ПРЕПРИНТ ПОМИ — 07/2006

СЛЕДЫ НА БЕСКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАХ БРАУЭРА*

А. М. ВЕРШИК, П. П. НИКИТИН

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН
191023, Ст.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru, pnikitin0103@yahoo.co.uk

13 апреля 2006 г.

АННОТАЦИЯ.

Доказывается теорема об описании центральных мер для простых блужданий по градуированным графам. С ее помощью мы получаем список конечных следов на бесконечномерных алгебре Брауэра, разделенной алгебре Брауэра и алгебре разбиений. Основной факт состоит в том, что список следов этих алгебр совпадает со списком следов.

*Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS 03-51-5018 и SRDF RUM 1-2622 ST.04.

1 Алгебры Брауэра и паскализация графов

Рассмотрим диагональное действие группы $O_k(\mathbb{C})$, действующей в пространстве V, в тензорном произведении $V^{\otimes n}$ этого пространства:

$$M \cdot (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = Mv_1 \otimes \ldots \otimes Mv_n.$$

Алгебра Брауэра $Br_n(k)$ была определена Р. Брауэром с помощью диаграмм (см. [8, 1]), но для наших целей достаточно считать, что это — конечномерная алгебра, зависящая от параметра k, который может принимать не только натуральные, но и любые комплексные значения. При этом, если $k \in \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}$, то эта алгебра изоморфна централизатору алгебры, порожденной указанным выше действием, а при всех значениях параметра $k \in \{x \in \mathbb{C} \mid x \notin \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq n\}$ алгебры $Br_n(k)$ полупросты и изоморфны между собой [20]; ниже мы будем рассматривать только такие значения параметра и обозначать соответствующую алгебру Br_n, опуская параметр k в обозначении. Для целых k алгебра, вообще говоря, не полупроста.

Рассмотрим также ***разделенную алгебру Брауэра (wall-Brauer algebra)*** $Br_{n,m}(k)$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. История определения этой алгебры такова. Впервые задание $Br_{n,m}(k)$ с помощью копредставления предложил В.Тураев ([5]), обратив внимание первого автора на то, что ее размерность равна $(n+m)!$ и она напоминает групповую алгебру симметрической группы. Эта алгебра независимо возникла в работе [14], и позже изучалась в [6], как централизатор диагонального действия группы $GL_k(\mathbb{C})$ в произведении $V^{\otimes n} \bigotimes V^{*\otimes m}$; из ее диаграммного определения ясно, что она является подалгеброй алгебры Брауэра. При этом разделенные алгебры Брауэра также полупросты и изоморфны для параметра общего положения $k \in \{x \in \mathbb{C} \mid x \notin \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq m+n\}$ (подробнее об этом см. в [4]). Мы рассматриваем ниже только такие значения и опускаем параметр k в обозначении, $Br_{n,m}(k) = Br_{n,m}$.

П. Мартин (см. [17]) ввел понятие ***алгебр разбиений (partition algebras)*** $Part_n(k)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{C}$. Алгебры разбиений $Part_{2n}(k)$, $Part_{2n+1}(k)$ для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ изоморфны централизаторам диагонального действия в пространстве $V^{\otimes n}$ подгрупп $S_k \subset GL_k(\mathbb{C})$, $S_{k-1} \subset GL_k(\mathbb{C})$. Для параметра k общего положения алгебры $Part_n(k)$ изоморфны и полупросты; мы будем обозначать их через $Part_n$.

Для каждой из рассматриваемых конечномерных алгебр задан идеал J, натянутый на все необратимые стандартные образующие (см. [20, 4, 17]). При этом выполняется

$$Br_n/J_n \cong \mathbb{C}[S_n], \quad Br_{n,m}/J_{n,m} \cong \mathbb{C}[S_n \times S_m], \quad Part_{2n}/J_{2n} \cong Part_{2n+1}/J_{2n+1} \cong \mathbb{C}[S_n]. \tag{1}$$

