ПРЕПРИНТ ПОМИ — 08/2006

ОПИСАНИЕ КОММУТАНТА ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $GL_n(\mathbb{C})$ В СМЕШАННЫХ ТЕНЗОРАХ*

П. П. НИКИТИН

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
191023, Ст.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27

E-mail: pnikitin0103@yahoo.co.uk

24 апреля 2006 г.

АННОТАЦИЯ.

В работе рассматривается алгебра, введенная В. Г. Тураевым (разделенная алгебра Брауэра). Доказывается, что она является подалгеброй алгебры Брауэра и, при определенных значениях параметра, изоморфна коммутанту диагонального действия группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах. Приводится задание алгебры через образующие и соотношения. Для общего значения параметра алгебра является полупростой, в этом случае строится диаграмма Браттели цепочки рассматриваемых алгебр и приводится реализация неприводимых представлений. Также приведено новое, более естественное доказательство формул для характеров алгебр Брауэра и разделенных алгебр Брауэра.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 03-51-5018 и НШ-43292006.1.

Введение

Для классических групп $GL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$, $Sp_n(\mathbb{C})$, действующих в пространстве V, возникает естественный вопрос изучения диагонального действия этих групп в тензорном произведении $V^{\otimes f}$:

$$A \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_f) = Av_1 \otimes \ldots \otimes Av_f.$$

Если мы рассмотрим действие группы S_f в этом же пространстве,

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_f) = (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(f)}), \quad \sigma \in S_f,$$

то несложно проверить, что построенные действия групп $GL_n(\mathbb{C})$ и S_f коммутируют. На самом деле справедливо намного более сильное утверждение, именно, как доказал в в 1901 году И. Шур в своей диссертации [22], эти действия порождают коммутанты друг друга. Этот факт носит название ***двойственности Шура-Вейля*** и является одним из центральных фактов теории представлений обеих групп.

Например, вопрос о разложении диагонального действия симметрической группы в $\mathrm{End}(V^{\otimes f})$ на неприводимые компоненты решается изучением коммутанта $C_f(GL_n(\mathbb{C}))$ образа этого действия [1]. Соответственно, тот же вопрос для ортогональной группы приводит нас к рассмотрению алгебры $C_f(O_n(\mathbb{C}))$. Однако, по выражению Г. Вейля, эта алгебра является "несколько загадочной", что вынудило его прибегнуть при исследовании действия ортогональной группы к другим методам.

Для изучения коммутанта $C_f(O_n(\mathbb{C}))$ Р. Брауэр [6] в 1937 году ввел ассоциативную алгебру диаграмм $Br_f(n)$ и гомоморфизм

$$br : Br_f(n) \mapsto C_f(O_n(\mathbb{C})).$$

Определение алгебры $Br_f(n)$ (***алгебры Брауэра***) имеет смысл при любом $n \in \mathbb{C}$, при этом для $n \in \mathbb{Z}$ алгебра является полупростой лишь при достаточно больших (по модулю) чисел n. Сравнительно долгое время не удавалось ни доказать, что алгебра является полупростой при $n \notin \mathbb{Z}$, ни описать факторалгебры по радикалу при $n \in \mathbb{Z}$ (факторалгебра по радикалу изоморфна соответствующему коммутанту). Частичные результаты были получены в 1956 году Брауном [7, 8], однако полное описание неприводимых представлений и ветвления для семейства алгебр $\{Br_f(n)\}$ было получено только в 1988 году Х. Венцлем [25] при помощи условных ожиданий и основной конструкции В. Джонса.

Появление полиномиальных инвариантов узлов Джонса-Конвея и Кауффмана (см. [11, 12]) позволило ввести нескольких обобщений существующих алгебр. Дж. Бирман и Х. Венцль в 1989 году построили двухпараметрическую алгебру $\mathcal{C}_n(l, m)$ ***(алгебру Бирман-Венцля)***, частным случаем которой оказалась алгебра Брауэра (см. [4, 20]). Обобщение построенных инвариантов привело В. Г. Тураева к введению в том же году в работе [23] алгебр $H_{k,l}(x, y)$, описывающих инварианты ***связок***. При соответствующем выборе параметров $H_{k,l}(x(n), y(n)) = H_{k,l}(n) \subset Br_{k+l}(n)$.

Полученные алгебры $H_{k,l}(n)$ являются основным предметом изучения в настоящей работы. В параграфах §1 и §2 даются определения алгебры Брауэра $Br_f(n)$ и алгебры $H_{k,l}(n)$. В параграфе §3 показывается, что если рассмотреть действие группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l}$ и обозначить через $C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$ коммутант этого действия, то выполняется

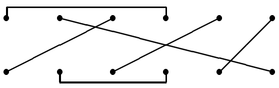
$$br(H_{k,l}(n)) \cong C_{k,l}(GL_n\mathbb{C}), \tag{1}$$

при отождествлении $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l} \cong V^{\otimes k+l}$ (здесь br — отображение, введенное Р. Брауэром, см. выше). Далее в параграфе §4 алгебра $H_{k,l}(n)$ задается через образующие и соотношения. В параграфах §5 и §6 мы вводим понятие основной конструкции Джонса и подсчитываем некоторые размерности представлений $GL_n\mathbb{C}$, необходимые для описания в параграфе §7 неприводимых представлений и графа ветвления для семейства алгебр $\{H_{k,l}(n)\}$. (При подготовке работы к публикации выяснилось, что алгебра $H_{k,l}(n)$ была введена в работах [17, 5], при этом свойство (1) было положено в определение, и утверждения настоящей работы частично доказаны в работах [5, 19, 18]. См. также [10].) Далее в параграфах §§8, 10 строятся реализации представлений алгебры $Br_f(n)$ и $H_{k,l}(n)$, что позволяет предложить новый, более естественный способ подсчета характеров этих алгебр в параграфах §9, 11.

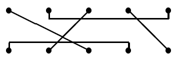
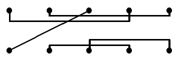
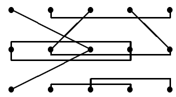
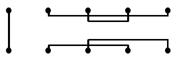
Автор благодарен А. М. Вершику за постановку задач и постоянное внимание к работе.

1 Определение алгебры Брауэра

Нам потребуется определение ***алгебр Брауэра*** Br_f ***и*** $Br_f(n)$, см. [6]. Как векторное пространство $\mathbb{C}(x)$-алгебра Br_f порождается диаграммами, состоящими из двух рядов по f точек, причем каждая из точек соединена дугой ровно с одной другой. Так, например, может выглядеть диаграмма для Br_6:

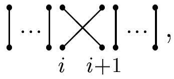


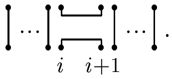
Произведение $a \cdot b$ для диаграмм $a, b \in Br_f$ строится следующим образом: необходимо нарисовать диаграмму b под диаграммой a, так чтобы нижний ряд точек для диаграммы b совпал с верхним рядом для диаграммы a; затем следует удалить получившийся средний ряд точек. В результате этой операции получится d циклов и некоторый граф c без циклов. Тогда $a \cdot b = x^d c$. Например

$a =$ , $b =$ , $a \cdot b =$  $= x$ .

$\mathbb{C}$-алгебра Брауэра $Br_f(n)$, $n \in \mathbb{C}$, как векторное пространство порождается тем же базисом из диаграмм. Произведение диаграмм строится также, как для Br_f, с заменой всех вхождений переменной x на число n.

Зададим диаграммы σ_i и e_i, $1 \le i \le f-1$, следующим образом:

$\sigma_i =$ 

, $e_i =$ 

.

Ниже нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1.1 (Венцль, [25]). *1. Любая диаграмма $d \in Br_f$ либо принадлежит Br_{f-1} либо может быть записана в виде $a\chi b$, где $a, b \in Br_{f-1}$, $\chi \in \{\sigma_{f-1}, e_{f-1}\}$. В частности, диаграммы σ_i и e_i, $1 \le i \le f-1$, порождают алгебру Br_f.*

2. То же верно для алгебры $Br_f(n)$.

Пусть $v(1), \ldots, v(n)$ — ортогональный базис пространства V. Обозначим через $u(j_1, \ldots, j_f)$ элемент $v(j_1) \otimes \ldots \otimes v(j_f) \in V^{\otimes f}$. Введем отображение $br : Br_f(n) \mapsto \mathrm{End}(V^{\otimes f})$ на образующих следующим образом:

$$\begin{aligned}[br(\sigma_i)]u(j_1, \ldots, j_i, j_{i+1}, \ldots, i_f) &= u(j_1, \ldots, j_{i+1}, j_i, \ldots, i_f); \\ [br(e_i)]u(j_1, \ldots, j_i, j_{i+1}, \ldots, i_f) &= \delta(j_i, j_{i+1}) \sum_{j=1}^{n} u(j_1, \ldots, j, j, \ldots, i_f),\end{aligned} \tag{2}$$

здесь $\delta(j_i, j_{i+1})$ — дельта Кронекера.

Теорема 1.2 (Брауэр, [6]). *Отображение $br : Br_f(n) \mapsto \mathrm{End}(V^{\otimes f})$ есть гомоморфизм алгебры Брауэра на коммутант $C_f(O_n(\mathbb{C}))$ ортогональной группы $O_n(\mathbb{C})$.*

Замечание 1.3. Еще Г. Вейль в монографии [1, Гл. V] заметил, что гомоморфизм br инъективен при $n \geq 2f$. В. Браун [8] доказал, что инъективность гомоморфизма равносильна неравенству $n \geq f$.

Замечание 1.4. Симметрическая группа S_n изоморфно вкладывается в алгебру Брауэра $Br_f(n)$, подстановке σ отвечает диаграмма, соединяющая i-ю точку верхнего ряда с $\sigma(i)$-й точкой нижнего ряда. Мы будем отождествлять подстановку σ с соответствующей диаграммой и всю групповую алгебру $\mathbb{C}[S_n]$ с соответствующей подалгеброй в $Br_f(n)$. Отображение br переводит подалгебру $\mathbb{C}[S_n]$ алгебры $Br_f(n)$ в коммутант диагонального действия $GL_n(\mathbb{C})$ в пространстве $V^{\otimes f}$ (см. Введение).

2 Определение алгебр в работе В. Г. Тураева.

Основным объектом изучения в настоящей работе является семейство алгебр, введенных В. Г. Тураевым. Именно, в работе [23] приводятся следующие определения и формулировки.

Пусть f и g неотрицательные целые числа. Под (f,g)***-связкой*** понимается такое одномерное гладкое компактное подмногообразие L многообразия $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, что

$$\partial L = L \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0,1\}) = \{(i,0,0) | i = 1,2,\dots,f\} \cup \{(j,0,1) | j = 1,2,\dots,g\},$$

причем в точках края многообразие L ортогонально плоскостям $\mathbb{R}^2 \times 0$ и $\mathbb{R}^2 \times 1$. *Ориентацией* (f,g)-связки L называется ориентация многообразия L. С каждой ориентированной (f,g)-связкой L ассоциируются числовые последовательности $s(L) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_f)$ и $t(L) = (\nu_1, \dots, \nu_g)$. Здесь $\varepsilon_i = 1$, если в точке $(i,0,0) \in \partial L$ единичный касательный к L вектор равен $(0,0,1)$ и $\varepsilon_i = -1$, если этот вектор равен $(0,0,-1)$. Число $\nu_j = \pm 1$ точно также определяется направлением вектора, касательного к L в точке $(j,0,1)$. Если $s(L) = t(L')$, то естественным образом определяется композиция связок $L \circ L'$. Нас будут интересовать изотопические классы связок.

Нам понадобится определение троек Конвея. Именно, пусть X — стандартная образующая группы кос B_2. Три изотопических класса ориентированных связок L_+, L_- и L_0 составляют тройку Конвея, если эти классы представляются связками, которые совпадают вне некоторого замкнутого шара в $\mathbb{R}^2 \times (0,1)$, а в этом шаре выглядят соответственно как X, X^{-1} и E.

Обозначим через Λ кольцо $\mathbb{Z}[x, x^{-1}, y, y^{-1}]$. Пусть M — множество изотопических классов связок. Рассмотрим свободный Λ-модуль $\Lambda[M]$, свободно порожденный множеством M. Обозначим через N его подмодуль, порожденный элементами $xL_+ - x^{-1}L_- - yL_0$, отвечающими всевозможным тройкам Конвея $L_+, L_-, L_0 \in M$. Обозначим через P отображение $P : M \mapsto \Lambda[M]/N$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_f)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_g)$. Через $H(\varepsilon, \nu) \subset \Lambda[M]/N$ обозначим подмодуль, порожденный образами $P(L)$ (f,g)-связок L, для которых $s(L) = \varepsilon$, $t(L) = \nu$. При $\nu = \varepsilon$ умножение связок задает на подмодуле $H(\varepsilon, \varepsilon)$ структуру Λ-алгебры.

Пусть ε^n — последовательность из n единиц. Алгебра $H(\varepsilon^n, \varepsilon^n)$ изоморфна классической алгебре Гекке $H_n(\Lambda; y)$. Здесь $H_n(\Lambda; y)$ — ассоциативная алгебра с 1, порожденная элементами $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, удовлетворяющими соотношениям $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ при $|i-j| > 1$, $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ при $i = 1, \dots, n-2$; $\sigma_i^2 = y\sigma_i + 1$ при $i = 1, \dots, n-1$.

Теорема 2.1 (Тураев, [23]). *При всех $n = 0, 1, 2, \dots$ Λ-алгебра $H(\varepsilon^n, \varepsilon^n)$ изоморфна $H_n(\Lambda, y)$, изоморфизм задается формулой $e_i \mapsto xP(\sigma_i)$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ — элементарные косы.*

Теорема 2.2 (Тураев, [23]). *Если последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_f)$ получается из последовательности ε' перестановкой членов, то алгебры $H(\varepsilon, \varepsilon)$ и $H(\varepsilon', \varepsilon')$ изоморфны.*

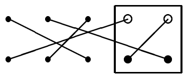
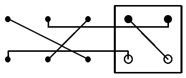
Таким образом, любая алгебра $H(\varepsilon, \varepsilon)$ изоморфна алгебре вида

$$H_{r,f-r}(x,y) = H(\varepsilon(r), \varepsilon(r)), \quad \text{где } \varepsilon(r) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{f-r}).$$

Если мы теперь введем параметр n, положив $e^2 = ne$ для связки вида $e =$ , то мы получим алгебру $H_{r,f-r}(n,y) \cong H_{r,f-r}(x,y)$. Наконец, мы положим $y = 1$, в результате чего рассмотрим алгебру $H_{r,f-r}(n) = H_{r,f-r}(n,1) \subset Br_f(n)$ (ср. [4], стр. 254, 270).

Таким образом, для любого разложения $f = k + l$; $k, l \in \mathbb{Z}_+$, мы ввели алгебру $H_{k,l}(n) \subset Br_{k+l}(n)$. Далее мы всегда будем обозначать введенную алгебру через $H_{k,l}(n)$.

