ПОМИ ПРЕПРИНТ — 06/2006

УРАВНЕНИЯ ШЛЕЗИНГЕРА И УРАВНЕНИЯ ГАРНЬЕ–ПЕНЛЕВЕ 6, ГЕОМЕТРИЯ ПЕРЕХОДА

М. В. Бабич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

ABSTRACT

При постановке задачи изомонодромной деформации линейного уравнения

$$d\Psi/d\lambda = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{(k)}}{\lambda - \lambda_k}\Psi, \quad A^{(k)} \in sl(2,C), \quad \Psi \in SL(2,C)$$

обычно используется нормировка $A^{(0)}_{ij} = const\ \forall i,j, \quad \lambda_0 = \infty$ – все три "нормировочных" матричных элемента какой-нибудь одной из матриц положены константами.

Предлагается другая нормировка – три "нормировочных" матричных элемента "распределены" по трем разным матрицам $A^{(k)}$.

Такая нормировка имеет красивую геометрическую интерпретацию и приводит к естественному переходу между системой Шлезингера и системой Гарнье.

Детально рассмотрен Пенлеве 6 – случай ($n = 3$). Построены поверхность Окамото и Определяющее многообразие.

0. Введение

Уравнения класса Пенлеве претендуют на роль нелинейных специальных функций, смотри [GtoP, Ok, Its, Slav].

Особое место в списке этих уравнений занимает уравнение Пенлеве 6 (PVI) – наиболее общее (наименее “вырожденное”) из всех; и в этом смысле – наиболее фундаментальное.

Уравнение PVI выводится, то есть связывается с остальным миром математики (вообще) и дифференциальных уравнений (в частности) двумя способами – во-первых как уравнение, решения которого обладают специального типа зависимостью от начальных данных (это – Пенлеве-свойство, его мы ни обсуждать, ни упоминать в этой статье больше не будем), и, во-вторых, как уравнение, которому удовлетворяют коэффициенты линейного уравнения при специальных, “изомонодромных” деформациях (линейного уравнения). Именно этот “вывод уравнения PVI и его окрестности” составляет содержание данной статьи.

Автор придерживается мнения, что тексты – изложения того или иного предмета должны быть разными, рассчитанными на разную подготовку и разные математические вкусы(!) читателей. Количество таких текстов должно соотноситься с фундаментальностью излагаемого предмета. Для примера можно рассмотреть набор: “арифметика”, “линейная алгебра”, “дифференциальная геометрия”, “теория римановых поверхностей”. С этой точки зрения положение дел с уравнением PVI и системой Шлезингера недопустимо, особенно учитывая “претензии” уравнений Пенлеве на место в классе спецфункций. Предлагаемый текст – шаг в сторону исправления ситуации.

Текст рассчитан на читателя с “формульным” (не абстрактно-алгебраическим) взглядом на математику. Предполагаемая подготовка – курс математики физического факультета университета (не обязательно Московского или Петербургского), то есть уровень “потребителя специальных функций”. Авторам цитируемых статей, а так же тем, на кого они ссылаются, *заведомо* известны (были известны) большинство имеющихся в тексте утверждений и связок между ними; тем не менее некоторые построения, в частности нормировка Ψ-функции в трех различных точках *одновременно*, ни где автору не встречалась[1]

Большое влияние на эту работу – как “локально”, то есть на изложение тех или иных вопросов, так и “глобально”, то есть взгляд на проблему “в целом”, выбор материала и стиля изложения, оказали работы [Manin, ArLys, Hitchin, ShT, DjMw, DjMw1, KitKor].

Текст состоит из шести частей, некоторые из которых, в свою очередь, разбиты на более мелкие разделы.

В первой части рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = \sum_{i=0}^{n} A^{(i)} \frac{1}{\lambda - \lambda_i}, \quad \Psi \in \mathrm{SL}(2, C), \quad A^{(i)} \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}), \quad \sum_{i=0}^{n} A^{(i)} = 0,$$

которое часто называют “уравнением по λ”, а его решение – “Ψ – функцией”. Показано, что если $d\Psi\Psi^{-1}$ имеет только простые полюсы, то условие изомоно-

[1]Буду благодарен за любую информацию на эту тему.

дромности имеет вид

$$dA^{(k)} = \sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} [A^{(i)}, A^{(k)}] d\log(\lambda_i - \lambda_k) \quad \forall k \in \{0, \ldots, n\},$$

то есть является системой *уравнений Шлезингера.*

Обозначение. На протяжение всего текста черта над индексом будет означать набор таких величин со всевозможными (из контекста) значениями индекса:

$$\lambda_{\bar{i}} \sim \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \quad A^{(\bar{i})} \sim A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(n)} \quad \text{и т. п.}$$

□

Окончание некоторой выделенной части текста (доказательства, замечания и т.п.) обозначаем знаком "□".

В части II приводятся необходимые сведения из теории гамильтоновых систем. Доказывается, что в пространстве, снабженном стандартной скобкой Ли–Пуассона система уравнений Шлезингера совпадает с канонической системой уравнений, задаваемой гамильтонианами $H_k = \sum_{i\neq k} TrA^{(i)}A^{(k)}\frac{1}{\lambda_k - \lambda_i}$. Доказывается, что такие гамильтонианы задают интегрируемое распределение – *система уравнений Шлезингера интегрируема*, результат эволюции решения $A^{(i)}(\lambda_i)$ не зависит (локально) от пути в пространстве параметров $\lambda_{\bar{i}}$, а только от начальной и конечной точек.

Часть III посвящена аккуратному построению фазовых пространств $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$, $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ и, наконец, $M_{a_{\overline{ii}}}$:

$\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}} \ni (A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ – декартово произведение $n+1$-ой квадрики $\det A^{(i)} = \mathrm{const}$, $i = 0, 1, \ldots, n$;

$\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \subset \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ – подмногообразие $\sum A^{(i)} = 0$;

$M_{a_{ii}} = \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} / \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ – именно это многообразие и является основным объектом нашего исследования – фазовым пространством системы Гарнье, которая в важнейшем (простейшем) случае $n = 3$ называется (является) системой Пенлеве 6.

Следующая часть IV – важнейшая. Она посвящена введению координат[2] на $M_{a_{\overline{ii}}}$.

Факторизацию $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ по действию $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ можно трактовать как "нормирование Ψ-функции", или, что то же самое, как выбор "подвижного", т.е. зависящего от $\lambda_{\bar{i}}$ и от $A^{\overline{(i)}}$ базиса пространства $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, содержащего матрицы $A^{(i)}$.

Пространство $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ – линейное 3-мерное пространство с невырожденным (только нулевой вектор ортогонален всему пространству) скалярным произведением $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\, AB$.

[2]Заметим, что сам процесс *решения* уравнения можно рассматривать как процесс отыскания новых координатных функций, удовлетворяющих дополнительному условию (уравнению)

Рассмотрим базис σ_+, σ_-, σ_3. Это будет либо набор $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, либо любой, полученный из него "поворотом" из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. С таким (как и с любым) базисом инвариантно связаны три плоскости:

$$\begin{aligned}(\sigma_+)^\perp =& \{A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) : \langle \sigma_+ A \rangle = 0\} \\ (\sigma_-)^\perp =& \{A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) : \langle \sigma_- A \rangle = 0\} \\ \widetilde{(\sigma_-)} :=& \{A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) : \langle \sigma_- A \rangle = 1\}.\end{aligned}$$

В части IV доказывается, что почти для любого набора $A^{(i)}$ базис σ_+, σ_-, σ_3 можно, и причем *единственным* образом, расположить так, чтобы какие-нибудь указанные вершины $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$ и $A^{(n)}$ оказались на плоскостях $(\sigma_+)^\perp$, $(\sigma_-)^\perp$ и $\widetilde{(\sigma_-)}$ соответственно (такая дуальность). Поскольку базис фиксирован этим условием однозначно, то автоматически координаты остальных $n-2-x$ вершин дают $2(n-2)$ координаты. Поскольку каждая из матриц $A^{(i)}$ должна лежать на квадрике $\det A^{(i)} = \mathrm{const}$, то координат не $3(n-2)$ (пространство $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ 3-мерно), а именно $2(n-2)$.

Квадрика $\det A = \mathrm{const}$ является симплектическим пространством с формой $dA_{11} \wedge d\log A_{12}$ (A_{ij} – матричные элементы A). Поскольку условия принадлежности $A^{(i)}$ плоскостям $(\sigma_\pm)^\perp$ и $\widetilde{(\sigma_-)}$ ограничивают движение $A^{(i)}$ $i \in (0,\dots,n)$ на *кривые* (коники – пересечения квадрик $\det A^{(i)} = \mathrm{const}$ с соответствующей плоскостью – $(\sigma_\pm)^\perp$, $\widetilde{(\sigma_-)}$), то вклада в сумму

$$\sum_i w^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} dA_{11}^{(i)} \wedge d\log A_{12}^{(i)}$$

члены $w^{(0)}$, $w^{(n-1)}$ и $w^{(n)}$ не дадут, и форма $w := \sum\limits_{i=1}^{n-2} dA_{11}^{(i)} \wedge d\log A_{12}^{(i)}$ окажется симплектической формой на $M_{a_{\overline{ii}}}$, ее значения будут равны значениям исходной симплектической формы $\overset{\approx}{w} := \sum\limits_{i=0}^{n} w^{(i)}$ на $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$.

Система уравнений на координаты "выделенных" векторов $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$ и $A^{(n)}$, при заданных остальных $n-2-x$ оказывается треугольной и легко разрешается, что дает *бирациональную* связь между координатами векторов $A^{(i)}$, $i = 1,\dots,n-2$ в построенном нами базисе (мы назовем его "стандартным сопутствующим") и естественными координатами на $M_{a_{\overline{ii}}}$ – попарными скалярными и смешанными произведениями

$$a_{ij} := \mathrm{Tr}\, A^{(i)} A^{(j)}, \quad f_{ijk} := \mathrm{Tr}[A^{(i)}, A^{(j)}] A^{(k)}.$$

Пользуясь явными формулами уже не трудно выразить гамильтониан $\Sigma a_{ij} d\log\,(\lambda_i - \lambda_j)$ через матричные элементы $A^{(i)}$ и переписать гамильтонову систему Шлезингера в переменных p_i, q_i – канонических переменных на "координатных" квадриках $A^{(i)}$, $i = 1,\dots,n-2$. Получившаяся система уравнений называется *системой Гарнье.*

Далее мы будем заниматься только случаем Пенлеве, то есть $n = 3$. В части V, аккуратно проделав все вычисления, мы покажем, как система уравнений Шлезингера превращается в уравнение Пенлеве 6, причем как в классическом ее виде, так и в "эллиптическом" (смотри [Pain, Manin, BaBoell]).

Последняя часть VI посвящена исследованию $M_{a_{\overline{ii}}}$ как алгебраического многообразия. Оказывается, (смотри [Ok-s, ShT]) при каждом значении t можно добавить к $M_{a_{\overline{ii}}}$ еще одну линию, каждая точка которой будет соответствовать своему решению, обращающемуся в бесконечность при данном значении t.

Действительно, запишем систему Шлезингера в координатах a_{ij}, f_{ijk}. Для этого можно просто "скалярно" умножить уравнения Шлезингера на всевозможные $A^{(i)}$ и сложить $\langle dA^{(i)}, A^{(j)}\rangle$ с $\langle A^{(i)}, dA^{(j)}\rangle$; получится

$$da_{k0} = f_{ijk} d\log \frac{\lambda_i - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_0}\frac{\lambda_j - \lambda_0}{\lambda_j - \lambda_k} := f_{ijk}(t_j - t_i)d\tau,$$

где мы обозначили $d\log(\lambda_i - \lambda_0)(\lambda_j - \lambda_k) := t_i d\tau$, τ – какой-нибудь локальный параметр, определяющий двойное отношение точек λ_i, обычно выбирается $\tau = t = (t_3 - t_2)/(t_1 - t_2)$.

В этом случае

$$da_{01} : da_{02} : da_{03} = t_2 - t_3 : t_3 - t_1 : t_1 - t_2 = t : -t + 1 : -1.$$

Если решение сингулярно – $a_{0i} \to \infty$, $f_{ijk} \to \infty$, то, по правилу Лопиталя, получаем, что

$$a_{01} : a_{02} : a_{03} \to t : -t + 1 : -1\,,$$

все сингулярные кривые "покидают $M_{a_{\overline{ii}}}$ через одну точку проективного замыкания афинной плоскости параметров a_{01}, a_{02}, a_{03}, $a_{01} + a_{02} + a_{03} = -a_{00} = \mathrm{const}$". Более тщательный анализ показывает, что величины вида $a_{t0}a_{0j}/f_{123}$, где $a_{t0} := t_1 a_{01} + t_2 a_{02} + t_3 a_{03}$ остаются конечными при прохождении сингулярности – "разрешают ее". Добавим к многообразию $M_{a_{\overline{ii}}}$ соответствующие точки; это можно сделать алгебраически, смотри [Ok-s, ShT, ArLys]. Получившееся комплексно-двумерное алгебраическое многообразие называется "поверхностью начальных данных PVI", или поверхностью Окамото. Мы обозначим ее $M_{a_{\overline{ii}}t}$. Составим несвязное объединение этих поверхностей по всем t. Это – комплексно-3-мерное алгебраическое многообразие (обозначим его $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$) – естественное расширенное фазовое пространство гамильтоновой системы Пенлеве 6. Оно обладает замечательным свойством (заключительная теорема этой статьи) – *на $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ не существует другого поля направлений, кроме как задаваемого системой Пенлеве 6.* Таким образом любое утверждение (смотри [ArLys]) о поле направлений на $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ становится утверждением о решениях уравнения Пенлеве 6 – "геометрия определяет динамику".

I. Изомонодромные деформации и система уравнений Шлезингера

Рассмотрим следующую классическую (восходящую к Б. Риману) задачу изомонодромной деформации линейного дифференциального уравнения:

Как должны зависеть от параметров λ_k матрицы $A^{(j)} \in \mathrm{gl}(m,\mathbb{C})$ – коэффициенты уравнения

$$\frac{d}{d\lambda}\Psi = \sum_{i=0}^{n} A^{(i)}\frac{1}{\lambda-\lambda_i}\Psi, \quad \sum_{i=0}^{n} A^{(i)} = 0, \tag{1}$$

чтобы множители монодромии $M := \Psi^{-1}\Psi\big|_{\circlearrowleft}$, возникающие при аналитическом продолжении ее фундаментального решения $\Psi = \Psi(\lambda,\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ по переменной λ вдоль любого замкнутого цикла "$\circlearrowleft$" на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda_0,\dots,\lambda_n\}$ не зависели бы от параметров λ_0, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \overline{\mathbb{C}}$?

Такое изменение $A^{(k)} = A^{(k)}(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$, $k = 0,\dots,n$ называется *изомонодромной деформацией уравнения (1).*

Заметим, что из самой формулировки задачи следует, что уравнения на $A^{(k)}(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$, *эквивалентные* условию изомонодромной деформации, должны быть инвариантны относительно общего сопряжения всех $A^{(k)}$ произвольно зависящей от параметров λ_k матрицей $\Phi = \Phi(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$, а также инвариантны относительно дробно-линейных преобразований "независимых переменных" λ_k – движений сферы Римана $\overline{\mathbb{C}_\lambda} \ni \lambda,\lambda_0,\dots,\lambda_n$. Поясним.

Условие изомонодромности – это условие на *правые* множители $\Psi \mapsto \Psi M$, никак не зависящие от домножения Ψ *слева* на любую не зависящую от λ (но, возможно, зависящую от $\lambda_0,\dots,\lambda_n$) матрицу Φ. Действительно, если $d/d\lambda\Psi\Psi^{-1}$ имеет только простые полюсы $A^{(k)}$ в точках $\lambda = \lambda_k$, и при обходе по какому-нибудь замкнутому контуру матрица Ψ приобретает множитель $M : \Psi|_{\circlearrowleft} = \Psi M$ (не важно – зависящий или не зависящий от каких-нибудь параметров), то $\widetilde{\Psi} := \Phi\Psi$ тоже имеет только простые полюсы (с вычетами $\Phi A^{(k)}\Phi^{-1}$) и, конечно же, $\widetilde{\Psi}|_{\circlearrowleft} = \Phi\Psi|_{\circlearrowleft} = \Phi\Psi M = \widetilde{\Psi} M$ с тем же самым M.

То же и с дробно-линейными преобразованиями $\overline{\mathbb{C}} \ni \lambda,\lambda_0,\dots,\lambda_n$, не меняющими ни вид уравнения (1), ни монодромии.

Пусть $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, $g_i = g_i(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ – произвольное движение $\overline{\mathbb{C}}_\lambda$:

$$\lambda^g := g(\lambda) := \frac{g_1\lambda + g_2}{g_3\lambda + g_4}, \quad \lambda_i^g := g(\lambda_i), \tag{2}$$

тогда, конечно же, $\Psi^g := \Psi(\lambda^g,\lambda_1^g,\dots,\lambda_n^g)$ имеет те же самые (например постоянные) монодромии, что и $\Psi = \Psi(\lambda,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ при обходе по соответствующим друг другу контурам на $\overline{\mathbb{C}}_\lambda$.

Прежде чем выписать "правильные", то есть инвариантные уравнения изомонодромной деформации сначала выпишем другие, более "сильные" уравнения на $A^{(k)}$, из которых будет *следовать* изомонодромность деформации (1), хотя некоторые деформации, являющиеся изомонодромными, им и не будут удовлетворять.

Предположим теперь, что удалось изомонодромно деформировать какое-нибудь решение (1) – $\widetilde{\Psi}(\lambda,\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$; рассмотрим $\Psi := \widetilde{\Psi}/\sqrt[m]{\det\widetilde{\Psi}} \in \mathrm{SL}(m,\mathbb{C})$, где $\sqrt[m]{\det\widetilde{\Psi}}$ – произвольная ветвь корня.

Очевидно, что Ψ тоже будет иметь постоянные монодромии, отличающиеся от монодромий $\widetilde{\Psi}$ на скалярные множители (корни из единицы). Таким образом, содержательная часть задачи не пострадает, если мы будем считать, что

$$\Psi \in \mathrm{SL}(m,\mathbb{C}), \quad A^{(k)} \in \mathrm{sl}(m,\mathbb{C}).$$

Сузим еще рассматриваемый класс матриц – ограничимся матрицами 2×2, так что отныне

$$\Psi \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \quad A^{(k)} \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}).$$

Локальный анализ поведения решений уравнений (1) показывает, что если собственные числа матрицы $A^{(k)} \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ не полуцелые (обозначим их $\pm\sqrt{a_{kk}/2}$, при таком обозначении $\mathrm{tr}(A^{(k)})^2 = a_{kk}$), то имеется пара линейно-независимых решений (1) вида

$$(\lambda-\lambda_k)^{\pm\sqrt{a_{kk}/2}}\widehat{\Psi}_\pm, \quad \widehat{\Psi}_\pm(\lambda,\lambda_0,\ldots,\lambda_n) = \begin{pmatrix}\Psi_{1\pm}\\ \Psi_{2\pm}\end{pmatrix},$$

где $\widehat{\Psi}_+$ и $\widehat{\Psi}_-$ регулярные в окрестности $\lambda=\lambda_k$ вектор-функции. Если же собственные числа $A^{(k)}$ полуцелые, то есть $\pm\sqrt{2a_{kk}} \in \mathbb{Z}$, то имеется пара линейно-независимых решений вида

$$(\lambda-\lambda_k)^{-\sqrt{a_{kk}/2}}\widehat{\Psi}_-, \quad (\lambda-\lambda_k)^{\sqrt{a_{kk}/2}}\log(\lambda-\lambda_k)\widehat{\Psi}_+,$$

$$\sqrt{2a_{kk}} \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \sqrt{2a_{kk}} > 0,$$

где опять же $\widehat{\Psi}_\pm$ – регулярные в окрестности $\lambda=\lambda_k$ вектор-функции.

Замечание. На протяжении всего текста постоянно будет возникать число $\sqrt{2}$; мы раз и навсегда зафиксируем арифметическое значение этого корня, то есть всегда

$$\sqrt{2a_{kk}} = 2\sqrt{a_{kk}/2} = \sqrt{2}\sqrt{a_{kk}}, \quad \sqrt{2}>0.$$

Из таких векторных решений можно составить матрицу Ψ – фундаментальное решение (1) со следующей асимптотикой в окрестностях особых точек $\lambda=\lambda_k$:

$$\Psi(\lambda,\lambda_0,\ldots,\lambda_n) = \widehat{\Psi}_k\cdot\begin{pmatrix}(\lambda-\lambda_k)^{\sqrt{a_{kk}/2}} & 0\\ 0 & (\lambda-\lambda_k)^{-\sqrt{a_{kk}/2}}\end{pmatrix} \cdot\begin{pmatrix}1 & m_k\log(\lambda-\lambda_k)\\ 0 & 1\end{pmatrix}R_k \tag{3}$$

$\widehat{\Psi}_k = \widehat{\Psi}_k(\lambda,\lambda_0,\ldots,\lambda_n) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ регулярна в окрестности λ_k, $R_k \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ – постоянная (в окрестности какой-нибудь одной из λ_k можно было бы положить $R_{k_0} = \mathrm{id}$);

если $\sqrt{2a_{kk}} \notin \mathbb{Z}$, то $m_k = 0$,

если $\sqrt{2a_{kk}} \in \mathbb{Z}$, то $m_k \neq 0$ – комплексное число; в этом случае через $\sqrt{a_{kk}}$ обозначен арифметический корень: $0 \leqslant \sqrt{2a_{kk}} \in \mathbb{Z}_+$.

При аналитическом продолжении Ψ по окружности малого радиуса вокруг $\lambda=\lambda_k$ Ψ получает, как видно, множитель (монодромии)

$$M_k = R_k^{-1}\begin{pmatrix}e^{\pi i\sqrt{2a_{kk}}} & 0\\ 0 & e^{-\pi i\sqrt{2a_{kk}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\pi i m_k\\ 0 & 1\end{pmatrix}R_k^{-1},$$

так что условия изомонодромности (т.е. $M_k = \mathrm{const}$) влекут $a_{kk} = \mathrm{const}$ и $m_k = \mathrm{const}$.

В окрестности $\lambda = \lambda_k$ "сингулярная часть" зависимости в представлении (3) есть зависимость от разности $\lambda - \lambda_k$. Из этого сразу же следует, что при дифференцировании (3) по λ_k и по λ получатся сингулярные члены, отличающиеся лишь знаком:

$$\left.\frac{\partial}{\partial \lambda_k}\right|_{\substack{\lambda=\mathrm{const}\\ \lambda_i=\mathrm{const}, i\neq k}} \Psi\,\Psi^{-1} = -\left.\frac{\partial}{\partial \lambda}\right|_{\substack{\lambda_i=\mathrm{const}\\ \forall i\in 0,1,\dots,n}} \Psi\,\Psi^{-1} + O(1) = \frac{-A^{(k)}}{\lambda-\lambda_k} + O(1), \qquad (4)$$

$$\lambda \to \lambda_k,$$

где через $A^{(k)}$ обозначили $A^{(k)} := \sqrt{a_{kk}/2}\widehat{\Psi}_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \widehat{\Psi}_k^{-1}(\lambda_k, \lambda_0, \dots, \lambda_k)$, если $a_{kk} \neq 0$; $A^{(k)} = m_k \widehat{\Psi}_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \widehat{\Psi}_k^{-1}$, если $a_{kk} = 0$.

Зафиксируем все λ_i кроме λ_k. Зависимость Ψ от λ_k в окрестности всех λ_i, $i \neq k$ гладкая – она задается регулярными матрицами $\widehat{\Psi}_i$, а сингулярная часть асимптотики в $\lambda = \lambda_i$ от λ_k не зависит. Из этого следует, что

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial \lambda_k}\right|_{\substack{\lambda=\mathrm{const}\\ \lambda_i=\mathrm{const}\\ i\neq k}} \Psi\right)\Psi^{-1}$$

имеет сингулярность только в $\lambda = \lambda_k$, причем в силу (4), вычеты "по λ" и "по λ_k" совпадают, так что если мы потребуем чтобы $d\Psi\Psi^{-1}$ имела только простые полюсы по переменной λ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$, то *тогда* уравнения изомонодромности деформации Ψ можно записать в виде

$$d\Psi = \sum_{k=0}^{n} A^{(k)} d\log(\lambda - \lambda_k)\Psi, \quad \sum_{k=0}^{n} A^{(k)} = 0. \qquad (5)$$

Замечание. Условия, *эквивалентные* изомонодромности деформации (1), получатся из (5) допущением всевозможных калибровочных преобразований решений уравнения (5)

$$\Psi \to \Phi\Psi, \quad \text{то есть} \quad A^{(i)} \to \Phi A^{(i)} \Phi^{-1}, \Phi = \Phi(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

а также движений сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}_\lambda$ $\lambda \to \lambda g_1 + g_2/\lambda g_3 + g_4$, $\lambda_i \to \lambda_i g_1 + g_2/\lambda_i g_3 + g_4$, $g_1 g_4 - g_2 g_3 \neq 0$, $g_i = g_i(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Уравнения (5) представляют из себя запись системы из $n+2$ линейных уравнений – уравнения (1) ("уравнения по λ"), и еще $n+1$-го уравнения по $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ вида

$$\left.\frac{\partial}{\partial \lambda_k}\right|_{\substack{\lambda=\mathrm{const}\\ \lambda_i=\mathrm{const}\\ i\neq k}} \Psi = \frac{1}{\lambda_k - \lambda} A^{(k)}.$$

Условие их совместности, то есть равенства перекрестных частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\lambda_k}\Psi = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_k\partial\lambda}\Psi, \quad \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}\Psi = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_j\partial\lambda_i}\Psi,$$

или, что то же самое, условие того, что связность $\Sigma A^{(k)} d\log(\lambda - \lambda_k)$ является плоской, представляет собой систему нелинейных уравнений на вычеты $A^{(k)} = A^{(k)}(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ – *систему уравнений Шлезингера*:

$$dA^{(k)} = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{m} [A^{(i)}, A^{(k)}] d\log(\lambda_i - \lambda_k). \tag{6}$$

Эта запись представляет из себя сокращенную запись системы из $(n+1)^2$ уравнений на $n+1$-ну матрицу $A^{(k)}$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\right|_{\substack{\lambda j=\mathrm{const}, \\ j\neq i\neq k}} A^{(k)} = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}[A^{(i)}, A^{(k)}], \left.\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\right|_{\substack{\lambda_i=\mathrm{const} \\ i\neq k}} A^{(k)} = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k}} \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i}[A^{(i)}, A^{(k)}]. \tag{7}$$

То, что такое огромное количество уравнений оказывается совместным есть нетривиальный факт, который мы докажем в следующей части. Здесь лишь отметим, что из дальнейшего так же будут следовать, что (6) имеет смысл более глубокий, чем только символическая запись (7).