Алгебры Br_n, $Br_{n,m}$ и $Part_n$ образуют индуктивные семейства с естественными вложениями, что позволяет рассмотреть их пределы $Br_\infty = \varinjlim Br_n$, $Br_{\infty,\infty} = \varinjlim Br_{n,m}$ и $Part_\infty = \varinjlim Part_n$, которые являются ***локально полупростыми (л.п.) алгебрами***. С комбинаторной точки зрения любая л. п. алгебра (индуктивный предел конечномерных полупростых алгебр) $A = \varinjlim A_n$ определяется своей ***диаграммой Браттели (графом ветвления)*** $\Gamma(A)$, т.е., $\mathbb{Z}_+$-градуированным графом, вершины n-го этажа которого есть простые модули алгебры A_n, а ребра, соединяющие вершины $(n-1)$-го и n-го этажа, задаются разложением на простые A_{n-1}-модули сужения на алгебру A_{n-1} соответствующего простого A_n-модуля. (См. обзоры [2, 19] относительно определений, связанных с л.п. алгебрами.) Нахождение диаграммы Браттели л.п. алгебры, заданной копредставлением или иным явным способом, аналогично отысканию спектра коммутативной алгебры.

Для описания диаграмм Браттели алгебр Брауэра и алгебры разбиений удобно использовать операцию ***паскализации*** графа, которая включает в себя ***основную конструкцию (basic construction)*** Джонса, см. работы В. Джонса и Х. Венцля ([12, 20, 9]), а также обзор А. Рама и Т. Халверсона [11], посвященный алгебрам разбиений, и литературу в нем. Пусть Γ есть $\mathbb{Z}_+$-градуированный локально-конечный граф с единственной начальной вершиной без висящих вершин, пусть Γ_k — множество вершин k-того этажа, $k \in \mathbb{Z}_+$. Мы будем писать $|\lambda| = i$, если $\lambda \in \Gamma_i$, и $\lambda \nearrow \nu$ (соотв. $\lambda \searrow \nu$), если вершина ν следует за вершиной λ (соотв. предшествует вершине λ). Определим новый $\mathbb{Z}_+$-градуированный граф $\Pi(\Gamma)$, у которого множество вершин k-того этажа $\Pi(\Gamma)_k$ есть объединение множества Γ_k и множества вершин всех предшествующих этажей графа Γ той же четности. Обозначим вершины k-го этажа $\Pi(\Gamma)_k$ графа $\Pi(\Gamma)$ через (k, λ), где $\lambda \in \Gamma_i$, $i \leq k$, $k - i = 0(\mathrm{mod}\, 2)$. Ребра графа $\Pi(\Gamma)$ зададим следующим образом:

$$(k, \lambda) \nearrow (k+1, \nu) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \nearrow \nu \text{ или } \lambda \searrow \nu. \tag{2}$$

Определение 1.1. *Операция перехода от графа Γ к графу $\Pi(\Gamma)$ называется **паскализацией**, а граф $\Pi(\Gamma)$ — **паскализованным графом**.*

Несложно проверить, что следующее определение равносильно: для получения k-го этажа графа $\Pi(\Gamma)$ мы отражаем $(k-2)$-й этаж этого графа относительно $(k-1)$-го (вместе с соответствующими ребрами) и затем к полученному отражению добавляем k-й этаж Γ_k графа Γ, вместе с ребрами, характеризующими включение $\Gamma_{k-1} \subset \Gamma_k$.

Очевидно, что исходный граф Γ является подграфом своей паскализации, составляющим, правда, очень небольшую часть всего графа $\Pi(\Gamma)$.

Пример 1.2. Рассмотрим граф Γ^0, множество вершин которого есть множество $\mathbb{Z}_+$, а ребра соединяют вершины n и $(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\Pi(\Gamma^0)$ есть "половина" графа Паскаля (что и объясняет введенный выше термин): $\Pi(\Gamma^0)_{2k} = \{0, 2, \ldots, 2k\}$, $\Pi(\Gamma^0)_{2k+1} = \{1, 3, \ldots, 2k+1\}$, ребра имеют вид $(0,1)$ и $(i, i-1)$, $(i, i+1)$ при $i > 0$. Отметим, что построенный граф отвечает л.п. алгебре Темперли-Либа (см. [9]).

Мы будем обозначать через Y_Γ множество путей на графе Γ, при этом $Y_\Gamma \subset Y_{\Pi(\Gamma)}$. Пространство путей графа естественно снабжается структурой вполне несвязного компакта, в котором базис открыто-замкнутых множеств состоит из цилиндрических множеств; обозначим через $C_d = C_d^\Gamma$ цилиндр, состоящий из всех путей, проходящих через вершину d.