Как понятно из определения, алгебру $H_{k,l}(n)$ можно представить следующим образом. Введем в алгебре $Br_{k+l}(n)$ линейное отображение $\Psi_{k,l}$, задаваемое на диаграмме переменой мест последних l точек в верхнем и нижнем рядах диаграммы (удобно представлять себе "поворот" левой части диаграммы):

$d =$  $\mapsto \Psi_{3,2}(d) =$ .

Предложение 2.3. *Алгебра $H_{k,l}(n)$ как векторное пространство имеет базис из элементов вида $\Psi_{k,l}(\sigma)$, $\sigma \in S_{k+l} \subset Br_{k+l}(n)$.*

Следствие 2.4. *Размерность алгебры $H_{k,l}(n)$ равна $(k+l)!$.*

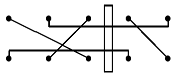
Будем обозначать через i произвольную точку в верхнем ряду диаграммы, при $1 \leq i \leq k$, и через j — точку в верхнем ряду при $k + 1 \leq j \leq k + l$. Соответствующие точки в нижнем ряду будем обозначать через $\bar{i}$ и $\bar{j}$. Из определения отображения $\Psi_{k,l}$ следует, что диаграмма d есть диаграмма вида $d = \Psi_{k,l}(\sigma)$ для некоторого $\sigma \in S_{k+l}$ тогда и только тогда, когда все ее дуги имеют вид

(3) $$[i, \bar{i}], \quad [i, j], \quad [j, \bar{j}], \quad \text{или} \quad [\bar{i}, \bar{j}].$$

Заметим, что $H_{k,l}(n)$ содержит подгруппу $S_k \times S_l$.

Назовем дугу, соединяющую точки из одного ряда диаграммы, ***горизонтальной дугой***, а дугу, соединяющую точки из разных рядов — ***вертикальной дугой (линией)***. Любая диаграмма содержит одинаковое количество горизонтальных дуг в верхнем и нижнем ряду, мы будем обозначать это число через $\mathrm{bars}(d)$. Кроме этого, набор всех линий диаграммы соответствует некоторой подстановке, мы будем обозначать ее через $\sigma(d)$. Если $d \in H_{k,l}(n)$, то $\sigma(d) \in S_{k-\mathrm{bars}(d)} \times S_{l-\mathrm{bars}(d)}$.

Из указанного выше вида дуг произвольной диаграммы $d \in H_{k,l}(n)$ следует, что можно представить себе следующее описание диаграмм, порождающих эту алгебру: представим себе "стенку", соединяющую точку между k-й и $(k+1)$-й точками верхнего ряда с аналогичной точкой нижнего ряда:

$d =$  .

Тогда любая дуга принадлежащая диаграмме d будет вертикальной, если она не пересекает AB, и горизонтальной, если пересекает. Это позволяет назвать алгебру $H_{k,l}(n)$ ***разделенной алгеброй Брауэра (walled Brauer algebra)***, см. [5].

3 Описание разделенной алгебры Брауэра как коммутанта

Рассмотрим диагональное действие группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l}$:

$$A \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes v^*_{k+1} \otimes \ldots \otimes v^*_{k+l}) = A \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes A \cdot v_k \otimes A \cdot v^*_{k+1} \otimes \ldots \otimes A \cdot v^*_{k+l}.$$

Используя изоморфизм V и V^*, мы можем записать изоморфное действие в тензорном произведении $V^{\otimes k+l}$:

$$A \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes v_{k+1} \otimes \ldots \otimes v_{k+l}) = A \cdot v_1 \otimes \ldots \otimes A \cdot v_k \otimes A' \cdot v_{k+1} \otimes \ldots \otimes A' \cdot v_{k+l}, \tag{4}$$

где $A' = (A^t)^{-1}$. Для $A \in GL_n(\mathbb{C})$ обозначим через $I_1(A) \in \mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$ оператор, отвечающий этому действию. Оператор, отвечающий диагональному действию матрицы $A \in GL_n(\mathbb{C})$ в $V^{\otimes k+l}$, обозначим через $I_2(A) \in \mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$.

Введем линейный изоморфизм $\Phi_{k,l}$ пространства $\mathrm{End}(V^{\otimes k+l}) = \{T = \{T^{j_1 \ldots j_{k+l}}_{i_1 \ldots i_{k+l}}\}\}$:

$$[\Phi_{k,l}(T)]^{j_1 \ldots j_{k+l}}_{i_1 \ldots i_{k+l}} = T^{j_1 \ldots j_k i_{k+1} \ldots i_{k+l}}_{i_1 \ldots i_k j_{k+1} \ldots j_{k+l}}.$$

Очевидным образом, $\Phi^2_{k,l} = \mathrm{Id}$. Прямое вычисление позволяет сформулировать следующее утверждение:

Предложение 3.1. *Пусть $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$. Тогда*

$$I_1(A)B = BI_1(A) \Leftrightarrow I_2(A)\Phi_{k,l}(B) = \Phi_{k,l}(B)I_2(A).$$

Как уже упоминалось выше (см. замечание 1.4) коммутант диагонального действия I_2 порождается образом симметрической группы под действием отображения br:

$$br(\sigma)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{k+l}) = v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(k+l)}, \quad \sigma \in S_{k+l}.$$

Вместе с предложением 3.1 этот факт дает нам следствие

Следствие 3.2. *Коммутант действия I_1 порождается операторами $\Phi_{k,l}(br(\sigma))$, $\sigma \in S_{k+l} \subset Br_{k+l}(n)$.*

Как и в случае диагонального действия ортогональной группы, коммутант рассматриваемого действия группы $GL_n(\mathbb{C})$ может быть описан при помощи алгебры Брауэра. Из определения отображений br, $\Phi_{k,l}$ и отображения $\Psi_{k,l}$ из параграфа §2 непосредственно вытекает следующее предложение:

Предложение 3.3.

$$br \circ \Psi_{k,l} = \Phi_{k,l} \circ br.$$

Предложение 3.3 и следствие 3.2 позволяют утверждать, что коммутант действия I_1 порождается элементами $br(\Psi_{k,l}(\sigma))$, $\sigma \in S_{k+l} \subset Br_{k+l}(n)$. Таким образом, используя замечание 1.3, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 3.4. *Образ $br(H_{k,l}(n))$ изоморфен коммутанту диагонального действия группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах $V^{\otimes k} \bigotimes V^{*\otimes l}$. При $n \geq k + l$ отображение br переводит алгебру $H_{k,l}(n)$ на образ $br(H_{k,l}(n))$ изоморфно.*

4 Образующие и соотношения для алгебры $H_{k,l}(n)$

Нашей задачей будет доказать следующую теорему.

Теорема 4.1. *$H_{k,l}(n)$ есть подалгебра алгебры $Br_{k+l}(n)$,*

$$H_{k,l}(n) = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, e_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l-1} \rangle,$$

и определяющими соотношениями являются

$$\sigma_i^2 = 1, \quad i \neq k; \quad (\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1, \quad i \neq k-1, k+1; \tag{5}$$

$$e_k \sigma_i = \sigma_i e_k, \quad i \neq k-1, k+1; \tag{6}$$

$$e_k^2 = n e_k, \quad e_k \sigma_{k-1} e_k = e_k \sigma_{k+1} e_k = e_k, \tag{7}$$

$$e_k \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k = \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k. \tag{8}$$

Проверка того, что образующие $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, e_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l-1}$ удовлетворяют заданным выше соотношениям не предоставляет сложности. Оставшаяся часть доказательства теоремы потребует некоторой предварительной работы.

Возьмем произвольную диаграмму $d \in H_{k,l}(n)$ и положим $r = \mathrm{bars}(d)$. Нам потребуются подстановки вида

$$a = (i_1, k)(i_2, k-1) \ldots (i_r, k-r+1), \quad k \geq i_1 > i_2 > \cdots > i_r \geq 1; \tag{9}$$

$$b = (j_1, k+1)(j_2, k+2) \ldots (j_r, k+r), \quad k+1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq k+l.$$

Лемма 4.2. *Пусть $r = \mathrm{bars}(d)$ для некоторой диаграммы $d \in H_{k,l}(n)$. Существуют единственные подстановки a_1, a_2, b_1, b_2 вида (9) и единственная диаграмма $\hat{d}$, для которых $d = a_1 b_1 \hat{d} a_2 b_2$, и множество концов горизонтальных дуг диаграммы $\hat{d}$ есть точки верхнего ряда*

$$k-r+1, k-r+2, \ldots, k; k+1, k+2, \ldots, k+r$$

и нижнего ряда

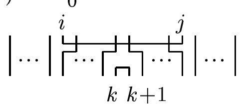
$$\overline{k-r+1}, \overline{k-r+2}, \ldots, \overline{k}; \overline{k+1}, \overline{k+2}, \ldots, \overline{k+r}.$$

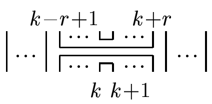
Доказательство. Для выполнения условий леммы подстановка a_1 должна быть равна $a_1 = (i_1, k)(i_2, k-1) \ldots (i_r, k-r+1)$, где $i_1 > i_2 > \cdots > i_r$ — упорядоченные левые концы верхних дуг диаграммы d. Подстановки a_2, b_1, b_2 строятся аналогично. □

Обозначим через $\overline{(i,j)}$ элемент $\sigma_i \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{k-1} \sigma_j \sigma_{j-1} \ldots \sigma_{k+1} e_k \in H_{k,l}(n)$. Для этого элемента $\mathrm{bars}(\overline{(i,j)}) = 1$, он содержит дуги $[i,j]$ и $[\overline{k}, \overline{k+1}]$ и $\sigma(\overline{(i,j)}) = e$. Построим по индукции диаграммы $d_0^r \in H_{k,l}(n)$, $1 \leq r \leq \min(k,l)$:

$$d_0^0 = e; \quad d_0^r = d_0^{r-1} \cdot \overline{(k-r+1, k+r)}.$$

Диаграммы $\overline{(i,j)}$ и d_0^r есть

$\overline{(i,j)} =$ 

, $d_0^r =$ 

.

Диаграмма d_0^r — единственная диаграмма с непересекающимися дугами, для которой $\hat{d} = d$, $\sigma(d) = e$ и $\mathrm{bars}(d) = r$.

Рассмотрим симметрическую группу $S_{\mathrm{bars}(d)}$, действующую на левых (или правых) концах дуг диаграммы d.

Лемма 4.3. *Существуют единственные подстановки $c_1, c_2 \in S_{\mathrm{bars}(d)}$, такие что $\hat{d} = c_1 d_0^{\mathrm{bars}(d)} c_2 \sigma(\hat{d})$.*

Доказательство. Пусть $k+1-i_1, k+1-i_2, \ldots, k+1-i_{\mathrm{bars}(d)}$ — левые концы верхних дуг диаграммы $\hat{d}$, $k+j_1, k+j_2, \ldots, k+j_{\mathrm{bars}(d)}$ — соответствующие правые концы этих дуг. Тогда подстановка c_1 переводит $k+j_f$ в $k+i_f$ для любого f, $1 \le f \le \mathrm{bars}(d)$. Подстановка c_2 строится аналогично. □

Следствие 4.4. *Алгебра $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1},\ e_k\ \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l-1} \rangle$ содержит $H_{k,l}(n)$.*

Назовем любое произведение образующих $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, e_k, $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l-1}$ ***словом*** и будем обозначать слова прописными буквами $A, B, C, D, \ldots$. Диаграмму, отвечающую слову D, обозначим через $d = \mathrm{diagr}(D)$. В силу соотношений (5) группа, натянутая на образующие $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$, $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l-1}$ изоморфна $S_k \times S_l$. Ниже мы также используем группы $S_{k-r} \times S_{l-r} \cong \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-r},\ \sigma_{k+r}, \ldots, \sigma_{k+l-1} \rangle$ и $S_r \cong \langle \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+r-1} \rangle$, при $1 \le r \le \min(k, l)$.

Выберем произвольно каноническое слово S, отвечающее подстановке $s \in S_k \times S_l$, и будем отождествлять подстановку с каноническим словом. Так под единственностью подстановки ниже понимается единственность канонического слова подстановки.

Леммы 4.2 и 4.3 позволяют сформулировать следующую лемму.

Лемма 4.5. *Для произвольного слова D, $\mathrm{diagr}(D) = d$ существуют и единственны подстановки A_1, A_2, B_1, B_2 вида (9), $C_1, C_2 \in S_{\mathrm{bars}(d)}$, $E \in S_{k-\mathrm{bars}(d)} \times S_{l-\mathrm{bars}(d)}$ такие что выполняется $D = A_1 B_1 (C_1 D_0 C_2 E) B_2 A_2$ и $\mathrm{diagr}(D_0) = d_0^{\mathrm{bars}(d)}$. При этом все подстановки однозначно определяются диаграммой d.*

Известно, что любая подстановка $a \in S_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$ может быть записана в виде $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k \cdot b$, где $b \in \langle \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$. Рассмотрим произвольное слово $D_1 = a_1 e_k a_2 e_k \ldots a_m e_k a_{m+1}$, $a_i \in S_k \times S_l$, содержащее m раз образующую e_k. Положим $a_1 = \sigma_{i_1} \sigma_{i_1+1} \ldots \sigma_{k-1} \cdot \sigma_{j_1} \sigma_{j_1-1} \ldots \sigma_{k+1} b_1$, $b_1 \in S_{k-1} \times S_{l-1}$. Тогда, в силу коммутирования e_k и $S_{k-1} \times S_{l-1}$, $D_1 = \overline{(i_1, j_1)} \cdot D_2$, где слово D_2 содержит $(m-1)$ раз образующую e_k. Продолжая по индукции, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 4.6. *Любое слово D записывается в виде*

$$D = \overline{(i_1 j_1)(i_2 j_2)} \ldots \overline{(i_m j_m)} D',$$

где m — количество образующих e_k в слове D и $D' \in S_k \times S_l$.

Рассмотрим подстановки вида

$$(10) \quad a = (i_1^1, i_1^2)(i_2^1, i_2^2) \ldots (i_r^1, i_r^2), \qquad k \ge i_1^1 > i_2^1 > \cdots > i_r^1 \ge 1, \quad k \ge i_1^2 > i_2^2 > \cdots > i_r^2 \ge 1;$$

$$b = (j_1^1, j_1^2)(j_2^1, j_2^2) \ldots (j_r^1, j_r^2), \qquad k+1 \le j_1^1 < j_2^1 < \cdots < j_r^1 \le k+l, \quad k+1 \le j_1^2 < j_2^2 < \cdots < j_r^2 \le k+l.$$

Для диаграммы d, отвечающей некоторому слову D из предыдущей леммы, обозначим через $\mathcal{D}(d)$ множество подстановок вида $s = cdab$, где a и b — подстановки вида (10), $i_1^1 > i_2^1 > \cdots > i_r^1$ и $j_1^1 < j_2^1 < \cdots < j_r^1$ — упорядоченные левые и правые концы нижних дуг диаграммы $D' = \overline{(i_1 j_1)(i_2 j_2)} \ldots \overline{(i_m j_m)}$; $c \in S_r$, $d \in S_{k-r} \times S_{l-r}$ (здесь S_r — группа, переставляющая правые концы нижних дуг диаграммы D', $S_{k-r} \times S_{l-r}$ — группа, переставляющая нижние концы линий этой диаграммы). Аналогично лемме 4.5 доказывается следующее утверждение.