Если предположить, что имеются два различных гомотопных пути $\lambda_i^A(t)$ и $\lambda_i^B(t)$ в пространстве параметров λ_i, соединяющих точки $(\lambda_0^A(0), \dots, \lambda_n^A(0)) = (\lambda_0^B(0), \dots, \lambda_n^B(0))$ и $(\lambda_0^A(1), \dots, \lambda_n^A(1)) = (\lambda_0^B(1), \dots, \lambda_n^B(1))$, то решения *разных* дифференциальных уравнений:

$$\dot{A}^{(k)} = \sum_i [A^{(i)}, A^{(k)}] \frac{\dot{\lambda}_i^A - \dot{\lambda}_k^A}{\lambda_i^A - \lambda_k^A},$$

и

$$\dot{A}^{(k)} = \sum_i [A^{(i)}, A^{(k)}] \frac{\dot{\lambda}_i^B - \dot{\lambda}_k^B}{\lambda_i^B - \lambda_k^B}$$

с одинаковыми при $t = 0$ начальными данными совпадут при $t = 1$. Другими словами, уравнения (6), (7) задают *интегрируемое распределение*, смотри [ModGeom].

Замечание 1, I. Имеется один весьма специальный случай "взаимного расположения" матриц $A^{(i)}$, который не попадает под развиваемую в этой статье теорию. Случай этот много проще общего – он сводится к *линейным* уравнениям, но требует других средств исследования и мы его хотим исключить.

Речь идет вот о чем. Пусть все матрицы $A^{(i)}$ таковы, что могут быть одновременно приведены к верхне-треугольной форме; выберем базис $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ так, чтобы они действительно были верхне-треугольны. В этом случае на диагоналях $A^{(k)}$ стоят постоянные величины $\sqrt{a_{kk}/2}$, причем поскольку $\Sigma A^{(k)} = 0$, то распределение знаков корней должно быть таким:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{a_{kk}} = 0$$

– обсуждаемое многообразие матриц существует только при специальном выборе параметров a_{kk} и распределении знаков $\sqrt{a_{kk}}$. Пусть

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{kk}/2} & \alpha_k \\ 0 & -\sqrt{a_{kk}/2} \end{pmatrix}.$$

Так как $\sqrt{a_{kk}} = \mathrm{const}$, условие изомонодромности деформации (6)

во-первых, оставляет матрицы треугольными, и

во-вторых, эквивалентно системе *линейных* уравнений на α_k:

$$d\alpha_k = \sum_i (\sqrt{a_{ii}/2}\alpha_k - \sqrt{a_{kk}/2}\alpha_i) d\log(\lambda_i - \lambda_k).$$

Это – линейная система на $n+1$ скалярную функцию α_k, в то время как, в общем случае, (6) – система нелинейных уравнений на $n+1$-ну $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$-значную матрицу.

Чтобы исключить такие наборы, заметим, что если матрицы A и B из $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ одновременно треугольны, то

$$(\mathrm{tr}\, AB)^2 = \mathrm{tr}\, A^2\, \mathrm{tr}\, B^2.$$

Верно и обратное. Приведя одну из матриц к нормальной Жордановой форме, видно, что вторая тоже должна иметь собственные значения на диагонали – быть треугольной.

Исключим наборы $\overline{A^{(i)}}$ такие, что

$$(\mathrm{tr}\, A^{(i)}A^{(j)})^2 = \mathrm{tr}(A^{(i)})^2\, \mathrm{tr}(A^{(j)})^2 \quad \forall i,j. \tag{8}$$

Ограничение 1, I.

Мы рассматриваем только такие наборы матриц $A^{(i)}$, $i = 0,\ldots,n$, что

$$\exists i,j : (\mathrm{tr}\, A^{(i)}A^{(j)})^2 \neq \mathrm{tr}\, A^{(i)^2}\, \mathrm{tr}\, A^{(j)^2}. \tag{9}$$

Замечание. Если параметры a_{kk} таковы, что для любого выбора знаков $\sqrt{a_{kk}}$

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{a_{kk}} \neq 0,$$

то Ограничение 1, I выполнено автоматически – ему удовлетворяют *всевозможные* наборы $A^{(k)}$ с данными a_{kk}. Итак, стартовой точкой наших построений являются уравнения Шлезингера (6). Покажем, как они естественным образом возникают в теории алгебр Ли, и то, как в простейшем нетривиальном случае $n = 3$ (учитывая Ограничение, 1 I) уравнения (6) приводят к уравнению Пенлеве 6.

Отметим особо, что связь между (ИД) – изомонодромными деформациями (уравнений (1), случай $n = 3$, $m = 2$, исключая (8)), системой Шлезингера (СШ) и уравнением Пенлеве PVI получится такой:

$$\begin{array}{ccc} & (\text{СШ}) & \\ \swarrow & & \searrow \\ (\text{ИД}) & \Longleftrightarrow & (\text{PVI}), \end{array}$$

что противоречит расхожему, сбивающему с толка утверждению, что в этой диаграмме все знаки являются знаками равносильности. В то же время, диаграмма подтверждает исключительную важность системы Шлезингера для всей теории, тем более что “прямой” путь по нижней горизонтальной стрелочке (автору) не известен.

Статья эта, в бо́льшей своей части, посвящена путешествию по стрелочке “(СШ)$\to$ (PVI)”, переход “(ИД)$\leftarrow$(СШ)” мы уже обсудили и больше возвращаться к нему не будем.

II. Гамильтонов формализм, пуассонова динамика на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1}$ и система Шлезингера

Гамильтонов формализм. Изложим в краткой форме основные положения и приведем формулы гамильтоновой динамики, которые потребуются в дальнейшем.

Пусть сначала M – симплектическое многообразие, на котором задана симплектическая, то есть гладкая, замкнутая, не обращающаяся в ноль 2-форма:

$$w = \sum_{i,j} \Pi_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad \Pi_{ij} = -\Pi_{ji}.$$

Симплектическое многообразие является пуассоновым – скобка Пуассона, кососимметрическое произведение ко-векторов – дифференциалов функций

$$\{f,g\} = \sum_{i,j} \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad \Pi^{ij} = -\Pi^{ji}$$

задается обратной матрицей $(\Pi_{\cdots})^{-1} = \Pi^{\cdots}$:

$$\sum_k \Pi_{ik}\Pi^{kj} = \delta_i^j.$$

Координаты $x^1 = p$, $x^2 = q$ называются каноническими, если $w = dp \wedge dq$, т.е.

$$\Pi_{\cdots} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \Pi_{12} = -\Pi_{21} = 1, \Pi^{\cdots} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\Pi_{\cdots}, \Pi^{12} = -\Pi^{21} = -1$$

и, значит, для канонических координат

$$\{x^1, x^2\} = \Pi^{12} = \{p,q\} = -1.$$

Система уравнений Гамильтона – (гамильтоново) векторное поле на M в канонических координатах имеет вид

$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial}{\partial p} H \\ \dot p = -\frac{\partial}{\partial q} H, \end{cases} \tag{9}$$

где H – функция на M (гамильтониан).

Система (9) может быть записана по-разному

а) “симплектическая” формулировка: как условие того, что направление $dp : dq : dt$ в расширенном фазовом пространстве M^Λ: $M^\Lambda := M \times \Lambda \overset{\pi_M}{\mapsto} M$ является направлением вырождения 2-формы Ω.

$$\Omega = \pi_M^* w - dH \wedge dt = dp \wedge dq - dH \wedge dt. \tag{10}$$

б) "пуассонова" формулировка:

Векторное поле можно задать, указав как по его направлению будут дифференцироваться всевозможные скалярные поля (функции); гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H дифференцирует по своему направлению произвольную функцию f следующим образом:

$$\dot{f} = -\{H, f\}, \tag{11}$$

именно при таком выборе знака для координатных функций $x^1 = p$, $x^2 = q$ будем иметь каноническую систему (9):

$$\dot{q} = \dot{x}^2 = -\{H, x^2\} = -\Pi^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial x^2}{\partial x^j} = -\Pi^{12}\frac{\partial H}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial p}H$$

$$\dot{p} = \dot{x}^1 = -\{H, x^1\} = -\Pi^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial x^1}{\partial x^j} = -\Pi^{21}\frac{\partial H}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial q}H.$$

Немного усложним ситуацию. Пусть теперь матрица $\Pi^{\cdot\cdot}$ не обратима – M не симплектическое многообразие, тогда форма Ω из (10) не определена, но (11) тем не менее определено и задает гамильтоново векторное поле.

В этом случае имеется набор нетривиальных функций (Казимира), скобка Пуассона с которыми равна нулю всегда; это – следствие необратимости $\Pi^{\cdot\cdot}$, наличия у него нетривиального ядра. Интегральные линии поля (11) в этом случае лежат на поверхностях уровня функций Казимира.

Еще усложним ситуацию. Пусть опять M симплектическое (и пуассоново), но теперь имеется не одно время " t", а несколько "времен" – переменных λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, являющихся координатными функциями на многообразии Λ. Пусть зависимость от них задается гамильтонианами H_0, $H_1, \ldots, H_n$, зависящими как от времен λ_i, так и от координат на M. Нам требуются новые понятия; введем их, следуя [ModGeom,GtoP].

Слоением (k-мерным) какого-либо N-мерного многообразия M^Λ называется такая совокупность k-мерных поверхностей (слоев слоения) $\mathcal{F}_\chi \subset M^\Lambda$, что через каждую точку многообразия M^Λ проходит одна и только одна гладкая k-мерная поверхность $\mathcal{F}_\chi$, гладко зависящая от точки многообразия:

$$M^\Lambda = \coprod_\chi \mathcal{F}_\chi,$$

значок χ нумерует слои.

Распределение (k-мерным) называется гладкое поле k-мерных касательных направлений, то есть функция, ставящая в соответствие каждой точке $x \in M^\Lambda$ k-мерное подпространство $\mathcal{L}(x)$ касательного пространства $T_xM^\Lambda \supset \mathcal{L}(x)$.

Распределение называется интегрируемым, если имеется слоение, касательные плоскости $\mathcal{L}$ к слоям $\mathcal{F}_\chi$ которого ($\mathcal{L}$ – линейные подмногообразия TM^Λ размерности $\dim\mathcal{L} = \dim\mathcal{F}_\chi = k$) образуют это распределение.

Обозначение. Обозначать распределения будем строчной буквой в квадратных скобках – $[h]$. □

В предыдущем, одномерном случае, слои $\mathcal{F}_\chi$ это интегральные линии гамильтонова поля – решения

$$\bigcup_t (p(t), q(t), t) \subset M^\Lambda;$$

(одномерные) подпространства $\mathcal{L}(x)$ это прямые, задаваемые уравнениями Гамильтона, то есть $(dp : dq : dt) = (-\{H,p\}, -\{H,q\}, 1)$. Одномерное распределение всегда интегрируемо.

Пусть $M^\Lambda = M\times\Lambda$ – расширенное фазовое пространство гамильтоновой системы с фазовым пространством M и $n+1$-мерным $\Lambda \ni (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ – пространством "времен".

Обозначим проекции на декартовы сомножители

$$\pi_M : M^\Lambda \mapsto M, \quad \pi_\Lambda : M^\Lambda \mapsto \Lambda,$$

π_M^*, π_Λ^* – соответствующие отображения ко-объектов – функций и форм.

Распределение $[h]$ в M^Λ может быть задано 1-формой $h \in T^*M^\Lambda$ вида

$$h = \sum_{j=0}^{n} H_j d\lambda_j,$$

т.е. формой, зануляющейся на всевозможных векторах вида $\vec{\xi}_M \in TM : \pi_\Lambda \vec{\xi}_M = 0$.

Пусть сначала M – симплектическое многообразие с формой $w \in \wedge^2 T^*M$. Плоскости ($n+1$-мерные) распределения $[h]$ могут быть заданы аналогично формуле (10) – как подпространства, на которых форма Ω:

$$\Omega = \pi_M^* w - dh = \pi_M^* w - \sum_{j=0}^{n} dH_j \wedge d\lambda_j \tag{12}$$

вырождена, то есть

$$\vec{\xi}_h \in [h] \Leftrightarrow \Omega(\vec{\xi}, \vec{\xi}_h) = 0 \forall \vec{\xi} \in TM^\Lambda.$$

Распределение $[h]$, заданное 2-формой (12) автоматически получается интегрируемым, но условие зануления $\Omega(\cdot, \vec{\xi}_h)$ на *всех* касательных векторах из TM^Λ приводит к нетривиальным условиям на гамильтонианы.

Действительно, пусть p^i, q^i – канонические координаты:

$$w = \sum_i dp^i \wedge dq^i,$$

$$\vec{\xi}_h = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial p^i}{\partial \lambda_k} \partial_{p^i} + \frac{\partial q^i}{\partial \lambda_k} \partial_{q^i} + \partial_{\lambda_k} \right)$$

– произвольный вектор распределения $[h]$. Тогда

$$0 = \Omega(\vec{\xi}_h, \partial_{p^j}) \Leftrightarrow -\frac{\partial q^j}{\partial \lambda_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial p^j}, \quad \forall k$$

$$0 = \Omega(\vec{\xi}_h, \partial_{q^j}) \Leftrightarrow \frac{\partial p^j}{\partial \lambda_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial q^j}, \quad \forall k$$

то есть мы имеем каноническую систему уравнений, но это еще не все, так как для вырожденности направления $\vec{\xi}_h$ необходимо еще и зануление $\Omega(\vec{\xi}_h, \cdot)$ на всех векторах вида ∂_{λ_k}, из чего вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_i - \frac{\partial}{\partial \lambda_i} H_j + \{H_i, H_j\} = \mathrm{const}_\Lambda \tag{13}$$

– коммутирует (скобка Пуассона $\{\dots,\dots\}$ равна нулю) с всеми функциями на M, что для симплектического M означает, что это выражение ни от p^i ни от q^i не зависит, это мы выразили равенством "$= \mathrm{const}_\Lambda$". Только с такими гамильтонианами каноническая система задает интегрируемое распределение.

Теперь рассмотрим случай, когда M не симплектическое, а только Пуассоново. Ответ будет аналогичен – выражение (13) коммутирует со всеми функциями на M, что, в отличие от симплектического случая, будет означать, что это может быть не константа, но функция Казимира.

Пусть M – пуассоново многообразие. Распределение $[h]$ опять может быть задано формой $h = \sum H_k d\lambda_k$. Пусть $\vec{\xi}_h$ – произвольный вектор распределения $[h]$; пусть его проекция на $T\Lambda$

$$\pi_\Lambda \vec{\xi}_h = \sum_k \nu_k \partial_{\lambda_k}$$

– какой-нибудь касательный вектор из $T\Lambda$ ($\pi_\Lambda \vec{\xi}_h$ – аналог вектора ∂_t в одномерном случае); тогда сам $\vec{\xi}_h$ задается с помощью скобки Пуассона на M так:

$$\vec{\xi}_h = \sum_{j=0}^n \nu_j \partial_{\lambda_j} - \left\{ \sum_{j=0}^n H_j \nu_j, \cdot \right\} = \sum_{j=0}^n \nu_j \left(\partial_{\lambda_j} - \sum_m \left\{ H_j, x^m \right\} \partial_{x^m} \right),$$

здесь x^m – координаты на M.

Подпространства распределения $[h]$ натягиваются на такие векторы. Легко проверить, что условие коммутирования потоков вдоль $\vec{\nabla}_i = \partial_{\lambda_i} - \{H_i, \cdot\}$ и $\vec{\nabla}_j = \partial_{\lambda_j} - \{H_j, \cdot\}$, эквивалентное интегрируемости распределения, это снова условие (13). Действительно.

Рассмотрим коммутатор производных какой-нибудь функции f вдоль $\vec{\nabla}_i$ и $\vec{\nabla}_j$:

$$f_{[\vec{\nabla}_j \vec{\nabla}_i]} = -\big\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_i, f \big\} - \big\{ H_i, \frac{\partial}{\partial \lambda_j} f \big\} - \big\{ H_j, \frac{\partial}{\partial \lambda_i} f \big\} + \{H_j, \{H_i, f\}\}.$$

Поскольку $\{H_j \{H_i, f\}\} = \{H_i \{H_j, f\}\} - \{\{H_i, H_j\}, f\}$ (равенство Якоби), то чтобы коммутатор был равен нулю

$$f_{[\vec{\nabla}_j, \vec{\nabla}_i]} = \big\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_i} H_j - \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_i + \{H_i, H_j\}, f \big\} = 0, \forall f$$

необходимо и достаточно чтобы левая часть (13) была функцией Казимира.

Скобка Ли-Пуассона.

Пуассоновыми пространствами, в частности, являются пространства, двойственные к любой алгебре Ли.

Сначала скобка определяется на линейных функциях (на этих двойственных пространствах), а уж потом, по линейности и правилу Лейбница, распространяется и на всевозможные функции.

Продемонстрируем, как эта схема действует в случае алгебры Ли $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Мы аппелируем к геометрической интуиции и изоморфизму алгебр Ли $\mathrm{su}(2) \simeq$

$(\mathbb{R}^3, [,])$, позволяющей рассматривать $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \supset \mathrm{su}(2)$ как комплексификацию алгебры Ли вещественных трехмерных векторов с коммутатором векторным произведением $[,]$. Будем называть элементы $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ векторами и элементы $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$, т.е. линейные функции на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ – ко-векторами.

Кроме коммутатора – "векторного произведения", на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ определено и скалярное произведение (Киллинга):

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\, AB.$$

Пользуясь тем, что оно невырождено – только нулевой вектор ортогонален всему пространству:

$$\langle \sigma, A\rangle = 0\, \forall A \Rightarrow \sigma = 0,$$

можно отождествить $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ и $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$.

Линейный изоморфизм между ними строится так:

вектору $A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ ставится в соответствие ко-вектор $\langle a| \in \mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$ скалярного умножения на этот A:

$\langle A|$ – линейное отображение $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$, которое каждому $B \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, ставит в соответствие $\langle A, B\rangle \in \mathbb{C}$.

Изоморфность следует из невырожденности $\langle,\rangle$.

Элементы второго сопряженного пространства $\mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C})$ это линейные функции на $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$ – элементы самого $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C}) : A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, как элемент $\mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C})$ является функцией на $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$, которая каждому $\tilde{A} \in \mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$ – функционалу $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \mapsto \mathbb{C}$ ставит в соответствие число – значение этого функционала на A:

$$A \in \mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C}) : \tilde{A} \in \mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C}) \mapsto \tilde{A}(A) \in \mathbb{C}.$$

Типичный пример линейной функции на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ (элемента $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$) это какой-нибудь матричный элемент A_{ij}; соответственно линейная функция на $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$ это матричный элемент A_{ij} ко-вектора $\langle A|$. Какие элементы $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ соответствуют A_{11}, A_{12}, A_{21} при отождествлении $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C})$?

Очевидно, что

$$A_{11} = \langle A, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\rangle,\ A_{12} = \langle A, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle,\ A_{21} = \langle A, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\rangle, \tag{14}$$

обозначим эти векторы соответственно $\sigma_3/2$, σ_-, σ_+.

По определению, скобка Ли-Пуассона между (линейными) функциями f_1, $f_2 \in (\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C}))^*$ на $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$ кладется равной их коммутатору при отождествлении $\mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$\{f_1, f_2\}_{LP} = f_3 \Leftrightarrow F_3 = [F_1, F_2]$$

при соответствии

$$\mathrm{sl}^{**}(2,\mathbb{C}) \ni f_i \leftrightarrow F_i \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}).$$

Таким образом, $\{A_{11}, A_{12}\}_{LP}$ это матричный элемент ко-вектора, соответствующий коммутатору $\sigma_3/2$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left[\sigma_3/2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A_{12}$, то $\{A_{11}, A_{12}\}_{LP} = -A_{12}$.

Аналогично
$$\{A_{11}, A_{21}\}_{LP} = A_{21}, \quad \{A_{21}, A_{12}\}_{LP} = 2A_{11}.$$
Одной формулой все эти равенства записываются так
$$\{A_{ij}, A_{kl}\}_{LP} = \delta_{il}A_{kj} - \delta_{jk}A_{il}. \tag{15}$$
Сразу видно, что относительно скобки Ли–Пуассона каноническими будут пары переменных
$$A_{11}, \log A_{12} \quad \text{и} \quad A_{22} = -A_{11}, \log A_{21} :$$
$$\{A_{11}, \log A_{12}\} = \{A_{22}, \log A_{21}\} = -1. \tag{16}$$

Замечание. Из общей теории следует (смотри [Semen]), что невырожденным является ограничение скобки Ли-Пуассона $\{,\}_{LP}$ на орбиту какого-нибудь элемента $\tilde{A}$ сопряженного пространства, заметаемую этим $\tilde{A}$ при ко-присоединенном действии на него самой группы и, стало быть, эта орбита является симплектическим пространством.

Симплектическая форма получается при обращении ограничения на эту орбиту соответствующего тензора Пуассона $\Pi^{\cdot\cdot}$, записанного через координаты на орбите.

Для случая su(2), SU(2) эти утверждения имеют прозрачную геометрическую иллюстрацию.

Относительно введенного на $\mathrm{su}(2) \subset \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ скалярного произведения $\langle , \rangle$ ортонормированным является базис $i\sigma_k/2$, где σ_k, $k = 1, 2, 3$ – матрицы Паули:
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Возьмем какой-нибудь элемент сопряженного пространства квадрата длины R^2, например $\langle Ri\sigma_3/2|$ и подействуем на него всевозможными элементами $\mathrm{SU}(2) \sim \mathrm{SO}(3)$, т.е. вращениями. Получится сфера, которую, как известно, можно параметризовать двумя углами – широтой $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и долготой $\varphi \in [0, 2\pi[$:
$$A = i\frac{R}{2} \begin{pmatrix} \sin\theta & e^{i\varphi}\cos\theta \\ e^{-i\varphi}\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{su}(2), \quad \langle A| \in \mathrm{su}^*(2).$$
Согласно общей теории, сужение скобки (15) на это многообразие невырождено и (как мы получили – по формуле (16)) каноническими координатами там будут $p = A_{11}$ и $q = \log A_{12}$:
$$dp \wedge dq = i\frac{R}{2}\cos\theta d\theta \wedge (d\log\cos\theta + id\varphi) = \frac{R}{2}\cos\theta d\varphi \wedge d\theta,$$
т.е. элемент площади сферы (с постоянным множителем $1/2R$).

Замечание. Здесь уместно было бы сослаться на Архимеда. По-видимому, он был первый, кто открыл совпадение (форм) площади сферы и описанного вокруг нее цилиндра.

Координаты вдоль образующей $z = R\sin\theta$, угловая координата на направляющей окружности φ:

$$d\varphi \wedge dz = R\cos\theta d\varphi \wedge d\theta.\square$$

Таким образом, в привычном нам случае $\mathbb{R}^3$, иллюстрируемое общее утверждение о "симплектичности орбиты ко-присоединенного представления алгебры Ли" является утверждением "сфера с 2-формой площади, наследованной из объемлющего $\mathbb{R}^3$, является симплектическим пространством".

Пуассонова структура системы Шлезингера.

Рассмотрим теперь $n+1$ экземпляр пространства $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ и их декартово произведение $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1}$. Очевидно, что это пуассоново пространство со скобкой

$$\{A_{ij}^{(m_1)}, A_{kl}^{(m_2)}\} = \delta_{m_1 m_2}(\delta_{il}A_{kj}^{(m_1)} - \delta_{jk}A_{il}^{(m_1)}) \tag{17}$$

– нулевой между различными декартовыми сомножителями и скобкой Ли–Пуассона внутри одного экземпляра $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь $a_{ik} := \langle A^{(i)}, A^{(k)}\rangle$ – это функция на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1}$; вычислим скобку между матричными элементами $A_{st}^{(r)}$ какой-нибудь матрицы $A^{(r)} \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ и a_{ik}.

Во-первых очевидно, что если $i \neq r \neq k$, то

$$\{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\} = 0.$$

Если $i = k$, то $a_{kk} = \mathrm{const}$ и $\{a_{kk}, A_{st}^{(r)}\} = 0$, так что единственный нетривиальный случай – это

$$\begin{aligned}\{a_{ir}, A_{st}^{(r)}\} &= \sum_{m_1,m_2} \{A_{m_1 m_2}^{(i)} A_{m_2 m_1}^{(r)}, A_{st}^{(r)}\} \\ &\sum_{m_1,m_2} A_{m_1 m_2}^{(i)}(\delta_{m_2 t}A_{s m_1}^{(r)} - \delta_{s m_1}A_{m_2 t}^{(r)}) \\ &= \sum_{m_1,m_2} A_{s m_1}^{(r)}A_{m_1 t}^{(i)} - A_{s m_2}^{(i)}A_{m_2 t}^{(r)} = ([A^{(r)}, A^{(i)}])_{st}.\end{aligned} \tag{18}$$

Обозначим

$$h := \sum_{i<j} a_{ij}\, d\log(\lambda_i - \lambda_j) := \sum_{k=0}^{n} H_k d\lambda_k,$$

то есть $H_k := \sum\limits_{i\neq k} a_{ik}/\lambda_k - \lambda_i$.

