May 2006 Preprint PDMI — 11/2006

Об одном анзатце для sl_2–инвариантных R–матриц

А. Г. Быцко

С.-Петербургское отделение Математического института РАН
Фонтанка 27, 191023, С.-Петербург, Россия

Аннотация

Спектральное разложение регулярных sl_2–инвариантных R–матриц $R(\lambda)$ изучается с помощью метода редукции уравнения Янга–Бакстера на подпространства фиксированного спина. Получены ограничения на возможную структуру нескольких старших коэффициентов в спектральном разложении. Объяснены происхождение и структура исключительного решения для спина $s = 3$. Аналогичный анализ выполнен для постоянных R–матриц. В частности, показано, что перестановка $\mathbb{P}$ является "жёстким" решением.

The spectral decomposition of regular sl_2–invariant R–matrices $R(\lambda)$ is studied by means of the method of reduction of the Yang–Baxter equation onto subspaces of a given spin. Restrictions on the possible structure of several highest coefficients in the spectral decomposition are derived. The origin and structure of the exceptional solution in the case of spin $s = 3$ are explained. An analogous analysis is performed for constant R–matrices. In particular, it is shown that the permutation matrix $\mathbb{P}$ is a "ridgid" solution.

§1. Введение

Ключевую роль в квантовом методе обратной задачи рассеяния (см., например, обзоры [1, 2]) играет уравнение Янга–Бакстера:

$$R_{12}(\lambda)\,R_{23}(\lambda+\mu)\,R_{12}(\mu) = R_{23}(\mu)\,R_{12}(\lambda+\mu)\,R_{23}(\lambda)\,. \tag{1}$$

В этой работе мы будем рассматривать уравнение Янга–Бакстера на $V_s^{\otimes 3}$, где V_s — неприводимое конечномерное представления алгебры sl_2. Представление V_s имеет размерность $(2s{+}1)$, где s — неотрицательное целое или полуцелое число (далее называемом *спином*). Здесь и ниже мы используем стандартные обозначения — нижние индексы у $R(\lambda)$ указывают тензорные компоненты в $V_s^{\otimes 3}$ где $R(\lambda)$ действует нетривиально.

Операторнозначная функция, $R(\lambda) : \mathbb{C} \mapsto \mathrm{End}\ V_s^{\otimes 2}$, удовлетворяющая (1), называется R–матрицей. Мы будем рассматривать sl_2–инвариантные R–матрицы, т.е. такие, которые имеют спектральное разложение вида

$$R(\lambda) = \sum_{j=0}^{2s} r_j(\lambda) P^j\,. \tag{2}$$

Здесь P^j есть проектор на V_j — подпространство спина j в $V_s^{\otimes 2}$, а $r_j(\lambda)$ — скалярная функция. Дополнительно будем считать, что для рассматриваемых R–матриц выполняются свойства *регулярности*, *унитарности* и нормировки, т.е. выполняются следующие соотношения

$$r_j(0) = 1\,, \qquad r_j(\lambda) r_j(-\lambda) = 1\,, \qquad r_{2s}(\lambda) = 1\,. \tag{3}$$

Отметим, что унитарность является следствием регулярности и нормировки [3].

Поскольку регулярные R–матрицы позволяют строить *локальные* интегралы движения для решеточных моделей, в частности для спиновых цепочек, задача нахождения всех решений уравнения Янга–Бакстера, удовлетворяющих условиям (3), является актуальной для квантового метода обратной задачи. На сегодняшний день известно четыре серии неэквивалентных sl_2–инвариантных регулярных решений и одно исключительное для $s = 3$ (см. [4] и ссылки там же). На основании численного поиска на компьютере [4] высказывалось предположение, что этот список решений является исчерпывающим. Однако соответствующая классификационная теорема пока не была доказана. В настоящей работе, применяя подход, развитый в [3], мы получим результаты, представляющие некоторый прогресс в этом направлении. В частности, мы объясним происхождение и структуру исключительного решения для $s = 3$.

Работа организована следующим образом. В § 2 приведен анализ одного анзатца для R–матрицы. Хотя изложенные результаты хорошо известны, мы приводим все необходимые технические детали, поскольку нашей задачей будет развить аналогичную технику в более общем случае. В § 3 мы кратко напомним основные элементы подхода к анализу sl_2– и $U_q(sl_2)$–инвариантных R–матриц, развитого в [3], и докажем одно полезное дополнительное соотношение. В § 4.1 мы покажем, что анализ некоторого числа старших коэффициентов спектрального разложения R–матрицы можно выполнить способом, весьма близким к анализу, изложенному в § 2. В §§ 4.2–4.3 мы приводим детали этого анализа. В частности, оказывается, что исключительное

решение появляется как следствие вырождения некоторого набора матриц. В § 5 аналогичный анализ выполнен для постоянных R–матриц. В частности, показано, что перестановка $\mathbb{P}$ является "жёстким" решением. В Заключении сформулированы основные результаты.

§2. Анализ одного анзатца для R–матрицы

Пусть $\mathbb{E}$ обозначает единичный оператор на $V_s^{\otimes 2}$. Для $s \geq 1$ рассмотрим R–матрицы следующего вида

$$R(\lambda) = \frac{1}{1+f(\lambda)} \left(\mathbb{E} + f(\lambda)\, \mathbb{P} + g(\lambda)\, P^0 \right). \tag{4}$$

Здесь $\mathbb{P}$ есть оператор перестановки в $V_s \otimes V_s$. Напомним, что он выражается с помощью проекторов:

$$\mathbb{P} = \sum_{j=0}^{2s} (-1)^{2s-j}\, P^j \,. \tag{5}$$

Если скалярные функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ удовлетворяют условию $f(0) = g(0) = 0$, то (4) является анзатцем для решения уравнения Янга–Бакстера в классе (3). Оказывается, что все R–матрицы такого вида можно описать явно.