Следствие 4.7. *Для произвольного слова D из леммы 4.6, $\mathrm{diagr}(D) = d$, существует единственная подстановка $D_0 \in \mathcal{D}(d)$, для которой $D = \overline{(i_1 j_1)}\,\overline{(i_2 j_2)} \ldots \overline{(i_m j_m)} D_0$. При этом подстановка D_0 определяется диаграммой d.*

Лемма 4.8. *Для любых двух диаграмм $d_1, d_2 \in H_{k,l}(n)$ выполняется $d_1 \cdot d_2 \in H_{k,l}(n)$.*

Доказательство. Обозначим через i^1 произвольную точку в верхнем ряду диаграммы d_1, при $1 \le i^1 \le k$, и через j^1 — точку в верхнем ряду диаграммы d_1 при $k+1 \le j^1 \le k+l$. Соответственные точки в нижнем ряду диаграммы d_1 (как и совпадающие с ними точки в верхнем ряду диаграммы d_2) будем обозначать через i^2 и j^2, а соответствующие точки в нижнем ряду диаграммы d_2 — через i^3 и j^3. Возьмем произвольный отрезок диаграммы произведения. Не умаляя общности мы можем считать его начинающимся в точке i^1. Отрезок может состоять только из следующих отрезков диаграмм d_1 и d_2:

1. $[i^1 j^1]$,
2. $[i^1 i^2][i^2 i^3]$,
3. $[i^1 i^2_1][i^2_1 j^2_1][j^2_1 i^2_2] \ldots [j^2_q i^2_{q+1}][i^2_{q+1} i^3]$,
4. $[i^1 i^2_1][i^2_1 j^2_1][j^2_1 i^2_2] \ldots [i^2_q j^2_q][j^2_q j^1]$.

Таким образом, такой отрезок имеет вид $[i_1 i_3]$ или $[i_1 j_1]$, что и требовалось доказать. ∎

Леммы 4.6 и 4.8 приводят к следующему утверждению.

Следствие 4.9. *Алгебра $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, e_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l-1} \rangle$, содержится в алгебре $H_{k,l}(n)$.*

Будем обозначать эквивалентность слов D_1 и D_2 по модулю соотношений (5)–(8) через $D_1 \equiv D_2$. Нам понадобится следующая характеристика элементов $\overline{(i,j)}$.

Лемма 4.10. *Пусть $p \ne k-1$ и $q \ne k+1$. Рассмотрим диаграмму $d = \mathrm{diagr}(\overline{(i,j)} \cdot \overline{(p,q)})$. Тогда*

1. $\mathrm{bars}(d) = 2$;
2. *пусть одна из дуг в верхнем ряду диаграммы d проходит через точки i_1 и j_1 и через первую из образующих e_k в слове $\overline{(i,j)} \cdot \overline{(p,q)}$, а вторая дуга — через точки i_2 и j_2 и через вторую из образующих e_k. Существуют элементы $\overline{(i',j')}$ и $\overline{(p',q')}$ и подстановка $a \in S_k \times S_l$, для которых $\overline{(i,j)} \cdot \overline{(p,q)} \equiv \overline{(i',j')} \cdot \overline{(p',q')} a$ и одна из дуг в верхнем ряду диаграммы d проходит через точки i_1 и j_1 и через вторую из образующих e_k в слове $\overline{(i',j')} \cdot \overline{(p',q')}$, а вторая дуга — через точки i_2 и j_2 и через первую из образующих e_k.*

Доказательство. Пункт 1 очевиден. Далее, по соотношению (8),

$$\begin{aligned}(11)\quad \overline{(i,j)} \cdot \overline{(p,q)} &= \sigma_i \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{k-1} \sigma_j \sigma_{j-1} \ldots \sigma_{k+1} \sigma_p \sigma_{p+1} \ldots \sigma_{k-2} \sigma_q \sigma_{q-1} \ldots \sigma_{k+2} \cdot \\ e_k \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k &= \sigma_i \sigma_{i+1} \ldots \sigma_{k-1} \sigma_j \sigma_{j-1} \ldots \sigma_{k+1} \sigma_p \sigma_{p+1} \ldots \sigma_{k-2} \sigma_q \sigma_{q-1} \ldots \sigma_{k+2} \cdot \\ &\qquad \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k \sigma_{k-1} \sigma_{k+1} e_k.\end{aligned}$$

Приводя правую часть равенства к форме $\overline{(i',j')} \cdot \overline{(p',q')} a$ по лемме 4.6, мы получаем требуемый результат. ∎

Лемма 4.11. *Для любого слова D, $\mathrm{diagr}(D) = d$, существует слово D', такое что $D \equiv D'$ и слово D' содержит образующую e_k ровно $\mathrm{bars}(d)$ раз.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по $\mathrm{bars}(d)$ и по числу образующих e_k. Пусть утверждение леммы верно для $\mathrm{bars}(d) = f$ при любом количестве образующих e_k в слове D и для $\mathrm{bars}(d) = f+1$ при числа образующих, не превосходящем g. Рассмотрим случай $\mathrm{bars}(d) = f+1$, $D = a_1 e_k a_2 e_k \ldots a_{g+1} e_k a_{g+2}$, $a_i \in S_k \times S_l$. Рассмотрим слово $D_2 = a_1 e_k a_2 e_k \ldots e_k a_{g+1}$. Если $\mathrm{bars}(D_2) = f$, то утверждение леммы очевидно, в противном случае $\mathrm{bars}(D_2) = f+1$ и по индукции $D_2 \equiv b_1 e_k b_2 e_k \ldots e_k b_{f+2}$, для некоторых $b_i \in S_k \times S_l$. В силу леммы 4.6, $D_2 \equiv \overline{(i_1 j_1)} \ldots \overline{(i_{f+1} j_{f+1})} D_{01}$, $D \equiv D_3 = \overline{(i_1 j_1)} \ldots \overline{(i_{f+2} j_{f+2})} D_{02}$, где $D_{01} \in \mathcal{D}(D_2)$, $D_{02} \in \mathcal{D}(D)$. Образующие e_k с первой по $(f+1)$-ю в слове D_3 принадлежат разным дугам, $\mathrm{bars}(D_3) = \mathrm{bars}(D) = f+1$, поэтому последняя образующая e_k лежит на какой-то из этих дуг. Пользуясь леммой 4.10, мы можем переставить элемент $\overline{(i_{f+2} j_{f+2})}$ таким образом, что на одной дуге будут лежать соседние образующие e_k. Это значит, что $D \equiv D_4$, где слово D_4 содержит $f+2$ образующие e_k, и в том числе содержит произведение $e_k c e_k$, где $c \in S_{k-1} \times S_l$ или $c \in S_k \times S_{l-1}$ или $c \in S_{k-1} \times S_{l-1}$. Теперь, пользуясь соотношениями (7), мы можем уменьшить количество образующих e_k на 1, что доказывает лемму. □

Доказательство теоремы 4.1. В силу следствий 4.4 и 4.9 алгебра $H_{k,l}(n)$ совпадает с алгеброй $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, e_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+l-1} \rangle$. Обозначим через D_0^r слово, отвечающее по определению диаграмме d_0^r. В силу леммы 4.5 для доказательства теоремы нам достаточно доказать, что если для некоторой диаграммы D выполнено $\mathrm{diagr}(D) = d_0^r$, тогда $D \equiv D_0^r$. В силу леммы 4.11 существует слово D', такое что $D \equiv D'$, и число образующих e_k в слове D' равно $\mathrm{bars}(D')$. По лемме 4.6 существует слово $D'' = \overline{(i_1 j_1)} \ldots \overline{(i_{\mathrm{bars}(d)} j_{\mathrm{bars}(d)})} D_{01}$, $D_{01} \in \mathcal{D}(D'')$, такое что $D'' \equiv D'$. Каждый из сомножителей вида $(i_f j_f)$ слова D'' отвечает некоторой дуге диаграммы d_0^r. Пользуясь леммой 4.10, переставим сомножители так, чтобы f-й сомножитель отвечал дуге $[k-f, k+f]$. Мы получим

$$
(12) \quad D'' \equiv D''' = \overline{(k-1, k+1)(k-2, k+2)} \ldots \overline{(k - \mathrm{bars}(d), k + \mathrm{bars}(d))} D_{02} = D_0^{\mathrm{bars}(d)} D_{02}, \quad \text{при} \quad D_{02} \in \mathcal{D}(D''').
$$

Так как $\mathrm{diagr}(D''') = \mathrm{diagr}(D_0^{\mathrm{bars}(d)}) = d_0^r$, то $D_{02} = e$ в силу следствия 4.7. Теорема доказана. □

5 Конструкция Джонса, теория представлений алгебры Брауэра

В этом параграфе описывается конструкция Джонса (см. [11, 25]).

Рассмотрим пару полупростых алгебр $A \subset B$ над $\mathbb{C}$,

$$
A = \sum A_i, \ A_i \cong M_{a_i}\mathbb{C}; \qquad B = \sum B_j, \ B_j \cong M_{b_j}\mathbb{C}.
$$

Функционал $\mathrm{tr} : B \mapsto \mathbb{C}$ называется ***следом***, если $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$ для любых $a, b \in B$. Существует единственный с точностью до множителя след на $M_n\mathbb{C}$, поэтому любой след на B полностью определяется значениями $t_j = \mathrm{tr}(p_j)$, где $p_j \in B_j$ — минимальные идемпотенты. След tr называется ***невырожденным***, если для любого $0 \neq b \in B$ существует $b' \in B$, для которого $\mathrm{tr}(bb') \neq 0$. Несложно проверить, что невырожденность следа равносильна утверждению, что $t_j \neq 0$ для любого j.

Напомним, что если след невырожден на B, то отображение $b \in B \mapsto \mathrm{tr}(b\cdot) \in B^*$ есть изоморфизм. Пусть теперь след невырожден на B и на A. Пользуясь изоморфизмом между A и A^*, мы получаем для любого $b \in B$ единственный элемент $\varepsilon_A(b) \in A$, такой что $\mathrm{tr}(b\cdot)_{|A} = \mathrm{tr}(\varepsilon_A(b)\cdot)_{|A}$. Линейное отображение $\varepsilon_A : B \mapsto A$ называется ***условным ожиданием, сохраняющим след***. Основные свойства ε_A следующие:

1. $\varepsilon_A(a_1 b a_2) = a_1 \varepsilon(b) a_2$, для $a_1, a_2 \in A$ и $b \in B$. В частности, $\varepsilon_A(a) = a$ для $a \in A$.

2. ε_A невырождено, т.е. для любого $0 \neq b \in B$ существуют $b_1, b_2 \in B$, для которых $\varepsilon_A(b_1 b) \neq 0$ и $\varepsilon_A(b b_2) \neq 0$.

Замечание 5.1. Можно ввести другое определение условного ожидания ε_A, не использующее след (см. [24]), положив по определению

$$\varepsilon_A(a_1 b a_2) = a_1 \varepsilon_A(b) a_2, \text{ для } a_1, a_2 \in A, \ b \in B; \qquad \varepsilon_A(b^*) = \varepsilon_A(b)^*, \ b \in B.$$

Для введенного таким образом ожидания также справедлив аналог предложения 5.2, однако вопрос об эквивалентности двух определений пока открыт.

Пусть алгебра B содержится в некоторой алгебре C, при этом существует элемент $e \in C$, для которого

1. $e^2 = e$,

2. $ebe = e\varepsilon_A(b) = \varepsilon_A(b)e$ для любого $b \in B$,

3. Отображение $a \in A \mapsto ae$ инъективно и $1e = e$.

Важным примером такой ситуации служит следующая: рассмотрим левое регулярное представление алгебры B, при этом алгебру B, рассматриваемую как векторное пространство, будем обозначать через B_ξ, а соответствующие элементы алгебры — через b_ξ. Пусть алгебра $C = \mathrm{End}(B_\xi)$ есть алгебра всех линейных преобразований пространства B_ξ. В этом случае элемент $e_A \in \mathrm{End}(B_\xi)$, $e_A b_\xi = \varepsilon(b)_\xi$ удовлетворяет сформулированным выше свойствам. Обозначим через $\langle B, e_A \rangle$ алгебру, порожденную B и e_A.

Предложение 5.2 (Джонс, [11]; Венцль, [25]). *1. Для определенных выше полупростых алгебр A и B, невырожденного следа tr и условного ожидания ε_A алгебра $\langle B, e_A \rangle$ изоморфна коммутанту алгебры A в $\mathrm{End}(B_\xi)$. В частности, эта алгебра полупроста.*

2. Существует взаимно-однозначное соответствие между простыми компонентами алгебр A и $\langle B, e_A \rangle$, при этом минимальному идемпотенту $p \in A_i$ отвечает минимальный идемпотент $pe_A \in \langle B, e_A \rangle_i$. При этом соответствии диаграмма Браттели для алгебр $B \subset \langle B, e_A \rangle$ есть отражение диаграммы Браттели для алгебр $A \subset B$.

3. $\langle B, e_A \rangle = B e_A B$.

Алгебру $\langle B, e_A \rangle$, описанную в предложении 5.2, как и процесс ее построения, называют ***(основной) конструкцией Джонса***. Следующая теорема показывает, что эта алгебра есть "наименьшая" алгебра, порождаемая алгеброй B и идемпотентом e.

Предложение 5.3 (Венцль, [25]). *Пусть $A \subset B$ — конечномерные полупростые алгебры над $\mathbb{C}$ и tr — невырожденный след на B, сужение которого на A также невырождено. Пусть ε_A — сохраняющее след условное ожидание алгебры B на подалгебру A, и пусть идемпотент*

e удовлетворяет сформулированным выше свойствам 1–3. Тогда алгебра $\langle B, e\rangle$ полупроста, и существует разложение

$$\langle B, e\rangle \cong \langle B, e_A\rangle \bigoplus \tilde{B},$$

где алгебра $\langle B, e_A\rangle$ есть алгебра из предложения 5.2, а алгебра $\tilde{B}$ изоморфна подалгебре алгебры B. При этом идеал, порожденный идемпотентом e, изоморфен $\langle B, e_A\rangle$.

Основная конструкция Джонса была применена Х. Венцлем [25] для построения теории представлений алгебры Брауэра. Им доказаны следующие утверждения. (Мы используем работу Х. Венцля в параграфе §7.)