Полезно пояснить, как выглядят пути в графе $\Pi(\Gamma)$, являющемся паскализацией некоторого исходного графа Γ. Как следует из (2), всякий путь в $\Pi(\Gamma)$ однозначно задается последовательностью вершин $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ графа Γ, в которой любые две последовательные вершины x_n, x_{n+1} являются соседними в исходном графе: либо $x_n \nearrow x_{n+1}$ либо $x_n \searrow x_{n+1}$; иначе говоря, пути в паскализованном графе есть траектории простого блуждания по путям исходного графа. Поэтому можно сказать, что граф $\Pi(\Gamma)$ есть граф простых блужданий по графу Γ.

Например, однородное дерево степени $2k$ с выделенной вершиной, определяющей, тем самым, $\mathbb{Z}_+$-градуировку, есть граф Кэли свободной группы с k образующими, а его паскализация есть граф простых случайных блужданий на свободной группе.

Задавая идеалы J рассматриваемых бесконечномерных алгебр, также, как для конечномерного случая, мы получим

$$Br_\infty/J \cong \mathbb{C}[S_\infty], \quad Br_{\infty,\infty}/J \cong \mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty], \quad Part_\infty/J \cong \mathbb{C}[S_\infty].$$

Операция паскализации позволяет для каждой из алгебр Br_∞, $Br_{\infty,\infty}$, $Part_\infty$ строить диаграмму Браттели по диаграмме соответствующей факторалгебры.

Напомним, что диаграмма Браттели групповой алгебры бесконечной симметрической группы есть граф Юнга $\mathbb{Y}$(см., например, [2]). Следующие три теоремы есть переформулировки в удобных нам терминах доказанных ранее результатов. Диаграмма Браттели для семейства алгебр Брауэра получена Х. Венцлем (см. [20]):

Теорема 1.3. *Диаграмма Браттели алгебры Брауэра Br_∞ (для параметра общего положения) есть паскализация графа Юнга,* $\Gamma(Br_\infty) = \Pi(\mathbb{Y})$.

Для разделенных алгебр Брауэра диаграмма Браттели независимо описана в [16, 4]. Рассмотрим л.п. алгебру $\mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty]$ как индуктивный предел групповых алгебр

$$\mathbb{C}[S_0 \times S_0] \subset \mathbb{C}[S_1 \times S_0] \subset \mathbb{C}[S_1 \times S_1] \subset \mathbb{C}[S_2 \times S_1] \subset \dots \subset \mathbb{C}[S_{[n+1/2]} \times S_{[n/2]}] \subset \dots,$$

и обозначим через $\bar{\mathbb{Y}}$ соответствующую диаграмму Браттели, несложно получающуюся из графа $\mathbb{Y}$.

Теорема 1.4. *Диаграмма Браттели разделенной алгебры Брауэра $Br_{\infty,\infty}$ (для параметра общего положения) есть паскализация графа $\bar{\mathbb{Y}}$,* $\Gamma(Br_{\infty,\infty}) = \Pi(\bar{\mathbb{Y}})$.

П.Мартин нашел диаграмму Браттели алгебры разбиений (см. [17]). Диаграмма Браттели для этой алгебры также может быть описана при помощи паскализации. Именно, рассмотрим граф Юнга $\bar{\bar{\mathbb{Y}}}$ с повторениями на нечетных этажах, отвечающий цепочке

$$G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots, \qquad G_{2i} = G_{2i+1} = \mathbb{C}[S_i], \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 1.5. *Диаграмма Браттели алгебры разбиений $Part_\infty$ (для параметра общего положения) есть паскализация графа $\bar{\bar{\mathbb{Y}}}$,* $\Gamma(Part_\infty) = \Pi(\bar{\bar{\mathbb{Y}}})$.

2 Теорема о центральных мерах на паскализованном графе

Описание следов(характеров) и K-функтора является общей задачей теории л.п. алгебр. ***Конечным следом(характером)*** на *-алгебре A называется линейный функционал $f : A \to \mathbb{C}$, такой что

1. $f(1) = 1$;
2. $f(ab) = f(ba), \quad a, b \in A$;
3. $f(a^*a) \geq 0, \qquad a \in A$.