Уравнения Гамильтона, соответствующие гамильтониану H_k в пространстве, снабженном скобкой Ли–Пуассона (17) будут такие (по индексам "r" и "k" в этих формулах суммирования нет!):

$$dA_{st}^{(r)}/d\lambda_k = -\{H_k, A_{st}^{(r)}\} = \sum_{i\neq k} \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_i}\{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\}.$$

Если $k \neq r$, то

$$dA_{st}^{(r)}/d\lambda_k = \sum_{i\neq k} \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_i}\{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\} = \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_r}\{a_{kr}, A_{st}^{(r)}\} = \frac{([A^{(k)}, A^{(r)}])_{st}}{\lambda_k - \lambda_r},$$

если же $k = r$, то

$$dA_{st}^{(r)}/d\lambda_r = \sum_{i\neq r} \frac{1}{\lambda_r - \lambda_i}\{a_{ir}, A_{st}^{(r)}\} = -\sum_{i\neq r} \frac{([A^{(r)}, A^{(i)}])_{st}}{\lambda_r - \lambda_i},$$

это совпадает с (7) – системой уравнений Шлезингера.

Подведем промежуточный итог.

Решение уравнений Шлезингера по переменной λ_k (остальные λ_i, $i \neq k$ зафиксированы) представляет из себя комплексно-одномерное многообразие – "линию" (риманову поверхность), параметризованную $\lambda_k \in \mathbb{C}$, лежащую в комплексном $3(n+1)+(n+1)$-мерном пространстве $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Временно назовем эту линию L_k, она лежит на подмногообразии $\lambda_i = \mathrm{const}$, $i \neq k$.

Пространство $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ является расширенным фазовым пространством гамильтоновых систем с гамильтонианами – функциями на $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$, где задана скобка Пуассона (17). Скобка эта вырожденная, пространство $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1}$ не симплектическое (для нечетных n, например, оно нечетномерно).

Мы доказали, что $\forall k \in 0, 1, \ldots, n$ линия L_k совпадает с траекторией гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H_k = h(\partial_{\lambda_k}) = \sum_{\substack{i \\ i\neq k}} a_{ik}/\lambda_k - \lambda_i$$

Докажем, что распределение, задаваемое системой Шлезингера интегрируемо.

Достаточно доказать, что интегрируемо распределение, задаваемое 1-формой $h = \sum H_k d\lambda_k = \sum a_{ij} d\log(\lambda_i - \lambda_j)$ в $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$. Это, в свою очередь, будет следовать из равенства

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i} H_j - \frac{\partial}{\partial\lambda_j} H_i + \{H_j, H_i\} = 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i} H_j = \frac{\partial}{\partial\lambda_j} H_i = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i \partial\lambda_j} \log(\lambda_i - \lambda_j),\ a_{ij} = a_{ji} = \mathrm{Tr}\, A^{(i)} A^{(j)},$$

требуется проверить, что $\{H_j, H_i\} = 0$.

Вычислим $\{a_{ij}, a_{kl}\} = \{\langle A^{(i)}, A^{(j)}\rangle, \langle A^{(k)}, A^{(l)}\rangle\}$.

Очевидно, что если среди индексов i, j, k, l нет совпадающих, то $\{a_{ij}, a_{kl}\} = 0$, так как отличны от нуля только скобки Пуассона матричных элементов из одного декартова сомножителя $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Так же легко проверить, что $\{a_{ij}, a_{kk}\} = 0$ $\forall i, j, k$, потому что $a_{kk}/2$ это квадрат собственного значения $A^{(k)}$ –функция Казимира скобки Ли–Пуассона, что следует из формулы (15):

$$\{A_{ij}, A_{12}A_{21} + A_{11}^2\} = 0 \quad \forall i, j \in 1, 2.$$

Из косой симметрии $\{,\}$ вытекает, что $\{a_{ij}, a_{ij}\} = 0\ \forall ij$; остается случай

$$\{a_{ik}, a_{jk}\}, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

В силу равенства (18)

$$\{A^{(k)}_{em}, \langle A^{(k)}, A^{(j)}\rangle\} = -([A^{(k)}, A^{(j)}])_{em},$$

поэтому если i не совпадает ни с j, ни с k, то

$$\{a_{ik}, a_{kj}\} = \sum_{e,m} A^{(i)}_{em}\{A^{(k)}_{em}, \langle A^{(k)}, A^{(j)}\rangle\} = -\langle A^{(i)}, [A^{(k)}, A^{(j)}]\rangle.$$

Теперь, благодаря косой симметрии смешанного произведения $\langle [A, B], C\rangle$, можно снять ограничения на несовпадение индексов – в обеих частях будет ноль, так что всегда

$$\{a_{ik}, a_{kj}\} = \langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)}\rangle := f_{ijk} \tag{19}$$

– скобки от попарных скалярных произведений трех векторов антисимметричны относительно перестановки пары из этих векторов и не меняются при циклической перестановке.

Теперь легко вычислить $\{H_i, H_j\}$:

$$\begin{gathered}\{H_i, H_j\} = \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{m_1}} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{m_2}} \{a_{im_1}, a_{jm_2}\} \\ = \sum_m \left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda_m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_m} \{a_{im}, a_{mj}\} + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_m} \{a_{ij}, a_{jm}\} \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \{a_{im}, a_{ji}\} \right) = \sum_m \left(\frac{f_{ijm}}{(\lambda_m - \lambda_i)(\lambda_m - \lambda_j)} \right. \\ \left. + \frac{f_{imj}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_m)} + \frac{f_{mji}}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_m)} \right) \\ = \sum_m \frac{f_{ijm}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_m)(\lambda_j - \lambda_m)} (\lambda_i - \lambda_j - (\lambda_i - \lambda_m) + \lambda_j - \lambda_m) = 0. \quad \square\end{gathered}$$

Итак, доказана теорема.

Теорема. *Распределение, задаваемое в пуассоновом (скобка* (17)*) пространстве* $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1}$ *формой*

$$h = \sum_{i<j} \langle A^{(i)}, A^{(j)}\rangle d\log(\lambda_i - \lambda_j)$$

является интегрируемым и совпадает с распределением, задаваемым в $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ *системой уравнений Шлезингера*

$$dA^{(k)} = \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} [A^{(i)}, A^{(k)}] d\log(\lambda_i - \lambda_j). \quad \square$$

Таким образом распределение, задаваемое системой Шлезингера, интегрируемо – оно является распределением касательных ($n+1$-мерных линейных подпространств $T\,\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$) к некоторому слоению пространства $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$; назовем это слоение *слоением Шлезингера.*

Утверждение. Сечения листов слоения Шлезингера поверхностью $\lambda_i = \mathrm{const}$, $i \neq k$ являются траекториями гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H_k = \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} \langle A^{(i)}, A^{(k)} \rangle / \lambda_k - \lambda_i, \quad \lambda_i = \mathrm{const},$$

независимой переменной ("временем") λ_k и пуассоновым фазовым пространством $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1}$ со скобкой Ли–Пуассона (17).

III. Построение фазовых пространств $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$, $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ и $M_{a_{\overline{ii}}}$

Рассмотрим какой-нибудь ненулевой ко-вектор $\langle {}^R A| \in \mathrm{sl}^*(2, \mathbb{C})$, и симплектическое пространство $\mathrm{SL}\langle {}^R A|$:

$$\mathrm{SL}\langle {}^R A| := \bigcup_{g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} \langle g \ {}^R A g^{-1}| \subset \mathrm{sl}^*(2, \mathbb{C}),$$

заметаемое этим ко-вектором при действии на него $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Если A_1 и A_2 какие-нибудь ненулевые векторы $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, то их можно совместить элементом $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда совпадут их "квадраты длин" – произведения на себя:

$$\forall A_i \neq 0 \quad \exists g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) : g A_1 g^{-1} = A_2 \Leftrightarrow \langle A_1, A_1 \rangle = \langle A_2, A_2 \rangle,$$

следовательно пространство $\mathrm{SL}\langle {}^R A|$, ${}^R A \neq 0$ характеризуются единственным параметром – комплексным числом $\langle {}^R A, {}^R A \rangle \in \mathbb{C}$.

Пусть сначала $\langle {}^R A, {}^R A \rangle = R^2 \neq 0$, тогда $\mathrm{SL} < {}^R A|$ представляет из себя множество всевозможных комплексных матриц с фиксированным определителем $-R^2/2$.

Такие матрицы находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками квадрики – гладкой алгебраической поверхности $\mathcal{C}_{R^2}$

$$\mathcal{C}_{R^2} : X_1 X_2 + X_3^2 = R^2/2 \neq 0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}\langle {}^R A|. \tag{20}$$

Симплектическая форма в координатах X_i задается равенствами

$$\begin{aligned} w_{R^2} &= dX_3 \wedge d \log X_1 = -dX_3 \wedge d \log X_2 \\ &= d \frac{\sqrt{R^2/2} + X_3}{X_1} \wedge dX_1 = d \frac{\sqrt{R^2/2} - X_3}{X_2} \wedge dX_2 \\ &= d \frac{X_2}{\sqrt{R^2/2} - X_3} \wedge dX_1 = d \frac{X_1}{\sqrt{R^2/2} + X_3} \wedge dX_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Последние равенства верны, поскольку $X_1 X_2 = (\sqrt{R^2/2} - X_3)(\sqrt{R^2/2} + X_3)$. Так как $R^2 \neq 0$, то всегда хотя бы одно из чисел $\sqrt{R^2/2} + X_3$ или $\sqrt{R^2/2} - X_3$ отлично от нуля и соответствующее равенство задает форму w_{R^2}.

Мы видели, что в вещественном случае форма w_{R^2} с точностью до множителя $1/2R$ совпадает с формой площади, индуцированной на квадрике

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \quad X_1 = x + iy, \quad X_2 = x - iy, \quad X_3 = z$$

объемлющая пространством $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$.

Рассмотрим теперь случай $R^2 = 0$. Все вышесказанное относится и к этому случаю, за тем исключением, что нулевая матрица $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ не принадлежит орбите ненулевого элемента $\langle \overset{\circ}{A}| \neq 0$, $\det \overset{\circ}{A} = 0$, так что из конуса $X_1 X_2 + X_3^2 = 0$ нужно выкинуть одну точку – вершину $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Симплектическое пространство $\mathrm{SL}\langle \overset{\circ}{A}|$ в этом случае представляет из себя *гладкую часть* квадрики $X_1 X_2 + X_3^2 = 0$.

Утверждение. Форма w_0 в вещественном случае представляет собой форму площади не конуса, а цилиндра.

Доказательство. Снова введем вещественные (x, y, z):

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad X_1 = x + iy, \quad X_2 = x - iy, \quad X_3 = iz,$$

введем цилиндрические координаты (ρ, φ, z):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad X_1 = x + iy = \rho e^{i\varphi}.$$

Уравнение конуса будет $\rho = z$, так что форма

$$w_0 = dX_3 \wedge d \log X_1 = diz \wedge d \log z + i\varphi = -dz \wedge d\varphi$$

совпадает с формой площади цилиндра единичного радиуса. $\square$

Переменная z не принимает значения $z = 0$, что соответствует вершине конуса, отсутствующей в орбите $\mathrm{SL}\langle \overset{\circ}{A}|$, однако из приведенных геометрических соображений видно, что если вместо одной точки – вершины "вклеить" окружность – сечение цилиндра плоскостью $z = 0$, то получившееся многообразие останется симплектическим – форма w_0 будет гладкой, всюду отличной от нуля (формой площади всего цилиндра).

На языке матриц такая "вклейка" означает допущение к рассмотрению линий

$$A(t) = \begin{pmatrix} X_3(t) & X_1(t) \\ X_2(t) & -X_3(t) \end{pmatrix} \subset \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}),$$

проходящих через ноль, т.е. $X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0$, но линии, имеющие разный предел $X_3 : X_1$ в этой точке не будут пересекаться – они будут проходить через разные точки вклеенной "окружности" – проективной прямой $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ в комплексном случае, или же через разные точки проективизации орбиты $\mathrm{SL}\,|\overset{\circ}{A}\rangle$.

Обозначим $\mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ – проективизацию $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \setminus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Элементы $\mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ будем обозначать заглавными буквами с волной:

$$\text{если}\, A = \begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ то}\, \widetilde{A} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix}: \quad x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2.$$

Обозначим через $\mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|{}^R A\rangle$ проективизацию орбиты какого-нибудь ненулевого ${}^R A \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, число $\langle {}^R A, {}^R A\rangle = R^2$ параметризует многообразия $\mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|{}^R A\rangle$. Если

$R^2 \neq 0$, то $\mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|{}^R A\rangle$ двумерно; если $R^2 = 0$, то $\mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|\mathring{A}\rangle$ одномерно, изоморфно квадрике на $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|\mathring{A}\rangle \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_3^2 = 0, \quad x_1 : x_2 : x_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2,$$

а так же изоморфно $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \ni x_1 : x_3 = -x_3 : x_2$.

Определение 1, III (геометрическое). *Симплектическое многообразие* $(\mathcal{C}_{R^2}, w_{R^2})$ *это пара, где* $\mathcal{C}_{R^2}$ *– подмногообразие* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|{}^R A\rangle$, *определяемое уравнениями*

$$\left(\begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{C}_{R^2} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 X_2 + X_3^2 = R^2/2 \\ \exists x_0 \in \mathbb{C} : X_i = x_0 x_i \end{cases},$$

а форма

$$w_{R^2} = dX_3 \wedge d\log X_1 = -dX_3 \wedge d\log X_2 = d(x_3 : x_1) \wedge dX_1 = -d(x_3 : x_2) \wedge dX_2. \square$$

Мы видим, что если $(X, \widetilde{Y}) \in \mathcal{C}_{R^2}$ и $X \neq 0$, то $\widetilde{Y} = \widetilde{X}$, так что если $R^2 \neq 0$, то вторая, проективная, часть $\mathcal{C}_{R^2}$ не нужна, она восстанавливается по первой, $\mathcal{C}_{R^2}$ изоморфна орбите $\mathrm{SL}\,|{}^R A\rangle$ – гладкой квадрике, в Определение она добавлена лишь чтобы не давать два различных определения для $R^2 \neq 0$ и $R^2 = 0$.

Пусть теперь $R^2 = 0$. Обозначим π_c – образ проекции $\mathcal{C}_{R^2}$ на первый декартов сомножитель (при $R^2 = 0$ это конус).

$\pi_c^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – гладкое подмногообразие в $\mathcal{C}_0 = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|\mathring{A}\rangle$, изоморфное многообразию $\mathrm{SL}|\mathring{A}\rangle$ – сфере Римана. Пару голоморфных координат, как мы знаем, можно выбрать так:

$$p, p^* = 1/p, \quad p = x_3 : x_1, \quad p^* = -x_3 : x_2,$$

$$\pi_c^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \bigcup_{x_1 : x_2 : x_3} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \right).$$

Утверждение 1, III. Все многообразие $\mathcal{C}_0$ можно покрыть двумя картами U и U^*, каждая из которых симплектически изоморфна $(\mathbb{A}^2, dp \wedge dq)$.

Доказательство. Определим отображения $\varphi : \mathbb{A}^2 \to U \subset \mathcal{C}_0$, и $\varphi^* : \mathbb{A}^2 \mapsto U^* \subset \mathcal{C}_0$ так:

$$\varphi : (p, q) \mapsto \left(\begin{pmatrix} pq & q \\ -p^2 q & -pq \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|A_0\rangle$$

$$\varphi^* : (p^*, q^*) \mapsto \left(\begin{pmatrix} -p^* q^* & -p^{*2} q^* \\ q^* & -p^* q^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p^* & -p^{*2} \\ 1 & p^* \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \times \mathbf{P}\,\mathrm{SL}\,|A_0\rangle.$$

В перекрытии U и U^* определены функции склейки $p^* = 1/p$, $q^* = -p^2 q$. Очевидно, что $dp \wedge dq = dp^* \wedge dq^*$, так что многообразие

$$\mathcal{C}_0 := U \cup U^*, \quad U = \bigcup_{pq} \left(\begin{pmatrix} pq & q \\ -p^2 q & -pq \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix} \right)$$

$$U^* = \bigcup_{p^* q^*} \left(\begin{pmatrix} -p^* q^* & -p^{*2} q^* \\ q^* & p^* q^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p^* & -p^{*2} \\ 1 & p^* \end{pmatrix} \right) \tag{22}$$

является симплектическим. Вне проективной прямой $(q=0, p\in\mathbb{C})\cup(q^*=0, p^*\in\mathbb{C})$ $\mathcal{C}_0$ изоморфно орбите какого-нибудь изотропного ненулевого элемента, например, $\overset{\circ}{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. Добавленная проективная прямая – "раздутие" вершины конуса; мы будем называть ее "раздутым" дивизором.

Группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ действует и на проективизации орбиты $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\langle\overset{\circ}{A}|$, в частности, на "раздутом" дивизоре. Генераторы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

$$T^{\mu}_{\mathrm{diag}}:=\begin{pmatrix}\mu&0\\0&1/\mu\end{pmatrix}, T^{\nu}_{\triangle\uparrow}:=\begin{pmatrix}1&\nu\\0&1\end{pmatrix}, T^{\nu}_{\triangle\downarrow}:=\begin{pmatrix}1&0\\\nu&1\end{pmatrix}$$

следующим образом действуют на координаты (p,q), (p^*,q^*):

$$\begin{gathered}T^{\mu}_{\mathrm{diag}}(p,q)=(p/\mu^2, q\mu^2),\quad T^{\mu}_{\mathrm{diag}}(p^*,q^*)=(p^*\mu^2, q^*/\mu^2)\\ T^{\nu}_{\triangle\downarrow}(p,q)=(p-\nu,q),\quad T^{\nu}_{\triangle\uparrow}(p^*,q^*)=(p^*-\nu,q^*)\\ T^{\nu}_{\triangle\uparrow}(p,q)=T^{\nu}_{\triangle\uparrow}(1/p^*,-p^{*2}q^*)=(\frac{1}{p^*-\nu},-(p^*-\nu)^2q^*)\\ =\left(\frac{p}{1-\nu p},(1-\nu p)^2q\right),\\ T^{\nu}_{\triangle\downarrow}(p^*,q^*)=\left(\frac{p^*}{1-\nu p^*},(1-\nu p^*)^2q^*\right).\end{gathered}$$

Замечание. При значениях $\nu=1/p$ $(\nu=1/p^*)$ преобразования $T^{\nu}_{\triangle\uparrow}$ (соответственно $T^{\nu}_{\triangle\downarrow}$) переводят точку $\mathcal{C}_0$ из карты U в карту U^* соответственно из U^* в U). □

Приведенные формулы показывают, что $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ действует на "раздутом" дивизоре как группа дробно-линейных преобразований:

$$T^{\mu}_{\mathrm{diag}}p=p/\mu^2,\quad T^{\nu}_{\triangle\downarrow}p=p-\nu,\quad T^{\nu}_{\triangle\uparrow}p=\frac{p}{1-\nu p}.$$

Замечание. Такими же картами U,U^* можно покрыть и невырожденную квадрику $\mathcal{C}_{R^2}$, $R^2\neq 0$:

$$\begin{pmatrix}pq+\sqrt{R^2/2}&q\\-p(pq+2\sqrt{R^2/2})&-(pq+\sqrt{R^2/2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-(p^*q^*+\sqrt{R^2/2})&-p^*(p^*q^*+2\sqrt{R^2/2})\\q^*&p^*q^*+\sqrt{R^2/2}\end{pmatrix}.$$

Это позволяет дать определение многообразия $\mathcal{C}_{R^2}$, как абстрактного многообразия, покрытого двумя картами – $U\ni(p,q)$ и $U^*\ni(p^*,q^*)$ (так обычно и делается, смотри [ShT]):

Определение 2, III абстрактное. *Симплектическое многообразие $(\mathcal{C}_{R^2},w_{R^2})$ это многообразие, покрытое двумя картами $\mathbb{A}^2$ с координатами (p,q) и (p^*,q^*), функциями переклейки $p=1/p^*$, $q=-p(pq+2\sqrt{R^2/2})$ и симплектической формой $w_{R^2}=dp\wedge dq=dp^*\wedge dq^*$.* □

Замечание. Хотя в определении и участвует корень $\sqrt{R^2/2}$, результат склейки от выбора знака корня не зависит – многообразия, построенные по $+\sqrt{R^2/2}$ и $-\sqrt{R^2/2}$ изоморфны, это квадрика (20) (если $R^2\neq 0$). □

Далее многообразие $\mathcal{C}_{R^2}$ мы будем просто называть "квадрикой", *подразумевая* оговорку, что при $R^2 = 0$ вершина конуса раздута указанным выше образом. $\square$

Замечание. Гладкие симплектические многообразия $\mathcal{C}_{R^2}$ будут играть важнейшую роль в наших построениях, именно из них будем строить фазовое пространство гамильтоновой системы уравнений изомонодромных деформаций (1), при $n = 3$ – системы Шлезингера–Пенлеве 6. $\square$

Рассмотрим декартово произведение $n+1$-го экземпляра $(\mathcal{C}_{a_{ii}}, w_{a_{ii}})$, где

$$a_{ii} = \langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle = -2 \det A^{(i)} \in \mathbb{C}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

– параметры нашей задачи (изомонодромной деформации уравнения (1)).

Обозначим его $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$:

$$\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}} := \mathcal{C}_{a_{00}} \times \mathcal{C}_{a_{11}} \times \cdots \times \mathcal{C}_{a_{nn}}.$$

$\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ – симплектическое пространство (как декартово произведение симплектических пространств) с формой

$$\overset{\approx}{w} := \sum_{k=0}^{n} w_{a_{kk}}.$$

Выделим в $\overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$ подмногообразие $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$:

$$\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} := \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}} \bigcap \Big\{ \sum_{k=0}^{n} A^{(k)} = 0 \Big\},$$

состоящее только из тех наборов матриц $A^{(k)}$, для которых $\sum A^{(k)} = 0$. Обозначим отображение включения через $\overset{\approx}{\pi}$:

$$\overset{\approx}{\pi} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \mapsto \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}.$$

Ограничение формы $\overset{\approx}{w}$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ обозначим $\tilde{w}$:

$$\tilde{w} := \overset{\approx}{\pi}{}^{*} \overset{\approx}{w}.$$

Замечание. Многообразие $(\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}, \tilde{w})$ не симплектическое, хотя бы потому что оно нечетномерно – на координаты четномерного (симплектического) многообразия $\overset{\approx}{M}_{a_{ii}}$ мы наложили три связи, потребовав равенства нулю трех компонент вектора $\sum A^{(k)}$.

Форма $\tilde{w}$, конечно, остается несингулярной и замкнутой, но в некоторых точках $A^{(\bar{i})}$ она обращается в ноль – те векторы из $T_{A^{(\bar{i})}} \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$, на которых $\overset{\approx}{w}$ была отлична от нуля, не принадлежат $T_{A^{(\bar{i})}} \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \subset T_{A^{(\bar{i})}} \overset{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}$. $\square$

На $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$ и $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ покомпонентно действует группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Для любого $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ положим $g(A^{(0)},\ldots,A^{(n)}) := (A_g^{(0)},\ldots,A_g^{(n)})$, где $A_g^{(i)} := gA^{(i)}g^{-1}$. Определим $M_{a_{\overline{ii}}}$:

$$M_{a_{\overline{ii}}} := \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}). \tag{23}$$

Отображение, отождествляющее наборы $A^{(0)},\ldots,A^{(n)}$, которые переводятся друг в друга действием $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ обозначим $\tilde{\pi}$:

$$\tilde{\pi} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \mapsto M_{a_{\overline{ii}}}.$$

Нашей целью является доказательство того, что $M_{a_{ii}}$ является симплектическим многообразием, т.е.

1. Фактор $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = M_{a_{\overline{ii}}}$ является многообразием.
2. На этом многообразии существует 2-форма $w \in \Lambda^2 T^* M_{a_{\overline{ii}}}$ такая, что

$$\tilde{\pi}^* w = \tilde{w}.$$

3. Форма w является симплектической, т.е. гладкой, замкнутой, не обращающейся в ноль. Доказательство всех этих пунктов будет завершено лишь в следующей главе, когда мы построим канонические координаты на $M_{a_{\overline{ii}}}$. Их существование и докажет пункты 2 и 3, как существование формы w, так и отсутствие у нее нулей.

Сейчас докажем пункт 1, что $M_{a_{\overline{ii}}}$ действительно многообразие, а так же проиллюстрируем пункт 2. Приведем аргументы в пользу того, что $\tilde{w}$ может быть опущена на $M_{a_{\overline{ii}}}$, навстречу направлению $\tilde{\pi}^* : T^*M_{a_{\overline{ii}}} \mapsto T^*\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$.

В основу доказательства пункта 1 положим следующее утверждение с прозрачным геометрическим смыслом.

Утверждение 2, III. Любые два базиса $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ и $(\sigma_1',\sigma_2',\sigma_3')$ пространства $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ могут быть совмещены элементом $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда совпадают их матрицы Грама, т.е.

$$\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i', \sigma_j' \rangle \quad \forall i,j,$$

и совпадают их ориентации, т.е.

$$\langle [\sigma_1,\sigma_2],\sigma_3 \rangle = \langle [\sigma_1',\sigma_2'],\sigma_3' \rangle. \quad \square$$

Замечание. Квадрат смешанного произведения (ориентированного объема)

$$\langle [A^{(i)},A^{(j)}],A^{(k)} \rangle^2$$

является многочленом от попарных произведений $\langle A^{(i)},A^{(j)} \rangle$ – элементов матрицы Грама (смотри ниже формулу (37))

$$f_{ijk}^2 = \langle [A^i,A^{(j)}],A^{(k)} \rangle^2 = -2\det \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \tag{24}$$

так что само значение f_{ijk} является только "носителем знака" – ориентации набора $A^{(i)},A^{(j)},A^{(k)}$. $\square$

Утверждение 2 сводит изучение той части $M_{a_{\overline{ii}}}$, где наборы $A^{(\bar{i})}$ содержат базис, к изучению матрицы попарных скалярных произведений a_{ij}. Вопрос о наборах $A^{(\bar{i})}$, среди которых нет трех линейно-независимых, т.е. наборах, где все $A^{(i)}$ лежат на одной какой-нибудь плоскости, непростой.