Лемма 1 *Имеют место следующие соотношения на* $V_s^{\otimes 3}$

$$P_l^0 P_l^0 = P_l^0 \,, \quad \mathbb{P}_l \mathbb{P}_l = \mathbb{E} \,, \qquad P_l^0\, \mathbb{P}_l = \mathbb{P}_l\, P_l^0 = \xi\, P_l^0 \,, \tag{6}$$

$$\mathbb{P}_l\, \mathbb{P}_{l'}\, \mathbb{P}_l \;=\; \mathbb{P}_{l'}\, \mathbb{P}_l\, \mathbb{P}_{l'} \,, \tag{7}$$

$$P_l^0\, \mathbb{P}_{l'}\, \mathbb{P}_l = \mathbb{P}_{l'}\, \mathbb{P}_l\, P_{l'}^0 \,, \qquad \mathbb{P}_l\, P_{l'}^0\, \mathbb{P}_l = \mathbb{P}_{l'}\, P_l^0\, \mathbb{P}_{l'} \,, \tag{8}$$

$$P_l^0\, \mathbb{P}_{l'}\, P_l^0 = \eta\, P_l^0 \,, \qquad P_l^0\, P_{l'}^0\, P_l^0 = \eta^2\, P_l^0 \,, \tag{9}$$

$$P_l^0\, P_{l'}^0\, \mathbb{P}_l = \xi\eta\, P_l^0\, \mathbb{P}_{l'} \,, \qquad \mathbb{P}_l\, P_{l'}^0\, P_l^0 = \xi\eta\, \mathbb{P}_{l'}\, P_l^0 \,, \tag{10}$$

где $l = \{12\}$, $l' = \{23\}$ *или* $l = \{23\}$, $l' = \{12\}$, *а* ξ *и* η *— скалярные константы:*

$$\xi = (-1)^{2s} \,, \qquad \eta = \frac{1}{2s+1} \,. \tag{11}$$

Доказательство. Третье соотношение в (6) следует из (5). Равенства (7) и (8) очевидны. Соотношения (9) следуют из хорошо известного соотношения (см., например, [3])

$$P_{12}^0\, P_{23}^j\, P_{12}^0 = \frac{2j+1}{(2s+1)^2}\, P_{12}^0 \,. \tag{12}$$

Соотношение (10) выводится следующим образом:

$$P_{12}^0\, P_{23}^0\, \mathbb{P}_{12} = P_{12}^0\, \mathbb{P}_{12}\, P_{13}^0 \overset{(6)}{=} \xi\, P_{12}^0\, P_{13}^0 = \xi\, P_{12}^0\, \mathbb{P}_{23}\, P_{12}^0\, \mathbb{P}_{23} \overset{(9)}{=} \xi\eta\, P_{12}^0\, \mathbb{P}_{23} \,. \tag{13}$$

□

Подставляя (4) в (1) и используя соотношения Леммы 1, нетрудно проверить, что для рассматриваемого анзатца уравнение Янга–Бакстера сводится к следующему уравнению

$$F_{\lambda,\mu}\,\mathsf{F} + G_{\lambda,\mu}\,\mathsf{G} + H_{\lambda,\mu}\,\mathsf{H} + H_{\mu,\lambda}\,\tilde{\mathsf{H}} = 0\,, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} \mathsf{F} &= \mathbb{P}_{12} - \mathbb{P}_{23}\,, & \mathsf{G} &= P^0_{12} - P^0_{23}\,, \\ \mathsf{H} &= P^0_{12}\,\mathbb{P}_{23} - \mathbb{P}_{12}\,P^0_{23}\,, & \tilde{\mathsf{H}} &= \mathbb{P}_{23}\,P^0_{12} - P^0_{23}\,\mathbb{P}_{12}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

и

$$F_{\lambda,\mu} = f(\lambda) + f(\mu) - f(\lambda+\mu)\,, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} G_{\lambda,\mu} &= g(\lambda) + g(\mu) - g(\lambda+\mu) + \xi f(\lambda)g(\mu) + \xi g(\lambda)f(\mu) \\ &\quad + g(\lambda)g(\mu) + \eta g(\lambda)g(\mu)f(\lambda+\mu) + \eta^2 g(\lambda)g(\mu)g(\lambda+\mu)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

$$H_{\lambda,\mu} = g(\lambda)f(\lambda+\mu) - f(\lambda)g(\lambda+\mu) + \xi\eta\, g(\lambda)f(\mu)g(\lambda+\mu)\,. \tag{18}$$

Лемма 2 *При $s \geq 1$ матрицы F, G, H и $\tilde{\mathsf{H}}$ в (15) линейно независимы.*

Доказательство приведено в Приложении В.

Следствием Леммы 2 является эквивалентность уравнения (14) следующей системе функциональных уравнений

$$F_{\lambda,\mu} = 0\,, \tag{19}$$

$$G_{\lambda,\mu} = 0\,, \tag{20}$$

$$H_{\lambda,\mu} = H_{\mu,\lambda} = 0\,. \tag{21}$$

Анализ системы (19)–(21) достаточно прост. Имеются три нетривиальных случая:

1) $f(\lambda) \neq 0$, $g(\lambda) = 0$. Из (16) очевидно, что $f(\lambda)$ — линейная функция. Без потери общности можно взять $f(\lambda) = \lambda$.

2) $f(\lambda) = 0$, $g(\lambda) \neq 0$. В этом случае остается одно уравнение на $g(\lambda)$,

$$g(\lambda) + g(\mu) - g(\lambda+\mu) + g(\lambda)g(\mu) + \eta^2 g(\lambda)g(\mu)g(\lambda+\mu) = 0\,, \tag{22}$$

решение которого (для $\eta \neq \frac{1}{2}$) имеет вид:

$$g(\lambda) = b\,\frac{1 - e^{\gamma\lambda}}{e^{\gamma\lambda} - b^2}\,, \qquad b + b^{-1} = \eta^{-1}\,. \tag{23}$$

Здесь γ — произвольная конечная константа, которую без потери общности можно взять равной единице.

3) $f(\lambda) \neq 0$, $g(\lambda) \neq 0$. Снова можно взять $f(\lambda) = \lambda$. Вводя функцию $h(\lambda) = f(\lambda)/g(\lambda)$, уравнения (21) можно записать в виде

$$h(\lambda+\mu) = h(\lambda) - \xi\eta\, f(\mu) = h(\mu) - \xi\eta\, f(\lambda)\,. \tag{24}$$

Отсюда следует, что $h(\lambda)$ — линейная функция. Тем самым, решение для $g(\lambda)$ имеет вид:

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{\beta - \xi\eta\,\lambda}\,, \tag{25}$$

причем условие выполнения уравнения (20) накладывает следующие ограничения:

$$\xi^2 = 1\,, \qquad \beta = \eta - \xi/2\,. \tag{26}$$

R–матрицы, соответствующие случаям 1), 2) и 3) известны как R–матрицы Янга, Бакстера и Замолодчиковых, соответственно. Из приведенного выше анализа следует, что других решений вида (4) нет. Примечательно, что анзатц (4) охватывает три из четырех известных серий sl_2–инвариантных регулярных R–матриц. Поэтому естественно попытаться изучить обобщение этого анзатца, которое можно было бы проанализировать сходным образом.