Множество конечных следов алгебры A обозначим через $\mathrm{Char}(A) = \mathrm{Char}(\Gamma(A))$. След называется ***неразложимым***, если он непредставим в виде нетривиальной выпуклой комбинации следов.

Центральной мерой на множестве Y_Γ путей Z_+-градуированного бесконечного графа Γ называется вероятностная борелевская мера, индуцирующая равномерные условные меры на конечных множествах путей, совпадающих с некоторого места. Обозначим множество центральных мер на путях графа Γ через $\mathrm{Cent}(\Gamma) = \mathrm{Cent}(Y_\Gamma)$. Центральная мера называется ***эргодической***, если она не является нетривиальной выпуклой комбинацией центральных мер.

Хорошо известно, что конечные следы на локально полупростой алгебре находятся в естественном биективном соответствии с центральными мерами на множестве путей диаграммы Браттели

$$\mathrm{Char}(A) \leftrightarrow \mathrm{Cent}(\Gamma(A))$$

(см., например, [2, 19]). При этом неразложимым следам отвечают эргодические центральные меры.

Мы сведем задачу нахождения следов на паскализованном графе (для некоторых алгебр) к задаче о следах на исходном графе, и применим эти соображения к бесконечномерным алгебрам Брауэра и алгебре разбиений. *Оказывается, при некоторых условиях на граф ветвления всякая центральная мера на паскализованном графе сосредоточена на исходном графе как подграфе паскализованного, и, тем самым, совпадает с центральной мерой на самом графе.* В частности, мы доказываем, что следы на алгебрах Br_∞ и $Part_\infty$ находятся во взаимно-однозначном соответствии со следами на бесконечной симметрической группе S_∞, а следы на алгебре $Br_{\infty,\infty}$ — во взаимно-однозначном соответствии со следами на группе $S_\infty \times S_\infty$.

Центральные меры для бесконечномерной алгебры Брауэра были описаны без доказательств и пояснений в работе С.В.Керова [13]; следы бесконечномерной разделенной алгебры Брауэра и алгебры разбиений, видимо, не рассматривались. Уточнение множества полной центральной меры, необходимое для описания K-функтора, не было сделано ни для одной из рассматриваемых алгебр.

Для произвольного Z_+-градуированного графа Γ мы будем через $\dim(d; d')$ обозначать число путей из вершины d в вершину d', через $\dim(d)$ — число путей из вершины графа в вершину d. Напомним следующий метод нахождения центральных мер (эргодический метод):

Теорема 2.1 (см. [2]). *Рассмотрим произвольный $\mathbb{Z}_+$-градуированный граф и произвольную эргодическую центральную меру μ на нем. Тогда множество путей вида $s = (s_0 \nearrow s_1 \nearrow \dots \nearrow s_n \nearrow \dots)$ таких, что для всех вершин d выполняется*

$$\mu(C_d) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(d)\cdot\dim(d; s_n)}{\dim s_n}, \tag{3}$$

имеет полную меру.

Таким образом, для отыскания центральных мер надо описать все пределы вида (3). Перейдем к описанию центральных мер на паскализациях графов.

Лемма 2.2. *Если для вершин графа $\Pi(\Gamma)$ выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\lambda,\ |\lambda|<n} \frac{\dim(n-2,\lambda)}{\dim(n,\lambda)} = 0, \tag{4}$$

тогда для любой центральной эргодической меры μ на графе $\Pi(\Gamma)$ и любой вершины $(n_0, \lambda) \in \Pi(\Gamma)_{n_0}$, $|\lambda| < n_0$, будет выполняться $\mu(C_{(n_0,\lambda)}) = 0$.