Предложение 5.4 (Венцль, [25]). *1. Для любой диаграммы $d \in Br_f$ существует единственная диаграмма $\varepsilon_f(d) \in D_{f-1}$, для которой $e_f d e_f = x\varepsilon_f(d)e_f$, и $\varepsilon_f(d) = d$ для любого $d \in Br_{f-1}$.*

2. *Существует линейный функционал τ на Br_f, задаваемый по индукции следующим образом: $\tau(d) = \tau(\varepsilon_f(d))$, $\tau(1) = 1$.*

3. *Функционал τ может быть задан по индукции формулой $\tau(a\chi b) = \frac{1}{x}\tau(ab)$, для $\chi \in \{\sigma_f, e_f\}$ и $a, b \in Br_{f-1}$.*

4. *$\tau(d'\varepsilon_f(d)) = \tau(d'd)$ для $d \in Br_f$ и $d' \in Br_{f-1}$, т.е. отображение ε_f — условное ожидание алгебры Br_f на Br_{f-1}.*

5. *Существует отображение из $Br_f(n)$ в $Br_{f-1}(n)$, также обозначаемое через ε_f, и функционал τ_n на $Br_f(n)$, для которого $\tau_n(d'\varepsilon_f(d)) = \tau_n(d'd)$ для $d \in Br_f(n)$ и $d' \in Br_{f-1}(n)$.*

6. *Пусть $d \in Br_f$. Если определено $d(n)$, то $\tau_n(d(n)) = [\tau(d)](n)$.*

7. *Функционалы τ и τ_n — следы на алгебрах Br_f и $Br_f(n)$ соответственно. Для положительного нечетного n выполняется $\tau_n = \mathrm{tr} \circ br$, где tr — нормированный след на $\mathrm{End}(V^{\otimes f})$.*

Замечание 5.5. Если мы рассмотрим сужение введенного Х. Венцлем ожидания ε_f на подалгебру $\mathbb{C}[S_f] \subset Br_f$, то мы получим следующее:

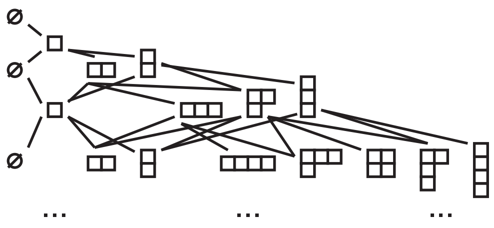
$$\begin{cases} \varepsilon_f(\sigma) = \sigma, & \sigma \in S_{f-1} \subset Br_{f-1} \subset Br_f; \\ \varepsilon_f(\sigma) = x^{-1} \cdot \mathrm{VP}_f(\sigma), & \text{для подстановок } \sigma \in S_f \backslash S_{f-1}. \end{cases}$$

Здесь $\mathrm{VP}_f : S_f \mapsto S_{f-1}$ есть ***виртуальная проекция***, т.е., вычеркивание числа f из циклической записи подстановки, $\mathrm{VP}_7((57)(432)(61)) = (5)(432)(61)$. Эта проекция была введена в работе [15], она связана с элементами Юнга–Юциса–Мерфи (см. [3]) и с теорией представлений бесконечной симметрической группы (см. также [16]).

Теорема 5.6 (Венцль, [25]). *Алгебра $Br_f(n)$ полупроста при $n \notin \mathbb{Z}$. Граф ветвления для семейства алгебр $\{Br_f(n)\}_{f=1}^{\infty}$, $n \notin \mathbb{Z}$, выглядит следующим образом: на f-ом этаже вершины параметризованы парами (f, λ), где λ пробегает множество всех диаграмм Юнга, для которых $f - |\lambda|$ четное. Вершины (f, λ) и $(f+1, \mu)$ соединены ребром, если $\lambda \nearrow \mu$ или $\lambda \searrow \mu$ (см. рис. 1).*

Мы будем обозначать размерность неприводимого представления алгебры Брауэра $Br_f(n)$, $n \notin \mathbb{Z}$, отвечающего паре (f, λ), через $\dim(f, \lambda)$. Через $\dim(\lambda)$ обозначается размерность неприводимого представления алгебры $\mathbb{C}[S_f]$, отвечающего диаграмме λ.

Рис. 1: Диаграмма Браттели для цепочки алгебр Брауэра.



Следствие 5.7.

$$\dim(f,\lambda) = \frac{f!\dim\lambda}{|\lambda|!((f-|\lambda|)/2)!2^{(f-|\lambda|)/2}}. \tag{13}$$

Доказательство. Докажем формулу по индукции, используя диаграмму ветвления для индукционного перехода.

База индукции: для тех диаграмм, для которых выполняется $|\lambda| = f$, граф ветвления есть граф Юнга (соответствующие представления алгебры Брауэра есть неприводимые представления алгебры $\mathbb{C}[S_f]$). Для них выполняется $\dim\lambda = \sum_{\mu\nearrow\lambda}\dim\mu$, и, таким образом, $\dim(|\lambda|,\lambda) = \dim\lambda$, что соответствует формуле (13) при $f = |\lambda|$.

Пусть теперь формула доказана для $(f-1)$-го этажа и для всех диаграмм f-го этажа, для которых $f - |\lambda| < 2i$. Докажем ее для диаграмм вида (f,λ), $f - |\lambda| = 2i$. Сначала рассмотрим случай $|\lambda| > 0$, тогда, пользуясь индукционным переходом, получим

$$\begin{gathered}\dim(f,\lambda) = \sum_{\mu\nearrow\lambda}\dim(f-1,\mu) + \sum_{\nu\searrow\lambda}\dim(f-1,\nu) = \\ \sum_{\mu\nearrow\lambda}\frac{(f-1)!\dim\mu}{|\mu|!((f-1-|\mu|)/2)!2^{(f-1-|\mu|)/2}} + \sum_{\nu\searrow\lambda}\frac{(f-1)!\dim\nu}{|\nu|!((f-1-|\nu|)/2)!2^{(f-1-|\nu|)/2}} = \\ \frac{(f-1)!(\sum_{\mu\nearrow\lambda}\dim\mu)}{(|\lambda|-1)!((f-|\lambda|)/2)!2^{(f-|\lambda|)/2}} + \frac{(f-1)!(\sum_{\nu\searrow\lambda}\dim\nu)}{(|\lambda|+1)!((f-2-|\lambda|)/2)!2^{(f-2-|\lambda|)/2}} = \\ \frac{(f-1)!}{(|\lambda|+1)!((f-|\lambda|)/2)!2^{(f-|\lambda|)/2}}\Big(|\lambda|(|\lambda|+1)\dim\lambda + (f-|\lambda|)(|\lambda|+1)\dim\lambda\Big) = \\ \frac{f!\dim\lambda}{|\lambda|!((f-|\lambda|)/2)!2^{(f-|\lambda|)/2}}.\end{gathered} \tag{14}$$

Мы воспользовались равенствами $\sum_{\mu\nearrow\lambda}\dim\mu = \dim\lambda$ и $\sum_{\nu\searrow\lambda}\dim\nu = (|\lambda|+1)\dim\lambda$. Последнее равенство следует из того, что

$$\sum_{\nu\searrow\lambda}\nu = \mathrm{Ind}_{S_{|\lambda|}}^{S_{|\lambda|+1}}\lambda, \quad \dim\Big(\mathrm{Ind}_{S_{|\lambda|}}^{S_{|\lambda|+1}}\lambda\Big) = [S_{|\lambda|+1} : S_{|\lambda|}]\dim\lambda,$$

здесь $[S_{|\lambda|+1} : S_{|\lambda|}] = |\lambda| + 1$ — индекс подгруппы.

Наконец, в случае $|\lambda| = 0$, т.е., при $\lambda = \emptyset$, пользуясь тем, что $\dim(\emptyset) = \dim(\square) = 1$, и исходя из диаграммы ветвления, мы получим

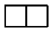
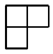
$$\dim(f,\emptyset) = \dim(f-1,\square) = \frac{(f-1)!\dim(\square)}{((f-2)/2)!2^{(f-2)/2}} = \frac{f!\dim(\emptyset)}{(f/2)!2^{f/2}}.$$

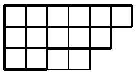
$\square$

6 Построение полинома, задающего размерности некоторых представлений группы $GL_n\mathbb{C}$

Для применения конструкции Джонса к построению графа ветвления для семейства разделенных алгебр Брауэра, по аналогии с работой [25], нам потребуется предварительно задать некоторое семейство полиномов $\{P_{\lambda,\mu}(n)\}$, значения каждого из которых для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ будет отвечать размерности представления специального вида группы $GL_n\mathbb{C}$.

Стандартное действие $GL_n(\mathbb{C})$ на пространстве V есть неприводимое представление, отвечающее диаграмме из одной клетки; действие $GL_n(\mathbb{C})$ на сопряженном пространстве V^* отвечает диаграмме (1^{n-1}). Обозначим через $n \times l - \lambda$ диаграмму, полученную вырезанием из правого нижнего угла прямоугольника размера $n \times l$ диаграммы λ, развернутой на $180°$ и через $n \times l - \lambda + \mu$ диаграмму $n \times l - \lambda$, к которой справа приписана диаграмма μ.

Если $n = 3$, $l = 4$, $\lambda =$ , $\mu =$ ,

тогда $n \times l - \lambda + \mu =$ .

Следующее предложение непосредственно следует из формул разложения тензорного произведения неприводимых представлений группы $GL_n\mathbb{C}$, см., например, [9].

Предложение 6.1. *1. Все неприводимые компоненты тензорного произведения $(1^{n-1})^{\otimes l}$ имеют вид $n \times l - \lambda$, при $|\lambda| = l$.*

2. Все неприводимые компоненты действия I_1, т.е., тензорного произведения $(1^{n-1})^{\otimes l} \bigotimes (1)^{\otimes k}$, имеют вид $n \times l - \lambda + \mu$, при $|\lambda| - |\mu| = l - k$, $|\lambda| \le l$ и $|\mu| \le k$.

Нам необходимо вычислить размерности $\dim(n \times l - \lambda, n)$ и $\dim(n \times l - \lambda + \mu, n)$ указанных выше представлений как функции от n (с точностью до скалярного множителя) при условии $|\lambda| \le l$.

Напомним, что для любой клетки $\square \in \lambda$, находящейся в i-й строке и j-м столбце диаграммы λ, можно определить ***содержание*** этой клетки $c(\square) = i - j$ и ***крюк*** $h(\square) = (\lambda_i - j) + (\tilde{\lambda}_j - i) + 1$. Размерность $\dim(\lambda, n)$ неприводимого представления группы $GL_n(\mathbb{C})$, отвечающего диаграмме λ, равна

$$\dim(\lambda, n) = \frac{\prod(n + c(\square))}{\prod h(\square)} = A \cdot \prod(n + c(\square)), \tag{15}$$

где произведения берутся по всем клеткам $\square \in \lambda$ диаграммы λ. При этом $c(\square)$ — содержание клетки, $h(\square)$ — крюк, отвечающий клетке и $A = (\prod h(\square))^{-1}$ — константа.

Лемма 6.2. *При $|\lambda| \le l$*

$$\dim(n \times l - \lambda, n) = A' \cdot \prod\nolimits_{\square \in \lambda}(n + c(\square)),$$

где A' — некоторая константа.

Доказательство. Нам необходимо вычислить отношение (15) для диаграммы $(n \times l - \lambda)$.

Рассмотрим две таблицы на диаграмме $\nu = (n \times l - \lambda)$: таблицу крюков $T_h(\nu)$, содержащую в клетке $\square$ число $h(\square)$, и таблицу $T_{n+c}(\nu)$, содержащую элементы $(n + c(\square))$. Верхняя строка в таблице крюков есть

$$(n + l - 1 - \tilde{\lambda}_l, n + l - 2 - \tilde{\lambda}_{l-1}, \ldots, n - \tilde{\lambda}_1), \tag{16}$$

при этом в каждой следующей строке до строки с номером $n-\tilde{\lambda}_1$ включительно все значения уменьшаются на 1. Верхняя строка в таблице $T_{n+c}(\nu)$ есть $(n, n+1, \ldots, n+l-1)$, при этом в каждой следующей строке все значения уменьшаются на 1.

Для $\nu = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2}\end{array}$ $T_h(\nu) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \cline{1-2}\end{array}$, $T_{c+n}(\nu) = \begin{array}{|l|l|l|}\hline n & n{+}1 & n{+}2 \\ \hline n{-}1 & n \\ \cline{1-2}\end{array}$.

Рассмотрим диаграмму $\hat{\lambda}$, равную диаграмме λ и находящуюся в верхнем левом углу диаграммы ν. Во-первых, $\hat{\lambda} \subset \nu$. Действительно, в противном случае для некоторого j выполнено $\lambda_j + \lambda_{l+1-j} > l$. В случае $l = 1$ лемма очевидна, если же $l > 1$, тогда $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \lambda_j + \lambda_{l+1-j} > l$. Однако, по условию леммы $\lambda_1 + \lambda_2 < |\lambda| \leq l$.

Во-вторых, верхняя строка чисел для косой диаграммы $\nu - \hat{\lambda}$ будет совпадать с развернутой строкой (16). Положим $l(j) = \min(n-\tilde{\lambda}_1, n-\tilde{\lambda}_j-\tilde{\lambda}_{l+1-j})$. В силу сделанных выше замечаний мы можем сопоставить последовательности чисел j-го столбца таблицы $T_h(\nu)$

$$n+j-1-\tilde{\lambda}_j, n+j-1-\tilde{\lambda}_j-1, n+j-1-\tilde{\lambda}_j-2, \ldots, n+j-1-\tilde{\lambda}_j-l(j)+1$$

такую же последовательность в $(l+1-j)$-м столбце таблицы $T_{n+c}(\nu)$.

Числа, не входящие в построенное соответствие, заполняют на таблице $T_{n+c}(\nu)$ диаграмму $\hat{\lambda}$. Кроме этого, остается еще множество C значений вида $(n+c(\square))$ и множество H значений крюков $h(\square)$ для некоторых клеток в строках с номерами, большими $n-\tilde{\lambda}_1$. Очевидным образом, эти два множества не зависят от n. После сокращения формула (15) принимает вид

$$\dim(n \times l - \lambda, n) = A' \cdot \prod\nolimits_{\square \in \hat{\lambda}} (n + c(\square)),$$

где $A' = \frac{\prod_C (n+c(\square))}{\prod_H h(\square)}$. $\square$

Замечание 6.3. На самом деле, диаграммы λ и $n \times l - \lambda$ при $|\lambda| \leq l$ отвечают сопряженным представлениям, и $\dim(\lambda) = \dim(n \times l - \lambda)$. Однако, этот факт нам не понадобится, а предложенная лемма ниже будет обобщена на нужный нам более широкий класс диаграмм, с сохранением структуры доказательства.