§3. О редуцированном уравнении Янга–Бакстера

Напомним основные элементы подхода к анализу $U_q(sl_2)$–инвариантных решений уравнения Янга–Бакстера, развитого в [3] (мы сразу учтем, что в нашем случае $q = 1$). Обозначим символом $\lfloor t \rfloor$ целую часть числа t. Подпространство $W_n^{(s)} \subset V_s^{\otimes 3}$ для $n = 0, 1, \ldots, \lfloor 3s \rfloor$ определяется как линейная оболочка векторов старшего веса спина $(3s - n)$, т.е.

$$W_n^{(s)} = \{\, \psi \in V_s^{\otimes 3} \quad \big| \quad S^+_{123}\psi = 0\,, \quad S^z_{123}\psi = (3s-n)\psi \,\}\,. \tag{27}$$

По R–матрице вида (2) построим набор диагональных матриц $D^{(n)}(\lambda)$ таким образом:

$$D^{(n)}_{kk'}(\lambda) = \delta_{kk'}\, r_{2s-k}(\lambda)\,, \qquad \text{где} \quad \begin{cases} 0 \le k \le n & \text{для} \;\; 0 \le n \le 2s; \\ n - 2s \le k \le 4s - n & \text{для} \;\; 2s \le n \le \lfloor 3s \rfloor\,. \end{cases} \tag{28}$$

Введем также $\hat{D}^{(n)}(\lambda) \equiv A^{(s,n)}\; D^{(n)}(\lambda)\; A^{(s,n)}$, где $A^{(s,n)}$ — некоторая специальная матрица, свойства которой приведены ниже. Тогда условие выполнения уравнения Янга–Бакстера (1) на подпространстве $W_n^{(s)}$ записывается как следующее матричное уравнение

$$D^{(n)}(\lambda)\; \hat{D}^{(n)}(\lambda+\mu)\; D^{(n)}(\mu) = \hat{D}^{(n)}(\mu)\; D^{(n)}(\lambda+\mu)\; \hat{D}^{(n)}(\lambda)\,, \tag{29}$$

которое мы будем называть *редуцированным* уравнением Янга–Бакстера (уровня n). Исходное уравнение (1) эквивалентно системе редуцированных уравнений (29) для $n = 0, 1, \ldots, \lfloor 3s \rfloor$.

Матрица $A^{(s,n)}$, играющая важную роль в описанном подходе, имеет следующие основные свойства. Её элементы выражаются (для $q = 1$) в терминах 6–j символов алгебры sl_2 следующим образом (см. также Приложение A)

$$A^{(s,n)}_{kk'} = (-1)^{2s-n} \sqrt{(4s-2k+1)(4s-2k'+1)}\, \begin{Bmatrix} s & s & 2s-k \\ s & 3s-n & 2s-k' \end{Bmatrix}, \tag{30}$$

где k, k' принимают значения как в (28). Матрица $A^{(s,n)}$ ортогональна, симметрична и совпадает со своей обратной (t обозначает матричное транспонирование),

$$A^{(s,n)} = \big(A^{(s,n)}\big)^t = \big(A^{(s,n)}\big)^{-1}. \tag{31}$$

Для целей данной работы нам потребуется еще одно свойство, которое мы сформулируем следующим образом.

Лемма 3 *Для всех* $n = 0, \dots, \lfloor 3s \rfloor$ *выполняется следующее матричное соотношение*

$$A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)} = (-1)^n\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\,, \tag{32}$$

где диагональная матрица $D_0^{(n)}$ *имеет вид*

$$\big(D_0^{(n)}\big)_{kk'} = (-1)^k \delta_{kk'}\,, \tag{33}$$

и k, k' *принимают значения как в (28).*

Доказательство. Запишем (32) в компонентах, учитывая симметричность матрицы $A^{(s,n)}$:

$$\sum_m (-1)^m\, A^{(s,n)}_{km}\, A^{(s,n)}_{k'm} = (-1)^{n+k+k'} A^{(s,n)}_{kk'}\,. \tag{34}$$

Теперь, принимая во внимание формулу (30), легко видеть, что соотношение (34) сводится к тождеству Рака (см., например, [5])

$$\sum_p (-1)^p\,(2p+1) \begin{Bmatrix} r_1 & r_3 & l \\ r_2 & r_4 & p \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 & r_2 & l' \\ r_3 & r_4 & p \end{Bmatrix} = (-1)^{l+l'} \begin{Bmatrix} r_3 & r_1 & l \\ r_2 & r_4 & l' \end{Bmatrix}, \tag{35}$$

где надо взять $r_1 = r_2 = r_3 = s$, $r_4 = 3s - n$, $l = 2s - k$, $l' = 2s - k'$, $p = 2s - m$. □

Из (5) очевидно, что $D_0^{(n)}$ и $\hat{D}_0^{(n)} \equiv A^{(s,n)} D_0^{(n)} A^{(s,n)}$ соответствуют сужению операторов $\mathbb{P}_{12}$ и $\mathbb{P}_{23}$ на $W_n^{(s)}$. В частности, редукция уравнения (7) на подпространство $W_n^{(s)}$ приводит к следующему соотношению

$$D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)} = A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\,, \tag{36}$$

справедливость которого немедленно следует из утверждения Леммы 3. Другим следствием Леммы 3 является то, что $(-1)^n A^{(s,n)}$ соответствуют сужению оператора $\mathbb{P}_{13} = \mathbb{P}_{12}\mathbb{P}_{23}\mathbb{P}_{12}$ на $W_n^{(s)}$.

§4. Частичный анализ общего анзатца

4.1 Вывод уравнений

Заметим, что любую sl_2–инвариантную R–матрицу спина $s \geq 1$ можно представить в виде следующего анзатца

$$R(\lambda) = \frac{1}{1+f(\lambda)} \Big(\mathbb{E} + f(\lambda)\, \mathbb{P} + g(\lambda)\, P^{2s-m} + \sum_{j=0}^{2s-m'} \tilde{r}_j(\lambda) P^j \Big)\,, \tag{37}$$

где $2 \leq m \leq 2s$ и $m < m'$ (если $m = 2s$, то последней суммы в (37) нет). Далее мы считаем, что $g(\lambda) \neq 0$, поскольку иначе (37) относится к известному случаю 1) в § 2. Требование регулярности накладывает условие

$$f(0) = g(0) = \tilde{r}_j(0) = 0\,. \tag{38}$$

Пусть $\pi^{(m,n)}$ обозначает матрицу такую, что $(\pi^{(m,n)})_{kk'} = \delta_{km}\delta_{k'm}$, $k = 0, \dots, n$. Тогда $\pi^{(m,n)}$ и $\hat{\pi}^{(m,n)} \equiv A^{(s,n)}\pi^{(m,n)}A^{(s,n)}$ соответствуют сужению операторов P_{12}^{2s-m} и P_{23}^{2s-m} на $W_n^{(s)}$. Заметим, что $\pi^{(m,n)}$ и $\hat{\pi}^{(m,n)}$ суть проекторы ранга 1.