В отличие от $\mathbb{R}^3$, где *любой*, в частности, линейно-зависимый набор векторов определяется с точностью до поворота (возможно с отражением) своими попарными скалярными произведениями, *в* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ *это не так*. Например, любой набор матриц вида

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 0,\dots,n; \quad \alpha_i \neq 0 \quad \forall i$$

имеет все нулевые произведения $\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = 0$, но, конечно же, друг в друга переводятся только такие $A^{(0)},\dots,A^{(n)}$ и $A^{(0)'},\dots,A^{(n)'}$, у которых $\alpha_0 : \alpha_1 : \cdots : \alpha_n = \alpha'_0 : \alpha'_1 : \cdots : \alpha'_n$. Причиной таких неприятностей является наличие в $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ подмногообразий, ограничение скалярного произведения $\langle , \rangle$ на которые вырождено. Это так называемые *изотропные* плоскости – ортогональные дополнения к изотропным (с нулевым произведением на себя) векторам, т.е. вырожденным матрицам. Например плоскость $(\sigma_+)^\perp$:

$$(\sigma_+)^\perp = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{C}} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \subset \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}), \quad \sigma_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элемент $\sigma_+ \neq 0$, лежащий на плоскости $(\sigma_+)^\perp$ ортогонален всем лежащим там векторам, в частности, и самому себе.

Если есть такой набор $A^{(\bar{i})}$, то можно выбрать базис $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ так, что все $A^{(i)}$ будут верхнетреугольными, а диагонали постоянны – там будут стоять $\pm\sqrt{a_{ii}/2}$, так что набор $A^{(\bar{i})}$ будет характеризоваться точкой $\alpha_0 : \alpha_1 : \cdots : \alpha_n$ гиперплоскости $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$ проективного пространства $\mathbf{CP}^n$ и распределением знаков $\sqrt{a_{ii}/2}$ (при условии $\sum \sqrt{a_{ii}} = 0$). Как уже отмечалось (Замечание 1 части I), исследование таких наборов проще, но требует иных методов, чем мы будем применять далее, эти $A^{(\bar{i})}$ исключены из рассмотрения (9).

Поскольку не всегда из векторов набора $A^{(\bar{i})}$ можно выбрать базис, дополним набор попарных скалярных произведений $a_{ij} = \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle$ набором смешанных произведений

$$f_{ijk} := \langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)} \rangle.$$

Тем самым мы охватим наборы векторов, у которых базис можно выбрать либо из самого набора $A^{(i)}$, либо добавив векторы из всевозможных векторных произведений $[A^{(i)}, A^{(j)}]$.

Лемма. *Векторы* $A, B, [A,B]$ *образуют базис* $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ *тогда и только тогда, когда* $\langle [A,B], [AB] \rangle \neq 0$, *т.е.* $[A,B]$ *не изотропен.*

Доказательство. Величина $\langle [A,B], C \rangle$ – ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах A, B и C, равна нулю тогда и только тогда, когда A, B и C линейно-зависимы. В нашем случае $C = [A,B]$. □

Следствие. Линейная зависимость тройки $A, B, [A,B]$ эквивалентна тому, что существует изотропный вектор, ортогональный как A, так и B, или, что то же, тому что через A и B проходит изотропная плоскость. □

Теорема. *Множество* $M_{a_{\overline{ii}}} = \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}/\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$ *является алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Пусть сначала все векторы $A^{(i)} \neq 0$, т.е. ни одна вершина не находится на "раздутом" дивизоре.

Поскольку величины a_{ij}, f_{ijk} инвариантны относительно действия $\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, они, в то же время, являются функциями и на $M_{a_{\overline{ii}}}$.

Так как все $A^{(i)}$ не лежат на одной изотропной плоскости, то обязательно найдутся не пропорциональные друг другу $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$ такие, что проходящая через них плоскость не изотропна. В этом случае $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}$, $[A^{(i_1)}, A^{(i_2)}]$ – базис и пока эти векторы линейно-независимы, величины $a_{i_1,i}$, $a_{i_2 i}$, $f_{i_1 i_2 i}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ фиксируют весь набор $A^{(i)}$ с точностью до действия $\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$ (на базис $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}$, $[A^{(i_1)}, A^{(i_2)}]$).

Величина $f_{i_1 i_2 i}$ с точностью до знака определяется значениями $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $a_{i_1 i_2}$ и параметрами a_{jj} (формула (24)).

Из элементарно-геометрических соображений понятно, что если "длины" a_{jj} векторов фиксированы, то задав $2(n-1)$ величин $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $i_1 \neq i \neq i_2$ и "угол" между $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$ – величину $a_{i_1 i_2}$, то этот набор $2(n-1)+1$ чисел фиксирует все векторы $A^{(j)}$ с точностью до отражения относительно плоскости, содержащей $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$, т.е. аргумента величины $f_{i_1 i_2 j} = \langle [A^{(i_1)}, A^{(i_2)}], A^{(j)} \rangle$ – знака корня из определителя в формуле (24). Добавим $n-1$ величину $f_{i_1 i_2 i}$, $i_1 \neq i \neq i_2$ и $n-1$ уравнение (24) на каждую; получившееся подмногообразие пространства $\mathbb{A}^{3(n-1)+1}$ параметризует наборы векторов $A^{(\bar{i})}$ с фиксированными скалярными произведениями на базисные векторы – задает набор $A^{(\bar{i})}$ с точностью до поворота в пространстве – точку $\stackrel{\approx}{M}_{a_{\overline{ii}}}/\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$. Чтобы получить точку $M_{a_{\overline{ii}}}$ нужно выделить из них те, чья сумма равна нулю.

Мы доказали, что $M_{a_{\overline{ii}}}$ – алгебраическое многообразие изоморфное $2(n-1)$-мерному подмногообразию $M^f_{a_{\overline{ii}}}$, выделяемому в $\mathbb{A}^{3n-2}$ $n+2$-мя алгебраическими уравнениями

$$f^2_{i_1 i_2 i} = -2\det\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & a_{i_1 i} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & a_{i_2 i} \\ a_{i i_1} & a_{i i_2} & a_{ii} \end{vmatrix}, i_1 \neq i \neq i_2$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i_1 i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} a_{i_2 i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} f_{i_1 i_2 i} = 0. \tag{25}$$

Пусть теперь среди $A^{(i)}$ есть нулевые – точки с "раздутых" дивизоров. Точке $\widetilde{A}^{(j_0)}$ с $\mathbf{P}\operatorname{SL}|\mathring{A}\rangle$ взаимно-однозначно соответствует изотропное направление в $\operatorname{sl}(2,\mathbb{C})$. Такие направления однозначно параметризуются точками проективной прямой – значением отношений

$$\langle \widetilde{A}^{(j_0)}, A^{(i_1)} \rangle : \langle \widetilde{A}^{(j_0)}, A^{(i_2)} \rangle : \langle \widetilde{A}^{(j_0)}, [A^{(i_1)}, \widetilde{A}^{(i_2)}] \rangle$$

при одном условии – $\widetilde{A}^{(j_0)}$ должно быть с квадрики $\langle \widetilde{A}^{(j_0)}, \widetilde{A}^{(i_0)} \rangle = 0$.

На $2(n-2)$-мерном многообразии коэффициентов $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$ ($f^2_{i_1 i_2 i}$ по ним определяется) подмногообразие $a_{i_1 j_0} = a_{i_2 j_0} = 0$ ко-размерности 2 (мы зафиксировали две координаты) раздувается до ко-размерности 1.

То, что результат получится гладким многообразием, мы увидим в следующей части. □

Замечание. В Пенлеве случае $n=3$ уравнения

$$a_{ii}=\mathrm{const},\quad \sum_{i=0}^{n} a_{ij}=0\quad \forall j \tag{26}$$

легко разрешаются относительно любых двух a_{ij} с единственным общим индексом, например a_{12} и a_{13}:

$$-a_{32}=a_{12}+a_{13}+(a_{11}+a_{22}+a_{33}-a_{00})/2,\quad a_{0k}=a_{ij}+(a_{ii}+a_{jj}-a_{00}-a_{kk})/2, \tag{27}$$

все индексы i,j,k различны и отличны от нуля. □

Утверждение. В Пенлеве случае многообразие $M_{a_{\overline{ii}}}$ бирационально изоморфно (если все $a_{ii}\neq 0$, то просто изоморфно) алгебраической поверхности $M^f_{a_{\overline{ii}}}$, выделяемой в $\mathbb{A}^4$ пересечением гиперплоскости и квадрики:

$$\begin{gathered}
f^2=-2\det\begin{vmatrix} a_{11} & x & y\\ x & a_{22} & z\\ y & z & a_{33}\end{vmatrix},\\
x+y+z=(a_{00}-a_{11}-a_{22}-a_{33})/2=\mathrm{const},\\
x=a_{12},\quad y=a_{13},\quad z=a_{23},\quad f=f_{123}.
\end{gathered}\tag{28}$$

Если среди параметров имеются равные нулю $a_{j_0j_0}=0$, то $M_{a_{\overline{ii}}}$ изоморфно $M^f_{a_{\overline{ii}}}$ с раздутыми точками, соответствующими $0=a_{ij_0}=f\ \forall i$. □

Для завершения построения симплектического многообразия $(M_{a_{\overline{ii}}}w)$ нужно построить форму w – доказать пункты 2 и 3. Как уже говорилось, это будет сделано ниже, при построении окрестностей с координатами (p_i,q_i), такими, что в их перекрытии $dp_i\wedge dq_i=dp_j\wedge dq_j$. Их общее значение и будет принято за значение w. По построению p_i,q_i будет выполнен пункт 2, т.е. поднятие формы w на $\widetilde{M}_{a_{ii}}$ совпадает с $\tilde{w}$.

Здесь мы лишь отметим, что "ко-объекты" – функции на $M_{a_{\overline{ii}}}$ и на касательном к $M_{a_{\overline{ii}}}$ расслоении (формы) переносятся, вообще говоря, во "встречном" направлении, т.е. с $M_{a_{\overline{ii}}}$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$; они образуют среди всех функций и форм на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ весьма скудное подмножество. Исходя из этого, возможность найти в $\Lambda^2T^*M_{a_{\overline{ii}}}$ 2-форму w, которая после стандартного поднятия $\tilde{\pi}^*w$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ совпадает с наперед заданной $\tilde{w}\in\Lambda^2T^*\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, является некоторым выходящим из ряда вон фактом, нуждающимся в отдельном пояснении.

Форма $\tilde{w}$, конечно, должна быть $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантна:

$$\tilde{w}_g=\tilde{w}\quad \forall g\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),$$

кроме того, необходимо, чтобы она обращалась в ноль на любом векторе $\vec{\xi}_0$ из ядра $\tilde{\pi}$ (рассматриваемого как $T\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}\to TM_{a_{\overline{ii}}}$):

$$\tilde{w}(\vec{\xi},\vec{\xi}_0)=0,\quad \forall\vec{\xi}\in T\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}},\quad \vec{\xi}_0\in\ker\tilde{\pi}.$$

Это можно доказать и непосредственно, но вместо этого мы докажем эквивалентное утверждение. Запишем форму $\tilde{w}$ через дифференциалы координат x^i на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ (x^i, например, независимые матричные элементы $A^{(j)}_{kl}$, мы временно ввели x^i, чтобы не громоздить индексов), $x = (x^1, \dots, x^{2n-1})$

$$\tilde{w} = \sum_{ij} \mu_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j.$$

Пусть $x^i \to x^i_g$ – действие $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ в координатах x^i.

Утверждение. Форму $\tilde{w} = \sum \mu^{(x)}_{ij} dx^i \wedge dx^j$ можно тогда и только тогда "опустить" на $M_{a_{\overline{ii}}}$, когда

$$\sum \mu_{ij}(x_g) dx^i_g \wedge dx^j_g = \sum \mu_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j = \tilde{w} \tag{29}$$

для любой $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-значной функции g, т.е. и для таких g, что $dg \neq 0$, $dg \wedge dg \neq 0$. $\square$

Мы не будем доказывать это утверждение, отметим только, что оно сильнее $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантности, получающейся при $g = \mathrm{const}$.

Проверим, что (29) выполняется для генераторов T^μ_{diag}, $T^\nu_{\triangle\downarrow}$, $T^\nu_{\triangle\uparrow}$: $\tilde{w} = \sum\limits_{i=0}^{n} dA^{(i)}_{11} \wedge d\log A^{(i)}_{12}$

$T^\mu_{\mathrm{diag}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\mu^2 \\ A_{21}\mu^{-2} & -A_{11} \end{pmatrix}$, следовательно,

$$T^\mu_{\mathrm{diag}} \tilde{w} = \sum_{i=0}^{n} dA^{(i)}_{11} \wedge d\log \mu^{-2} A^{(i)}_{11} = \tilde{w} + \left(\sum_{i=0}^{n} dA^{(i)}_{11} \right) \wedge \log \mu^2 = \tilde{w}.$$

$$T^\nu_{\triangle\downarrow} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - \nu A_{12} & A_{12} \\ A_{21} + 2\nu A_{11} - \nu^2 A_{12} & -A_{11} + \nu A_{12} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} T^\nu_{\triangle\downarrow} \tilde{w} &= \sum_{i=0}^{n} d(A^{(i)}_{11} - \nu A^{(i)}_{12}) \wedge d\log A^{(i)}_{12} \\ &= \tilde{w} - \sum_{i=0}^{n} d\nu \wedge dA^{(i)}_{12} = \tilde{w}. \end{aligned} \tag{31}$$

Поскольку $dA^{(i)}_{11} \wedge d\log A^{(i)}_{11} = -d\log A^{(i)}_{11} \wedge d\log A^{(i)}_{21}$, то инвариантность относительно $T^\nu_{\triangle\uparrow}$ отдельно проверять не нужно, она получается аналогично (31).

Замечание. Равенства (30), (31) объясняют, зачем пришлось переходить от $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$ к $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$. Со всего пространства $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$ форма $\tilde{\tilde{w}}$ на $M_{a_{\overline{ii}}}$ не опускается. $\square$

Подведем итог. Мы построили симплектическое многообразие $M_{a_{\overline{ii}}}$. Его связь со стандартным пуассоновым пространством $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})$ проиллюстрируем диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1} & \supset & \mathcal{C}_{a_{00}}\times\cdots\times\mathcal{C}_{a_{nn}} = \widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}} & \overset{\widetilde{\widetilde{\pi}}}{\hookleftarrow} & \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} & \overset{\tilde{\pi}}{\longrightarrow} & \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = M_{a_{\overline{ii}}} \\ \{,\}_{L-P} & \leftarrow & \widetilde{\widetilde{\{,\}}} \overset{\sim}{\leftrightarrow} \widetilde{\widetilde{w}} & \overset{\widetilde{\widetilde{\pi}}^*}{\to} & \tilde{w} & \overset{\tilde{\pi}^*}{\leftarrow} & w\in\Lambda^2T^*M_{a_{\overline{ii}}}. \end{array}$$

Здесь символически обозначены:

$\{,\}_{L-P}$ – скобка Ли–Пуассона на декартовой степени $\mathrm{sl}^*(2,\mathbb{C})\simeq\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$,

$\widetilde{\widetilde{\{,\}}}$ – скобка Пуассона $\sum\prod^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$, канонически соответствующая симплектической форме $\widetilde{\widetilde{w}}=\sum\prod_{ij}dx^i\wedge dx^j$, это каноническое соответствие обозначено "$\overset{\sim}{\leftrightarrow}$".

Расширенные фазовые пространства.

Умножим каждое из пространств цепочки $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1}$, $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$, $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, $M_{a_{\overline{ii}}}$ декартово на $\mathbb{C}^{n+1}\ni(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$, рассмотрим расширенные фазовые пространства. В пространстве $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})^{n+1}\times\mathbb{C}^{n+1}$ задано интегрируемое распределение (6), определяющее слоение Шлезингера. Что им (распределению и слоению) соответствует на другом конце цепочки – в $M_{a_{\overline{ii}}}\times\mathbb{C}^{n+1}$?

Во-первых, заметим, что из (6) следует, что $d\langle A^{(i)},A^{(i)}\rangle=0$:

Утверждение. Интегральные поверхности слоения содержатся $\mathcal{C}_{a_{00}}\times\cdots\times\mathcal{C}_{a_{nn}}=\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}$ – распределение (6) является в то же время и распределением в $\widetilde{\widetilde{M}}_{a_{\overline{ii}}}\times\mathbb{C}^{n+1}$. $\square$

Во-вторых, если $\sum A^{(i)}=0$, то есть набор $A^{(i)}$ содержится в $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, то из уравнений (6) следует, что $d\sum A^{(i)}=0$, интегральная поверхность слоения Шлезингера, содержащая точку из $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, не покидает $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ – целиком в $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ содержится.

Утверждение. Распределение (6) является интегрируемым распределением в $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}\times\mathbb{C}^{n+1}$, оно определяет слоение (Шлезингера) многообразия $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}\times\mathbb{C}^{n+1}$.

Будем обозначать расширенные пространства той же буквой, но с индексом $\wedge$:

$$\widetilde{M}^{\wedge}_{a_{\overline{ii}}}:=\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}\times\Lambda,\quad M^{\wedge}_{a_{\overline{ii}}}:=M_{a_{\overline{ii}}}\times\Lambda,\quad \Lambda=\mathbb{C}^{n+1}.$$

Действие группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$ (тривиально на $\Lambda=\mathbb{C}^{n+1}$) переводит распределение в себя и слои слоения друг в друга.

Форма $h=\sum\limits_{i<j}a_{ij}d\log(\lambda_i-\lambda_j)$ определена и на $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$ (отпускается с $\widetilde{M}^{\Lambda}_{a_{ii}}$), потому что $a_{ij}=\langle A^{(i)},A^{(j)}\rangle$ не зависят от действия $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$; а на λ_i и λ_j группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ вообще не действует.

Обозначим через Ω_{PVI} замкнутую 2-форму $w-dh$ на $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$ – будем опускать π^*_M (формула (12)), которое лишь напоминало, что w поднята с $M_{a_{\overline{ii}}}$ на $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$. Равенство

$$\Omega_{\mathrm{PVI}}:=w-dh=w-\sum_{i<j}da_{ij}\wedge d\log(\lambda_i-\lambda_j)=0 \tag{32}$$

задает интегрируемое распределение Шлезингера–Гарнье в $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$ (при $n=3$ Шлезингера–Пенлеве 6). Интегральные поверхности этого распределения –

образы интегральных поверхностей распределения Шлезингера в $\widetilde{M}^{\Lambda}_{a_{ii}}$ при факторизации по действию $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

Рассмотрим зависимость Ω_{PVI} от времен λ_i.

Теорема. *Пусть* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, $a_k = a_k(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ *произвольное движение сферы Римана* $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \ni \lambda_i$,

$\lambda'_i := (a_1\lambda_i + a_2)/(a_3\lambda_i + a_4)$, *и*

$h' := \sum\limits_{i<j} a_{ij} d\log(\lambda'_i - \lambda'_j)$.

Тогда $dh' = dh$.

Доказательство. Достаточно доказать независимость dh относительно генераторов – сдвига $\lambda \to \lambda + a(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$, растяжения $\lambda \to \lambda\cdot a(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ и инверсии $\lambda \to 1/\lambda$.

Поскольку в h входят лишь разности $\lambda_i - \lambda_j$, то инвариантность относительно сдвига $\lambda_i \to \lambda_i + a$ очевидна. Рассмотрим растяжение:

$$h' = \sum_{i<j} a_{ij} d\log(a\lambda_i - a\lambda_j) = \sum_{i<j} a_{ij} d\log(\lambda_i - \lambda_j) + d\log a \sum_{i<j} a_{ij}$$
$$= h - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{ii}\right) d\log a,$$

так как

$$\sum_{i<j} a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} a_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} a_{ii} = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} a_{ii} = \mathrm{const}\,.$$

Следовательно $dh' = dh$. Теперь инверсия:

$$\sum_{i<j} a_{ij} d\log(\lambda_i^{-1} - \lambda_j^{-1}) = \sum_{i<j} a_{ij} d\log(\lambda_i - \lambda_j) - \sum_{i<j} a_{ij} d\log(\lambda_i - \lambda_j)$$

$$\sum_{i<j} a_{ij} d\log(\lambda_i\lambda_j) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(d\log\lambda_i + d\log\lambda_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} a_{ii} d\log\lambda_i^2$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\left((d\log\lambda_i)\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\right) - \sum_{i=0}^{n} a_{ii} d\log\lambda_i = -\sum_{i=0}^{n} a_{ii} d\log\lambda_i.$$

Опять же, так как $a_{ii} = \mathrm{const}$, $\sum a_{ii} d\log\lambda_i$ – замкнутая форма и снова $dh = dh'$. □

Следствие 1, III. *Интегральные поверхности системы Шлезингера–Гарнье в пространстве* $M_{a_{ii}} \times (C\mathbf{P}^1)^{n+1}$ *переходят друг в друга при произвольных дробно-линейных преобразованиях системы параметров* λ_i:

$$(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \mapsto (\lambda'_0,\dots,\lambda'_n), \quad \lambda'_i = \frac{a_1\lambda_i + a_2}{a_3\lambda_i + a_4},$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}), \quad a_k = a_i(\lambda_0,\dots,\lambda_n).$$

Замечание. Исходная система Шлезингера (6) в $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \times \mathbb{C}^{n+1}$ не обладает этим свойством – она не инвариантна относительно инверсии. $\square$

Итак, уравнения (32) инвариантны как относительно одновременного сопряжения всех $A^{(i)}$ произвольной матрицей, так и относительно движений сферы Римана, на которой лежат параметры деформации уравнения (1) – можно снять искусственные ограничения, наложенные на $A^{(i)}$ при переходе от задачи изомонодромной деформации (1) к системе Шлезингера (6). Нами доказана теорема.

Теорема, III. *Деформация уравнения* (1)

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \to A^{(i)}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$$

изомонодромна тогда и только тогда, когда траектория проекции ($\tilde{\pi} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \to M_{a_{\overline{ii}}}$) *набора* $A^{\bar{i}}(\lambda_{\bar{j}})$ *в* $M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$ *лежит на листе слоения, заданного формой* Ω_{PVI} *(формула* (32)*) или, что эквивалентно, если касательные к траектории* $\tilde{\pi}A^{(\bar{i})}(\lambda_{\bar{j}}) \subset M^{\Lambda}_{a_{\overline{ii}}}$ *лежат на направлении вырождения формы* Ω_{PVI}. $\square$

Замечание. Поскольку уравнение (32) не зависит от дробно-линейных преобразований, то в окрестности каждой точки можно зафиксировать какие-нибудь три значения λ_i, например, положить $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n-1} = 1$, $\lambda_n = \infty$; тогда остальные значения λ_i, $i = 1, \ldots, n-2$ будут независимыми комплексными параметрами – "временами".

Другими словами, в качестве нетривиальных "времен" можно выбрать $n-2$ двойных отношения

$$\hat{t}_k := \mathcal{D}(\lambda_{n-1}, \lambda_k, \lambda_n, \lambda_0) = \lambda_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через T соответствующее $n-2$-мерное многообразие:

$$T = (\widetilde{\mathbb{C}\mathbf{P}})^{n+1} / \,\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

здесь через $(\widetilde{\mathbb{C}\mathbf{P}})^{n+1}$ обозначено многообразие, точки которого – упорядоченный набор попарно не совпадающих точек сферы Римана

$$(\widetilde{\mathbb{C}\mathbf{P}})^{n+1} \ni \lambda_{\bar{i}} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) : \lambda_i \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Оно локально изоморфно открытому подножеству в $\mathbb{A}^{n-2}$ – упорядоченному набору $n-2-x$ попарно не совпадающих комплексных чисел, отличных от нуля и единицы.

Утверждение. Уравнения изомонодромной деформации уравнения (1) ($A^{(i)} \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$) эквивалентны гамильтоновой системе на многообразии $M^{T}_{a_{\overline{ii}}}$ размерности $2(n-2) + (n-2)$.

Замечание. Пространство T имеет нетривиальную топологию – при обходе точек λ_i друг вокруг друга возникают нестягиваемые циклы. $\square$

Установленное нами условие интегрируемости распределения Шлезингера только локальное. Вследствие этого интегральные поверхности – решения определены как функции от $(\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_{n-2})$ (сечения тривиального расслоения $T \times M_{a_{\overline{ii}}} \mapsto T$) только локально, при эволюции по нестягиваемым в T циклам, вообще говоря, возможна нетривиальная монодромия.

IV. Построение координат на $M_{a_{\overline{ii}}}$

Пространство $M_{a_{\overline{ii}}}$ определено как фактор $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}/\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$. Геометрической основой доказательства того, что в результате факторизации получился "хороший" (гладкий, аналитический) объект – многообразие, было следующее наблюдение: *два полных (т.е. содержащих базис) набора векторов переводятся друг в друга ортогональным преобразованием тогда и только тогда, когда совпадают их матрицы Грама (матрицы попарных скалярных произведений); это преобразование специальное* ($\det = 1$), *если совпадают ориентированные объемы базисов, содержащихся в наборах.*

В этой главе мы будем эксплуатировать другую геометрическую идею.