Доказательство. Для эргодической центральной меры μ и пути s из условия теоремы 2.1 выполняется

$$\mu(C_{(n_0,\lambda)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(n_0,\lambda)\cdot\dim((n_0,\lambda);(n,s_n))}{\dim(n,s_n)}.$$

Для любой вершины (n, s_n), в которую существует путь из вершины (n_0, λ), $|\lambda| < n_0$, очевидным образом верно, что $|s_n| < n$. Следовательно, учитывая четность, $|\lambda| \le n_0 - 2$, $|s_n| \le n - 2$, что доказывает существование вершин вида (n_0-2,λ), $(n-2,s_n)$. Рассмотрев биекцию (подъем на 2 этажа) между путями из вершины (n_0,λ) в (n,s_n) и путями из (n_0-2,λ) в $(n-2,s_n)$, получим, что для пути s выполняется

$$\mu(C_{(n_0,\lambda)}) = \dim(n_0,\lambda)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\dim((n_0-2,\lambda);(n-2,s_n))}{\dim(n,s_n)} \le \dim(n_0,\lambda)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\dim(n-2,s_n)}{\dim(n,s_n)},$$

что доказывает лемму. □

Для произвольного индуктивного семейства алгебр

$$A_0\cong\mathbb{C}\subset A_1\subset\cdots\subset A_l\subset\ldots,$$

положим $a_{l+1}=[\dim A_{l+1}/\dim A_l]$, $l\in\mathbb{Z}_+$, где $\dim A_l$ — размерность алгебры.

Лемма 2.3. *Пусть для графа ветвления Γ, отвечающего семейству алгебр*

$$A_0\cong\mathbb{C}\subset A_1\subset\cdots\subset A_l\subset\ldots,$$

для произвольного числа $l\in\mathbb{Z}_+$ и представления $\lambda\in\Gamma_l$ выполняется

$$\dim(\mathrm{Ind}_{A_l}^{A_{l+1}}\lambda)=a_{l+1}\dim\lambda.$$

Тогда отношение размерностей $\dim(n,\lambda)/\dim\lambda$ зависит только от номера этажа n и от номера этажа исходного графа $|\lambda|$. Иначе говоря, существуют числа $M(n,l)$, для $l\le n$, $n-l=0(\mathrm{mod}\,2)$, такие что

$$\dim(n,\lambda)=M(n,|\lambda|)\dim\lambda,$$

для любого представления $(n,\lambda)\in\Pi(\Gamma)_n$. Числа $M(n,l)$ задаются по индукции соотношениями

$$\begin{gathered}M(n,n)=1;\quad M(2n+2,0)=M(2n+1,1),\quad n=0,1,2,\ldots;\\ M(n,l)=M(n-1,l-1)+a_{l+1}M(n-1,l+1),\quad 0<l<n,\quad n=0,1,2,\ldots\,.\end{gathered}\tag{5}$$

Доказательство. Граф ветвления $\Pi(\Gamma)$ позволяет записать размерность $\dim(n,\lambda)$, $0<|\lambda|<n$, следующим образом

$$\dim(n,\lambda)=\sum_{\eta\nearrow\lambda}\dim(n-1,\eta)+\sum_{\nu\searrow\lambda}\dim(n-1,\nu).$$

По индукции получаем

$$\dim(n,\lambda)=M(n-1,|\lambda|-1)\sum_{\eta\nearrow\lambda}\dim\eta+M(n-1,|\lambda|+1)\sum_{\nu\searrow\lambda}\dim\nu.$$

Для любого графа ветвления выполняется $\sum_{\eta\nearrow\lambda}\dim\eta=\dim\lambda$. Кроме того, по условию леммы $\sum_{\nu\searrow\lambda}\dim\nu=\dim(\mathrm{Ind}_{A_{|\lambda|}}^{A_{|\lambda|+1}}\lambda)=a_{|\lambda|+1}\dim\lambda$, откуда

$$\dim(n,\lambda)=\Big(M(n-1,|\lambda|-1)+a_{|\lambda|+1}M(n-1,|\lambda|+1)\Big)\dim\lambda,$$

что доказывает требуемую формулу. Случай $|\lambda|=0$ рассматривается аналогично, случай $|\lambda|=n$ очевиден. □

Замечание 2.4. Аналогично проверяется утверждение, обратное лемме.

Замечание 2.5. Если $G = \cup G_n$ — индуктивное семейство групп, то для групповой алгебры $\mathbb{C}[G] = \cup \mathbb{C}[G_n]$ условия леммы 2.3 выполняются, при этом отношение размерностей алгебр равно соответствующему индексу подгруппы, $a_{l+1} = [G_{l+1} : G_l]$. При этом приведенный выше пример 1.2 показывает, что списки следов графов Γ и $\Pi(\Gamma)$ могут сильно различаться — на графе Γ существует единственный след, а следы графа $\Pi(\Gamma)$ параметризуются отрезком $[0, 1/2]$.