Для $n < m'$ матрицы $D^{(n)}(\lambda)$ и $\hat{D}^{(n)}(\lambda)$, соответствующие R–матрице (37), имеют вид

$$\begin{aligned} D^{(n)}(\lambda) &= \frac{1}{1+f(\lambda)}\left(\mathbb{E} + f(\lambda)\, D_0^{(n)} + \theta_{mn}\, g(\lambda)\, \pi^{(m,n)}\right), \\ \hat{D}^{(n)}(\lambda) &= \frac{1}{1+f(\lambda)}\left(\mathbb{E} + f(\lambda)\, \hat{D}_0^{(n)} + \theta_{mn}\, g(\lambda)\, \hat{\pi}^{(m,n)}\right), \end{aligned} \tag{39}$$

где $\theta_{mn} = 0$ при $n < m$ и $\theta_{mn} = 1$ при $n \geq m$.

Следующее замечание является ключевым местом данной работы: анализ редуцированного уравнениия Янга–Бакстера (29) для анзатца (39) абсолютно аналогичен (за исключением одного специального случая) анализу уравнениия (1) для анзатца (4), приведенному в § 2. Это замечание основывается на следующем утверждении.

Лемма 4 *Соотношения (6)-(10) Леммы 1 остаются верны при замене*

$$\mathbb{P}_l \to D_0^{(n)}, \quad \mathbb{P}_{l'} \to \hat{D}_0^{(n)}, \quad P_l^0 \to \pi^{(m,n)}, \quad P_{l'}^0 \to \hat{\pi}^{(m,n)}, \tag{40}$$

и также при замене

$$\mathbb{P}_l \to \hat{D}_0^{(n)}, \quad \mathbb{P}_{l'} \to D_0^{(n)}, \quad P_l^0 \to \hat{\pi}^{(m,n)}, \quad P_{l'}^0 \to \pi^{(m,n)}. \tag{41}$$

При этом скалярные константы ξ и η становятся зависящими от m и n следующим образом:

$$\xi_m = (-1)^m, \qquad \eta_{m,n} = (-1)^n\, A_{mm}^{(s,n)}. \tag{42}$$

Доказательство. Аналоги соотношений (6) следуют из определения матриц $D_0^{(n)}$, $\hat{D}_0^{(n)}$, $\pi^{(m,n)}$, $\hat{\pi}^{(m,n)}$ и свойства $(A^{(s,n)})^2 = \mathbb{E}$. Аналог соотношения (7) есть равенство (36), установленное выше. Аналоги соотношений (8) сводятся к равенству

$$\pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)} = A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, D_0^{(n)}\, A^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)}, \tag{43}$$

которое легко проверяется при помощи соотношения (32) и аналогов соотношений (6). Аналоги соотношений (9) и (10) выводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi^{(m,n)}\, \hat{D}_0^{(n)}\, \pi^{(m,n)} &= \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)} D_0^{(n)} A^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)} \overset{(32)}{=} (-1)^n\, \pi^{(m,n)}\, D_0^{(n)} A^{(s,n)} D_0^{(n)}\, \pi^{(m,n)} \\ &= (-1)^n\, \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)} = (-1)^n\, A_{mm}^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)} = \eta_{m,n}\, \pi^{(m,n)}, \\ \pi^{(m,n)}\, \hat{\pi}^{(m,n)}\, \pi^{(m,n)} &= \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)} = \left(A_{mm}^{(s,n)}\right)^2 \pi^{(m,n)} = \eta_{m,n}^2\, \pi^{(m,n)}, \\ \pi^{(m,n)}\, \hat{\pi}^{(m,n)}\, D_0^{(n)} &= \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)} D_0^{(n)} \\ &= A_{mm}^{(s,n)}\, \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)} D_0^{(n)} \left(A^{(s,n)}\right)^2 \overset{(32)}{=} \eta_{m,n}\, \pi^{(m,n)}\, D_0^{(n)} A^{(s,n)} D_0^{(n)} A^{(s,n)} \\ &= \xi_m \eta_{m,n}\, \pi^{(m,n)}\, A^{(s,n)} D_0^{(n)} A^{(s,n)} = \xi_m \eta_{m,n}\, \pi^{(m,n)}\, \hat{D}_0^{(n)}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что Лемма 3 играет ключевую роль в этом доказательстве. □

Поскольку при выводе уравнения (14) используются только соотношения Леммы 1, то Лемма 4 означает, что редуцированное уравнение Янга–Бакстера для R–матрицы (37) для уровней $n < m'$ сводится к тому же уравнению (14). Различие состоит только в том, что скалярные коэффициенты (кроме $F_{\lambda,\mu}$) теперь зависят от m и n:

$$F_{\lambda,\mu} = f(\lambda) + f(\mu) - f(\lambda+\mu)\,, \tag{44}$$

$$\begin{aligned} G^{(m,n)}_{\lambda,\mu} &= \theta_{m,n}\Big(g(\lambda) + g(\mu) - g(\lambda+\mu) + \xi_m f(\lambda)g(\mu) + \xi_m\, g(\lambda)f(\mu) \\ &\quad + g(\lambda)g(\mu) + \eta_{m,n} g(\lambda)g(\mu)f(\lambda+\mu) + \eta^2_{m,n} g(\lambda)g(\mu)g(\lambda+\mu)\Big)\,, \end{aligned} \tag{45}$$

$$H^{(m,n)}_{\lambda,\mu} = \theta_{m,n}\Big(g(\lambda)f(\lambda+\mu) - f(\lambda)g(\lambda+\mu) + \xi_m\eta_{m,n}\, g(\lambda)f(\mu)g(\lambda+\mu)\Big)\,, \tag{46}$$

а матрицы F, G, H, $\tilde{\mathsf{H}}$ даются формулами (15) с учетом подстановки (40), т.е.