Выделим среди всевозможных базисов линейного пространства ($\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$) подкласс базисов, состоящий из какого-нибудь одного выделенного базиса, и полученного из него действием всевозможных элементов какой-нибудь группы (в нашем случае – $\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$, то есть рассмотрим орбиту представления группы ($\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$) в многообразии базисов ($\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$). Назовем базисы этого подкласса "стандартными".

Пусть каким-нибудь (однозначным, вполне определенным!) образом по набору векторов (у нас – набору $A^{(0)},\ldots,A^{(n)}$) удается строить "стандартный базис"; иными словами, *пусть задано отображение* множество наборов $A^{(i)}$ в множество стандартных базисов (пространства $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$). Назовем такой, определенным образом построенный по набору $A^{(i)}$ стандартный базис, "сопутствующим" (набору $A^{(\overline{i})}$).

Утверждение. *Координаты векторов набора $A^{(\overline{i})}$ в стандартном сопутствующем базисе будут функциями на фактор-пространстве $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}/\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$, из них можно выбрать (составить) набор координатных функций многообразия $M_{a_{\overline{ii}}}$.* $\square$

Примером является процесс ортогонализации и нормирования линейно-независимого набора в $\mathbb{R}^n$: первый базисный вектор выбирается единичным, сонаправленным с первым вектором набора; следующий базисный вектор – единичный вектор из полуплоскости, содержащей первый и второй векторы и т.д.

Утверждается, что два набора векторов в $\mathbb{R}^n$ можно перевести друг в друга ортогональным преобразованием (т.е. при факторизации по $O(n)$ такие наборы дадут одну точку) тогда и только тогда, когда в этих построенных ортонормированных базисах векторы обоих наборов имеют одинаковые координаты. Из этих координат и можно составить координаты на фактор-многообразии.

Реализуем эту идею.

0. Аналитическая геометрия в терминах $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Определение. *Назовем "стандартным" любой базис $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, получающийся из*

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \sigma_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

действием $\operatorname{SL}(2,\mathbb{C})$, т.е. удовлетворяющий равенствам

$$\begin{gathered}\langle\sigma_3,\sigma_3/2\rangle=\langle\sigma_+,\sigma_-\rangle=1,\quad [\sigma_3,\sigma_\pm]=\pm2\sigma_\pm\\ \langle\sigma_+,\sigma_+\rangle=\langle\sigma_-,\sigma_-\rangle=\langle\sigma_3,\sigma_+\rangle=\langle\sigma_3,\sigma_-\rangle=0.\end{gathered}\tag{33}$$

Замечание. Такие условия "стандартности" базиса очевидным образом связаны с другим условием, однозначно фиксирующим поворот и ориентацию евклидова пространства – ортонормированностью и "правой" ориентацией:

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle_e = \delta_{ij}, \quad [\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3. \tag{34}$$

Определим "евклидово" скалярное произведение на $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ формулой

$$\langle A, B \rangle_e := -2 \operatorname{Tr} AB = -2\langle A, B \rangle,$$

векторное же произведение оставим как и было – коммутатором $[AB] = AB - BA$. Легко видеть, что относительно $\langle \ldots, \ldots \rangle_e$ и $[\ldots, \ldots]$ базис $\vec{e}_k := \frac{i}{2}\sigma_k$ (здесь $i = \sqrt{-1}$),

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

является правым ортонормированным (34). Раскладывая по этому базису произвольные векторы $A, B, C \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, запишем основные формулы линейной алгебры в "$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$-версии":

$$[A, [B, C]] = B\langle A, C \rangle_e - C\langle A, B \rangle_e$$

$$\langle A[B, C] \rangle_e = \det \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$A = \sum a_i \vec{e}_i, \quad B = \sum b_i \vec{e}_i, \quad C = \sum c_i \vec{e}_i.$$

Из последней формулы следует, что

$$\langle A[B, C] \rangle_e^2 = \det \mathcal{D} \det \mathcal{D} = \det \mathcal{D}\mathcal{D}^T$$
$$= \det \begin{pmatrix} \langle A, A \rangle_e & \langle A, B \rangle_e & \langle A, C \rangle_e \\ \langle B, A \rangle_e & \langle B, B \rangle_e & \langle B, C \rangle_e \\ \langle C, A \rangle_e & \langle C, B \rangle_e & \langle C, C \rangle_e \end{pmatrix}$$

– многочлен от элементов матрицы Грама набора A, B, C. Перепишем эти формулы, используя произведение Киллинга $\langle \ldots, \ldots \rangle = -\frac{1}{2}\langle \ldots, \ldots \rangle_e$:

$$-\frac{1}{2}[A, [B, C]] = B\langle A, C \rangle - C\langle A, B \rangle. \tag{35}$$

Умножим скалярно на D, и учтем, что при циклической перестановке строк определитель 3×3 не меняется, $\langle A, [B, C] \rangle = \langle C, [A, B] \rangle$:

$$-\frac{1}{2}\langle [A, B], [C, D] \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle. \tag{36}$$

$$-\frac{1}{2}\langle A, [B, C] \rangle^2 = \det \begin{pmatrix} \langle A, A \rangle & \langle A, B \rangle & \langle A, C \rangle \\ \langle B, A \rangle & \langle B, B \rangle & \langle B, C \rangle \\ \langle C, A \rangle & \langle C, B \rangle & \langle C, C \rangle \end{pmatrix} \tag{37}$$

Аналогом формулы разложения по ортонормированному базису $\vec{e}_i$

$$A = \sum_k \langle A, \vec{e}_k \rangle_e \vec{e}_k$$

является следующая формула разложения по стандартному базису

$$A = \sigma_3 \langle A, \sigma_3/2\rangle + \sigma_+\langle A, \sigma_-\rangle + \sigma_-\langle A, \sigma_+\rangle, \tag{38}$$

сразу видно, что обе части равенства имеют до́лжные скалярные произведения на базисные векторы σ_3, σ_+, σ_-. Обозначим коэффициенты разложения по стандартному базису σ_3, σ_+, σ_- через β, α, α', а по ортонормированному $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ через x, y, z (временно):

$$x = (\alpha' + \alpha)/i, \quad y = \alpha' - \alpha, \quad z = 2\beta/i$$
$$\beta = iz/2, \quad \alpha = i(x + iy)/2, \quad \alpha' = i(x - iy)/2.$$

Пусть

$$\begin{aligned} A &= \beta_1\sigma_3 + \alpha_1\sigma_+ + \alpha_1'\sigma_- = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 \\ B &= \beta_2\sigma_3 + \alpha_2\sigma_+ + \alpha_2'\sigma_- = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3 \\ C &= \beta_2\sigma_3 + \alpha_3\sigma_+ + \alpha_3'\sigma_- = x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle A, [B, C]\rangle_e = \det\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} &= \det\begin{vmatrix} (\alpha_1 + \alpha_1')/i & \alpha_1' - \alpha_1 & 2\beta_1/i \\ (\alpha_2 + \alpha_2')/i & \alpha_2' - \alpha_2 & 2\beta_2/i \\ (\alpha_3 + \alpha_3')/i & \alpha_3' - \alpha_3 & 2\beta_3/i \end{vmatrix} \\ &= -4\det\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1' \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_2' \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha_3' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\langle A, [B, C]\rangle = 2\det\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1' \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha_2' \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha_3' \end{vmatrix} \tag{39}$$

1. Отображение $Q_{\sqrt{2a_{i_0 i_0}}}$.

Определим *важнейшее* для нас отображение набора $A^{(0)}, \ldots, A^{(n)}$ в проективное пространство. Основой будет следующее утверждение, не имеющее прямого аналога в вещественной евклидовой геометрии.

Теорема 1, IV. *Для любого ненулевого $A^{(0)} \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ величина*

$$\sqrt{2a_{00}} := \sqrt{2\langle A^{(0)}, A^{(0)}\rangle} = \sqrt{2T_r(A^{(0)})^2}$$

является собственным числом линейного оператора $Ad_{A^{(0)}}$:

$$Ad_{A^{(0)}} = [A^{(0)}, \cdot] : \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}).$$

Соответствующее собственное подпространство одномерно, изотропно и ортогонально $A^{(0)}$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что любые два ненулевых элемента A и A' из $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ с одинаковыми "квадратами длин" $\langle A, A\rangle = \langle A', A'\rangle$, т.е. с одинаковыми собственными числами, можно совместить преобразованием из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Это – утверждение теоремы о приведении к Жордановой форме для матриц $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Поскольку все утверждения Теоремы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантны, то достаточно рассмотреть два случая:

$$a_{00} \neq 0, \quad A^{(0)} = \sqrt{a_{00}/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{a_{00}/2}\sigma_3,$$
$$a_{00} = 0, \quad A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_-.$$

Если $a_{00} \neq 0$, у $Ad_{A^{(0)}}$ собственных подпространства два, они натянуты на изотропные собственные векторы $\sigma_\pm$; соответствующие собственные числа $\pm\sqrt{2a_{00}}$:

$$[\sqrt{a_{00}/2}\sigma_3, \sigma_\pm] = \pm\sqrt{2a_{00}}\sigma_\pm.$$

Если $a_{00} = 0$, то σ_- – единственный собственный вектор, он соответствует единственному собственному значению $\sqrt{2a_{00}} = 0$. Во всех случаях $0 = \langle \sigma_3, \sigma_\pm \rangle = \langle \sigma_-, \sigma_- \rangle$, т.е. собственные векторы ортогональны $A^{(0)}$ и изотропны. $\square$

Определение–обозначение. Пусть $A^{(i)} \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ и пусть $\sqrt{2a_{ii}}$ – какое-нибудь значение корня (вторую "компоненту" $\widetilde{A}^{(i)} \in \mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ мы не пишем, подразумеваем).

Обозначим $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ – собственный вектор оператора $Ad_{A^{(i)}}$, соответствующий собственному значению $\sqrt{2a_{ii}}$, если $a_{ii} \neq 0$ и собственный вектор $Ad_{\widetilde{A}^{(i)}}$, если $a_{ii} = 0$. $\square$

Если $A^{(i)} \neq 0 \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, то $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ определен с точностью до ненулевого множителя, его можно считать элементом $\mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Если $A^{(i)} = 0$, т.е. $(A^{(i)}, \widetilde{A}^{(i)}) = (0, \widetilde{A}^{(i)})$ лежит на "раздутом" дивизоре, то $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ сонаправлен $\widetilde{A}^{(i)}$ – тоже элемент $\mathbf{P}\,\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

В базисе таком, что

$$\widetilde{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -p^2 : p$$

можно выбрать

$$\sigma^{(2\sqrt{a_{ii}})} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix}.$$

Обозначение. Обозначим через $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})})$ прямую с направляющим вектором $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$. $\square$

Итак, для любого значения $\sqrt{a_{ii}} \in \mathbb{C}$ и любой точки $A^{(i)} \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ однозначно определена изотропная прямая $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})})$; через $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ обозначен какой-нибудь ее ненулевой (направляющий) вектор. Рассмотрим $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ с однородными координатами $\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n \in \mathbb{C}\mathbf{P}^n$. Обозначим $L^i_Q \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^n$ – пересечение гиперплоскостей $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k = 0$ и $\alpha_i = 0$. Очевидно, $L^i_Q \sim \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-2}$ – $n-2$-мерное проективное пространство.

Определение-обозначение 1, IV. Обозначим $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \mapsto L^j_Q$ следующее отображение

$$(A^{(0)}, \dots, A^{(n)}) \mapsto \langle A^{(0)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \rangle : \langle A^{(1)} \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \rangle : \dots : \langle A^{(n)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \rangle,$$

т.е. положим $\alpha_k := \langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle$.

Утверждение. Определение $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ корректно.

Доказательство. Во-первых, отметим, что в определении точки "раздутых" дивизоров могут рассматриваться вместе с обыкновенными, ненулевыми $A^{(i)}$ – направление $(\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})})$ определено корректно и в качестве $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ можно взять любой ненулевой вектор с этого направления. Если же какая-нибудь вершина $A^{(i)}$ с "раздутого" дивизора, то, конечно же $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0$.

Во-вторых, среди $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ обязательно есть ненулевые, так как мы исключили из рассмотрения наборы $A^{(i)}$, состоящие из матриц, которые все могут быть приведены к одиноково-треугольному виду, иначе – ортогональные какому-нибудь одному изотропному вектору, в данном случае – вектору $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ (по Теореме 1 этой части вектор $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ изотропен). Следовательно отображение $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$, как отображение в $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$, определено корректно.

Покажем, что образ $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ содержится в L^j_Q. Действительно, поскольку $\Sigma A^{(i)} = 0$, то и $\sum_i \langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0$; кроме того, по Теореме 1, $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0$. $\square$

Отображение $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \mapsto L^j_Q$ инвариантно относительно действия $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, так что $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ может быть "опущено" на $M_{a_{\overline{ii}}}$, навстречу направлению, задаваемому $\widetilde{\pi} : \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \to M_{a_{\overline{ii}}}$. Это отображение мы обозначим $Q_{\sqrt{2a_{jj}}} := \widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}} \circ (\pi^*)^{-1}$

$$Q_{\sqrt{2a_{jj}}} : M_{a_{\overline{ii}}} \mapsto L^j_Q.$$

Области $U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$.

Введем обозначение.

Обозначение

$\widetilde{\mathcal{D}}_{ij}(\sqrt{2a_{ii}}, \sqrt{2a_{jj}}) \subset \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ – это множество наборов $A^{(\overline{i})}$ таких, что направления $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})})$ и $(\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})})$ совпадают. $\square$

Если $A^{(\overline{i})} \in \widetilde{\mathcal{D}}_{ij}(\sqrt{2a_{ii}}, \sqrt{2a_{jj}})$, то линейные операторы $\mathrm{Ad}_{A^{(i)}}$ и $\mathrm{Ad}_{A^{(j)}}$ имеют общий собственный вектор с собственным значением $\sqrt{2a_{ii}}$ для $\mathrm{Ad}_{A^{(i)}}$ и $\sqrt{2a_{jj}}$ для $\mathrm{Ad}_{A^{(j)}}$.

Базис в $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ может быть выбран так, что $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$ будут одинаково-треугольными, с диагональными членами соответственно

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{ii}/2} & 0 \\ * & -\sqrt{a_{ii}/2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^{(i)} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{jj}/2} & 0 \\ * & -\sqrt{a_{jj}/2} \end{pmatrix}.$$

Если вершина принадлежит добавленному дивизору, то в этом базисе $\widetilde{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначение

$\widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}(\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0) \subset \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ – проообраз подмногообразия $0 = \alpha_k = \langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle \subset L^j_Q$ при отображении $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$, т.е. это такие наборы $A^{(\bar{i})}$, что $\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0$. □

Заметим, что если $a_{kk} = 0$, то в $\widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}(\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0)$ содержатся все наборы у которых $A^{(k)}$ лежит на “добавленном” дивизоре, а так же с конечными $A^{(k)}$, параллельными $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$, т.е. в базисе таком, что $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, у наборов из $\widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}(\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0)$ либо $A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^* & 0 \end{pmatrix}$, либо с “раздутого” дивизора.

Обозначение-определение 2, IV

$$\widetilde{U}(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k) := \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} \setminus \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{ij}(\sqrt{2a_{ii}}, \sqrt{2a_{jj}}) \bigcup \widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{ii}}}(\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}\rangle = 0)\right).$$

□

Это те наборы, для которых

$$\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}\rangle \neq 0,$$

и, кроме того, изотропные векторы $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ и $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ линейно-независимы.

Утверждение. *$\widetilde{U}(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$ – область в $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ – открытое, связное подмногоообразие.* □

Определение. *Пусть выбраны три вектора $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$, и какие-нибудь значения $\sqrt{2a_{ii}}$, $\sqrt{2a_{jj}}$. Назовем стандартный базис σ_-, σ_+, σ_3 сопутствующим элементам $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ набора $A^{(i)} \in \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ вдоль направлений $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$, $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$, или просто сопутствующим, если*

$$\sigma_- \in (\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}), \quad \sigma_+ \in (\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}), \quad \langle \sigma_-, A^{(k)}\rangle = 1.$$

□

Теорема. *Если $A^{(\bar{i})} \in \widetilde{U}(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$, то существует единственный стандартный базис, сопутствующий $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ вдоль направлений $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$, $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$.*

Доказательство. По определению области $\widetilde{U}(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$, изотропные векторы $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$, $\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}$ линейно-независимы.

В $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ нет различных ортогональных изотропных направлений, иначе их линейная оболочка была бы плоскостью, состоящих только из изотропных векторов (вырожденных матриц), но (комплексно) *двумерное* многообразие, выделяемое в $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ уравнением

$$\langle A, A\rangle = -2 \det A = 0$$

– это *конус* с направляющей – *невырожденной* квадрикой $x_1x_2 + x_3^2 = 0$, $A = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$, плоскости он не содержит. Следовательно, $\langle \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \rangle \neq 0$, и, значит, базис

$$\begin{aligned} &\sigma_- := \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} \\ &\sigma_+ := \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} / \langle \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \rangle \\ &\sigma_3 := \left[\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \right] / \langle \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \rangle \end{aligned}$$

является стандартным ($\langle \sigma_3, \sigma_3 \rangle = 2$ – это следует из формулы (36)) при любом выборе направляющего вектора $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ с (корректно определенной) прямой $(\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})})$. Так как $\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} \rangle \neq 0$, то требование $\langle A^{(k)}, \sigma_- \rangle = 1$ однозначно фиксирует базис:

$$\begin{aligned} &\sigma_- := \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} / \langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} \rangle \\ &\sigma_+ := \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} / \Big(\langle \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})} \rangle / \langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} \rangle \Big) \\ &\sigma_3 := [\sigma_+, \sigma_-]. \end{aligned} \tag{40}$$

Построенный базис стандартный и по построению – единственный. □

Фиксируем произвольным образом знаки корней из параметров $\sqrt{a_{ii}}$, а так же один из индексов $i_0 \in \{0, \dots, n\}$.

Теорема. *Многообразие* $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ *покрывается окрестностями* $\widetilde{U}(\sqrt{2a_{i_0i_0}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$*:*

$$\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} = \bigcup_{\substack{j,k \\ j \neq k \\ j \neq i_0 \neq j}} \widetilde{U}(\sqrt{2a_{i_0i_0}}//\sqrt{2a_{jj}}/k).$$

Доказательство. Заметим, что

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{ij}(\sqrt{2a_{ii}}, \sqrt{2a_{jj}}) \subset \widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{ii}}} \Big(\langle A^{(j)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} \rangle = 0 \Big),$$

так как в $\widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{ii}}} \big(\langle A^{(j)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} \rangle = 0 \big)$ заведомо содержатся одинако-треугольные, вместе с $A^{(i)}$ матрицы вне зависимости от выбора знаков их диагональных членов.

Докажем, что для любого набора $A^{(\overline{i})}$ найдутся вершины $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$, у которых $\langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{00}})} \rangle \neq 0 \neq \langle A^{(j)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{00}})} \rangle$, тогда заведомо $A^{(\overline{i})} \subset \widetilde{U}(\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{ii}}/j)$.

Действительно, мы видели, что все величины $\alpha_i := \langle A^{(i)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{00}})} \rangle$ равны нулю быть не могут, с другой стороны, $\Sigma \alpha_i = 0$, так что отличны от нуля минимум две из них. □

Итак, мы покрыли $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ окрестностями, с каждой из которых ассоциирован некоторый вполне опредленный стандартный базис. Матричные элементы $A^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n$ в этом базисе являются функциями на факторе $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} / \operatorname{SL}(2, \mathbb{C}) =$

$M_{a_{\overline{ii}}}$, из них будем строить p_k, q_k, $k = 1, \dots, n-2$-канонические координаты на $2(n-2)$-мерном пространстве $M_{a_{\overline{ii}}}$. Отметим, что, как и в случае отображения $\widetilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$, определения $\widetilde{\mathcal{D}}_{ij}$, $\widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}$, $\widetilde{U}$ являются $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантными, так что если мы обозначим теми же буквами, но без волны их образы при отображении $\widetilde{\pi}$:

$$\mathcal{D}_{ij}(\sqrt{2a_{ii}}, \sqrt{2a_{jj}}) := \widetilde{\pi}\widetilde{\mathcal{D}}_{ij}(\sqrt{2a_{ii}}, \sqrt{2a_{jj}}) \subset M_{a_{\overline{ii}}},$$

$$Q^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}(\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0) := \widetilde{\pi}\widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}(\langle A^{(k)}, \sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})}\rangle = 0) \subset M_{a_{\overline{ii}}},$$

$$U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k) := \widetilde{\pi}\widetilde{U}(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k) \subset M_{a_{\overline{ii}}},$$

то *прообразы* множеств "без волны" совпадут с множествами "с волной":

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{ij}(\dots) = \widetilde{\pi}^{-1}\mathcal{D}(\dots), \quad \widetilde{Q}^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}(\dots) = \widetilde{\pi}^{-1}Q^{-1}_{\sqrt{2a_{jj}}}(\dots), \quad \widetilde{U}(\dots) = \widetilde{\pi}^{-1}U(\dots),$$

так что из того, что M покрывается окрестностями $\widetilde{U}(\dots)$ *будет следовать*, что и M покрывается окрестностями $U(\dots)$, т.е. будет верна следующая теорема.

Теорема 2, IV. *Многообразие $M_{a_{\overline{ii}}}$ покрывается окрестностями $U(\dots)$:*

$$M_{a_{\overline{ii}}} = \bigcup_{\substack{j,k \\ j\neq k \\ j\neq i_0\neq j}} U(\sqrt{2a_{i_0i_0}}//\sqrt{2a_{jj}}/k).$$

□

Рассмотрим область $\widetilde{U}(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k) \subset \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, и стандартный базис σ'_-, σ'_+, σ'_3, сопутствующий вершинам $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ вдоль направлений $(\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})})$, $(\sigma^{(\sqrt{2a_{jj}})})$.

Рассмотрим фиксированный стандартный базис

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и $g^{A^{(\overline{i})}}_{(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, переводящий $(\sigma'_-, \sigma'_+, \sigma'_3)$ в $(\sigma_-, \sigma_+, \sigma_3)$. Для краткости будем писать $g^A_{(\dots)}$ или просто g.

Элемент $g^A_{(\dots)}$ набором $A^{(\overline{i})} \in \widetilde{U}(\dots)$ определен однозначно. Подействуем элементом $g^A_{(\dots)}$ на набор $A^{(\overline{i})}$, обозначим результат $A_g^{(\overline{i})} := A_g^{(0)}, A_g^{(1)}, \dots, A_g^{(n)}$. Удалим из набора $A_g^{(\overline{i})}$ вершины $A_g^{(i)}$, $A_g^{(j)}$, $A_g^{(k)}$ по котором строился стандартный базис, и обозначим это действие – композицию $g^A_{(\dots)} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ и "забывания" вершин $A_g^{(i)}$, $A_g^{(j)}$, $A_g^{(k)}$ через $\widetilde{\pi}_{(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)}$:

$$\widetilde{\pi}_{(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)} : \widetilde{U}(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k) \mapsto \tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}}.$$

Здесь через
$$\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}} := \prod_{\substack{0\leqslant m\leqslant n\\ m\notin\{i,j,k\}}} \times \mathcal{C}_{a_{mm}}$$
обозначено декартово произведение $n-2-x$ многообразий $\mathcal{C}_{a_{mm}}$ – элемент $\tilde{\tilde{M}}_{a_{00},\ldots,\widehat{a}_{ii},\ldots,\widehat{a}_{jj},\ldots,\widehat{a}_{kk},\ldots,a_{nn}}$, где элементы, снабженные "крышкой" отсутствуют. Пространство $\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}}$ симплектическое – это декартово произведение $n-2-x$ симплектических пространств $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, симплектическую форму на нем обозначим $\tilde{\tilde{w}}_{\setminus\{ijk\}}$
$$\tilde{\tilde{w}}_{\setminus\{ijk\}} := \sum_{\substack{m=0\\ m\notin\{i,j,k\}}}^{n} w_{a_{mm}}.$$
Рассмотрим диаграмму
$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}} & \\ \widetilde{\pi}_{(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)} \swarrow & & \searrow \widetilde{\pi} \\ \tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}} & \xrightarrow{\pi_{\{ijk\}}} & M_{a_{\overline{ii}}}. \end{array}$$
Пока определены только наклонные стрелки $\widetilde{\pi}_{(\ldots)}$ и $\widetilde{\pi}$. Действие $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ на $M_{a_{ii}}$ не сказывается на результатах как $\widetilde{\pi}$ (по определению, $\widetilde{\pi}$ – это факторизация по действию $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$), так и $\widetilde{\pi}_{(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)}$, потому что сопутствующий $A^{(i)}$, $A^{(j)}$, $A^{(k)}$ базис строится $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-инвариантным образом, и любые два набора $A'^{(\overline{i})}$ и $A''^{(\overline{i})}$, связанные преобразованием $g' \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ $A'^{(\overline{i})} = g'(A''^{(\overline{i})})$ попадут в одну точку $\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}}$:
$$g^{A'}_{(\ldots)} = g^{A}_{(\ldots)} \circ g'$$
– сначала "поворот" g' переведет стандартный базис, сопутствующий A' в стандартный базис, сопутствующий A, а потом уже его $g^{A}_{(\ldots)}$ переведет в $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Таким образом и нижняя стрелочка $\pi_{\{ijk\}}$ *корректно определена.*

Теорема 3, IV. *Многообразие $U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k) \subset M_{a_{\overline{ii}}}$ является симплектическим пространством, оно симплектически бирационально изоморфно $\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}}$ – декартову произведению $n-2-x$ "квадрик" $\mathcal{C}_{a_{\overline{ii}}}$:*
$$\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}} = \prod_{\substack{0\leqslant m\leqslant n\\ m\notin\{i,j,k\}}} \times \mathcal{C}_{a_{mm}} \xrightarrow{\pi_{\{ijk\}}} U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k),$$
$\pi_{\{ijk\}}$ – изоморфизм, $\pi^{-1}_{\{ijk\}}$ корректно определено, симплектическая форма на $U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$ – образ формы $\tilde{\tilde{w}}_{\{ijk\}} \in \Lambda^2\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{ijk\}}$ при отображении
$$(\pi^{-1}_{\{ijk\}})^* : \Lambda^2 T^*\tilde{\tilde{M}}_{a_{ii}\setminus\{ijk\}} \to \Lambda^2 T^* M_{a_{\overline{ii}}}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $i=0$, $j=n-1$, $k=n$. Рассмотрим набор $A^{(0)},\dots,A^{(n)}\in\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$, область $\widetilde{U}(\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{n-1n-1}}/n)$ и сопутствующий стандартный базис σ_3, σ_+, σ_-. В нем матрицы $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ имеют вид

$$A^{(0)}=\begin{pmatrix}-\sqrt{a_{00}/2} & 0\\ q'_0 & \sqrt{a_{00}/2}\end{pmatrix},\quad A^{(n-1)}=\begin{pmatrix}\sqrt{a_{n-1n-1}/2} & q_{n-1}\\ 0 & -\sqrt{a_{n-1n-1}/2}\end{pmatrix},$$

$$A^{(n)}=\begin{pmatrix}\beta_n & 1\\ q'_n & -\beta_n\end{pmatrix}.$$

Пусть задана точка декартова произведения $\mathcal{C}_{a_{11}}\times\ldots\times\mathcal{C}_{a_{n-2n-2}}$ – набор матриц

$$A^{(i)}=\begin{pmatrix}\beta_i & q_i\\ q'_i & -\beta_i\end{pmatrix},\quad i\in\{1,\dots,n-2\}.$$

Обозначим $A^{(\Sigma)}:=\sum\limits_{i=1}^{n-2}A^{(i)}$; ее матричные элементы $\beta_\Sigma:=\sum\limits_{i=1}^{n-2}\beta_i$, $q_\Sigma:=\sum\limits_{i=1}^{n-2}q_i$, $q'_\Sigma:=\sum\limits_{i=1}^{n-2}q'_i$. По этим значениям однозначно определяются числа q'_0, q_n, q'_n, β_n – оставшиеся неопределенными координаты всего набора $A^{(\bar{i})}$ в сопутствующем базисе:

$$\begin{aligned}-\beta_n &:= -\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{n-1n-1}/2}+\beta_\Sigma\\ q'_n &= a_{nn}/2-\beta_n^2,\quad \text{так как}\quad a_{nn}=2(\beta_n^2+q'_n\cdot 1)\\ -q'_0 &= q'_n+q'_\Sigma\\ -q_{n-1} &= 1+q_\Sigma.\end{aligned}\tag{41}$$

Таким образом по точке $\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{0,n-1,n\}}$ однозначно и рационально строится набор $A^{(\bar{i})}\in\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$.