Лемма 2.6. *При $n \geq 2$ выполняется*

$$\frac{M(2n-2,0)}{M(2n,0)} = \frac{M(2n-3,1)}{M(2n-1,1)} > \frac{M(2n-2,2)}{M(2n,2)} > \frac{M(2n-3,3)}{M(2n-1,3)} > \frac{M(2n-2,4)}{M(2n,4)} > \dots,$$
$$\frac{M(2n-2,0)}{M(2n,0)} > \frac{M(2n-1,1)}{M(2n+1,1)} > \frac{M(2n-2,2)}{M(2n,2)} > \frac{M(2n-1,3)}{M(2n+1,3)} > \frac{M(2n-2,4)}{M(2n,4)} > \dots .$$

Доказательство. Равенство $\frac{M(2n-2,0)}{M(2n,0)} = \frac{M(2n-3,1)}{M(2n-1,1)}$ непосредственно следует из соотношений (5). Для доказательства неравенств напомним следующий несложный факт:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D};\ A, B, C, D, x > 0 \Rightarrow \frac{A}{B} > \frac{A + xC}{B + xD} > \frac{C}{D}.$$

Теперь, например, двойное неравенство $\frac{M(2n-3,1)}{M(2n-1,1)} > \frac{M(2n-2,2)}{M(2n,2)} > \frac{M(2n-3,3)}{M(2n-1,3)}$ будет следовать из того, что, в силу соотношений (5), $M(2n-2,2) = M(2n-3,1) + a_3 M(2n-3,3)$, $M(2n,2) = M(2n-1,1) + a_3 M(2n-1,3)$. Остальные неравенства проверяются аналогично. □

Следствие 2.7. *Положим $\varepsilon(n) = 0$, если n четно, и $\varepsilon(n) = 1$, если n нечетно. Тогда в условиях леммы 2.3*

$$\max_{\lambda,\ |\lambda|<n} \frac{\dim(n-2,\lambda)}{\dim(n,\lambda)} = \frac{M(n-2+\varepsilon(n),0)}{M(n+\varepsilon(n),0)}.$$

Следствие 2.8. *Последовательность $\{\frac{M(2n,0)}{M(2n+2,0)}\}_{n=0}^{\infty}$ убывает.*

Таким образом, в условиях леммы 2.3 стремление к нулю предела (4) зависит только от стремления к нулю убывающей последовательности $\{\frac{M(2n,0)}{M(2n+2,0)}\}_{n=0}^{\infty}$.

Лемма 2.9. *1.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M(2n,0)}{M(2n+2,0)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists M, C\ \forall n\ M(2n,0) < C \cdot M^n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M(2n,0)}{M(2n+2,0)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall M\ \exists C\ \forall n\ M(2n,0) > C \cdot M^n$.

Доказательство. Для убывающей последовательности элементов $\{m_n = \frac{M(2n,0)}{M(2n+2,0)} > 0\}_{n=0}^{\infty}$ всегда существует предел $\lim_{n\to\infty} m_n = m \geq 0$. Если $m > 0$, тогда $M(2n,0) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{M(2k+2,0)}{M(2k,0)} < C(\frac{1}{m})^n$. Если $m = 0$, тогда для любого $M > 0$ существует N, такое что $\frac{M(2k,0)}{M(2k+2,0)} < \frac{1}{M}$ при $k > N$. Тогда $M(2n,0) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{M(2k+2,0)}{M(2k,0)} > C_1 \cdot M^{n-N} = C_2 \cdot M^n$. □

Теорема 2.10. *В условиях леммы 2.3*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\lambda,\ |\lambda|<n} \frac{\dim(n-2,\lambda)}{\dim(n,\lambda)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup_l \{a_l = [\dim A_l / \dim A_{l-1}]\} = \infty.$$

Доказательство. Если $\sup_l\{a_l\} = a$, тогда по индукции, исходя из формул (5), легко проверить, что $M(n,l) < (a+1)^n$ для любого l.