Обозначим через $(a \times b + \mu)$ диаграмму, полученную из прямоугольника размера $a \times b$ приписыванием диаграммы μ справа $(b \geq \tilde{\mu}_1)$. Обозначим через $(a \times b + \mu + \lambda)$ диаграмму, полученную из прямоугольника размера $a \times b$ приписыванием диаграммы μ справа и диаграммы λ снизу$(a \geq \lambda_1,\ b \geq \tilde{\mu}_1)$. Обозначим через $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(\lambda, \mu)$ множество содержаний клеток диаграммы $(\lambda_1 \times \tilde{\mu}_1 + \mu + \lambda)$ (с учетом кратностей). Обозначим через $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(\lambda, \mu)$ множество чисел $\hat{c}(i,j) = j - i + \mu_i - \tilde{\lambda}_j$, для $1 \leq i \leq \tilde{\mu}_1$ и $1 \leq j \leq \lambda_1$.

Предложение 6.4. *1. Выполнено включение* $\mathcal{S}_2(\lambda, \mu) \subset \mathcal{S}_1(\lambda, \mu)$.

2. Размерность $\dim(n \times l - \lambda + \mu, n)$ *равна полиному*

$$P_{\lambda,\mu}(n) = A \cdot \prod_{c \in \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2} (n + c)$$

степени $|\lambda| + |\mu|$, *для некоторой константы* A.

3. Наибольший и наименьший корни полинома $P_{\lambda,\mu}(n)$ *равны* $\lambda_1 + \mu_1 - 1$ *и* $1 - \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\mu}_1$.

Доказательство. Докажем пункт 2. Положим $\nu_1 = n \times l - \lambda + \mu$. Согласно формуле (15) размерность равна

$$\dim(\nu_1, n) = \frac{\prod_{\square \in \nu_1} (n + c(\square))}{\prod_{\square \in \nu_1} h(\square)}$$

Заметим, что диаграмма ν_1 есть объединение двух диаграмм ν_2 и ν_3, $\nu_2 = ((n-\tilde{\mu}_1)\times l - \lambda)$ и $\nu_3 = (l \times \tilde{\mu}_1 + \mu)$. При этом

$$(17)\quad \dim(\nu_1, n) = \frac{\prod_{\square\in\nu_2}(n-\tilde{\mu}_1 + c(\square))}{\prod_{\square\in\nu_2} h(\square)} \cdot \frac{\prod_{\square\in\nu_3}(n + c(\square))}{\prod_{\square\in\nu_3} h(\square)} = \dim(\nu_2, n-\tilde{\mu}_1) \cdot \frac{\prod_{\square\in\nu_3}(n + c(\square))}{\prod_{\square\in\nu_3} h(\square)}.$$

По лемме 6.2 получаем

$$\dim(\nu_2, n-\tilde{\mu}_1) = A_1 \cdot \prod_{\square\in\lambda}((n-\tilde{\mu}_1) + c(\square)).$$

Следовательно,

$$(18)\qquad \dim(\nu_1, n) = A_1 \cdot \frac{\prod_{\square\in\nu_4}(n + c(\square))}{\prod_{\square\in\nu_3} h(\square)},$$

где $\nu_4 = (l \times \tilde{\mu}_1 + \mu + \lambda)$.

Аналогично доказательству леммы 6.2, мы можем заметить, что j-я строка таблицы $T_h(\nu_3)$ и j-я строка таблицы $T_{c+n}(\nu_3)$ содержат числа

$$n + l - j + \mu_j, n + l - j + \mu_j - 1, \ldots, n - j + 1 + \mu_j + \lambda_1.$$

Положим $\nu_5 = (\lambda_1 \times \tilde{\mu}_1 + \mu + \lambda)$, и пусть $\nu_3 = Rect_1 + Rect_2 + \lambda$, где $Rect_1 = ((l-\lambda_1)\times\tilde{\mu}_1)$, $Rect_2 = (\lambda_1 \times \tilde{\mu}_1)$. Положим $\nu_6 = Rect_2 + \lambda$. После сокращения в формуле (18) получаем

$$(19)\qquad \dim(\nu_1, n) = A_1 \cdot \frac{\prod_{\square\in\nu_5}(n + c(\square))}{\prod_{\square\in\nu_6} h(\square)}.$$

Замечая, что произведение $\prod_{\square\in\lambda} h(\square)$ не зависит от n, мы приходим к равенству

$$(20)\qquad \dim(\nu_1, n) = A_2 \cdot \frac{\prod_{\square\in\nu_5}(n + c(\square))}{\prod_{\square\in Rect_2} h(\square)}.$$

Для (i,j)-й клетки прямоугольника $Rect_2$ мы имеем $h(i,j) = j + \mu_i + n - i - \tilde{\lambda}_j = n + \hat{c}(i,j)$ (строки нумеруются сверху вниз, а столбцы — справа налево(!)), поэтому пункт 2 теперь будет следовать из пункта 1.

Докажем, что $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$. Для диаграммы $\nu_5 = (\lambda_1 \times \tilde{\mu}_1 + \mu + \lambda)$ несложно проверить, что содержание c входит в таблицу содержаний $T_c(\nu_5)$ не менее k раз тогда и только тогда, когда $c \geq c_k^{min} = k - \tilde{\mu}_1 - \tilde{\lambda}_k$ и $c \leq c_k^{max} = \lambda_1 + \mu_k - k$.

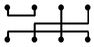
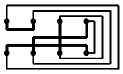
Из формулы для $h(i,j)$ видно, что эти элементы строго убывают по строкам и строго возрастают по столбцам. Поэтому для любого крюка из k-й сверху или более низкой строки прямоугольника $Rect_2$ имеем $h(i,j) - n \leq h(k,\lambda_1) - n = \lambda_1 + \mu_k - k - \tilde{\lambda}_{\lambda_1} \leq \mu_k + \lambda_1 - k = c_k^{max}$. Соответственно, для k-го или более левого столбца $h(i,j) - n \geq h(\tilde{\mu}_1, k) - n = k + \mu_{\tilde{\mu}_1} - \tilde{\mu}_1 - \tilde{\lambda}_k \geq k - \tilde{\mu}_1 - \tilde{\lambda}_k = c_k^{min}$.

Если k из элементов $h(i,j)$ равны c, хотя бы один находится в k-м или более левом столбце, и хотя бы один — в k-й или более высокой строке, следовательно, по доказанному выше число c удовлетворяет необходимым неравенствам.

Пункт 3 предложения очевиден, что завершает доказательство. $\square$

7 Теория представлений алгебр $H_{k,l}(n)$

Для произвольной диаграммы $d \in Br_{k+l}$ рассмотрим ее замыкание $\mathrm{Clos}(d) = \mathrm{Clos}_{k+l}(d)$:

для $d =$  $\mathrm{Clos}(d) =$  .

Обозначим через $\#\,\mathrm{Clos}(d)$ число компонент связности в замыкании $\mathrm{Clos}(d)$ диаграммы d (линии диаграммы считаются непересекающимися) и зададим функционалы $\tau^0 : Br_f \mapsto \mathbb{C}$, $\tau^0_n : Br_f(n) \mapsto \mathbb{C}$, положив

$$\tau^0(d) = x^{\#\,\mathrm{Clos}(d)-(k+l)}, \quad \tau^0_n(d) = n^{\#\,\mathrm{Clos}(d)-(k+l)}.$$

Напомним, что предложение 5.4 позволяет задать на алгебрах Br_{k+l} и $Br_{k+l}(n)$ функционалы τ и τ_n.

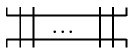
Лемма 7.1. *1. Функционалы τ^0 и τ совпадают на алгебре Br_{k+l}, и следовательно, совпадают их сужения на подалгебру $H_{k,l}$.*

2. То же верно для функционалов τ^0_n и τ_n.

Доказательство. Лемма следует из предложения 5.4 и того факта, что (в терминах этого предложения) $\mathrm{Clos}(a\chi b) = \mathrm{Clos}(ab)$ и $\#\,\mathrm{Clos}(1) = k + l$. □

Мы будем обозначать сужение функционалов $\tau = \tau^0$ и $\tau_n = \tau^0_n$ на подалгебры $H_{k,l} \subset Br_{k+l}$ и $H_{k,l}(n) \subset Br_{k+l}(n)$, соответственно, через τ и τ_n. Напомним, что эти функционалы являются следами.

Для описания представлений алгебры $H_{k,l}$ мы будем использовать основную конструкцию Джонса. Именно, рассмотрим цепочку $H_{k,l} \subset H_{k+1,l} \subset H_{k+1,l+1}$ и элемент $e_{k+1,l+1} = (1, k+1)(k+2, k+l+2)e_{k+1}(1, k+1)(k+2, k+l+2) \in H_{k+1,l+1}$:

$e_{k+1,l+1} =$  .

1 $\qquad$ $k{+}l{+}2$

Возьмем диаграмму $d \in H_{k+1,l}$ и рассмотрим произведение $e_{k+1,l+1} \cdot d \cdot e_{k+1,l+1} \in H_{k+1,l+1}$. Полученная диаграмма, очевидным образом, содержит дугу, соединяющую 1-ю и $(k+l+2)$-ю точки в верхнем ряду и такую же дугу в нижнем ряду. Следовательно, произведение $e_{k+1,l+1} \cdot d \cdot e_{k+1,l+1}$ однозначно задает некоторый элемент $\varepsilon_{k,l}(d) \in H_{k,l}$. Таким образом, мы построили линейное отображение

$$\varepsilon_{k,l} : H_{k+1,l} \mapsto H_{k,l}.$$

Предложение 7.2. *1. Для любого элемента $d \in H_{k,l}$ существует единственный элемент $\varepsilon_{k,l-1}(d) \in H_{k,l-1}$, для которого*

$$e_{k+1,l} \cdot d \cdot e_{k+1,l} = x\varepsilon_{k,l-1}(d)e_{k+1,l};$$

$\varepsilon_{k+1,l}(d) = d$ при $d \in H_{k,l-1}$.

2. Отображение $\varepsilon_{k,l-1}$ — условное ожидание сохраняющее след τ, т.е., для функционала τ и элемента $d \in H_{k,l}$ выполняется

$$\tau|_{H_{k,l}}(d) = \tau|_{H_{k,l-1}}(\varepsilon_{k,l-1}(d)), \quad \tau(1) = 1.$$

3. *Для функционала τ и элемента $d \in H_{k,l}$ выполняется $\tau(a\chi b) = (1/x)\tau(ab)$, где $\chi \in \{e_{k,l}, \sigma_{k+l-1}\}$, $a, b \in H_{k,l-1}$.*

4. *Для $d \in H_{k,l}$, $d' \in H_{k,l-1}$ выполняется $\tau(d'\varepsilon_{k,l-1}(d)) = \tau(d'd)$.*

5. *Аналогично определяется условное ожидание алгебры $H_{k,l}(n)$ на подалгебру $H_{k,l-1}(n)$, обозначаемое также через $\varepsilon_{k,l-1}$, для которого $\tau_n(d'\varepsilon_{k,l-1}(d)) = \tau_n(d'd)$ при $d \in H_{k,l}(n)$, $d' \in H_{k,l-1}(n)$.*

6. *Если для элемента $d \in H_{k,l}$ определено значение $d(n)$, тогда $\tau_n(d(n)) = [\tau(d)](n)$.*

7. *Для функционала τ_n на алгебре $H_{k,l}(n)$ для положительного нечетного n выполняется $\tau_n = \mathrm{tr} \circ br$, где tr — нормированный след на $\mathrm{End}(V^{\otimes f})$.*

Доказательство. 1. Доказано выше.

2. Утверждение следует из того факта, что
$$\#\,\mathrm{Clos}_{k+l}(d) = \#\,\mathrm{Clos}_{k+l-1}(\varepsilon_{k,l-1}(d)).$$

3. Утверждение следует из того факта, что
$$\#\,\mathrm{Clos}_{k+l}(a\chi b) = \#\,\mathrm{Clos}_{k+l}(ab) - 1.$$

4. Утверждение следует из того, что $\varepsilon_{k,l-1}(d'd) = d'\varepsilon_{k,l-1}(d)$.

5. Доказывается аналогично.

6. В силу предложения 5.4 это равенство справедливо на алгебрах Br_{k+l} и $Br_{k+l}(n)$.

7. В силу предложения 5.4 это равенство справедливо на алгебре $Br_{k+l}(n)$.

□

Лемма 7.3. *Рассмотрим пространство $I_{k,l} \subset H_{k,l}$, порожденное диаграммами, содержащими хотя бы одну дугу. Справедливы следующие утверждения:*

1. *$I_{k,l}$ — двусторонний идеал,*

2. *$I_{k,l} = \langle e_{k,l} \rangle = \langle e_{k,l}, H_{k,l-1} \rangle$,*

3. *$H_{k,l}/I_{k,l} \cong \mathbb{C}(x)[S_k \times S_l]$;*

4. *то же верно для $I_{k,l}(n) \subset H_{k,l}(n)$, в этом случае $H_{k,l}(n)/I_{k,l}(n) \cong \mathbb{C}[S_k \times S_l]$.*

Доказательство. 1. То, что $I_{k,l}$ — двусторонний идеал следует из того факта, что произведение двух диаграмм содержит не меньше дуг, чем любой из сомножителей.

2. Очевидно.

3. Изоморфизм $H_{k,l}/I_{k,l} \cong \mathbb{C}(x)[S_k \times S_l]$ следует из того, что $H_{k,l}$ как векторное пространство раскладывается в сумму $I_{k,l}$ и $\mathbb{C}(x)[S_k \times S_l]$.

4. Для алгебр $H_{k,l}(n)$ доказательства полностью аналогичны.

□

Введем аннулятор идеала τ_n,

$$J_{k,l}(n) = \{a \in H_{k,l}(n) | \tau_n(ab) = 0 \text{ для любого } b \in H_{k,l}\}.$$

Лемма 7.4. *1. $J_{k,l}(n)$ — двусторонний идеал,*

2. $J_{k,l}(n) \subset J_{k+1,l}(n)$, $J_{k,l}(n) \subset J_{k,l+1}(n)$.

Доказательство. 1. $J_{k,l}(n)$ является двусторонним идеалом, т.к. τ_n — след.

2. Пусть $a \in J_{k,l}(n)$. Возьмем $b \in H_{k+1,l}(n)$, тогда

$$\tau_n(ab) = \tau_n(\varepsilon_{k,l}(ab)) = \tau_n(a\varepsilon_{k,l}(b)) = 0.$$

□

Обозначим коммутант действия I_1 группы $GL_n(\mathbb{C})$ на $\mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$ через $C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$. Напомним следующее известное утверждение:

Предложение 7.5. *Пусть $p \in C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$ — минимальный идемпотент. Тогда*

1. *Представление $g \in GL_n(\mathbb{C}) \mapsto pI_1(g)p$ является неприводимым.*

2. *Размерность представления равна $n^{k+l}\,\mathrm{tr}(p)$, где tr — нормированный след на $\mathrm{End}(V^{\otimes k+l})$.*

Как говорилось в теореме 3.4, существует гомоморфизм $br : H_{k,l}(n) \mapsto C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$, биективный при $n \geq k+l$. В этом случае факторалгебра $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ выделяется прямым слагаемым. Пусть $z(n)$ — центральный идемпотент, отвечающий идеалу $I_{k,l}(n)$, и $p_{\lambda,\mu} = p_\lambda p_\mu$ — произведение Юнговских идемпотентов для $\mathbb{C}[S_k \times S_l] \subset H_{k,l}(n)$, тогда $q_{\lambda,\mu}(n) = (1 - z(n))p_{\lambda,\mu}$ — минимальный идемпотент для $H_{k,l}(n)/I_{k,l}(n)$. Отображение br биективно, поэтому отображение

$$g \in GL_n(\mathbb{C}) \mapsto br(q_{\lambda,\mu})I_1(g)br(q_{\lambda,\mu})$$

является неприводимым представлением $GL_n(\mathbb{C})$. Согласно работе [5], это представление отвечает диаграмме $n \times l - \lambda + \mu$, поэтому, в силу предложения 6.4, его размерность равна $P_{\lambda,\mu}(n)$. Следовательно, $\mathrm{tr}(q_{\lambda,\mu}) = P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l}$. Любой минимальный идемпотент отвечает неприводимому представлению, поэтому след tr невырожден на $C_{k,l}(GL_n\mathbb{C})$.