Обратно. Если дан набор $A^{(\bar{i})}$, то в сопутствующем базисе координаты каждого вектора $A^{(\bar{i})}$ однозначно определятся – получим точку $\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}}\setminus\{0,n-1,n\}}$.

То, что операция построения сопутствующего базиса рациональна будет следовать из явных формул (46), (49). Осталось доказать симпликтичность, т.е. то, что при этом отображении

$$w=\sum_{i=0}^{n}w_{a_{ii}}.$$

Это действительно так: в сопутствующем $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ базисе точки $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$ и $A^{(n)}$ движутся по линиям, одномерным подмногообразиям квадрик $\mathcal{C}_{a_{00}}$, $\mathcal{C}_{a_{n-1n-1}}$, $\mathcal{C}_{a_{nn}}$, высекаемых на них плоскостями $q_0=0$, $q'_{n-1}=0$ и $q_n=1$ соответственно, так что вклада в сумму $\sum_{i=0}^{n}w_{a_{ii}}$, определяющую форму на $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}}}$ эти три слагаемых не дадут. $\square$

Поскольку областями $U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$ можно покрыть все $M_{a_{\overline{ii}}}$ – это Теорема 2, IV, получаем следствие.

Следствие 1, IV. *Многообразие* $M_{a_{\overline{ii}}}$ *– симплектическое.*

Из только что доказанной теоремы следует, что каноническими координатами на $M_{a_{\overline{ii}}}$ (без некоторых подмногообразий меньшей размерности) является любой набор канонических координат на квадриках $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i = 1, \ldots, n-2$, например, (p_i, q_i) или (p_i^*, q_i^*):

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} p_i q_i + \sqrt{a_{ii}/2} & q_i \\ -p_i(p_i q_i + \sqrt{2a_{ii}}) & -(p_i q_i + \sqrt{a_{ii}/2}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -(p_i^* q_i^* + \sqrt{a_{ii}/2}) & -p_i^*(p_i^* q_i^* + \sqrt{2a_{ii}}) \\ q_i^* & p_i^* q_i^* + \sqrt{a_{ii}/2}. \end{pmatrix}$$

2. Бирациональность связи между построенными на $M_{a_{\overline{ii}}}$ координатами.

Докажем, что все построенные нами координаты, то есть $a_{ij} := \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle$, $f_{ijk} := \langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)} \rangle$ и различные наборы

$$\{p_{i_s}, q_{i_s}\}_{s=1}^{n-2} : U(\sqrt{2a_{i_0 i_0}} // \sqrt{2a_{i_{n-1} i_{n-1}}} / i_n) \mapsto \mathbb{A}^{2(n-2)},$$

$(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ – перестановка $(0, 1, \ldots, n)$ связаны друг с другом бирационально.

В одну сторону это очевидно.

Если даны $\{p_i, q_i\}_{i=1}^{n-2}$, то, как мы знаем, в сопутствующем базисе оставшиеся три матрицы $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$ и $A^{(n)}$ восстанавливаются по матричным элементам $A^{(\Sigma)} := \sum_{i=1}^{n-2} A^{(i)}$ (формула (41)). Таким образом матричные элементы всех $A^{(i)}$ – это многочлены от координат p_i, q_i. Вычисляя следы произведений $a_{ij} = \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle = \operatorname{Tr} A^{(i)} A^{(j)}$ и определитель (39), составленный из матричных элементов, получим a_{ij}, f_{ijk} в виде многочленов[3].

Обратный переход тоже рационален.

Поскольку $q_k = A_{12}^{(k)}$, $p_i = (A_{11}^{(k)} - \sqrt{a_{kk}/2})/A_{12}^{(k)}$ выражены через матричные элементы $A_{ij}^{(k)}$ рационально, то достаточно через a_{ij}, f_{ijk} выразить α_k, α'_k, β_k – матричные элементы $A^{(k)}$. Чтобы это сделать, достаточно построить стандартный базис $\sigma_3, \sigma_\pm$, используя лишь инвариантные операции $\langle \ldots, \ldots \rangle$ и $[\ldots, \ldots]$ над $A^{(i)}$, тогда матричные элементы $\beta_k = \langle A^{(k)}, \sigma_3/2 \rangle$, $\alpha_k = \langle A^{(k)} \sigma_- \rangle$, $\alpha'_k = \langle A^{(k)}, \sigma_+ \rangle$ окажутся выраженными через скалярные и смешанные произведения векторов $A^{(k)}$, т.е. через a_{ij}, f_{ijk}. Из формул (40) следует, что для построения стандартного базиса, сопутствующего $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ в области $\widetilde{U}(\sqrt{2a_{00}} // \sqrt{2a_{n-1 n-1}} / n)$, достаточно иметь векторы $\sigma^{(\sqrt{2a_{00}})}$ и $\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1n-1}})}$. В основе предлагаемого метода их построения лежит следующее утверждение.

Утверждение. *Для любых* $A, B \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ *вектор* $\sigma = \sigma(B \setminus A)$*:*

$$\sigma(B \setminus A) := \langle A, A \rangle B - \langle A, B \rangle A + \sqrt{\langle A, A \rangle / 2} [A, B] \tag{42}$$

удовлетворяет равенству

$$[A, \sigma] = \sqrt{2\langle A, A \rangle}\, \sigma.$$

[3] Иначе и быть не могло – функции a_{ij}, f_{ijk} не имеют особенностей на $M_{a_{\overline{ii}}}$

Доказательство. Равенство проверяется с помощью формул (35), (36). $\square$

Если $\sigma \neq 0$, то задача решена, σ – собственный вектор Ad_A.

Замечание

$$\langle [A,B],[A,B]\rangle \neq 0 \Longrightarrow \sigma(B\setminus A)\neq 0.$$

Доказательство.

$$\langle \sigma(B\setminus A), B\rangle = -\frac{1}{2}\langle [A,B],[A,B]\rangle.$$

Если правая часть равенства отлична от нуля, то вектор $\sigma(B\setminus A)$ заведомо ненулевой. $\square$

Если $\langle A, A\rangle = 0$, то, очевидно,

$$\sigma = 0 \Longleftrightarrow \langle A, B\rangle = 0.$$

Пусть $\langle A, A\rangle \neq 0$ и в том стандартном базисе $A = \sqrt{\langle A, A\rangle/2}\,\sigma_3$,

$$B = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha' & -\beta \end{pmatrix}.$$

В этом базисе

$$\sigma(B\setminus A) = 2\langle A, A\rangle\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие. *Формула* (42) *дает* $\sigma = 0$ *тогда и только тогда, когда вектор* $\sigma^{(-\sqrt{2\langle A,A\rangle})}$ *является собственным вектором* Ad_B.

Другими словами,

$\sigma = 0$ *если имеется общий собственный вектор* Ad_A *и* Ad_B *с собственным значением* $-\sqrt{2\langle A, A\rangle}$ *у* Ad_A. $\square$

Утверждение. *Для любого* $A^{(i)} \neq 0$ *и любого значения корня* $\sqrt{a_{ii}/2}$ *существует* $A^{(j)}$ *такой, что* $\sigma(A^{(j)}\setminus A^{(i)}) \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, тогда в таком стандартном базисе, что $\sigma_- = \sigma^{(-\sqrt{2a_{ii}})}$ все $A^{(j)}$ окажутся нижне-треугольными, т.к. σ_- будет для всех $\mathrm{Ad}_{A^{(j)}}$ собственным. Наборы $A^{(i)}$ из одинаково треугольных матриц в каком-либо базисе мы не рассматривем. $\square$

Следствие. *Для любой области* $\widetilde{U}(\sqrt{2a_{i_0i_0}}//\sqrt{2a_{i_{n-1}i_{n-1}}}/i_n)$ *найдутся векторы* $A^{(\widehat{i}_0)}$ *и* $A^{(\widehat{i}_{n-1})}$ *такие, что*

$$\sigma^{(\sqrt{2a_{i_0i_0}})} = \sigma(A^{(\widehat{i}_0)}\setminus A^{(i_0)}) \neq 0,$$
$$\sigma^{(\sqrt{2a_{i_{n-1}i_{i-1}}})} = \sigma(A^{(\widehat{i}_{n-1})}\setminus A^{(i_{n-1})}) \neq 0,$$

$\square$

Так как по определению $\widetilde{U}(\sqrt{2a_{i_0i_0}}//\sqrt{2a_{i_{n-1}i_{n-1}}}/i_n)$, $\langle\sigma^{(\sqrt{2a_{i_0i_0}})}, \sigma^{(\sqrt{2a_{i_{n-1}i_{i-1}}})}\rangle \neq 0$, то по формулам (40) из них строится стандартный базис, сопутствующий $A^{(i_0)}$, $A^{(i_{n-1})}$, $A^{(i_n)}$. Домножая $A^{(s)}$ на базисные векторы σ_3, σ_+, σ_- получим матричные элементы $A^{(s)}_{ij}$, выраженные через a_{si_0}, $a_{s\widehat{i}_0}$, $a_{si_{n-1}}$, $a_{s\widehat{i}_{n-1}}$, $f_{si_0\widehat{i}_0}$, $f_{si_{n-1}\widehat{i}_{n-1}}$, а из них – рациональные выражения для (p_s, q_s), (p^*_s, q^*_s).

Выпишем формулы.

1. Переход от (p_i, q_i) к a_{ij}, f_{ijk}.

Рассмотрим область

$$U(-\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{n-1n-1}}/n) = \\ = M_{a_{\overline{ii}}} \setminus \Big(\mathcal{D}_{0n-1}\big(-\sqrt{2a_{00}}, \sqrt{2a_{n-1n-1}}\big) \bigcup Q^{-1}_{-\sqrt{2a_{00}}}\Big(\langle A^{(n)}, \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}\rangle = 0\Big)\Big).$$

В этой области собственный вектор $\mathrm{Ad}_{A^{(0)}}$ с собственным значением $-\sqrt{2a_{00}}$ и собственный вектор $\mathrm{Ad}_{A^{(n-1)}}$ с собственным значением $+\sqrt{2a_{n-1n-1}}$ линейно-независимы, выберем их направления за направления векторов σ_- и σ_+ стандартного базиса σ_3, σ_+, σ_-. Нормируем σ_- так, чтобы $\langle\sigma_-, A^{(n)}\rangle = 1$, – это возможно, так как $\langle A^{(n)}, \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}\rangle \neq 0$. В этом базисе матрицы $A^{(n)}$ имеют вид

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{00}/2} & 0 \\ q'_0 & -\sqrt{a_{00}/2} \end{pmatrix}, \quad A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{n-1n-1}/2} & q_{n-1} \\ 0 & -\sqrt{a_{n-1n-1}/2} \end{pmatrix},$$

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} \beta_n & 1 \\ q'_n & -\beta_n \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \beta_i & q_i \\ q'_i & -\beta_i \end{pmatrix}; \quad \beta_i^2 + q_i q'_i = a_{ii}/2, \quad q'_n = a_{nn}/2 - \beta_n^2.$$

Обозначим

$$\beta_\Sigma := \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i, \quad q_\Sigma := \sum_{i=1}^{n-2} q_i, \quad q'_\Sigma := \sum_{i=1}^{n-2} q'_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &-q_{n-1} = q_\Sigma + 1, \quad q'_{n-1} := 0, \quad \beta_{n-1} := \sqrt{a_{n-1n-1}/2}, \\ &-\beta_n = \sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{n-1n-1}/2} + \beta_\Sigma, \\ &\quad q'_n = -(\beta_\Sigma + \sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{n-1n-1}/2})^2 + a_{nn}/2, \\ &-q'_0 = q'_\Sigma - (\beta_\Sigma + \sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{n-1n-1}/2})^2 + a_{nn}/2, \quad q_0 := 0, \quad \beta_0 := \sqrt{a_{00}/2}. \end{aligned} \tag{44}$$

$$a_{ij} = \langle A^{(i)} A^{(j)}\rangle = 2\beta_i\beta_j + q_i q'_j + q'_i q_j; \quad i, j \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

$$f_{ijk} := \langle [A^{(i)} A^{(j)}]\rangle A^{(k)}\rangle = 2\det \begin{vmatrix} \beta_i & q_i & q'_i \\ \beta_j & q_j & q'_j \\ \beta_k & q_k & q'_k \end{vmatrix}, \tag{45}$$

$$\begin{aligned} &\beta_i = \sqrt{a_{ii}/2} + p_i q_i = -(\sqrt{a_{ii}/2} + p^*_i q^*_i), \\ &q_i = -p^*_i(p^*_i q^*_i + 2\sqrt{a_{ii}/2}), \\ &q'_i = q^*_i = -p_i(p_i q_i + 2\sqrt{a_{ii}/2}), \quad i \in \{1, \ldots, n-2\} \end{aligned} \tag{46}$$

В формулах (46) индекс i нумерует пары канонически сопряженных координат (p_i, q_i) на $M_{s_{\overline{ii}}}$ – пробегает значения от 1 до $n-2$.

В формулах (44) определяются (вре́менно, только здесь, ниже q_0 будет другим!) значения q_i, β_i, q_i' для $i \in \{0, n-1, n\}$ и, таким образом, формулы (45) дают переход от $\{p_i, q_i\}_{i=1}^{n-2}$ и $\{p_i^*, q_i^*\}_{i=1}^{n-2}$ к a_{ij}, f_{ijk} для всех значений $i, j, k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

2. Переход от a_{ij}, f_{ijk} к (p_i, q_i).

Выделим какие-нибудь вершины $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ и значения $\sqrt{a_{00}/2}$, $\sqrt{a_{n-1n-1}/2}$, а также пару "вспомогательных" вершин $A^{(\widehat{0})}$ и $A^{(\widehat{n-1})}$, где индексы $\widehat{0}$ и $\widehat{n-1}$ – любые, кроме 0 и $n-1$, соответственно. Положим

$$\sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)}) := a_{00}A^{(\widehat{0})} - a_{0\widehat{0}}A^{(0)} - \sqrt{a_{00}/2}[A^{(0)}, A^{(\widehat{0})}],$$

$$\sigma(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}) := a_{n-1n-1}A^{(\widehat{n-1})} - a_{n-1n-1}A^{(n-1)} + \sqrt{a_{n-1n-1}/2}[A^{(n-1)}, A^{(\widehat{n-1})}]. \tag{47}$$

Рассмотрим в $M_{a_{\overline{ii}}}$ область, в которой

$$\begin{cases} \langle \sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)}), \sigma(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}) \rangle \neq 0, \\ \langle \sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)}), A^{(n)} \rangle = a_{00}a_{\widehat{0}n} - a_{0\widehat{0}}a_{0n} - \sqrt{a_{00}/2}f_{0\widehat{0}n} \neq 0. \end{cases} \tag{48}$$

Ортонормируем длины $\sigma^{(-\sqrt{a_{00}/2})}$ и $\sigma^{(\sqrt{a_{n-1n-1}/2})}$; положим $\sigma_3 := [\sigma_+, \sigma_-]$:

$$\sigma_- := \frac{a_{00}A^{(\widehat{0})} - a_{0\widehat{0}}A^{(0)} - \sqrt{a_{00}/2}[A^{(0)}, A^{(\widehat{0})}]}{a_{00}a_{\widehat{0}n} - a_{0\widehat{0}}a_{0n} - \sqrt{a_{00}/2}f_{0\widehat{0}n}},$$

$$\sigma_+ := \frac{a_{n-1n-1}A^{(\widehat{n-1})} - a_{n-1\widehat{n-1}}A^{(n-1)} + \sqrt{a_{n-1n-1}/2}[A^{(n-1)}, A^{(\widehat{n-1})}]}{\langle \sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)}), \sigma(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}) \rangle / (a_{00}a_{\widehat{0}n} - a_{0\widehat{0}}a_{0n} - \sqrt{a_{00}/2}\, f_{0\widehat{0}n})}, \tag{49}$$

$$\sigma_3 := [\sigma(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}), \sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)})] / \langle \sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)}), \sigma(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}) \rangle.$$

Положим

$$\begin{aligned}
q_i &= \langle A^{(i)}, \sigma_- \rangle = (a_{00}a_{\widehat{0}i} - a_{0\widehat{0}}a_{0i} - \sqrt{a_{00}/2}\, f_{i0\widehat{0}}) / (a_{00}a_{\widehat{0}n} - a_{0\widehat{0}}a_{0n} - \sqrt{a_{00}/2}\, f_{n0\widehat{0}}) \\
p_i &= (\langle A^{(i)}, \sigma_3/2 \rangle - \sqrt{a_{ii}/2}) / q_i \\
q_i^* &= \langle A^{(i)}, \sigma_+ \rangle = (a_{n-1n-1}a_{\widehat{n-1}i} - a_{n-1\widehat{n-1}}a_{n-1i} + \sqrt{a_{n-1n-1}/2}\, f_{in-1\widehat{n-1}}) \times \\
&\quad \times (a_{00}a_{\widehat{0}n} - a_{0\widehat{0}}a_{0n} - \sqrt{a_{00}/2}\, f_{n0\widehat{0}}) / \langle \sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)}), \sigma(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}) \rangle \\
p_i^* &= -(\langle A^{(i)}, \sigma_3/2 \rangle + \sqrt{a_{ii}/2}) / q_i^* = 1/p_i = \frac{q_i}{\langle A^{(i)}, \sigma_3/2 \rangle - \sqrt{a_{ii}}/2}.
\end{aligned}$$

Подставив вместо $\sigma(A^{(\widehat{0})} \setminus A^{(0)})$ и $\sigma(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)})$ их выражения (47) получим обещанные рациональные формулы перехода от (a_{ij}, f_{ijk}) к каноническим координатам $\{p_i, q_i\}_{i=1}^{n-2}$, $\{p_i^*, q_i^*\}_{i=1}^{n-2}$.

Закончим этот раздел доказательством одной красивой геометрической формулы.

Пусть $n = 3$, то есть имеются четыре вектора постоянной длины $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ и суммой ноль (вообще говоря) не плоский ориентированный четырехугольник в пространстве, с заданными "квадратами длин сторон" $a_{ii} := \langle A^{(i)}, A^{(i)}\rangle = \mathrm{const}$. Построим стандартный базис σ_-, σ_+, σ_3, сопутствующий векторам $A^{(0)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ вдоль направлений $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{(\sqrt{2a_{22}})})$, т.е. в этом базисе $A^{(0)}_{11} = +\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}$, $A^{(2)}_{11} = +\sqrt{\frac{a_{22}}{2}}$, $A^{(3)}_{12} = 1$ (при выводе уравнения Пенлеве 6 мы будем использовать именно такую нормировку, т.е. знак при $\sqrt{a_{00}}$). Вычислим ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(0)}$:

$$f_{120} = \langle A^{(1)}, [A^{(2)}, A^{(0)}]\rangle = 2\det\begin{vmatrix} \beta_1 & q_1 & q_1' \\ \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} & q_2 & 0 \\ \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} & 0 & q_0' \end{vmatrix} =$$

$$= 2q_0'\Big(\beta_1 q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}q_1\Big) - \sqrt{2a_{00}}\, q_2 q_1'.$$

Поскольку $M_{a_{\overline{ii}}}$ при $n = 3$ двумерно, имеется ровно одна пара канонических переменных (p_1, q_1), и форма $da_{01} \wedge da_{02}$ обязана быть пропорциональной $dp_1 \wedge dq_1$, причем коэффициент пропорциональности не может иметь особенностей; вычислим его.

Учтем, что $\beta_0 = \sqrt{a_{00}/2} = \mathrm{const}$, $\beta_2 = \sqrt{a_{22}/2} = \mathrm{const}$, $q_0 = 0$, $q_2' = 0$; $a_{oi} = 2\sqrt{a_{00}/2}\,\beta_i + q_0' q_i$, $q_0' = -q_1' - q_3'$, $q_2 = -q_1 - 1$, $-q_1' = p_1(\beta_1 + \sqrt{2a_{11}})$, $-q_3' = (\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}})^2 - \frac{a_{33}}{2}$, $\beta_1 = p_1 q_1 + \sqrt{a_{11}/2}$

$$da_{01} \wedge da_{02} = d(\sqrt{2a_{00}}\,\beta_1 + q_0' q_1) \wedge d(q_0' q_2) = \sqrt{2a_{00}}\, d\beta_1 \wedge d(q_0' q_2) + d(q_0' q_1) \wedge (q_0' q_2) =$$

$$= q_0' d(q_0' - \sqrt{2a_{00}}\,\beta_1) \wedge dq_1 + \sqrt{2a_{00}}\, q_2 \Big(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\Big) d\beta_1 \wedge dp_1.$$

Здесь также учтено, что $dq_2 = -dq_1$ и $d\beta_1 \wedge dq_3' = 0$, поэтому $d\beta_1 \wedge dq_0' = -d\beta_1 \wedge dq_1' = (\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}) d\beta_1 \wedge dp_1$. Если обозначить через V искомый коэффициент, т.е. $da_{01} \wedge da_{02} = V dp_1 \wedge dq_1$, то

$$V = q_0' \frac{\partial}{\partial p_1}\Big|_{q_1} (q_0' - \sqrt{2a_{00}}\,\beta_1) - \sqrt{2a_{00}}\, q_2 \Big(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\Big) \frac{\partial}{\partial q_1}\Big|_{p_1} \beta_1 =$$

$$= q_0'\Big(2p_1 q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2} + \Big(2\Big(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\Big) - \sqrt{2a_{00}}\Big) q_1\Big) - \sqrt{2a_{00}}\, q_2 \Big(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\Big) p_1 =$$

$$= 2q_0'\Big(\beta_1 q_1 + p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1\Big) + \sqrt{2a_{00}}\, q_2 q_1' =$$

$$= -2q_0'\Big(\beta_1 q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1\Big) + \sqrt{2a_{00}}\, q_2 q_1' = -f_{120}.$$

Нами доказано утверждение.

Утверждение.

$$dp_1 \wedge dq_1 = \frac{da_{01} \wedge da_{02}}{f_{123}} \tag{50}$$

$\square$

Отметим, что справа стоит выражение "из элементарной геометрии" – скалярные произведения сторон четырехугольника (это a_{01} и a_{02}) и объем f_{123} его выпуклой оболочки (четырехугольник не плоский).

Равенство (50) можно рассматривать как геометрическое определение симплектической формы на пространстве тетраэдров $M_{a_{\overline{ii}}}$. Странно, что с нашим определением w форма $da_{01} \wedge da_{02}/f_{123}$ связана столь сложным вычислением.

V. Уравнение Пенлеве 6, система Гарнье

Системой Гарнье [GtoP] называется каноническая система уравнений для гамильтоновой системы Шлезингера в канонических переменных p_i, q_i, то есть

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} q_j = \frac{\partial}{\partial p_j} H_i, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_i} p_j = -\frac{\partial}{\partial q_j} H_i; \quad i, j \in \{1, \dots, n-2\} \tag{51}$$

$$H_i = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{a_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}, \quad i = 1, \dots, n-2$$

где $a_{ij} = a_{ij}(p_{\overline{m}}, q_{\overline{m}})$ заданы формулами (44)–(46); $\lambda_0, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ – различные константы, например, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n-1} = 1$, $\lambda_n = \infty$ (в этом случае члены суммы, содержащие λ_n отсутствуют – суммирование по k от 1 до $n-1$). Важнейший случай этой системы уравнений – это $n = 2$ – "случай Пенлеве 6". Его мы рассмотрим детально.