Если $\sup_l\{a_l\} = \infty$, тогда для любого M существует индекс L, для которого $a_L > M$. Полагая $2n > 2L$ и рассматривая путь

$$(0,0) \nearrow (1,1) \nearrow \cdots \nearrow (L,L) \nearrow (L+1,L-1) \nearrow (L+2,L) \nearrow (L+3,L-1) \nearrow \ldots$$
$$\cdots \nearrow (2n-L,L) \nearrow (2n-L+1,L-1) \nearrow (2n-L+2,L-2) \nearrow \cdots \nearrow (2n,0),$$

мы получим по индукции, что $M(L+2i,L) > M^i$, откуда $M(2n,0) > M^{n-2L} = CM^n$. □

Мы получили критерий сохранения центральных мер при паскализации графа. Если условия теоремы 2.10 выполнены, тогда

1. всякая центральная мера на графе $\Pi(\Gamma)$ сосредоточена на подграфе $\Gamma \subset \Pi(\Gamma)$, и, таким образом, совпадает с центральной мерой на Γ;

2. следовательно, существует естественная биекция между множествами центральных мер $\mathrm{Cent}(\Gamma) \leftrightarrow \mathrm{Cent}(\Pi(\Gamma))$ и вытекающая из нее биекция между следами на соответствующих алгебрах.

Для индуктивного семейства алгебр Брауэра $a_l = \dim \mathbb{C}[S_l]/\dim \mathbb{C}[S_{l-1}] = l$, для разделенных алгебр Брауэра $a_l = [(l+1)/2]$, для алгебр разбиений $a_{2l} = l$, $a_{2l+1} = 1$, это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 2.11. *Для каждой из алгебр Br_∞, $Br_{\infty,\infty}$, $Part_\infty$ диаграмма Браттели есть паскализация $\Pi(\Gamma)$ некоторого графа Γ. При этом центральные меры графа $\Pi(\Gamma)$ сосредоточены на подграфе $\Gamma \subset \Pi(\Gamma)$, они находятся во взаимно-однозначном соответствии с центральными мерами графа Γ.*

Следствие 2.12. *Всякий след на каждой из алгебр Br_∞, $Br_{\infty,\infty}$ и $Part_\infty$ есть поднятие некоторого следа на соответствующей факторалгебре $\mathbb{C}[S_\infty]$, $\mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty]$ и $\mathbb{C}[S_\infty]$.*

Полученные результаты о следах переносятся на деформации алгебр Брауэра (***алгебры Бирман-Венцля***, изучавшиеся в работах [7, 18, 13]) и деформации разделенных алгебр Брауэра (см. [5, 15, 10, 16]) для общих значений параметров.

3 Замечания о K_0-функторе

Напомним, что $K_0(A)$-функтор (группа Гротендика) локально полупростой алгебры A есть индуктивный предел конечно-порожденных бесконечных циклических групп, образующие которых есть вершины ее диаграммы Браттели, а вложения определяются той же диаграммой. Это является следствием отождествления вершин графа ветвления и соответствующих им неприводимых представлений (простых конечномерных модулей) конечномерных подалгебр. С помощью операции индуцирования можно сопоставить каждому такому модулю простой модуль над всей алгеброй (см. [2]). Назовем вершину графа ***инфинитезимальной***, если цилиндр путей, проходящих через нее, имеет нулевую меру для всех конечных центральных мер. Проективный модуль (и, в частности, простой модуль) называется ***инфинитезимальным***, если инфинитезимальна отвечающая ей вершина. Таким образом, в группе Гротендика определена подгруппа $I(A) = I$ инфинитезимальных модулей. Нетрудно видеть, что простые инфинитезимальные модули порождают подгруппу I. Для групповой алгебры бесконечной симметрической группы эта подгруппа тривиальна. Для рассматриваемых в этой работе алгебр Br_∞, $Br_{\infty,\infty}$ и $Part_\infty$ из теоремы 2.11 непосредственно вытекает, что подгруппа инфинитезимальных модулей уже не тривиальна: она совпадает с подгруппой, порожденной вершинами, принадлежащими разности $\Pi(\Gamma)\backslash\Gamma$, для соответствующего графа Γ. Это приводит к следующей теореме:

Теорема 3.1.