$$\begin{aligned} \mathsf{F}^{(m,n)} &= D^{(n)}_0 - \hat{D}^{(n)}_0\,, & \mathsf{G}^{(m,n)} &= \pi^{(m,n)} - \hat{\pi}^{(m,n)}\,, \\ \mathsf{H}^{(m,n)} &= \pi^{(m,n)}\,\hat{D}^{(n)}_0 - D^{(n)}_0\,\hat{\pi}^{(m,n)}\,, & \tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)} &= \hat{D}^{(n)}_0\,\pi^{(m,n)} - \hat{\pi}^{(m,n)}\,D^{(n)}_0\,. \end{aligned} \tag{47}$$

4.2 Анализ уравнений в случае $f(\lambda) = 0$

Считая, что $g(\lambda) \neq 0$ в (37), рассмотрим сначала случай $f(\lambda) = 0$. В этом случае уравнение (14) для уровня $n = m$ сводится к уравнению $G^{(m,m)}_{\lambda,\mu}\mathsf{G}^{(m,m)} = 0$, т.е. к уравнению (22) для $g(\lambda)$, где η имеет вид

$$\eta_{m,m} = (-1)^m\, A^{(s,m)}_{mm} = \frac{(2s)!}{(2s-m)!}\,\frac{(4s-2m+1)!}{(4s-m+1)!}\,. \tag{48}$$

Поскольку для $2 \le m \le 2S$ и $S \ge 1$ мы имеем $|A^{(s,m)}_{mm}| < A^{(s,1)}_{11} = \frac{1}{2}$, то $g(\lambda)$ дается выражением (23), где $\eta = \eta_{m,m}$.

Исследуя далее случай $f(\lambda) = 0$, поставим вопрос: может ли быть $m' > m+1$ в анзатце (37)? Это возможно только если уже найденная функция $g(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (22) для уровня $n = m+1$, т.е. только если η^2 принимает одно и то же значение для уровней $n = m$ и $n = m+1$. Согласно (42), условие $\eta^2_{m,m} = \eta^2_{m,m+1}$ равносильно требованию

$$|A^{(s,m)}_{mm}| = |A^{(s,m+1)}_{mm}|\,. \tag{49}$$

Однако из формулы (82) нетрудно вывести, что

$$A^{(s,m+1)}_{mm} = \frac{m^2 - m - 3ms + s}{2s}\,A^{(s,m)}_{mm}\,. \tag{50}$$

Поскольку $m^2 - m - 3ms + 3s < 0$ при $2 \le m \le 2s$, то (49) не может выполняться при этих значениях m. Следовательно, $m' = m+1$.

4.3 Анализ уравнений в случае $f(\lambda) \neq 0$

Перейдем теперь к случаю $f(\lambda) \neq 0$. Уравнение (14) для уровней $n = 1, \dots, m-1$ сводится к уравнению $F_{\lambda,\mu}\mathsf{F}^{(m,n)} = 0$, т.е. к уравнению (19) для $f(\lambda)$. Без потери общности можно взять $f(\lambda) = \lambda$.

Для анализа уравнения (14) для $n \geq m$ важно отметить, что аналог Леммы 2, вообще говоря, не имеет места, т.е. матрицы (47) могут быть линейно зависимы. Заметим, что матрицы $\mathsf{F}^{(m,n)}$ и $\mathsf{G}^{(m,n)}$ симметричны и, очевидно, линейно независимы, а $\mathsf{H}^{(m,n)}$ и $\tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)}$ являются транспонированными друг к другу: $\tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)} = \left(\mathsf{H}^{(m,n)}\right)^t$. Оказывается, что следующие соотношения

$$\tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)} = \mathsf{H}^{(m,n)}\,, \tag{51}$$

$$\mathsf{H}^{(m,n)} + \tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)} = \beta\,\mathsf{G}^{(m,n)}\,, \tag{52}$$

где β — скалярная константа, могут выполняться только одновременно. Случай, в котором эти соотношения выполняются, будем называть *исключительным*.

Лемма 5 *Для $m \geq 2$ как соотношение (51) так и соотношение (52) имеет место только при $m = 3$, $n = 4$. В этом случае (52) выполняется в следующем виде*

$$\mathsf{H}^{(3,4)} + \tilde{\mathsf{H}}^{(3,4)} = 2\mathsf{G}^{(3,4)}\,. \tag{53}$$

Доказательство приведено в Приложении B.

В случае общего положения мы имеем $\mathsf{H}^{(m,n)} \neq \tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)}$. Следовательно, антисимметричная матричная компонента уравнения (14) накладывает условие

$$H^{(m,n)}_{\lambda,\mu} = H^{(m,n)}_{\mu,\lambda}\,, \tag{54}$$

а его симметричная компонента имеет вид

$$F_{\lambda,\mu}\,\mathsf{F}^{(m,n)} + G^{(m,n)}_{\lambda,\mu}\,\mathsf{G}^{(m,n)} + \frac{1}{2}(H^{(m,n)}_{\lambda,\mu} + H^{(m,n)}_{\mu,\lambda})\,(\mathsf{H}^{(m,n)} + \tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)}) = 0\,. \tag{55}$$

Если $\mathsf{F}^{(m,n)}$, $\mathsf{G}^{(m,n)}$ и $(\mathsf{H}^{(m,n)} + \tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)})$ линейно независимы, то уравнения (54)–(55) приводят к системе функциональных уравнений (19)–(21). Если же $\mathsf{H}^{(m,n)} + \tilde{\mathsf{H}}^{(m,n)} = \beta\mathsf{G}^{(m,n)} + \tilde{\beta}\mathsf{F}^{(m,n)}$, где $\tilde{\beta} \neq 0$, то (55) эквивалентно системе

$$2\,F_{\lambda,\mu} + \tilde{\beta}\,(H^{(m,n)}_{\lambda,\mu} + H^{(m,n)}_{\mu,\lambda}) \;=\; 0\,, \tag{56}$$

$$2\,G^{(m,n)}_{\lambda,\mu} + \beta\,(H^{(m,n)}_{\lambda,\mu} + H^{(m,n)}_{\mu,\lambda}) \;=\; 0\,. \tag{57}$$

Поскольку выбором $f(\lambda) = \lambda$ мы уже обеспечили равенство $F_{\lambda,\mu} = 0$, то уравнения (54), (56)–(57) снова приводят к системе (19)–(21). Таким образом, анализ случая общего положения абсолютно аналогичен анализу случая 3) в § 2.