Обозначим через $\Gamma_{k,l}$ множество всех пар диаграмм Юнга (λ, μ), для которых $|\lambda| \leq k$, $|\mu| \leq l$, $|\lambda| - |\mu| = k - l$. Мы будем писать $\mu \nearrow \mu'$ (соответственно, $\mu \searrow \mu'$), если диаграмма μ' получается из диаграммы μ добавлением (соответственно, удалением) одной клетки.

Теорема 7.6. *1. $\mathbb{C}(x)$-алгебра $H_{k,l}$ полупроста. Она раскладывается в прямую сумму полных матричных алгебр $H_{k,l}^{\lambda,\mu}$, при $(\lambda, \mu) \in \Gamma_{k,l}$. Неприводимое представление (k, l, λ, μ), отвечающее алгебре $H_{k,l}^{\lambda,\mu}$, при сужении на $H_{k-1,l}$ раскладывается в прямую сумму*

$$(k, l, \lambda, \mu) = \bigoplus (k-1, l, \lambda', \mu'),$$

где сумма берется по всем парам диаграмм (μ', λ'), таким что либо $\lambda' = \lambda$ и $\mu \nearrow \mu'$, либо $\lambda \searrow \lambda'$ и $\mu' = \mu$. Веса следа τ задаются вектором $(P_{\lambda,\mu}(x)/x^{k+l})_{(\lambda,\mu)\in\Gamma_{k,l}}$

2. Пусть алгебры $H_{k-1,l-1}(n)$ и $H_{k,l-1}(n)$ полупросты. Если след τ_n — невырожден на $H_{k,l-1}$, то алгебра $H_{k,l}(n)$ полупроста. В этом случае $H_{k,l}(n) \otimes \mathbb{C}(x) = H_{k,l}$, и веса следа τ_n на $H_{k,l}(n)$ задаются вектором $(P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l})_{(\lambda,\mu)\in\Gamma_{k,l}}$; ветвление для алгебр $H_{k,l-1}(n) \subset H_{k,l}(n)$ совпадает с ветвлением для $H_{k-1,l-1} \subset H_{k,l-1}$.

Доказательство. Будем проводить доказательство пункта 1 по индукции. Базой индукции является $H_{k,0} \subset H_{k+1,0}$, $H_{k,0} \cong \mathbb{C}[S_k]$, $H_{k+1,0} \cong \mathbb{C}[S_{k+1}]$, в этом случае разложение хорошо известно.

Пусть алгебры $H_{k-1,l-1}$ и $H_{k,l-1}$ полупросты. Из предложения 7.2 и леммы 7.3 следует, что если след τ_n невырожден на этих алгебрах, то мы находимся в условии теоремы 5.3.

В этом случае идеал $I_{k,l} = \langle e_{k,l} \rangle \subset H_{k,l}$ изоморфен основной конструкции Джонса для вложения $H_{k-1,l-1} \subset H_{k,l-1}$. В силу предложения 5.2 и индукционного предложения простые компоненты идеала $I_{k,l}$ нумеруются элементами $\Gamma_{k-1,l-1}$. В частности, этот идеал полупрост. В силу леммы 7.3 факторалгебра $H_{k,l}/I_{k,l}$ изоморфна $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ и, следовательно, полупроста. Таким образом, алгебра $H_{k,l}$ также полупроста.

Пусть (k,l,λ,μ) — простой $I_{k,l}$-модуль. В силу предложения 5.2 тогда (k,l,λ,μ) будет прямой суммой всех модулей $(k,l-1,\lambda',\mu')$, который содержат подмодуль $(k-1,l-1,\lambda,\mu)$. Поэтому требуемое ветвление следует из индукционного предположения для включения $H_{k,l-1} \subset H_{k-1,l-1}$. Если же модуль $V_{k,l}^{\lambda,\mu}$ аннулируется идеалом $I_{k,l}$, тогда он является $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$-модулем, и в этом случае разложение хорошо известно.

Докажем невырожденность следа τ_n на $H_{k,l}(n)$. Рассмотрим минимальный идемпотент $p_{\lambda,\mu} \in D_{k-1,l-1}^{\lambda,\mu}$. В силу предложений 5.2 и 7.2 $(1/x)p_{\lambda,\mu}e_{k,l}$ является минимальным идемпотентом в $H_{k,l}$,

$$\tau((1/x)p_{\lambda,\mu}e_{k,l}) = (1/x^2)\tau(p_{\lambda,\mu}) = P_{\lambda,\mu}(x)/x^{k+l},$$

последнее равенство верно в силу индукционного предложения.

Пусть теперь z — центральный идемпотент, отвечающий $I_{k,l}$. Положим $q_{\lambda,\mu} = (1-z)p_{\lambda,\mu}$, где $p_{\lambda,\mu}$ — произведение двух Юнговских идемпотентов. При этом $q_{\lambda,\mu}(n)$ будет определено для нечетных $n \geq k+l$, поэтому, используя предложение 7.2, мы получим

$$[\tau(q_{\lambda,\mu})](n) = \tau_n(q_{\lambda,\mu}(n)) = \operatorname{tr} \circ br(q_{\lambda,\mu}(n)) = P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l}.$$

Рациональные функции $\tau(q_{\lambda,\mu})$ и $P_{\lambda,\mu}(n)/n^{k+l}$ совпадают в бесконечном количестве точек, поэтому совпадают тождественно. В частности, $\tau(q_{\lambda,\mu}) \neq 0$.

Доказательство пункта 2 аналогично. Требуется только заметить, что если след невырожден на $H_{k,l-1}(n)$, то он невырожден на $H_{k-1,l-1}(n)$, т.к. $J_{k-1,l-1}(n) \subset J_{k,l-1}(n)$. $\square$

Следствие 7.7. *Если $n \notin \mathbb{N}$, то алгебра $H_{k,l}(n)$ полупроста и след τ_n невырожден для любых $k,l \in \mathbb{N}$.*

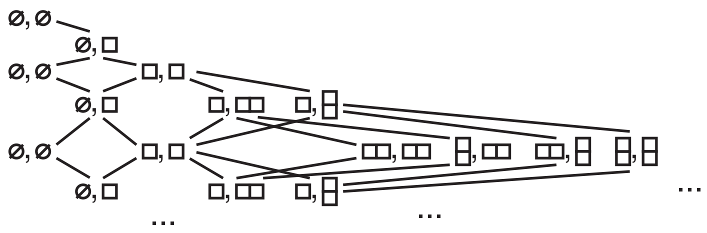
Для произвольного k_0 мы можем рассмотреть цепочку алгебр

$$\mathbb{C}[S_{n_0}] \cong H_{k_0,0}(n) \subset H_{k_0,1}(n) \subset H_{k_0+1,1}(n) \subset \dots \subset D_f \subset \dots,$$

где f-я алгебра в этой цепочке равна $D_f = H_{k_0+[f/2],[(f+1)/2]}(n)$. Теорема 7.6 позволяет построить граф Браттели для такой цепочки при $n \notin \mathbb{Z}$. Например, для $k_0 = 0$ диаграмма Браттели выглядит следующим образом:

Аналогично следствию 5.7 мы можем доказать формулу для размерностей представлений разделенной алгебры Брауэра. Мы будем обозначать размерность соответствующего неприводимого представления разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$, $n \notin \mathbb{Z}$, через $\dim(k,l,\lambda,\mu)$. Напомним, что через $\dim(\lambda)$ обозначается размерность неприводимого представления алгебры $\mathbb{C}[S_f]$, отвечающего диаграмме λ. Таким образом, размерности неприводимых представлений (λ,μ), $|\lambda| = k$, $|\mu| = l$ алгебры $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ есть $\dim(\lambda)\dim(\mu)$.

Рис. 2: Диаграмма Браттели для цепочки $\{H_{[f/2],[(f+1)/2]}(n)\}_{f=0}^{\infty}$.



Следствие 7.8.

$$\dim(k,l,\lambda,\mu) = \frac{k!l!\dim(\lambda)\dim(\mu)}{|\lambda|!|\mu|!2^{k-|\lambda|}(k-|\lambda|)!}. \tag{21}$$

Доказательство. База индукции: для тех диаграмм, для которых выполняется $|\lambda| = k$, $|\mu| = l$, ветвление выглядит также, как для алгебр $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$. Для них выполняется $\dim(|\lambda|, |\mu|, \lambda, \mu) = \dim\lambda \cdot \dim\mu$, что соответствует формуле (21) при $k = |\lambda|$, $l = |\mu|$.

Теперь рассмотрим, к примеру, вложение $H_{k-1,l}(n) \subset H_{k,l}(n)$. Пусть формула доказана для алгебры $H_{k-1,l}(n)$ и для всех диаграмм, отвечающих алгебре $H_{k,l}(n)$, для которых $k - |\lambda| < i$. Докажем ее для диаграмм вида (k,l,λ,μ), $k - |\lambda| = i$. В случае $|\lambda| > 0$ мы получим

$$\dim(k,l,\lambda,\mu) = \sum_{\lambda' \nearrow \lambda} (k-1,l,\lambda',\mu) + \sum_{\mu' \searrow \mu} (k-1,l,\lambda,\mu').$$

Теперь индукционный переход доказывается аналогично следствию 5.7, при помощи равенств $\sum_{\lambda' \nearrow \lambda} \dim\lambda' = \dim\lambda$ и $\sum_{\mu' \searrow \mu} \dim\mu' = (|\mu|+1)\dim\mu$ и индукционного предположения.

Наконец, случай $|\lambda| = 0$ также не представляет сложности. □

8 Реализация неприводимых представлений алгебры Брауэра

В работе Брауна [7] описывается структура алгебры Брауэра, следующим образом. Рассмотрим цепочку подалгебр

$$Br_f(n) = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_{[f/2]},$$

где подалгебра U_r порождается диаграммами, содержащими не менее r горизонтальных дуг. Обозначим факторалгебры U_r/U_{r+1} через A_r, $A_{[f/2]} = U_{[f/2]}$.

Рассмотрим разложение групповой алгебры симметрической группы на простые компоненты

$$\mathbb{C}[S_f] = \sum_{\lambda \vdash f} \Pi^{\lambda}.$$

Положим $\dim(\Pi^{\lambda}) = f_{\lambda}^2$. Для каждой простой компоненты Π^{λ} выберем базис $\{e_{\alpha\beta}^{\lambda}\}_{\alpha,\beta=1}^{f_{\lambda}}$, такой что

$$\begin{cases} e_{\alpha\beta}^{\lambda} e_{\gamma\delta}^{\mu} = 0, & \text{при } \lambda \neq \mu, \\ e_{\alpha\beta}^{\lambda} e_{\gamma\delta}^{\lambda} = \delta_{\gamma\beta} e_{\alpha\delta}^{\lambda} & (\text{здесь } \delta_{\gamma\beta} \text{ — дельта Кронекера}). \end{cases}$$

Любая диаграмма $d \in Br_f(n)$ однозначно задается набором дуг в верхнем ряду диаграммы, набором дуг в нижнем ряду диаграммы и подстановкой $\sigma \in S_{f-2r}$, где r — количество дуг в каждом из рядов. Несложно проверить, что количество наборов из r дуг равно

$$M(f,r)=\frac{f!}{2^r(f-2r)!r!}.$$

Пронумеруем верхние и нижние наборы дуг, в этом случае произвольная диаграмма с r дугами запишется в виде σU^i_j, где $1\le i,j\le M(f,r)$, $\sigma\in S_{f-2r}$. Класс соответствующей диаграммы в алгебре A_r будем обозначать через $[\sigma U^i_j]$.

Теорема 8.1 (Браун, [7]). *Линейное подпространство алгебры A_r, натянутое на элементы*

$$[e^\lambda_{\alpha\beta}U^i_j],\quad 1\le\alpha,\beta\le f^\lambda,\quad 1\le i,j\le M(f,r),$$

есть двусторонний идеал A^λ_r этой алгебры. При этом алгебра раскладывается в прямую сумму указанных идеалов

$$A_r=\bigoplus_{\lambda\vdash f-r}A^\lambda_r.$$

Назовем конечномерную $\mathbb{C}$-алгебру A размерности n^2 ***обобщенной матричной алгеброй***, если в ней существует базис $\{e_{ij}\}^n_{i,j=1}$ для которого

$$e_{ij}\cdot e_{pq}=\sigma^*_{jp}e_{iq}, \tag{22}$$

для некоторого набора чисел $\{\sigma^*_{kl}\}^n_{k,l=1},\sigma^*_{kl}\in\mathbb{C}$. Обозначим матрицу $\{\sigma^*_{kl}\}^n_{k,l=1}$ через Θ. Алгебра A обладает следующими свойствами (см. [7]):

1. Алгебра A либо проста, либо обладает радикалом $N\ne 0$. Во втором случае алгебра A/N проста.
2. Алгебра A проста в том и только том случае, если $1\in A$.
3. Если ранг матрицы Θ равен r, тогда размерность радикала равна n^2-r^2.
4. Алгебра проста в том и только том случае, если матрица Θ невырождена.

Напомним, что для диаграммы d через $\mathrm{bars}(d)$ мы обозначаем количество дуг диаграммы. Возьмем произвольную пару элементов $[U^i_j],[U^{i'}_{j'}]\in A_r$, для них выполняется $\mathrm{bars}(U^i_j)=\mathrm{bars}(U^{i'}_{j'})=r$. Если при этом также выполняется $\mathrm{bars}(U^i_j\cdot U^{i'}_{j'})=r$, тогда

$$[U^i_j]\cdot[U^{i'}_{j'}]=n^{c(j,i')}[\sigma(j,i')U^i_{j'}], \tag{23}$$

$$\text{для некоторых } c(j,i')\in\mathbb{Z}_+,\quad \sigma(j,i')\in S_{f-2r};$$

если $\mathrm{bars}(U^i_j\cdot U^{i'}_{j'})>r$, тогда $[U^i_j]\cdot[U^{i'}_{j'}]=0$.