Шестое уравнение Пенлеве (PVI) – это уравнение Эйлера–Лагранжа, соответствующее гамильтоновой системе (32) – случай $n = 3$ (простейший нетривиальный), записанной в канонических переменных p, q какого-нибудь из многообразий $\tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}} \setminus \{ijk\}}$, например, (51).

Если $n = 3$, то $n-2 = 1$ – имеется единственная пара канонических переменных (p, q), многообразие

$$M_{a_{\overline{ii}}} = \bigcup_{\substack{i,j \\ i \neq 0 \neq j}} \tilde{\tilde{M}}_{a_{\overline{ii}} \setminus \{0ij\}} = \bigcup_{k=1}^{3} \tilde{\tilde{M}}_{a_{kk}} \tag{52}$$

двумерно, расширенное фазовое пространство $M^T_{a_{\overline{ii}}}$ трехмерно.

Чтобы выписать само уравнение, нужно переписать гамильтониан $H = \Sigma a_{ij} \log(\lambda_i - \lambda_j)$, заданный в координатах a_{ij} через канонические координаты p, q (формулы (45), (46)) и сделать по p преобразование Лежандра – исключить p из канонической системы уравнений. Ввиду важности уравнения PVI приведем соответствующие вычисления. Начиная с этого момента, $n = 3$, набор $A^{(i)} = A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ будем называть тетраэдром, аппелируя к геометрической интуиции

$$(R^3, \dots \times \dots) \sim (\mathrm{su}(2), [\ ,\ ]) \subset (\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}), [\ ,\ ]).$$

Мы должны зафиксировать область $U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/k)$, т.е. индексы i,j,k и два значения корней из параметров.

Положим $i=0$, $j=2$, $k=3$; если фиксировать $U(\sqrt{2a_{ii}}//\sqrt{2a_{jj}}/3)$, то в сопутствующем стандартном базисе будет $A_{11}^{(0)}=-\sqrt{a_{00}/2}$, $A_{11}^{(2)}=+\sqrt{a_{22}/2}$, но этот знак минус у $A_{11}^{(0)}$ нарушит (с точки зрения автора!) симметрию возникающих формул, так что мы зафиксируем область $U(-\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{22}}/3)$ и будем строить стандартный базис $(\sigma_-,\sigma_+,\sigma_3)$, сопутствующий $A^{(0)},A^{(2)},A^{(3)}$ вдоль направлений[4] $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{(+\sqrt{2a_{22}})})$.

Стандартный сопутствующий базис $\sigma_-,\sigma_+,\sigma_3$ определен так, что векторы $A^{(0)},A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ движутся по линиям – сечениям квадрик $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ плоскостям $\langle A^{(0)},\sigma_-\rangle=0$, $\langle A^{(2)},\sigma_+\rangle=0$ и $\langle A^{(3)},\sigma_-\rangle=1$. Эти линии однозначно проектируются на соответствующие координатные оси, в результате каждая из матриц $A^{(0)},A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ определяется единственным своим матричным элементом:

$$A^{(0)}=\begin{pmatrix}\sqrt{a_{00}/2} & 0\\ q_0' & -\sqrt{a_{00}/2}\end{pmatrix},\quad A^{(2)}=\begin{pmatrix}\sqrt{a_{22}/2} & q_2\\ 0 & -\sqrt{a_{22}/2}\end{pmatrix},$$

$$A^{(3)}=\begin{pmatrix}\beta_3 & 1\\ a_{33/2}-\beta_3^2 & -\beta_3\end{pmatrix}. \tag{53}$$

Вследствие равенства $\Sigma A^{(i)}=0$, по вершине $A^{(1)}$ – точке квадрики $\mathcal{C}_{a_{11}}$ восстанавливается весь тетраэдр:

$$\begin{aligned}&\beta_3=-(\beta_0+\beta_1+\beta_2)=-(\sqrt{a_{00}/2}+\beta_1+\sqrt{a_{22}/2})\\&q_2=-(q_0+q_1+q_3)=-(q_1+1)\\&q_0'=-(q_1'+q_2'+q_3')=-(q_1'+a_{33/2}-\beta_3^2)=-(q_1'+a_{33/2}-(\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{22}/2}+\beta_1)^2).\end{aligned}$$

Заметим, что для всех (разных!) точек $A^{(1)}$ с "раздутого" дивизора (существующего, если $a_{11}=0$) получатся одни и те же $A^{(0)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ – некоторый конкретный треугольник.

Обратно, для любого тетраэдра $A^{(\bar{i})}$ из $\widetilde{U}(-\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{22}}/3)$ можно построить стандартный сопутствующий базис. Формулы

$$\beta_1=-(\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{22}/2}+\beta_3),\quad q_1=-(1+q_2),\quad q_1'=-(q_0'+a_{33/2}-\beta_3^2)$$

показывают, что по значениям координат β_3, q_2, q_0' точка $A^{(1)}$ восстанавливается однозначно.

Заметим, что так как $\beta_1^2+q_1q_1'=a_{11/2}$, величины β_3, q_2 и q_0' не являются независимыми:

$$(\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{22}/2}+\beta_3)^2+(1+q_2)(q_0'+a_{33/2}-\beta_3^2)=a_{11/2}.$$

Скалярные произведения $a_{0i}=\langle A^{(0)},A^{(i)}\rangle$ (остальные из них – посредством формул (27)) выражаются через матричные элементы β_i, q_i, q_i' следующим образом:

$$a_{0i}=2\beta_0\beta_i+q_0q_i'+q_iq_0'=2\beta_0\beta_i+q_iq_0'=$$

[4]Конечно же во всех формулах можно поменять $\sqrt{a_{ii}}\to-\sqrt{a_{ii}}$ для произвольного (или некоторых) i, в частности $\sqrt{a_{00}}\to-\sqrt{a_{00}}$

$$= \sqrt{2a_{00}}\,\beta_i + q_i\Big(q_2q_1' + 2\beta_1(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2}) + \frac{a_{00}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{a_{11}}{2} - \frac{a_{33}}{2} + \sqrt{a_{00}a_{33}}\Big).$$

Мы учли, что $q_0' = -(q_1' + q_2' + q_3')$, $q_2' = 0$ и $\beta_1^2 = a_{11/2} - q_1q_1'$. Все матричные элементы – многочлены от координат q_1 и $p_1 = (\beta_1 - \sqrt{a_{11}/2})/q_1$:

$$\beta_1 = p_1q_1 + \sqrt{a_{11}/2}, \quad q_1' = -p_1(p_1q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2}) = -p_1^2q_1 - 2\sqrt{a_{11}/2}\,p_1,$$

так что

$$a_{0i} = -q_iq_1q_2p_1^2 + 2p_1q_i(q_1(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2}) - q_2\sqrt{a_{11}/2}) +$$

$$+q_i((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33/2}) + \beta_i\sqrt{2a_{00}}. \tag{54}$$

Подставляя $\beta_1 = p_1q_1 + \sqrt{a_{11}/2}$, $\beta_2 = \sqrt{a_{22}/2}$, $\beta_3 = -\beta_1 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2})$, $\beta_0 = \sqrt{a_{00}/2}$ получаем

$$a_{01} = -q_1q_1q_2p_1^2 + 2q_1p_1(q_1\sqrt{a_{22}/2} - q_2(\sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{00}/2})) +$$

$$+q_1((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33/2}) + \sqrt{a_{00}a_{11}}$$

$$a_{02} = -q_2q_1q_2p_1^2 + 2q_2p_1(q_1(\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2}) - q_2\sqrt{a_{11}/2})) +$$

$$+q_2((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33/2}) + \sqrt{a_{00}a_{22}}$$

$$a_{03} = -q_3q_1q_2p_1^2 + 2q_3p_1(q_1\sqrt{a_{22}/2} - q_2\sqrt{a_{11}/2}) +$$

$$+q_3((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33/2}) - \sqrt{a_{00}}(\sqrt{a_{00}} + \sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}}).$$

Здесь $q_3 = 1$, $\sqrt{a_{ii}a_{jj}} := \sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}$. Рассмотрим линейную комбинацию $\sum a_{0i}t_i$, где t_1, t_2, t_3 – какие-то комплексные параметры. Сразу видно, что сумма $\sum t_ia_{0i}$ будет иметь вид

$$\mathcal{P}_3p_1^2 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1,$$

где $\mathcal{P}_k$ – многочлен, вообще говоря, степени "k" от переменной q_1.

Если $t_1 \neq t_2$, то $\mathcal{P}_3$ действительно имеет третью степень по q_1; если же $t_1 = t_2$, то

$$\sum a_{0i}t_i =$$

$$(t_1 - t_3)(q_1q_2p_1^2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33/2} + \sqrt{a_{00}}(\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})) - a_{00}t_3.$$

Поскольку все скалярные произведения $\langle A^{(i)}, A^{(j)}\rangle$ выражаются линейно через a_{0k} и константы (формула (27)), то верна теорема.

Теорема. *Пусть векторы $A' : \sum \nu_i' A^{(i)}$ и $A'' : \sum \nu_i'' A^{(i)}$ – произвольные линейные комбинации радиус-векторов вершин $A^{(i)}$ с независящими от $A^{(i)}$ коэффициентами ν_i' и ν_i'', тогда функция $\langle A', A''\rangle : M_{a_{\overline{ii}}} \mapsto \mathbb{C}$ полиномиальна по p_1, q_1, причем по p_1 – квадратична:*

$$\langle A', A''\rangle = \mathcal{P}_3p_1^2 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1, \tag{55}$$

где $\mathcal{P}_k$ – полиномы по q_1 степени не выше "k", если степень $\mathcal{P}_3$ ниже трех, то $\mathcal{P}_2 = 0$, $\mathcal{P}_2 = \mathrm{const}_{\nu_i', \nu_i''}$. □

Гамильтониан системы Шлезингера (32) имеет именно такой вид – линейная комбинация a_{ij}; выпишем отдельно важную для нас формулу (здесь опять t_1, t_2, t_3 – произвольные числа)

$$\begin{gathered}
a_{0t} := t_1 a_{01} + t_2 a_{02} + t_3 a_{03} = -\Big(\sum t_i q_i\Big) q_1 q_2 p_1^2 + \\
+2p_1\Big(-\sqrt{a_{11}/2}\, q_2 \Big(\sum t_i q_i\Big) + \sqrt{a_{22}/2}\, q_1 \Big(\sum t_i q_i\Big) + \sqrt{a_{00}/2}(t_2 - t_1) q_1 q_2 \Big) + \\
+\Big(\sum t_i q_i\Big)\Big((\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2}\Big)^2 - a_{33/2}\Big) + \\
+\sqrt{a_{00}}(t_1\sqrt{a_{11}} + t_2\sqrt{a_{22}} - t_3(\sqrt{a_{00}} + \sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})). \qquad (56)
\end{gathered}$$

1. Рациональная (традиционная, классическая) форма PVI.

В первых главах было показно, что условие изомонодромности деформации уравнения (1) эквивалентно тому, что касательная к траектории проекции набора $A^{(\bar{i})}$ в $M^{\Lambda}_{a_{ii}}$ принадлежит распределению, задаваемому формой Ω_{PVI}:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = w - \sum_{i<j} d\mathrm{tr} A^{(i)} A^{(j)} \wedge \log(\lambda_i - \lambda_j) = 0.$$

Мы знаем, что любая линейная комбинация величин $a_{ij} = \mathrm{tr}\, A^{(i)} A^{(j)}$ зависит квадратично от p_1 и кубично от q_1, где (p_1, q_1) – симплектические координаты на $M_{a_{\overline{ii}}}$ (в той части, где они определены), так что форма Ω_{PVI} в координатах p_1, q_1 перепишется так:

$$dp_1 \wedge dq_1 - d(p_1^2 \mathcal{P}_3 + 2p_1 \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1) \wedge d\tau. \qquad (57)$$

Здесь $\mathcal{P}_k$ – многочлен степени k от q_1, а τ – какой-нибудь параметр от которого зависят $\lambda_i = \lambda_i(\tau)$; напомним, что распределение Шлезингера–Пенлеве интегрируемо, результат эволюции решения не зависит от траектории, соединяющей начальную и конечную точки в пространстве параметров λ_i. Обозначим точкой производную по τ.

Теорема V, 1. *Функция $q_1 = q_1(\tau)$ – q-координата решения гамильтоновой системы (57) удовлетворяет уравнению*

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial q_1}\log \mathcal{P}_3\Big)\dot{q_1}^2 + \Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\log \mathcal{P}_3\Big)\dot{q_1} + 2\mathcal{P}_3\Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\ \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} + \frac{\partial}{\partial q_1}\Big(\frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1\Big)\Big). \qquad (58)$$

Доказательство. Выделим полный квадрат:

$$p_1^2 \mathcal{P}_3 + 2p_1 \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 (p_1 + \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3)^2 + \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3$$

и введем новую переменную

$$P := p_1 + \mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3. \qquad (59)$$

Форма примет вид

$$dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 + \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3 + R) \wedge d\tau.$$

Замена $p_1 \to P$ явно содержит τ, в гамильтониане появился новый член – это такая функция R, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3) d\tau \wedge dq_1 = dR \wedge d\tau,$$

иначе

$$\Big(dR + \Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3\Big) dq_1\Big) \wedge d\tau = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial q_1} R = -\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3.$$

Функция $R = -\int dq \frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3$ – первообразная от (рациональной) функции $-\frac{\partial}{\partial \tau}(\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3)$.

Обозначим

$$F = F(q_1, \tau) := \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1 + \int dq_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3,$$

система (57) приобрела простой вид

$$dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F) \wedge d\tau, \tag{60}$$

где $\mathcal{P}_3$ и F не зависят от P. Выпишем каноническую систему:

$$\dot{q}_1 = 2P\mathcal{P}_3, \quad \dot{P} = -P^2 \frac{\partial}{\partial q_1}\mathcal{P}_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} F.$$

Исключим P (это эквивалентно преобразованию Лежандра функции Гамильтона), переписав P и $\dot{P}$ через $\dot{q}_1$ и q_1. Поскольку $2P = \dot{q}_1/\mathcal{P}_3$, то

$$\begin{aligned}\ddot{q_1} &= -2\Big(\frac{d}{d\tau}\mathcal{P}_3\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)\dot{q}_1/\mathcal{P}_3 - 2\mathcal{P}_3\Big(\Big(\frac{1}{2}\dot{q}_1/\mathcal{P}_3\Big)^2 \frac{\partial}{\partial q_1}\mathcal{P}_3 - \frac{\partial}{\partial q_1}F\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial q_1}\log \mathcal{P}_3\Big)\dot{q}_1^2 + \Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\log \mathcal{P}_3\Big)\dot{q}_1 + 2\mathcal{P}_3 \frac{\partial}{\partial q_1} F.\end{aligned}$$

□

Замечание. Эта теорема объясняет структуру традиционной записи уравнения Пенлеве 6 – три слагаемых специфического вида в правой части. □

Введем параметр t так, чтобы (58) приобрело привычный для специалистов вид (см. [GtoP]).

Преобразуем сумму $\sum da_{ij} \wedge d\log(\lambda_i - \lambda_j)$:

$$\sum_{i<j} da_{ij} \wedge d\log(\lambda_i - \lambda_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i\neq k}}^{3} da_{0i} \wedge d\log(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k) =$$

$$= d(t_1 a_{01} + t_2 a_{02} + t_3 a_{03}) \wedge d\tau = d\Big(a_{01} + \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} a_{03}\Big) \wedge (t_1 - t_2) d\tau = d(a_{01} + t a_{03}) \wedge d\tau_{1-2}.$$

Здесь и ниже – индексы i, j, k в одной формуле все различны и отличны от индекса 0, например, четная перестановка $\{1, 2, 3\}$. Мы обозначили:

а) логарифмическую производную величины $(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)$ по параметру τ (произвольному, пока еше не определенному) через t_i:

$$t_i := d\log(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)/d\tau;$$

в) величину $t_3 - t_2/t_1 - t_2$ через t:

$$t := \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{d\log\dfrac{(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}}{d\log\dfrac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}};$$

с) дифференциал $(t_1 - t_2)d\tau$, имеющий вычет $+1$ в точке $\lambda_0 = \lambda_1$, вычет -1 в точке $\lambda_0 = \lambda_2$ и никаких других особенностей (если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ фиксированы, λ_0 – переменная) через $d\tau_{1-2}$:

$$d\tau_{1-2} := d\log\frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} = -d\log\mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0).$$

Утверждение V, 1.

$$d\tau_{1-2} = -\frac{dt}{t(t-1)}, \quad t = \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2).$$

□

Это является следствием двух красивых формул.

Утверждение V, 2. *Для любых величин s_1, s_2, s_3 таких, что $s_1 + s_2 + s_3 = 0$*

$$d\log\frac{s_1}{s_2} + d\log\frac{d\log s_1/s_3}{d\log s_2/s_3} = 0.$$

□

Доказательство. Введем переменную $x := s_1/s_2$. Тогда $s_1/s_3 = -s_1/s_1 + s_2 = -x/x + 1$, $s_2/s_3 = -1/x + 1$. □

Утверждение V, 3. *Для любых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$*

$$(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1) + (\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

□

Доказательство. Эта сумма обращается в ноль, если положить $\lambda_i = \lambda_j$, значит она делится на $\lambda_i - \lambda_j \forall i, j$. В то же время все выражение квадратично по λ_j, а различных пар $\lambda_i - \lambda_j$ больше двух (шесть). □

Утверждение V, 1 доказывается так.

Положим в Утверждении V, 2 $s_i = (\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)$ и выразим t и $d\tau_{1-2}$ через $x = s_1/s_2$: $d\tau_{1-2} = d\log x$,

$$t = d\log s_3/s_2/d\log s_1/s_2 = d\log 1 + x/d\log x = x/1 + x = -s_1/s_3 =$$

$$= -\frac{(\lambda_0-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(\lambda_0-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2)} = \mathcal{D}(\lambda_1,\lambda_3,\lambda_0,\lambda_2),$$

$$t = \frac{x}{1+x} \Longleftrightarrow x = \frac{t}{1-t} \Longrightarrow d\tau_{1-2} = d\log\frac{t}{t-1} = \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1}\Big)dt = -\frac{dt}{t(t-1)}.$$

□

Вернемся к уравнению Пенлеве 6. Величина $a_{01}+ta_{03}$ выражается через p_1, q_1 с помощью (56). Если в качестве независимой переменной τ в формуле (57)[5] выбрать $\tau := t = (t_3-t_2)/(t_1-t_2) = \mathcal{D}(\lambda_1,\lambda_3,\lambda_0,\lambda_2)$, то

$$\sum_{i<j} da_{ij}\wedge d\log(\lambda_i-\lambda_j) = d(a_{01}+ta_{03})\wedge\frac{-dt}{t(t-1)} =$$

$$= d\frac{-1}{t(t-1)}(t_1a_{01}+t_2a_{02}+t_3a_{03})\wedge dt = d(p_1^2\mathcal{P}_3 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1)\wedge dt =$$

$$= d\frac{-1}{t(t-1)}\Big(-\Big(\sum t_iq_i\Big)q_1q_2p_1^2 + 2p_1\Big(-\sqrt{a_{11}/2}q_2\Big(\sum t_iq_i\Big) + \sqrt{a_{22}/2}q_1\Big(\sum t_iq_i\Big)+$$

$$+\sqrt{a_{00}/2}(t_2-t_1)q_1q_2\Big) + \Big(\sum t_iq_i\Big)((\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{11}/2}+\sqrt{a_{22}/2})^2 - a_{33/2}))\wedge dt,$$

и функции $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1$ из (57), участвующие в формулировке Теоремы V, 1, получаются такими

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_3 &= -\frac{q_1q_2q_t}{t(t-1)}\\
\mathcal{P}_2 &= \frac{q_1q_2q_t}{t(t-1)}\Big(-\frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} + \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_t}\Big)\\
\mathcal{P}_1 &= \frac{q_t}{t(t-1)}\Big(\Big(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\Big)^2 - \frac{a_{33}}{2}\Big) + \mathrm{const}_t\,.
\end{aligned}$$

Мы обозначили $q_t := -(q_1+t) = -\sum t_iq_i$, так что $q_1+q_t+t = q_t+q_2+1 = 0$; величину const_t, не зависящую от q_1 (и от p_1, конечно, тоже) больше писать не будем.

Функция

$$F := \mathcal{P}_2^2/\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1 + \int dq_1\frac{\partial}{\partial\tau}\mathcal{P}_2/\mathcal{P}_3 =$$

$$= -\frac{q_1(q_1+1)(q_1+t)}{t(t-1)}\Big(\frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} + \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q+1} + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q+t}\Big)^2 +$$

$$+\frac{q_t+t}{t(t-1)}\Big(\Big(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\Big)^2 - \frac{a_{33}}{2}\Big) + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_1+t}$$

[5] В следующем разделе и τ и $\mathcal{P}_i$ будут другими

имеет только простые полосы на $\mathbb{C} \ni q_1$; вычислим вычеты:

$$\mathrm{Res}\Big|_{q_1=0} F = -\frac{a_{11}/2}{t-1}; \qquad \mathrm{Res}\Big|_{q_1=-1} F = \frac{a_{22}/2}{t};$$

$$\mathrm{Res}\Big|_{q_1=-t} F = -a_{00}/2 + \sqrt{a_{00}/2}; \qquad \mathrm{Res}\Big|_{q_1=\infty} = -\frac{a_{33}}{2}\frac{1}{t(t-1)},$$

так что

$$F = \frac{1/2}{t(t-1)}\Big(\frac{ta_{11}}{-q_1} + \frac{(t-1)a_{22}}{q_1+1} - \frac{t(t-1)(a_{00}-\sqrt{2a_{00}})}{q_1+t} - a_{33}q_1\Big) + \mathrm{const}'_t$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\log \mathcal{P}_3 = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1+1} + \frac{1}{q_1+t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\log \mathcal{P}_3 = -\Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+q_1}\Big)$$

$$2\mathcal{P}_3\Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\ \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} - \frac{\partial}{\partial q_1}\Big(\frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1\Big)\Big) = 2\mathcal{P}_3\frac{\partial}{\partial q_1}F =$$

$$= -\frac{q_1(q_1+1)(q_1+t)}{t^2(t-1)^2}\Big(a_{11}\frac{t}{q_1^2} - a_{22}\frac{t-1}{(q_1+1)^2} + (a_{00}-\sqrt{2a_{00}})\frac{t(t-1)}{(q_1+t)^2} - a_{33}\Big).$$

На функцию $q := -q_1$ мы получили (формула (58)) уравнение Пенлеве 6 с параметрами (см. [GtoP])

$$\alpha = a_{33}, \quad \beta = a_{22}, \quad \gamma = a_{11}, \quad \delta = (\sqrt{a_{00}} - 1/\sqrt{2})^2.$$

$$\ddot{q} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t}\Big)\dot{q}^2 - \Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t}\Big)\dot{q} + \tag{61}$$

$$+\frac{q(q-1)(q-t)}{t^2(t-1)^2}\Big(\alpha - \beta\frac{t}{q^2} + \gamma\frac{t-1}{(q-1)^2} + \Big(\frac{1}{2}-\delta\Big)\frac{t(t-1)}{(q-t)^2}\Big).$$

2. “Эллиптическая” форма PVI.

В этом разделе активно используются эллиптические функции, для ознакомления с предметом автор рекомендует книгу [Ah], сочетающую в себе свойства как учебника, так и справочника.

На протяжении *этого* раздела будем писать q_0 вместо q_t; также в качестве независимой переменной τ будет выбрана другая функция $\tau = \tau(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, не $t = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2)$, так что изменятся (исчезнет $t(t-1)$ в знаменателе) $\mathcal{P}_3$ и F. Итак, отныне

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F) \wedge d\tau_{1-2}, \tag{62}$$

$$P = p_1 + \frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} - \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} - \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_0}, \quad q_0 := q_t := -(q_1+t)$$

$$\mathcal{P}_3 = q_1 q_2 q_t, \quad d\tau_{1-2} = -\frac{dt}{t(t-1)}, \quad t = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2),$$

$$F=\frac{a_{11}}{2}\frac{t}{q_1}+\frac{a_{22}}{2}(t-1)\frac{1}{q_2}-\Big(\frac{a_{00}}{2}-\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\Big)\frac{t(t-1)}{q_0}+\frac{a_{33}}{2}q_1.$$

Обозначим $Q_i\in L_Q^0$ – точка, в которой обращается в ноль функция q_i (точка Q_3 – это та точка, где q_1, q_2 и q_0 имеют полюс): $q_i(Q_i)=0$.

$$F=\frac{a_{11}}{2}\ \frac{q_1(Q_2)q_1(Q_0)}{q_1}-\frac{a_{22}}{2}\ \frac{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}{q_2}+\frac{a_{33}}{2}q_1-\Big(\frac{a_{00}}{2}-\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\Big)\frac{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}{q_0}.$$

Рассмотрим дробно-линейное преобразование χ_k, $k\in\{1,2,0\}$ сферы Римана L_Q^0, переводящее точку Q_3 в Q_k и меняющее местами оставшиеся точки Q_i и Q_j.

Утверждение.

$$\chi_k^* q_k=\frac{q_k(Q_i)q_k(Q_j)}{q_k},\quad i\neq j\neq k\neq i.$$

Доказательство. Рациональная функция $\chi_k^* q_k$ с единственной особенностью – простым полюсом принимает те же значения, что и $q_k(Q_i)q_k(Q_j)/q_k$ в четырех различных точках Q_l, $l\in\{0,1,2,3\}$. □

Следствие.

$$F=\frac{a_{11}}{2}\chi_1^*q_1+\frac{a_{22}}{2}\chi_2^*q_1+\frac{a_{33}}{2}\,q_1+\Big(\frac{a_{00}}{2}-\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\Big)\chi_0^*q_1+\mathrm{const}_\tau, \tag{63}$$

где const_τ *– постоянная, то есть не зависит от точки* L_Q.