Поскольку, согласно Лемме 5, уровень $n = m$ соответствует случаю общего положения, то функция $g(\lambda)$ определяется системой (19)–(21) однозначно и имеет вид

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{\eta_{m,m} - \xi_m/2 - \xi_m\eta_{m,m}\,\lambda}\,, \tag{58}$$

где ξ_m и $\eta_{m,m}$ даются формулами (42).

Исследуя далее случай $f(\lambda) = \lambda$, поставим вопрос: может ли быть $m' > m+1$ в анзатце (37)? Если $m \neq 3$, то уровень $n = m+1$ соответствует случаю общего положения. Легко проверить, что функция (58) может удовлетворять системе (19)–(21) для $n = m+1$ только если $\eta_{m,m} = \eta_{m,m+1}$, что, как было показано в § 4.2,

невозможно. Однако для $m = 3$ этот уровень соответствует исключительному случаю. В этом случае (55) эквивалентно уравнению

$$G^{(3,4)}_{\lambda,\mu} + H^{(3,4)}_{\lambda,\mu} + H^{(3,4)}_{\mu,\lambda} = 0\,, \tag{59}$$

а условие (54) не накладывается (поскольку у (14) нет антисимметричной компоненты). Подставляя (58) в (59), легко проверить, что уравнение (59) выполняется если $(\eta_{3,3} - \eta_{3,4})(2\eta_{3,4} - 1) = 0$. Интересно, что это условие верно для всех $s \geq \frac{3}{2}$, поскольку, согласно (48) и (50), мы имеем

$$\eta_{3,4} = A^{(s,4)}_{33} = 1/2\,. \tag{60}$$

Таким образом, для $m = 3$ и всех $s \geq \frac{3}{2}$ мы имеем $m' = 4$ или $m' = 5$ в анзатце (37). При этом $m' > 5$ возможно только для $s = 3$. Действительно, уровень $n = 5$ соответствует случаю общего положения, и необходимым условием для возможности $m' = 6$ является выполнение равенства

$$A^{(s,3)}_{33} = A^{(s,5)}_{33}\,. \tag{61}$$

Однако из (82) нетрудно вывести следующее соотношение

$$A^{(s,5)}_{33} = \frac{10s^2 - 32s + 21}{s(4s-7)}\, A^{(s,3)}_{33}\,, \tag{62}$$

которое показывает, что (61) возможно лишь если $(s-3)(6s-7) = 0$. Поскольку $A^{(3,6)}_{33} \neq A^{(3,3)}_{33}$, то $m' \leq 6$ для $s = 3$.

§ 5. Анализ постоянных R–матриц

Будем называть *постоянными* R–матрицами решения следующего уравнение Янга–Бакстера

$$R_{12}\, R_{23}\, R_{12} = R_{23}\, R_{12}\, R_{23}\,. \tag{63}$$

Мы будем рассматривать sl_2–инвариантные R–матрицы, т.е. такие, которые имеют спектральное разложение вида

$$R = \sum_{j=0}^{2s} r_j\, P^j\,. \tag{64}$$

Дополнительно будем считать, что

$$r_{2s} = 1\,. \tag{65}$$

Техника анализа спектрального разложения, описанная в §§ 3–4, применима и к случаю постоянных R–матриц. В частности, естественность условия (65) объясняется следующим замечанием.

Лемма 6 *Не существует нетривиальных sl_2–инвариантных постоянных R–матриц таких, что $r_{2s} = 0$.*

Доказательство. Действительно, если такая R–матрица существует, то выбором нормировки она приводится к виду $R = P^{2s-m} + \sum_{j=0}^{2s-m-1} r_j\, P^j$, где $0 < m \leq 2s$. Тогда редуцированное уравнение Янга–Бакстера (29) на уровне $n = m$ имеет вид $\left(A^{(s,m)}\,\pi^{m,m}\right)^3 = \left(\pi^{m,m}\,A^{(s,m)}\right)^3$, что равносильно соотношению $(A^{(s,m)}_{m,m})^2\,[A^{(s,m)}, \pi^{m,m}] = 0$. Однако это соотношение не может выполняться ни при каком $m > 0$, поскольку $A^{(s,m)}_{k,m} \neq 0$ при всех k. □

Заметим, что любую sl_2–инвариантную постоянную R–матрицу спина $s \geq 1$, удовлетворяющую (65) и имеющую $r_{2s-1} \neq -1$, можно представить в виде следующего анзатца

$$R = \frac{1}{1+f}\left(\mathbb{E} + f\,\mathbb{P} + g\,P^{2s-m} + \sum_{j=0}^{2s-m'} \tilde{r}_j\,P^j\right), \tag{66}$$

где $2 \leq m \leq 2s$ и $m < m'$ (если $m = 2s$, то последней суммы в (66) нет).

Как и в § 3, Лемма 4 позволяет свести редуцированное уравнение Янга–Бакстера для R–матрицы (66) для уровней $n < m'$ к тому же уравнению (14), где матрицы F, G, H, $\tilde{\mathsf{H}}$ даются формулами (47), а скалярные коэффициенты получаются из (44)–(46) заменой функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ на константы f и g, т.е.:

$$F = f\,, \tag{67}$$

$$G^{(m,n)} = \theta_{m,n}\left(g + 2\xi_m f g + g^2 + \eta_{m,n} g^2 f + \eta^2_{m,n} g^3\right), \tag{68}$$

$$H^{(m,n)} = \theta_{m,n}\,\xi_m \eta_{m,n}\,g^2 f\,. \tag{69}$$

Уравнение (14) для уровней $n < m$ сводится к уравнению $F\mathsf{F}^{(m,n)} = 0$, что возможно только при $f = 0$. С учетом этого, $G^{(m,n)}$ принимает следующий вид

$$G^{(m,n)} = \theta_{m,n}\left(g + g^2 + \eta^2_{m,n} g^3\right), \tag{70}$$

а уравнение (14) для уровней $m \leq n < m'$ сводится к уравнению $G^{(m,n)}\mathsf{G}^{(m,n)} = 0$, т.е. к квадратному уравнению на g,

$$1 + g + \eta^2_{m,n} g^2 = 0\,. \tag{71}$$

Откуда для $n = m$ получаем $g = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 4\eta^2_{m,m}})$, где $\eta_{m,m}$ дается формулой (48). Поскольку, как было показано в § 4.2, $\eta^2_{m,m} \neq \eta^2_{m,m+1}$ при $2 \leq m \leq 2s$, то найденное значение g не может удовлетворять (71) для $n > m$. Следовательно, $m' = m+1$ в (66).