Отсюда вытекает следующая лемма

Лемма 8.2 (Браун, [7]). *Для любого из идеалов A^λ_r базис $\{[e_{\alpha\beta}U^i_j]\}$ (после соответствующей перенумерации) удовлетворяет уравнению* (22)*, т.е. каждый из этих идеалов является обобщенной матричной алгеброй.*

Более того, по теореме 5.6 алгебра $Br_f(n)$ полупроста при $n\notin\mathbb{Z}$, что позволяет утверждать следующее:

Следствие 8.3. *Алгебра $Br_f(n)$ при $n \notin \mathbb{Z}$ является полупростой и раскладывается на простые компоненты следующим образом:*

$$Br_f(n) = \sum_{r=0}^{[f/2]} \sum_{\lambda \vdash f-r} C_r^\lambda,$$

где $C_r^\lambda \cong A_r^\lambda$.

Это следствие непосредственно приводит к следующей реализации неприводимых представлений алгебры Брауэра (без доказательства эта реализация дана в работе С. В. Керова [13]).

Рассмотрим множество $\mathcal{X}_{f,r}$ наборов дуг с r горизонталями. Для набора дуг a через $\operatorname{bars}(a)$ будем обозначать количество дуг, тогда

$$a \in \mathcal{X}_{f,r} \Leftrightarrow \operatorname{bars}(a) = r.$$

Аналогично произведению диаграмм мы можем определить по диаграмме d и набору дуг a новый набор дуг $d \circ a$; кроме этого, мы можем определить количество образовавшихся замкнутых циклов $c(d,a)$. Понятно, что $\operatorname{bars}(d \circ a) \geq \operatorname{bars}(a)$. Если $\operatorname{bars}(d \circ a) = \operatorname{bars}(a) = r$, то мы можем определить подстановку $\sigma(d,a) \in S_{f-2r}$. Рассмотрим пространство $H_{f,r}$ линейных комбинаций элементов из $\mathcal{X}_{f,r}$. Зададим действие диаграммы $d \in Br_f(n)$ на $H_{f,r}$ следующим образом:

$$\begin{cases} \pi_d^r(a) = n^{c(d,a)} d \circ a, & \text{если } \operatorname{bars}(d \circ a) = r, \\ \pi_d^r(a) = 0, & \text{если } \operatorname{bars}(d \circ a) > r. \end{cases}$$

Теорема 8.4 (Керов, [13]). *Операторы π_d^r, $d \in Br_f(n)$ задают неразложимое представление алгебры Брауэра $Br_f(n)$ в пространстве $H_{f,r}$. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то представление неприводимо.*

Для получения остальных неприводимых представлений возьмем диаграмму Юнга $\lambda \vdash f - 2r$ и рассмотрим соответствующее пространство H^λ неприводимого представления симметрической группы. В пространстве $H_{f,r}^\lambda = H^\lambda \bigotimes H_{f,r}$ зададим линейные операторы, полагая для $d \in Br_f(n)$

$$\begin{cases} \pi_d^\lambda(h \otimes a) = n^{c(d,a)} (\pi_{\sigma(d,a)}^\lambda h \otimes d \circ a) & \text{если } \operatorname{bars}(d \circ a) = r, \\ \pi_d^\lambda(h \otimes a) = 0, & \text{если } \operatorname{bars}(d \circ a) > r. \end{cases} \tag{24}$$

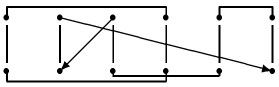
Теорема 8.5 (Керов, [13]). *Операторы π_d^λ, $d \in Br_f(n)$ задают неразложимое представление (f,λ) алгебры Брауэра $Br_f(n)$ в пространстве $H_{f,r}^\lambda$. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то представление неприводимо.*

Доказательство. Представление (f,λ) алгебры Брауэра $Br_f(n)$ отвечает простой компоненте $C_{(f-|\lambda|)/2}^\lambda$ из следствия 8.3. □

9 Характеры неприводимых представлений алгебры Брауэра

Характеры представлений алгебры Брауэра приведены С. В. Керовым в работе [14] (без доказательства) и, позднее, А. Рамом в работе [21]. Подсчет характеров, принадлежащий А. Раму, опирается на соотношения между симметрическими полиномами, описанные Литтлвудом. В конечной формуле характер неприводимого представления алгебры Брауэра описывается суммой характеров неприводимых представлений симметрической группы с коэффициентами, равными числам Литтлвуда-Ричардсона. Это позволяет предположить, что возможен вывод формул для характеров алгебры Брауэра посредством использования индуцированных представлений симметрической группы (эта возможность не отражена в рассматриваемой работе). В настоящем параграфе представлен такой вывод, существенно упрощающий выкладки (схема такого вычисления характеров алгебры Брауэра была предложена С. В. Керовым еще в 1987 году, см.[13], но, к сожалению, не была воплощена).

Первая часть работы следует статье [21]. Каждой диаграмме $d \in Br_f(n)$ сопоставим разбиение $\omega(d)$ по следующему правилу. Соединим соответствующие точки верхнего и нижнего рядов диаграммы пунктирной линией. Начиная с произвольной точки, начнем двигаться в любом направлении по пути, состоящему из дуг диаграммы и пунктирных линий, задавая таким образом направление каждой дуги. Если мы вернулись в исходную точку, не пройдя по всем дугам диаграммы, то мы повторяем процедуру, начиная в новой точке. Полученную в конечном итоге диаграмму мы будем называть ориентированной формой диаграммы d. Каждому получившемуся циклу сопоставим модуль разности между количеством линий диаграммы, направленных сверху вниз и направленных снизу вверх (горизонтальные дуги и пунктирные линии при этом не учитываются). Получившийся набор чисел задает разбиение $\omega(d)$ числа $f-2h$, для некоторого h, $0 \le h \le [f/2]$ (напомним, что разбиения числа a параметризуют классы сопряженности подстановок в группе S_a). Например

$d =$  , $\qquad \omega(d) = (4,2).$

Для диаграмм $d \in Br_f(n)$ и $d' \in Br_g(n)$ будем обозначать через $d \otimes d' \in Br_{f+g}(n)$ диаграмму, полученную приписыванием диаграммы d' справа от диаграммы d. Через $d^{\otimes k}$ будем обозначать диаграмму $d \otimes d \otimes \cdots \otimes d$ (k сомножителей). Напомним, что $e_i \in Br_f(n)$ — образующая алгебры $Br_f(n)$, и обозначим в этом параграфе через $e \in Br_2(n)$ "некокосетеровскую" образующую алгебры $Br_2(n)$. Обозначим через γ_k диаграмму, отвечающую одноцикловой подстановке $(123\dots k-1k)$, и положим $\gamma_\mu = \gamma_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{\mu_l}$, если $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$.

Для любого характера χ алгебры Брауэра $Br_f(n)$ выполняются два свойства

1. Пусть $\sigma \in S_f \subset Br_f(n)$ — подстановка. Тогда из определения характера следует, что для любой диаграммы $d \in Br_f(n)$ выполняется $\chi(d) = \chi(\pi d \pi^{-1})$.

2. Пусть диаграмма d содержит в верхнем ряду горизонтальное ребро, соединяющее i-ю и $(i+1)$-ю точки, и не содержит аналогичного ребра в нижнем ряду. Тогда

$$\chi(d) = \frac{1}{n}\chi(e_i d) = \frac{1}{n}\chi(d e_i).$$

   При этом $de_i = d_1 \otimes e \otimes d_2$ для некоторых диаграмм d_1 и d_2, и $\omega(d) = \omega(de_i)$.

Эти два свойства позволяют приводят к следующей теореме.

Теорема 9.1 (Рам, [21]). *Рассмотрим диаграмму $d \in Br_f(n)$. Для любого характера χ алгебры $Br_f(n)$ выполняется*

$$\chi(d) = \frac{1}{n^h}\chi(e^{\otimes p} \otimes \gamma_\mu),$$

где разбиение μ состоит из ненулевых частей разбиения $\omega(d) = (0^{m_0}1^{m_1}\dots)$, $p = (f-|\mu|)/2$, $h = p - m_0$.

Основная часть статьи [21] состоит в подсчете выражения $\chi(e^{\otimes k}\otimes\gamma_\mu)$. Мы упростим вычисления, используя реализацию, построенную в предыдущем параграфе и переходя к индуцированным представлениям.

Обозначим через χ_f^λ характер неприводимого представления (f,λ) алгебры $Br_f(n)$.

Лемма 9.2. *Если $|\lambda|<f$, и диаграмма имеет вид $e\otimes d$, то*

$$\chi_f^\lambda(e\otimes d)=n\cdot\chi_{f-2}^\lambda(d).$$

Доказательство. Положим $r=(f-|\lambda|)/2$. Возьмем произвольный базис $\{h_i\}_{i=1}^{f_\lambda}$ пространства H^λ. Тогда базис пространства $H_{f,r}^\lambda$ состоит из элементов $a\otimes h_i$, $a\in\mathcal{X}_{f,r}$, $1\le i\le f^\lambda$. Введем на наборах дуг умножение, аналогичное тензорному произведению диаграмм:

$$\vee:\mathcal{X}_{f,r}\times\mathcal{X}_{g,q}\mapsto\mathcal{X}_{f+g,r+q}.$$

Базисный вектор $a\otimes h_i$ дает ненулевой вклад в след оператора $\pi_{e\otimes d}^\lambda$ только если $a=u\vee a'$, где u — единственный элемент из $\mathcal{X}_{2,1}$ и $a'\in\mathcal{X}_{f-2,r-1}$. Это дает нам взаимнооднозначное соответствие указанных базисных векторов пространства $H_{f,r}^\lambda$ и базисных векторов пространства $H_{f-2,r-1}^\lambda$:

$$(u\vee a')\otimes h_i\leftrightarrow a'\otimes h_i,$$

при этом соответствующие коэффициенты операторов $\pi_{e\otimes d}^\lambda$ и π_d^λ отличаются в n раз. □

Замечание 9.3. Пусть $|\lambda|=f$. Если диаграмма имеет вид $d'=e\otimes d$, то по определению $\pi_{d'}^\lambda=0$. Соответствующее представление (f,λ) алгебры $Br_f(n)$, суженное на подалгебру $\mathbb{C}[S_f]\subset Br_f(n)$ есть представление групповой алгебры $\mathbb{C}[S_f]$, отвечающее диаграмме λ; сужение на дополнение к $\mathbb{C}[S_f]$ в $Br_f(n)$ равно нулю.

Таким образом, остается рассмотреть наиболее интересный случай $|\lambda|<f$, $d\in S_f\subset Br_f(n)$. Пусть $|\lambda|=f-2r$. Несложно понять (и это отмечено в работе [13]), что в этом случае

$$(f,\lambda)|_{S_f}=\mathrm{Ind}_{S_{f-2r}\times S_{2r}}^{S_f}\lambda_{S_{f-2r}}\otimes\theta_r, \tag{25}$$

где $\theta_r=(2r,\emptyset)|_{S_{2r}}$. Будем говорить, что диаграмма μ — четная, если все ее строки содержат четное количество клеток. Разложение представления θ_r на неприводимые получено А. А. Клячко в работе [2], именно,

$$\theta_r=\sum_{\mu\text{-четная}}\mu. \tag{26}$$

Комбинируя формулы (25) и (26), получаем

$$(f,\lambda)|_{S_f}=\mathrm{Ind}_{S_{f-2r}\times S_{2r}}^{S_f}\Bigg(\lambda\otimes\sum_{\mu\text{-четная}}\mu\Bigg)=\sum_{\nu\vdash f}\Bigg(\sum_{\mu\text{-четная}}c_{\lambda\mu}^\nu\Bigg)\nu.$$

Теперь теорема 9.1 и лемма 9.2 приводят к следующей теореме (ср. [21]):

Теорема 9.4. *Пусть $d\in Br_f(n)$, $\omega(d)\in S_{f-2h}$ тогда*

$$\chi_f^\lambda(d)=n^h\sum_{\nu\vdash f-2h}\Bigg(\sum_{\mu\text{-четная}}c_{\lambda\mu}^\nu\Bigg)\chi_{S_{f-2h}}^\nu(\gamma_{\omega(d)}).$$

10 Реализация неприводимых представлений разделенной алгебры Брауэра

Этот параграф посвящен описанию структуры разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$, которая аналогична описанной выше структуре алгебры Брауэра $Br_f(n)$. В этом и следующем параграфах мы, не умаляя общности, считаем что $k \le l$.

Рассмотрим цепочку подалгебр

$$H_{k,l}(n) = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_k,$$

где подалгебра U_r порождается диаграммами, содержащими не менее r горизонтальных дуг. Обозначим факторалгебры U_r/U_{r+1} через A_r, $A_k = U_k$.

Любая диаграмма $d \in H_{k,l}(n)$ однозначно задается набором дуг в верхнем ряду диаграммы, набором дуг в нижнем ряду диаграммы и подстановкой $\sigma \in S_{k-r} \times S_{l-r}$, где r — количество дуг в каждом из рядов.

Групповая алгебра $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ раскладывается на простые компоненты следующим образом:

$$\mathbb{C}[S_k \times S_l] = \sum_{\lambda \vdash k, \mu \vdash l} P_\lambda \otimes P_\mu,$$

где P_λ, P_μ — простые компоненты разложения групповых алгебр $\mathbb{C}[S_k]$ и $\mathbb{C}[S_l]$. При этом если $\{e^\lambda_{\alpha\beta}\}$ — базис компоненты P_λ, $\{e^\mu_{\gamma\delta}\}$ — базис компоненты P_μ, то базис для $P_\lambda \otimes P_\mu$ состоит из элементов $\{e^\lambda_{\alpha\beta} e^\mu_{\gamma\delta}\}$.

Количество наборов из r дуг для алгебры $H_{k,l}(n)$ равно

$$M(k,l,r) = \frac{k!l!}{2^r(k-r)!(l-r)!r!}.$$

Пронумеруем наборы дуг в алгебре $H_{k,l}(n)$ и будем записывать диаграмму $d \in H_{k,l}(n)$ в виде $d = \sigma U_i^j$, классы диаграмм в алгебре A_r будем обозначать через $[\sigma U_j^i]$.

Теорема 10.1. *Линейное подпространство алгебры A_r, натянутое на элементы*

$$[e^\lambda_{\alpha\beta} e^\mu_{\gamma\delta} U_j^i], \quad 1 \le \alpha, \beta \le f^\lambda; 1 \le \gamma, \delta \le f^\mu, \quad 1 \le i, j \le M(k,l,r),$$

есть двусторонний идеал $A_r^{\lambda,\mu}$ этой алгебры. При этом алгебра раскладывается в прямую сумму указанных идеалов

$$A_r = \bigoplus_{\lambda \vdash k-r, \mu \vdash l-r} A_r^{\lambda,\mu}.$$

Доказательство. Теорема следует формул для умножения элементов вида $[\sigma U_j^i]$, см. доказательство леммы 10.2. ☐

Лемма 10.2. *Каждый из идеалов $A^{\lambda,\mu}$ является обобщенной матричной алгеброй.*

Доказательство. По аналогии с формулой 23, возьмем произвольную пару элементов $[U_j^i], [U_{j'}^{i'}] \in A_r$, для них выполняется $\mathrm{bars}(U_j^i) = \mathrm{bars}(U_{j'}^{i'}) = r$. Если при этом $\mathrm{bars}(U_j^i \cdot U_{j'}^{i'}) = r$, тогда

(27) $\quad [U_j^i] \cdot [U_{j'}^{i'}] = n^{c(j,i')}[\sigma(j,i') U_{j'}^i],$

для некоторых $c(j,i') \in \mathbb{Z}_+, \quad \sigma(j,i') \in S_{k-r} \times S_{l-r};$

если $\mathrm{bars}(U^i_j \cdot U^{i'}_{j'}) > r$, тогда $[U^i_j] \cdot [U^{i'}_{j'}] = 0$.

