев, *Спектральная асимптотика эллиптических краевых задач с разрешимыми связями.* — Кандидатская диссертация, ЛГУ (1977).
2. А. Б. Алексеев, М. Ш. Бирман, *Асимптотика спектра эллиптических граничных задач с разрешимыми связями.* — Докл. АН СССР, **230** (1976), No. 3, 505–507.
3. А. Б. Алексеев, М. Ш. Бирман, *Вариационная постановка задачи о колебаниях резонатора, заполненного анизотропной слоистой средой.* — Вестник ЛГУ (1977), вып.7, 9–15.
4. А. Б. Алексеев, М. Ш. Бирман, Н. Д. Филонов, *Асимптотика спектра одной вариационной задачи с разрешимой связью,* (готовится к печати).
5. М. Ш. Бирман, *Три задачи теории сплошных сред в многогранниках.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **200** (1992), 27–37.
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории.* — Труды Десятой математической школы, Ин-т Математики АН УкрССР, Киев (1974), 5–189.
7. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Оператор Максвелла в областях с негладкой границей.* — Сиб. мат. журнал **28** (1987), No. 1, 23–36.
8. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях.* — Успехи мат. наук **42** (1987), вып. 6, 61–76.
9. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Вейлевская асимптотика спектра оператора Максвелла для областей с липшицевой границей.* — Вестник ЛГУ **3** (1987), сер. 1, 23–28.
10. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях.* — Алгебра и Анализ **1** (1989), вып. 1, 96–110.
11. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Главные особенности электрической составляющей электромагнитного поля в областях с экранами.* — Алгебра и Анализ **5** (1993), вып. 1, 143–159.
12. Н. Д. Филонов, *Оператор Максвелла в областях с негладкими границами.* — Кандидатская диссертация, СПбГУ (1999).
13. H. Weyl, *Uber das Spectrum der Hohlraumstrahlung.* — J. Reine Angew. Math. **141** (1912), 163–181.