Анзатц (66) охватывает не все sl_2–инвариантные постоянные R–матрицы спина $s \geq 1$, удовлетворяющие (65). А именно, если такая R–матрица имеет $r_{2s-1} = -1$, то её можно представить в виде следующего анзатца

$$R = \mathbb{P} + g\,P^{2s-m} + \sum_{j=0}^{2s-m'} \tilde{r}_j\,P^j\,, \tag{72}$$

где $2 \leq m \leq 2s$ и $m < m'$ (если $m = 2s$, то последней суммы в (72) нет).

Используя соотношения Леммы 4, нетрудно проверить, что редуцированное уравнение Янга–Бакстера для R–матрицы (72) для уровня $n = m$ сводится к следующему уравнению

$$g^2(1 + \eta_{m,m}\,g)\,\mathsf{G} + \xi_m\,g^2\left(\mathsf{H} + \tilde{\mathsf{H}}\right) = 0\,, \tag{73}$$

где G, H, $\tilde{\mathsf{H}}$ даются формулами (47). Поскольку уровень $n = m$ соответствует случаю общего положения (см. § 4.3), то (73) имеет единственное решение: $g = 0$. То есть анзатц (72) является решением для (63) только если $g = r_j = 0$. Таким образом, мы показали, что перестановка $\mathbb{P}$ является “жёстким"решением, не допускающим “деформации"в спектральном разложении в порядке $2s - 2$ и младше.

Заключение

Результаты анализа, выполненного в §§ 4–5, можно сформулировать в виде следующих ограничений на структуру спектрального разложения R–матриц.

Предложение 1 *Пусть R — sl_2–инвариантное решение уравнения (63) на $V_s^{\otimes 3}$ для целого или полуцелого спина $s \geq 1$, удовлетворяющее условию (65). Тогда либо $r_{2s-1} = 1$ либо $r_{2s-1} = -1$.*

I. В первом случае

$$R = \mathbb{E} + g\, P^{2s-m} + \sum_{j=0}^{2s-m-1} \tilde{r}_j\, P^j\,, \tag{74}$$

где g является решением уравнения (71) и $2 \leq m \leq 2s$. Если $m < 2s$, то $\tilde{r}_{2s-m-1} \neq 0$.

II. Во втором случае

$$R = \mathbb{P}\,. \tag{75}$$

Предложение 2 *Пусть $R(\lambda)$ — sl_2–инвариантное решение уравнения (1) на $V_s^{\otimes 3}$ для целого или полуцелого спина $s \geq 1$, удовлетворяющее условиям (3). Тогда либо $r_{2s-1}(\lambda) = 1$ либо $r_{2s-1}(\lambda) = \frac{1-\gamma\lambda}{1+\gamma\lambda}$.*

I. В первом случае

$$R(\lambda) = \mathbb{E} + g(\lambda)\, P^{2s-m} + \sum_{j=0}^{2s-m-1} \tilde{r}_j(\lambda)\, P^j\,, \tag{76}$$

где $2 \leq m \leq 2s$. Если $m < 2s$, то $\tilde{r}_{2s-m-1}(\lambda) \not\equiv 0$. Функция $g(\lambda)$ имеет вид

$$g(\lambda) = b\,\frac{1 - e^{\gamma\lambda}}{e^{\gamma\lambda} - b^2}\,, \qquad b + b^{-1} = \frac{1}{\eta_{m,m}}\,, \tag{77}$$

где $\eta_{m,m}$ дается формулой (48), а γ — некоторая конечная константа.

II. Во втором случае либо

$$R(\lambda) = \frac{1}{1+\gamma\lambda}\left(\mathbb{E} + \gamma\lambda\,\mathbb{P}\right), \tag{78}$$

либо

$$R(\lambda) = \frac{1}{1+\gamma\lambda}\left(\mathbb{E} + \gamma\lambda\,\mathbb{P} + \frac{\lambda}{\eta_{m,m}(1-(-1)^m\,\gamma\lambda) - \frac{(-1)^m}{2}}\,P^{2s-m} + \sum_{j=0}^{2s-m'} \tilde{r}_j(\lambda) P^j\right), \tag{79}$$

где $\eta_{m,m}$ дается формулой (48), γ — некоторая конечная константа, $2 \leq m \leq 2s$ и $m < m'$. Если $m < 2s$, то $\tilde{r}_{2s-m'}(\lambda) \not\equiv 0$, причем

$$\begin{aligned} &m' = m+1\,, && \text{если } m \neq 3\,,\\ &m' \leq 5\,, && \text{если } m = 3\,, s \neq 3\,,\\ &m' \leq 6\,, && \text{если } m = 3\,, s = 3\,. \end{aligned}$$

Константу γ без потери общности можно взять равной единице.

Согласно Лемме 6, если при $\lambda \to \infty$ в некотором направлении в комплексной плоскости все коэффициенты спектрального разложения $R(\lambda)$ имеют пределы, то эти пределы конечны. Из Предложений 1 и 2 видно, что только для решений типа (76) соответствующий предел $R(\infty)$ имеет вид (74). В остальных случаях $R(\infty) = \mathbb{P}$.

В контексте Предложения 2 следует отметить, что для $s = 3$ решение с $m' = 6$ действительно существует [4]:

$$R(\lambda) = P^6 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, P^5 + P^4 + \frac{4-\lambda}{4+\lambda}\, P^3 + P^2 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, P^1 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,\frac{6-\lambda}{6+\lambda}\, P^0 \,. \tag{80}$$

Легко видеть, что коэффициент при P^3 согласуется с формулой (79). За исключением этого случая неизвестно, существуют ли R–матрицы вида (79) с $2 < m < 2s$.

Для $m = 2$ коэффициенты при трёх старших порядках в (79),

$$R(\lambda) = P^{2s} + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\, P^{2s-1} + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\,\frac{1-\frac{2s}{2s-1}\lambda}{1+\frac{2s}{2s-1}\lambda}\, P^{2s-2} + \dots \tag{81}$$

совпадают с соответствующими коэффициентами R–матрицы Кулиша–Решетихина–Склянина [6]. Отметим, что из Предложения 2 и результатов [3] следует, что только R–матрицы вида (76) и (81) могут иметь $U_q(sl_2)$–инвариантные аналоги.

Благодарности

Работа поддержана грантом INTAS YS–03-55-962, грантом РФФИ 05-01-00922 и грантом Фонда содействия отечественной науке.