Для элементов $[e_{\alpha\beta}U^i_j]$, $[e_{\alpha'\beta'}U^{i'}_{j'}]$ мы получим

$$[e_{\alpha\beta}U^i_j] \cdot [e_{\alpha'\beta'}U^{i'}_{j'}] = [e_{\alpha\beta}] \cdot ([U^i_j] \cdot [U^{i'}_{j'}]) \cdot [e_{\alpha'\beta'}] = n^{c(j,i')}[e_{\alpha\beta}\sigma(j,i')e_{\alpha'\beta'}U^i_{j'}],$$

если $\mathrm{bars}(U^i_j \cdot U^{i'}_{j'}) = r$, и $[e_{\alpha\beta}U^i_j] \cdot [e_{\alpha'\beta'}U^{i'}_{j'}] = 0$ в противном случае. Отсюда следует, что при соответствующей перенумерации базис $\{[e_{\alpha\beta}U^i_j]\}$ алгебры A^λ_r удовлетворяет уравнению (22), что завершает доказательство. □

Более того, в силу следствия 7.7 алгебра $H_{k,l}(n)$ полупроста при $n \notin \mathbb{Z}$, что позволяет утверждать следующее:

Следствие 10.3. *Алгебра $H_{k,l}(n)$ при $n \notin \mathbb{Z}$ является полупростой и раскладывается на простые компоненты следующим образом:*

$$H_{k,l}(n) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{\lambda\vdash k-r,\mu\vdash l-r} C^{\lambda,\mu}_r,$$

где $C^{\lambda,\mu}_r \cong A^{\lambda,\mu}_r$.

Это следствие непосредственно приводит к следующей реализации представлений разделенной алгебры Брауэра.

Аналогично параграфу 8 мы можем ввести множество $\mathcal{X}_{k,l,r}$ наборов дуг с r горизонталями вида $[i,j]$, $1 \le i \le k$, $k+1 \le j \le k+l$. Так же определяются для диаграммы $d \in H_{k,l}(n)$ действие $d \circ a$, количество замкнутых циклов $c(d,a)$ и, при $\mathrm{bars}(d \circ a) = \mathrm{bars}(a)$, подстановка $\sigma(d,a) \in S_{k-r} \times S_{l-r}$. Также введем пространство $H_{k,l,r}$ линейных комбинаций элементов из $\mathcal{X}_{k,l,r}$ и зададим действие диаграммы $d \in H_{k,l}(n)$ на $H_{k,l,r}$:

$$\begin{cases} \pi^r_d(a) = n^{c(d,a)} d \circ a, & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) = r, \\ \pi^r_d(a) = 0, & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) > r. \end{cases}$$

Предложение 10.4. *Операторы π^r_d, $d \in H_{k,l}(n)$ задают неразложимое представление разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$ в пространстве $H_{k,l,r}$. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то представление неприводимо.*

Для получения всех неприводимых представлений возьмем пару диаграмм Юнга $\lambda\vdash(k-r)$ и $\mu\vdash(l-r)$ и рассмотрим соответствующее пространство $H^{\lambda\mu}$ неприводимого представления групповой алгебры $\mathbb{C}[S_{k-r} \times S_{l-r}]$. В пространстве $H^{\lambda\mu}_{k,l,r} = H^{\lambda\mu} \bigotimes H_{k,l,r}$ зададим линейные операторы, полагая для $d \in H_{k,l}(n)$

$$\begin{cases} \pi^{\lambda\mu}_d(h \otimes a) = n^{c(d,a)}(\pi^{\lambda\mu}_{\sigma(d,a)} h \otimes d \circ a) & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) = r, \\ \pi^{\lambda\mu}_d(h \otimes a) = 0, & \text{если } \mathrm{bars}(d \circ a) > r. \end{cases} \tag{28}$$

Теорема 10.5. *Операторы $\pi^{\lambda\mu}_d$, $d \in H_{k,l}(n)$ задают неразложимое представление (k,l,λ,μ) разделенной алгебры Брауэра $H_{k,l}(n)$ в пространстве $H^{\lambda\mu}_{k,l,r}$. Если $n \notin \mathbb{Z}$, то представление неприводимо.*

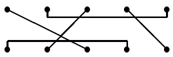
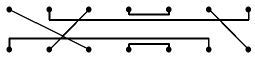
Доказательство. Представление (k,l,λ,μ) алгебры $H_{k,l}(n)$ отвечает простой компоненте $C^{\lambda\mu}_{k-|\lambda|}$ из следствия 10.3. □

11 Характеры неприводимых представлений разделенной алгебры Брауэра

Характеры представлений разделенной алгебры Брауэра подсчитаны в 1996 году в работе Т. Халверсона [10]. В этом параграфе мы даем прямое и более наглядное доказательство, аналогично параграфу 9. В этом параграфе мы полагаем $k \le l$.

Мы имеем $H_{k,l}(n) \subset Br_{k+l}(n)$, поэтому, как это ранее было сделано для алгебры Брауэра, мы можем сопоставить каждой диаграмме $d \in H_{k,l}(n)$ разбиение $\omega(d)$. При этом $\omega(d)$ отвечает классу сопряженности в группе $S_{k-h} \times S_{l-h}$ для некоторого h, $0 \le h \le k$.

Если диаграмма $d \in H_{k,l}(n)$ содержит две горизонтальные дуги, соединяющую k-ю и $(k+1)$-ю точки в верхнем и нижнем ряду, то, выбрасывая эти две дуги, мы получим некоторую диаграмму $d' \in H_{k-1,l-1}(n)$. Обратное действие, позволяющее построить по диаграмме $d \in H_{k,l}(n)$ диаграмму $d' \in H_{k+1,l+1}(n)$, мы будем обозначать через $d' = e(d)$:

$d =$ , $d' = e(d) =$ ,

Напомним, что $\gamma_k = (123\dots k-1k)$, и $\gamma_\mu = \gamma_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \gamma_{\mu_l}$, если $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$. Пользуясь свойствами характеров разделенной алгебры Брауэра, аналогичными свойствам характеров алгебры Брауэра (см. стр. 24), мы можем сформулировать следующую теорему

Теорема 11.1. *Рассмотрим диаграмму $d \in H_{k,l}(n)$. Для любого характера χ алгебры $H_{k,l}(n)$ выполняется*

$$\chi(d) = \frac{1}{n^h}\chi(e^p(\gamma_\mu)),$$

где разбиение μ состоит из ненулевых частей разбиения $\omega(d) = (0^{m_0}1^{m_1}\dots)$, $p = (f - |\mu|)/2$, $h = p - m_0$.

Обозначим через $\chi_{k,l}^{\lambda\mu}$ характер неприводимого представления (k, l, λ, μ) алгебры $H_{k,l}(n)$.

Лемма 11.2. *Если $|\lambda| < k$, и диаграмма $d' \in H_{k,l}(n)$ имеет вид $d' = e(d)$, для некоторой диаграммы $d \in H_{k-1,l-1}(n)$, то*

$$\chi_{k,l}^{\lambda\mu}(e(d)) = n \cdot \chi_{k-1,l-1}^{\lambda\mu}(d).$$

Доказательство. Аналогично лемме 9.2. □

Замечание 11.3. Пусть $|\lambda| = k$. Если диаграмма имеет вид $d' = e(d)$, то по определению $\pi_{d'}^{\lambda\mu} = 0$. Соответствующее представление (k, l, λ, μ) алгебры $H_{k,l}(n)$, суженное на подалгебру $\mathbb{C}[S_k \times S_l] \subset H_{k,l}(n)$ есть представление групповой алгебры $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$, отвечающее паре диаграмм (λ, μ); сужение на дополнение $\mathbb{C}[S_k \times S_l]$ в $H_{k,l}(n)$ равно нулю.

Таким образом, остается рассмотреть наиболее интересный случай $|\lambda| < k$, $d \in S_k \times S_l \subset H_{k,l}(n)$. Пусть $|\lambda| = k - r$. Несложно понять, что в этом случае

$$(k, l, \lambda, \mu)|_{S_k \times S_l} = \mathrm{Ind}_{S_{k-r} \times S_r \times S_r \times S_{l-r}}^{S_k \times S_l}\left(\lambda_{S_{k-r}} \otimes \mathbb{C}[S_r] \otimes \mu_{S_{l-r}}\right), \tag{29}$$

где $\mathbb{C}[S_r]$ рассматривается как $(S_r \times S_r)$-бимодуль. Как известно, в этом случае

$$\mathbb{C}[S_r] = \sum_{\beta \vdash r} \beta \times \beta. \tag{30}$$

Комбинируя формулы (29) и (30), получаем

$$(31)\quad (k,l,\lambda,\mu)|_{S_k\times S_l} = \mathrm{Ind}^{S_k\times S_l}_{S_{k-r}\times S_r\times S_r\times S_{l-r}}\left(\lambda\otimes(\sum_{\beta\vdash r}\beta\times\beta)\otimes\mu\right) =$$

$$\sum_{\beta\vdash r}\left(\mathrm{Ind}^{S_k}_{S_{k-r}\times S_r}\left(\lambda\times\beta\right)\otimes\mathrm{Ind}^{S_l}_{S_{l-r}\times S_r}\left(\beta\times\mu\right)\right) = \sum_{\beta\vdash r}\left(\left(\sum_{\nu\vdash k}c^{\nu}_{\lambda\beta}\nu\right)\otimes\left(\sum_{\eta\vdash l}c^{\eta}_{\beta\mu}\eta\right)\right) =$$

$$\sum_{\nu\vdash k,\eta\vdash l}\left(\sum_{\beta\vdash r}c^{\nu}_{\lambda\beta}c^{\eta}_{\beta\mu}\right)\nu\otimes\eta.$$

Теперь теорема 11.1 и лемма 11.2 приводят к следующей теореме (ср. [10]):

Теорема 11.4. *Пусть $d\in H_{k,l}(n)$, $\omega(d)\in S_{k-h}\times S_{l-h}$ тогда*

$$\chi^{\lambda,\mu}_{k,l}(d) = n^h\sum_{\nu\vdash k-h,\eta\vdash l-h}\left(\sum_{\beta}c^{\nu}_{\lambda\beta}c^{\eta}_{\beta\mu}\right)\chi^{\nu\eta}_{S_{k-h}\times S_{l-h}}(\gamma_{\omega(d)}).$$

Список литературы

[1] Вейль Г. *Классические группы.* Иностранная литература, Москва, 1947.

[2] Клячко А. А. Централизаторы инволюций и модели симметрической и полной линейной групп. *Исследования по теории чисел.7. Саратов*, 1978, стр. 59–64.

[3] Вершик А. М., Окуньков А. Ю. Новый подход к теории представлений симметрических групп. II. *Зап. Науч. Сем. ПОМИ*, 307:57–98, 2004.

[4] Birman J. S., Wenzl H. Braids, link polynomials and a new algebra. *Trans. AMS*, 313(1):249–274, 1989.

[5] Benkart G., Chakrabarti M., Halverson T., Leduc R., Lee C. and Stroomer J. Tensor product representations of general linear groups and their connections with brauer algebras. *J. of Algebra*, 166(3):529–567, 1994.

[6] Brauer R. On algebras which are connected with the semisimple continious groups. *Ann. of Math.*, 38(4):854–872, 1937.

[7] Brown Wm. P. An algebra related to the orthogonal group. *Michigan Math. J.*, 3(1):1–22, 1955–1956.

[8] Brown Wm. P. The semisimplicity of ω^n_f. *Ann. of Math.*, 63:324–335, 1956.

[9] Fulton W. *Young Tableaux.* Cambridge University Press, 1997.

[10] Halverson T. Characters of the centralizer algebras of mixed tensor representations of $gl(r,\mathbb{C})$ and the quantum group $\mathcal{U}_q(gl(r,\mathbb{C}))$. *Pacific J. of Math.*, 174(2):359–410, 1996.

[11] Jones V. F. R. Index for subfactors. *Inv. Math.*, 72:1–25, 1783.

[12] Kauffman L. H. An invariant of regular isotopy. Preprint, 1986.

[13] Kerov S. V. Realizations of representations of brauer semigroup. (in russian). *Zapiski Nauchn. Semin. LOMI, Leningrad*, 164:189–193, 1987.

[14] Kerov S. V. Characters of Hecke and Birman-Wenzl algebras. *(in Quantum Groups, Proc. Workshops Euler Int. Math. Inst., Leningrad, USSR). Lect. Notes in Math.*, 1510:335–340, 1991.

[15] S. V. Kerov, G. I. Olshansky, A. M.Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation. *Comptes Rendus Acad.Sci.Paris Sér I*, 316:773–778, 1993.

[16] S. V. Kerov, G. I. Olshansky, A. M.Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group. *Inv. Math.*, 158(3):551–642, 2004.

[17] Koike K. On the decomposition of tensor products of the representations of classical groups: By means of universal characters. *Adv. in Math.*, 74:57–86, 1989.

[18] Kosuda M., Murakami J. Centralizer algebras of the mixed tensor representations of quantum group $u_q(gl(m,\mathbb{C}))$. *Osaka J. Math.*, 30:475–507, 1993.

[19] Leduc R. *A two-parameter version of the centralizer algebra of mixed tensor representations of quantum $GL(r)$*. PhD thesis, University of Wisconsin-Madison, 1994.

[20] Murakami J. The Kauffman polynomial of links and the representation theory. *Osaka J. Math.*, 24:745–758, 1987.

[21] Ram A. Characters of Brauer centralizer algebras. *Pacific J. Math*, 169(1):173–200, 1995.

[22] Schur I. *Uber eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen.* PhD thesis, 1901.

[23] Turaev V. G. Operator invariants of matrices and R-matrices. *Izvestija AN SSSR, serija matematicheskaja, in Russian*, 53(5):1073–1107, 1989.

[24] Vershik A. M. Gelfand-Tsetlin algebras, expectations, inverse limits, Fourier analysis. *in "Unity of Mathematics. In Honor of the Ninetieth Birthday of I.M.Gelfand". Progr. Math. 244, Birkhauser,*, 2005

[25] Wenzl H. On the structure of Brauer's centralizer algebras. *Annals of Mathematics*, 129(1):173–193, 1988.