$$K_0(Br_\infty)/I \cong K_0(\mathbb{C}[S_\infty]), \quad K_0(Br_{\infty,\infty})/I \cong K_0(\mathbb{C}[S_\infty \times S_\infty]), \quad K_0(Part_\infty)/I \cong K_0(\mathbb{C}[S_\infty]).$$

Структура инфинитезимальных модулей локально-полупростых алгебр, по-видимому, не изучалась. Они встречались также в [3] в качестве модулей комплексной групповой алгебры группы $SL(2, F)$ над счетным полем F. Эти модули не являются подмодулями никаких фактор-представлений, допускающих след, и, в частности, регулярного представления, поскольку конечным следам отвечают либо конечномерные представления, либо фактор-представления типа II_1 соответствующих алгебр. Это напоминает наличие у неаменабельных групп неприводимых представлений, не содержащихся (слабо) в регулярном.

Список литературы

[1] Вейль Г. *Классические группы.* Иностранная литература, Москва, 1947.

[2] Вершик А. М., Керов С. В. Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор. *Соврем. проблемы матем., ВИНИТИ АН СССР*, 26:3–56, 1985.

[3] Вершик А. М., Кохась К. П. Вычисление группы Гротендика алгебры $\mathbb{C}(PSL(2, k))$, где k — счетное алгебраически замкнутое поле. *Алгебра и анализ*, 2(6):98–106, 1990.

[4] Никитин П. П. Описание коммутанта действия группы $GL_n(\mathbb{C})$ в смешанных тензорах. *Препринт ПОМИ 08/2006.*

[5] Тураев В. Г. Операторные инварианты связок и R-матрицы. *Известия АН СССР, сер. матем.*, 53(5):1073–1107, 1989.

[6] Benkart G., Chakrabarti M., Halverson T., Leduc R., Lee C. and Stroomer J. Tensor product representations of general linear groups and their connections with Brauer algebras. *J. of Algebra*, 166(3):529–567, 1994.

[7] Birman J. S., Wenzl H. Braids, link polynomials and a new algebra. *Trans. AMS*, 313(1):249–274, 1989.

[8] Brauer R. On algebras which are connected with the semisimple continious groups. *Ann. of Math.*, 38(4):854–872, 1937.

[9] Goodman F. M., de la Harpe P., Jones V. F. R. *Coxeter Graphs and Towers fo Algebras*, volume 14 of *Math. Sci. Research. Inst. Publ.* Springer-Verlag, 1989.

[10] Halverson T. Characters of the centralizer algebras of mixed tensor representations of $gl(r,\mathbb{C})$ and the quantum group $\mathcal{U}_q(gl(r,\mathbb{C}))$. *Pacific J. of Math.*, 174(2):359–410, 1996.

[11] Halverson T., Ram. A. Partition Algebras. *European J. Combin.*, 26(6):869–921, 2005.

[12] Jones V. F. R. Index for subfactors. *Inv. Math.*, 72:1–25, 1783.

[13] Kerov S. V. Characters of Hecke and Birman-Wenzl algebras. *(in Quantum Groups, Proc. Workshops Euler Int. Math. Inst., Leningrad, USSR). Lect. Notes in Math.*, 1510:335–340, 1991.

[14] Koike K. On the decomposition of tensor products of the representations of classical groups: By means of universal characters. *Adv. in Math.*, 74:57–86, 1989.

[15] Kosuda M., Murakami J. Centralizer algebras of the mixed tensor representations of quantum group $u_q(gl(m,\mathbb{C}))$. *Osaka J. Math.*, 30:475–507, 1993.

[16] Leduc R. *A two-parameter version of the centralizer algebra of mixed tensor representations of quantum* $GL(r)$. PhD thesis, University of Wisconsin-Madison, 1994.

[17] Martin P. The partition algebra and the potts model transfer matrix spectrum in high dimensions. *J. Phys. A:Math. Gen.*, 33:3669–3695, 2000.

[18] Murakami J. The kauffman polynomial of links and the representation theory. *Osaka J. Math.*, 24:745–758, 1987.

[19] Voiculescu D., Strătilă S. Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$. *Lect. Notes Math.*, 486:1–169, 1975.

[20] Wenzl H. On the structure of Brauer's centralizer algebras. *Annals of Mathematics*, 129(1):173–193, 1988.