Приложение A. Матрица $A^{(s,n)}$

Формула (30) для элементов матрицы $A^{(s,n)}$ может быть записана в несколько более явном виде:

$$A^{(s,n)}_{kk'} = F^s_k\, F^s_{k'} \sum_{l=6s-n-\min(k,k')}^{6s-\max(n,k+k')} (-1)^l (l+1)! \Big((l-4s+k)!\,(l-4s+k')! \tag{82}$$
$$\times\ (l-6s+n+k)!\,(l-6s+n+k')!\,(6s-n-l)!\,(6s-k-k'-l)!\,(8s-n-k-k'-l)! \Big)^{-1} ,$$

где k, k' принимают значения как в (28) и

$$F^s_k = (2s-k)! \left(\frac{(k)!\,(n-k)!\,(2s-n+k)!\,(4s-n-k)!}{(4s-k+1)!\,(6s-n-k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{83}$$

Сумма в (82) берется по тем l, для которых аргументы факториалов неотрицательны, причем считается что $0! = 1$.

Приложение B. Доказательство Леммы 2 и Леммы 5

Доказательство Леммы 2: Используя соотношения $(a, b = 1, 2, 3)$

$$\mathrm{tr}_a\, \mathbb{E}_a = 2s+1\,, \qquad \mathrm{tr}_a\, P^j_{ab} = \frac{2j+1}{2s+1}\, \mathbb{E}_b\,, \qquad \mathrm{tr}_a\, \mathbb{P}_{ab} = \mathbb{E}_b\,, \tag{84}$$

возьмем след по третьей тензорной компоненте от F, G, H и $\tilde{\mathsf{H}}$, что дает:

$$\mathrm{tr}_3\,\mathsf{F} = \eta^{-1}\mathbb{P} - \mathbb{E}\,, \qquad \mathrm{tr}_3\,\mathsf{G} = \eta^{-1}P^0 - \eta\mathbb{E}\,, \qquad \mathrm{tr}_3\,\mathsf{H} = \mathrm{tr}_3\,\tilde{\mathsf{H}} = P^0 - \eta\mathbb{P}\,. \tag{85}$$

Поскольку $\mathbb{E}$, $\mathbb{P}$, P^0 линейно независимы при $s \geq 1$, заключаем, что F, G, H и $\tilde{\mathsf{H}}$ могут быть линейно зависимы только если выполняется следующее равенство

$$\eta^2\,\mathsf{F} - \eta\,\mathsf{G} + \alpha\,\mathsf{H} + \tilde{\alpha}\,\tilde{\mathsf{H}} = 0\,, \qquad \alpha + \tilde{\alpha} = 1\,. \tag{86}$$

Умножим (86) слева на P^0_{12}, учитывая ссотношения (6), и возьмем след по первой тензорной компоненте. Опять используя линейную независимость $\mathbb{E}$, $\mathbb{P}$, P^0, заключаем, что (86) может иметь место только если $\alpha = \xi\eta$. Умножая (86) справа на P^0_{12}, аналогичным способом заключаем, что $\tilde{\alpha} = \xi\eta$. Таким образом, (86) может выполняться только если $\xi\eta = 1/2$, что невозможно в виду (11). □

Доказательство Леммы 5: Выпишем явно элементы матриц H, $\tilde{\mathsf{H}}$ и G:

$$H_{kk'} = (-1)^{m+k'}\,\delta_{km}\,A^{(s,n)}_{kk'} - (-1)^k\,A^{(s,n)}_{km}\,A^{(s,n)}_{mk'}\,, \tag{87}$$

$$\tilde{H}_{kk'} = (-1)^{m+k}\,\delta_{km}\,A^{(s,n)}_{kk'} - (-1)^{k'}\,A^{(s,n)}_{km}\,A^{(s,n)}_{mk'}\,, \tag{88}$$

$$G_{kk'} = \delta_{km}\,\delta_{k'm} - A^{(s,n)}_{km}\,A^{(s,n)}_{mk'}\,. \tag{89}$$

Напомним, что $m \geq 2$ и $k, k' = 0, 1, \ldots, n$. Из сравнения (87)–(89) при $k = k' = 0$ следует, что (52) может выполняться только с $\beta = 2$. Далее, рассматривая (87)–(89) при $k, k' \neq m$, легко видеть, что как (51) так и (52) могут иметь место только если

$$A^{(s,n)}_{km}\,A^{(s,n)}_{mk'} = 0\,, \tag{90}$$

для всех значений k, k' таких, что $k, k' \neq m$ и $(-1)^k + (-1)^{k'} \neq 2$. В частности, (90) должно выполняться для $k = k' = 1$, т.е. должно быть $A^{(s,n)}_{1m} = 0$, что, как видно из (82), возможно только при следующем условии (для $m < n$)

$$2m^2 - 2m + n^2 - n = 8ms - 6ns\,. \tag{91}$$

Заметим, что $A^{(s,n)}_{kn} \neq 0$ для всех k. Следовательно, (90) означает, что $m \neq n$, а также что n четно. Если при этом $m \neq n-1$, то (90) должно выполняться для $k = k' = n-1$, т.е. должно быть $A^{(s,n)}_{1,n-1} = 0$, что, как опять видно из (82), возможно только при следующем условии

$$m^2 - m = 4ms - ns\,. \tag{92}$$

Легко видеть, что условия (91) и (92) несовместны, поскольку они приводят к равенству $n^2 - n + 4ns = 0$. Таким образом, единственная оставшаяся возможность есть случай, когда $m = n - 1$. В этом случае условие (91) выполняется только для $n = 4$. Прямая проверка показывает, что для $m = 3$, $n = 4$ равенства (51) и (53) действительно выполняются. □

Список литературы

[1] Kulish P.P., Sklyanin E.K.: *Quantum spectral transform method. Recent developments.*— Lecture Notes in Physics **151** (1982), 61–119

[2] Faddeev L.D.: *How algebraic Bethe ansatz works for integrable model.* In: *Symétries quantiques, Les Houches 1995* (North-Holland, Amsterdam, 1998), 149–219 [hep-th/9605187]

[3] Быцко А.Г.: *О $U_q(sl_2)$–инвариантных R–матрицах для старших спинов.*— Алгебра и анализ **17** (2005), N 3, 24–46

[4] Kennedy T.: *Solutions of the Yang–Baxter equation for isotropic quantum spin chains.*— J. Phys. **A25** (1992), 2809–2817

[5] Биденхарн Л., Лаук Дж.: *Угловой момент в квантовой механике* (М: Мир, 1984)

[6] Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K.: *Yang–Baxter equations and representation theory. I.*— Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393–403