Доказательство.

$$\chi_2^*q_1=-\chi_2^*(q_2+1)=-\frac{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}{q_2}-1\Longrightarrow-\frac{1}{q_2}=(\chi_2^*q_1+1)\frac{1}{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}$$

$$\chi_0^*q_1=-\chi_2^*(q_0+t)=-\frac{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}{q_0}-t\Longrightarrow-\frac{1}{q_0}=(\chi_0^*q_1+t)\frac{1}{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}$$

□

Постараемся избавиться от множителя $\mathcal{P}_3$ перед P^2 – перейти к таким переменным u,p,τ, чтобы зависимость гамильтониана от импульса стала чисто квадратичной:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}}=dp\wedge du-d(p^2/2-\mathcal{F}(u,\tau))\wedge d\tau/\mathrm{const}=0. \tag{64}$$

Каноническая система в этом случае упростится:

$$\mathrm{const}\,\frac{du}{d\tau}=p,\quad \mathrm{const}\,\frac{dp}{d\tau}=\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{F}(u,\tau),$$

и уравнение на u (уравнение Пенлеве 6) привет вид

$$(\mathrm{const})^2\frac{d^2}{d\tau^2}u=\mathcal{F}'(u,\tau),\quad \mathcal{F}':=\frac{\partial}{\partial u}\Big|_\tau\mathcal{F}(u,\tau). \tag{65}$$

Введем в (62) (вре́менно) переменную $\widetilde{P}:=\sqrt{\mathcal{P}_3}\,P_1$. Она определена на двулистном накрытии сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}\ni q_1$, разветвленном в нулях $\mathcal{P}_3$: $\mathcal{P}_3=q_1q_2q_0=$

$q_1(q_1+1)(q_1+t)$ и в бесконечности, т.е. определена на торе, модулярный параметр которого зависит от независимой переменной t. Построим координату $\widetilde{v}$, канонически сопряженную $\widetilde{P}$ (т.е. $\widetilde{P}d\widetilde{v}=Pdq_1$):

$$d\widetilde{v}=dq_1/\sqrt{q_1(q_1+1)(q_1+t)}.$$

Дифференциал $d\widetilde{v}$ – голоморфный дифференциал на торе, сама же переменная $\widetilde{v}:=\int d\widetilde{v}$ оказывается голоморфной координатой на универсальной накрывающей этого тора – на комплексной плоскости.

Прежде чем приступить к реализации этой схемы заметим, что выбранный нами вид (64) формы Ω_{VI} очень "жесткий" – он оставляет возможность только линейных относительно u замен переменных, однозначно связанных с заменой независимой переменной τ:

$$(u,d\tau)\to(\varkappa_1 u+\varkappa_0, c\varkappa_1^2 d\tau), \varkappa_1=\varkappa_1(\tau), \quad \varkappa_0=\varkappa_0(\tau).$$

При данном преобразовании $\mathcal{F}'$ меняется линейно по u:

$$\mathcal{F}'\mapsto -u\varkappa_1\frac{d^2}{d\tau^2}\Big(\frac{1}{\varkappa_1}\Big)-\varkappa_1\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{1}{\varkappa_1^2}\ \frac{d\varkappa_0}{d\tau}\Big)+c^2\varkappa_1^3\mathcal{F}',$$

(см. [BaBo]. Если потребовать, чтобы $\mathcal{F}(u,\tau)$ при постоянном τ оставалсь функцией на L_Q^0 (определялась тетраэдром $A^{(\bar{i})}$), то есть была двояко-периодической функцией на торе, вся свобода изменения независимой переменной τ сведется к умножению на константу и модулярному преобразованию $\tau\to-1/\tau$. Потребуем, чтобы образ какой-нибудь фиксированной точки $\mathbb{C}_u$, например, $u=0$ совпал с одной из точек $Q_j\in L_Q^0$. В этом случае $\varkappa_0$ должно быть вектором решетки периодов тора и при выборе переменных (u,τ) не останется ни одного функционального параметра.

Таким образом, предложенный вид формы Ω_{PVI}, с точностью до дискретных симметрий и тривиальных (не зависящих от переменных – u,p и τ) масштабных преобразований определяет как зависимую переменную u, так и независимую переменную τ.

Теорема. *Функция $\mathcal{F}=\mathcal{F}(u,\tau)$ в (64) тогда и только тогда может быть "опущена"на L_Q^0, когда один из периодов $\oint u=\mathrm{const}$, а τ пропорционально второму примитивному периоду с постоянным коэффициентом пропорциональности – меняется на верхней полуплоскости, на универсальной накрывающей $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}\ni t$.*

Доказательство. Ниже мы докажем, что указанный выбор u и τ действительно дает $\mathcal{F}$, совпадающую с поднятием на $\mathbb{C}_u$ некоторой рациональной на L_Q^0 функции.

Доказательство *необходимости* (такого выбора) следует из приведенного выше рассуждения. □

Пусть T_t – тор (погруженный в $\overline{\mathbb{C}}\times\overline{\mathbb{C}}$) и униформированный двумя переменными $\sqrt{\mathcal{P}_3}$ и q_1, связанными (алгебраическим) соотношением

$$(\sqrt{\mathcal{P}_3})^2=q_1(q_1+1)(q_1+t). \tag{66}$$

Пусть u – голоморфная переменная на его универсальной накрывающей $\mathbb{C}_u$.

Прообразы точек Q_j, $j \in \{0,1,2,3\}$: $q_1(Q_1) = 0$, $q_1(Q_2) = -1$, $q_1(Q_3) = \infty$, $q_1(Q_0) = -t$ при накрывающем отображении $\pi_{uT} : \mathbb{C} \mapsto T_t$ образуют решетку полупериодов на $\mathbb{C}_u$.

Выберем точкой $u = 0$ (и обознчим $w_0 := 0$) один из узлов решетки, соответствующих Q_0; остальные полупериоды занумеруем в соответствии с обозначениями Вейерштрасса:

$$w_j := \mathrm{const}(t) \int\limits_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_j)} dq/\sqrt{\mathcal{P}_3},$$

так что $w_1 + w_2 + w_3 = 0$, $\operatorname{Im} w_3/w_1 > 0$.

Теорема V, 2. *Пусть $\tau := w_3/w_1$ – отношение примитивных периодов, соответствующих Q_0 и Q_1, тогда*

$$\Bigg(\int\limits_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_1)} dq_1/\sqrt{\mathcal{P}_3}\Bigg)^2 = 4\pi i\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} = 4\pi i d\log\mathcal{D}(\lambda_1\lambda_2\lambda_0\lambda_3)/d\tau. \tag{67}$$

Доказательство. Это – некоторое тождество, содержащее полные эллиптические интегралы. Оно следует из формул (74), (75) и (73), которые нам будет удобнее доказать позже, когда выразим q_1, $\sqrt{\mathcal{P}_3}$ и $d\tau_{1-2}/d\tau$ через стандартные функции на торе (66). □

Пусть переменная u на $\mathbb{C}_u$ выбрана так, что $2w_1 = 1$, то есть

$$d\Big|_{\tau=\mathrm{const}} u = \frac{dq_1}{d\sqrt{\mathcal{P}_3}}/\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau} \tag{68}$$

или

$$u = \int dq/\sqrt{\mathcal{P}_3}/\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}.$$

Интеграл в правой части явно зависит от τ. Эту зависимость охарактеризуем функцией $\varphi = \varphi(u,\tau)$:

$$\varphi := -2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{q_1=\mathrm{const}} u$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial q_1}\Big|_\tau dq_1 + \frac{\partial u}{\partial\tau}\Big|_{q_1} d\tau, \tag{69}$$

$$dq_1 = \Big(\frac{\partial q_1}{\partial u}\Big|_\tau\Big)\Big(du + \varphi/2\pi i d\tau\Big).$$

Вследствие нормировки (68) $\dfrac{\partial q_1}{\partial u}\Big|_\tau = \sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}$, значит

$$dq_1 = \sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}\ (du + \varphi d\tau/2\pi i). \tag{70}$$

Подставим это выражение в (62) и обозначим $\widehat{p} := P\sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}$:

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{PVI}} &= d(Pdq_1) - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F)\wedge d\tau_{1-2} = \\ &= d(\widehat{P}(du + \varphi d\tau/2\pi i)) - d(\widehat{p}^2/(4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau) - F)\wedge d\tau_{1-2} = \\ &= d(\widehat{p}du) + d(2\widehat{p}\varphi)\wedge\frac{d\tau}{4\pi i} - d\Big(\widehat{p}^2 - 4\pi i\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}F\Big)\wedge\frac{d\tau}{4\pi i} = \\ &= d(\widehat{p}du) - d\Big((\widehat{p}-\varphi)^2 - \varphi^2 - 4\pi i\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}F\Big)\wedge\frac{d\tau}{4\pi i} = \\ &= dp\wedge du - d\Big(p^2/2 - 2\pi i\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}F\Big)\wedge\frac{d\tau}{2\pi i} + d\varphi\wedge du + d\varphi^2\wedge\frac{d\tau}{4\pi i}.\end{aligned} \tag{71}$$

Здесь мы обозначили

$$p := \widehat{p} - \varphi = P\sqrt{\mathcal{P}_3}\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau} + 2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{q_1} u.$$

Далее будем обозначать производную по u при постоянном τ штрихом; дифференцирование $\partial/\partial\tau$ всегда будет при постоянном u:

$$\ldots' := \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{\tau}\ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\ldots = \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{u}\ldots .$$

Отображение комплексной плоскости $u \ni \mathbb{C}_u$ в сферу Римана L_Q^0, находящуюся во взаимно-однозначном соответствии со значениями функции q_1 обозначим π_{uQ}.

При обозначении тэта-функций модулярный аргумент τ будем опускать, то есть

$$\theta_k(u) := \theta_k(u\,|\,\tau).$$

Если u – первый аргумент тэта-функции не указан, то он равен нулю:

$$\theta_k := \theta_k(0\,|\,\tau); \quad \theta_k' := \frac{\partial}{\partial u}\theta_k(u\,|\,\tau)\Big|_{u=0}.$$

Связь нумерации полупериодов Вейерштрасса и индексов в тэта-функциях:

$$0 = \theta_{k+1}(w_k/2w_1), \quad \forall k\in\mathbb{Z}(\mathrm{mod}4), \quad w_0 := 0.$$

Все тэта-функции удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\theta_k(u\,|\,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\theta_k(u\,|\,\tau).$$

Разделив обе части на $\theta_k(u\,|\,\tau)$, получим версию этого уравнения для логарифма тэта-функции:

$$4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\log\theta_k(u) = \log''\theta_k(u) + (\log'\theta_k(u))^2. \tag{72}$$

Вычислим $d\tau_{1-2}/d\tau$. По определению $d\tau_{1-2} = d\log\mathcal{D}(\lambda_1\lambda_2\lambda_0\lambda_3)$. Двойное отношение не зависит от того, какая именно голоморфная переменная на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ используется для его вычисления – любые две координаты связаны дробно-линейным преобразованием от которого двойное отношение не зависит. Из соображений удобства выберем $\widehat{q} = \theta_1^2(u)/\theta_0^2(u)$

$$d\tau_{1-2} = d\log\mathcal{D}(\lambda_1\lambda_2\lambda_0\lambda_3) = d\log\mathcal{D}(\widehat{q}(Q_1),\widehat{q}(Q_2),\widehat{q}(Q_0),\widehat{q}(Q_3)) \quad \widehat{q}(Q_j) = \theta_1^2(w_j)/\theta_0^2(w_j),$$

поскольку $\theta_0^2(w_3)=\theta_1^2(w_0)=0$, то

$$d\tau_{1-2}=d\log\frac{\theta_1^2(1/2)\theta_0^2((1+\tau)/2)}{\theta_1^2((1+\tau)/2)\theta_0^2(1/2)}=d\log\frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}=\frac{1}{\pi i}\Big(4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\log\frac{\theta_2}{\theta_3}\Big)d\tau.$$

Воспользуемся формулой (72). Учитывая, что $\log'\theta_2=\log'\theta_3=0$, получим

$$\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}=\frac{1}{\pi i}\frac{\log''\theta_2(u)}{\theta_3(u)}\Big|_{u=0}=\frac{(2K)^2}{\pi i}\ \frac{d^2}{dv^2}\log sn(v+K)\Big|_{v=0}=$$

$$=\frac{4K^2}{\pi i}\ \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\frac{cn(v+K)dn(v+K)}{sn(v+K)}=\frac{4K^2}{\pi i}\ \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}(-k'^2)\frac{snvdnv}{dn^2vcnv}=$$

$$=\frac{\pi^2\theta_3^4}{\pi i}\ \frac{\theta_0^4}{\theta_3^4}(-1)\frac{cnvdnv}{dnvcnv}\Big|_{v=0}=i\pi\theta_0^4.$$

Итак, значение $d\tau_{1-2}/d\tau$ вычислено, положим значение корня

$$\sqrt{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau}:=2\pi i\theta_0^2. \tag{73}$$

Рассмотрим автоморфизм $\sigma_{w_k}:\mathbb{C}_u\to\mathbb{C}_u$, состоящий в сдвиге на полупериод $w_k:\sigma_{w_k}(u)=u+w_k$, $k\in\{1,2,3\}$.

При этом преобразовании полупериоды переходят друг в друга и ни один не остается на месте; кроме того, точки, симметричные относительно инволюции $u\to -u$, переходят опять в симметричные же точки, следовательно эта инволюция "опускается" на L_Q^0.

Легко понять, что

$$(\pi_{uQ}^*)^{-1}\sigma_{(w_k-w_3)}=\chi_k,$$

где обозначено $\sigma_{(w_k-w_3)}(u):=u+w_k-w_3$.

Из этого следует, что в формуле (63) для F при различных $a_{ii}/2$ стоит одна и та же функция переменной u, например, $\pi_{uQ}^*q_1$, сдвинутая на различные полупериоды w_j. Вычислим $\pi_{uQ}^*q_1$, выразим ее через стандартные эллиптические функции.

Тор T_t, заданный уравнением (66) двулистно накрывает L_Q^0; точки L_Q^0 находятся во взаимно-однозначном соответствии со значениями функции $q_1:L_Q^0\to\overline{\mathbb{C}}$:

$$\pi_{TQ}:T_t\to L_Q^0.$$

Это накрытие разветвлено над точками Q_k, $k\in\{0,1,2,3\}$; на T_t определены: функции q_i (поднятия соответствующих функций на L_Q^0), функция $\sqrt{\mathcal{P}_3}$, проекция $(q_1,\sqrt{\mathcal{P}_3})\to q_1$ и инволюция $u\to -u$, представляющая листы накрытия $(q_1,\sqrt{\mathcal{P}_3})\leftrightarrows(q_1,-\sqrt{\mathcal{P}_3})$. Плоскость $\mathbb{C}_u$ является универсальной накрывающей тора

$$\pi_{uT}:\mathbb{C}_u\mapsto T_t.$$

Это отображение является бесконечнолистным неразветвленным накрытием.

Композиция этих двух накрывающих отображений – $\pi_{uT}:\mathbb{C}_u\mapsto T_t$ и $\pi_{TQ}:T_t\mapsto L_Q^0$ обозначена была нами через π_{uQ}:

$$\pi_{uQ}:\mathbb{C}_u\mapsto L_Q^0,\quad \pi_{u_Q}=\pi_{TQ}\circ\pi_{uT}=\pi_{TQ}(\pi_{uT}\setminus\cdot).$$

Отображение π_{uQ} – бесконечнолистное накрытие сферы Римана L_Q^0, разветвленное в узлах решетки $\bigcup\limits_{n,m\in\mathbb{Z}}(n+m\tau)/2$. Точки $Q_k\in L_Q^0$ являются образами узлов этой решетки. Мы занумеровали полупериоды w_k так, что

$$\pi_{uQ}w_k = Q_k.$$

Поднятие функции $q_k : L_Q^0 \mapsto \overline{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}_u$ – это двояко-периодическая функция с единственной особенностью – полюсом в w_3 (это прообраз точки Q_3) и нулем в w_k, $k\in\{0,1,2\}$. Полюс в w_3 и ноль в w_k – двойные, потому что π_{TQ}, а следовательно и π_{uQ} имеет ветвление второго порядка над $Q_k\in L_Q^0$. Эллиптическая инволюция $u\to -u$, переставляющая листы накрытия π_{TQ} тривиально действует на L_Q^0, следовательно $\forall_k\in\{0,1,2\}$ $\pi_{uQ}^*q_k : \mathbb{C}_u\to\overline{\mathbb{C}}$ – четная функция переменной u.

Поскольку значения функции q_1 во всех точках Q_j известны, то имеющейся информации достаточно для построения $\pi_{uQ}^*q_1$ с помощью стандартных функций на $\mathbb{C}_u$ (эллиптических и тэта-функций).

Утверждение.

$$\pi_{uQ}^*q_1 = -\left(\frac{\theta_0(\frac{1+\tau}{2})\theta_2(u)}{\theta_2(\frac{1+\tau}{2})\theta_0(u)}\right)^2 = \frac{\theta_2^2\theta_2^2(u)}{\theta_0^2\theta_0^2(u)} = \frac{k^2}{k'^2}cn^2(v,k) = \frac{-1}{e_1-e_2}(\wp(u-w_3)-e_2), \quad (74)$$

где $v=2Ku$, $2K:=\pi\theta_3^2$, $k=\theta_2^2/\theta_3^2$, $k'=\theta_0^2/\theta_3^2$, $e_k:=\wp(w_k)$, $\theta_k:=\theta_k(0|\tau)$, $\tau=w_3/w_1$, $w_1=1/2$.

Доказательство. Эта и только эта функция с периодами $2w_1=1$, $2w_3=\tau$ четная по u, имеет ноль в w_1, полюс в w_3 и значение -1 в $w_2=-(1+\tau)/2$. □

Далее не будем писать символ π_{uQ}^* перед q_1, подразумевая его: $q_1=q_1(u,\tau)$.

Сравнивая значения в полупериодах функции q_1, выраженной через тэта-функции и в терминах Якоби и Вейерштрасса, получим

$$t=-q_1(Q_0) = -\frac{k^2}{k'^2}cn^2(0) = -\frac{\theta_2^4}{\theta_0^4} = -\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{k^2}{k^2-1}.$$

В точке Q_3 функция q_1 имеет полюс. Сравним асимптотики. Положим $v=v_1+iK'$, $v_1\to 0$:

$$q_1 = \frac{k^2}{k'^2}cn^2(v,k) = \frac{k^2}{k'^2}cn^2(v_1+iK') = \frac{-1}{k'^2}\,\frac{dn^2(v_1)}{sn^2(v_1)} = \frac{-1}{k'^2v_1^2}(1+\mathcal{O}(v_1^2)),$$

$$\wp(u_1)-e_2 = \frac{1}{u_1^2}(1+\mathcal{O}(u_1)), \quad u_1\to 0, \quad u_1:=u-w_3=v_1/2K.$$

Из этого следует, что

$$e_1-e_2 = 4K^2k'^2 = \pi^2\theta_3^4\theta_0^4/\theta_3^4 = \pi^2\theta_0^4.$$

Выразим оставшиеся функции q_2 и q_0:

$$q_2 = -(1+q_1) = -\Big(1+\frac{k^2}{k'^2}cn^2v\Big) = \frac{-1}{k'^2}dn^2v,$$

$$q_0 = -(t+q_1) = -\Big(-\frac{k^2}{k'^2}+\frac{k^2}{k'^2}cn^2v\Big) = \frac{k^2}{k'^2}sn^2v.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{P}_3 = q_1 q_2 q_0 = -\frac{k^4}{k'^6} sn^2 v cn^2 v dn^2 v.$$

Выберем знак корня:

$$\sqrt{\mathcal{P}_3} = +i\frac{k^2}{k'^3} snvcnvdnv.$$

Поскольку (при постоянном τ)

$$dq_1 = -2\frac{k^2}{k'^2} cnvsnvdnv\, dv, \quad v(Q_0) = 0, \quad v(Q_1) = 2K = \pi\theta_3^2,$$

то

$$\int\limits_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_1)} dq_1/\sqrt{\mathcal{P}_3} = -\frac{2k^2k'^3}{ik'^2k^2}\int\limits_0^{2K} dv = 2ik'2K = 2\pi i\theta_0^2. \tag{75}$$

Подставив значение $d\tau_{1-2}/d\tau$ в формулу (63), где вместо $\chi_k^* q_1$ поставлена сдвинутая на полупериод w_k функция q_1 (формула (74)), получим

$$2\pi i F\frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} = \sum_{j=1}^{3} a_{jj}\wp(u - w_j) + (a_{00} - \sqrt{2a_{00}})\wp(u).$$

Итак, если обозначить $d\varphi^2 \wedge d\tau/4\pi i = \widetilde{\varphi}$, уравнение Пенлеве 6 принимает вид

$$(2\pi i)^2 d^2u/d\tau^2 = \sum a_{jj}\wp(u - w_j) + (a_{00} - \sqrt{2a_{00}})\wp(u) + \widetilde{\varphi}.$$

Вычислим это добавочное слагаемое. Предварительно заметим, что член с φ возник из-за явной зависимости от τ замены $q_1 \to u$ (формула (69)). Последующую выкладку можно рассматривать как иллюстрацию сложности "мира модулярных функций" по сравнению с "миром рациональных функций". Аналогичное вычисление, связанное с явной зависимостью замены от t, но в рациональных функциях, умещается в одну строчку:

$$0 = d\log q_t \wedge dq_t \Longrightarrow \frac{dq_t}{q_t} \wedge dq_1 + \frac{dq_t}{q_t} \wedge dt = 0.$$

Теорема.

$$\varphi := -2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_{q_1} u = \log'\theta_1(u|\tau). \tag{76}$$

Доказательство. При постоянном значении q_1

$$0 = d\log q_1 = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_\tau \log q_1 du\Big|_{q_1} + \frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_u \log q_1 d\tau\Big|_{q_1},$$

следовательно,

$$\varphi = 2\pi i\frac{\partial}{\partial\tau}\Big|_u \log q_1 / \frac{\partial}{\partial u}\Big|_\tau \log q_1.$$

Функция q_1 имеет представление (74)

$$q_1 = \frac{\theta_2^2}{\theta_0^2}\;\frac{\theta_2^2(u)}{\theta_0^2(u)} = \frac{k^2}{k'^2} cn^2(v, k),$$

так что доказательство теоремы сводится к проверке тождества, содержащего тэта-функции. Применим (72). Учитывая, что $\theta_0' = \theta_2' = 0$ и

$$\frac{d}{du}\Big|_\tau \log q_1 = 2\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)},$$

получим

$$2\varphi = 4\pi i \frac{\dfrac{\partial}{\partial\tau}\log\dfrac{\theta_2\theta_2(u)}{\theta_0\theta_0(u)}}{\dfrac{\partial}{\partial u}\log\dfrac{\theta_2\theta_2(u)}{\theta_0\theta_0(u)}} = \frac{\log''\dfrac{\theta_2}{\theta_0}}{\log'\dfrac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}} + \log'\log'\frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} + \log'\theta_2(u)\theta_0(u).$$

$\log'\log'\dfrac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} = \log'\dfrac{\theta_1(u)\theta_3(u)}{\theta_0(u)\theta_2(u)}$, значит

$$2\varphi = 2\log'\theta_1(u) + \frac{\log''\dfrac{\theta_2}{\theta_0} + \Big(\log'\dfrac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}\Big)\Big(\log'\dfrac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)}\Big)}{\log'\dfrac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}}.$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Функции $\log'\dfrac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}$ и $\log'\dfrac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)}$ имеют полюсы и нули в полупериодах тора, причем там, где у одной из них ноль, у другой – полюс, так что их произведение от u не зависит – функция только τ. Вычислим эту функцию

$$\log'\frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}\log'\frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)} = -(2K)^2\Big(\frac{d}{dv}\log cnv\Big)\frac{d}{dv}\log cn(v+K) =$$

$$= -4K^2\frac{snvdnv}{cnv}\ \frac{sn(v+K)dn(v+K)}{cn(v+K)} = 4K^2,$$

в то же время

$$\log''\frac{\theta_2}{\theta_0} = (2K)^2\frac{d^2}{dv^2}\log cnv\Big|_{v=0} = -4K^2\frac{d}{dv}\ \frac{snvdnv}{cnv}\Big|_{v=0} = -4K^2.$$

□

Теорема доказана.

Продифференцируем (72) по u. Поскольку $\varphi = \log'\theta_1(u)$, получим

$$d\varphi\wedge du + d\varphi^2\wedge d\tau/4\pi i = -d\log''\theta_1(u)\wedge\frac{d\tau}{4\pi i}.$$

Именно при *таком* выборе переменных u и τ разность $4\pi i\partial\varphi/\partial\tau - \partial\varphi^2/\partial u$ оказалась эллиптической функцией $-4\pi i\log''\theta_1(u)$. Поскольку $\log''\theta_1(u) = -\mathcal{P}(u) + c(\tau)$ – эти функции имеют одинаковые периоды и особенности, окончательный вид формы Ω_{PVI} получается таким:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dp\wedge du - d(p^2/2 - \mathcal{F}(u,\tau))\wedge\frac{d\tau}{2\pi i}, \tag{77}$$

$$\mathcal{F}(u,\tau)=\sum_{j=1}^{3}a_{jj}\wp(u-w_j)+(\sqrt{a_{00}}-1/\sqrt{2})^2\wp(u)$$

$$p=iP\frac{\theta_3^2\theta_2^2}{\theta_0^4}\ \frac{\theta_1(u)\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_0^3(u)}(2\pi i\theta_0^2)-\log'\theta_1(u)=$$

$$=-2\pi P\frac{\theta_3^2\theta_2^2}{\theta_0^2}\ \frac{\theta_1(u)\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_0^3(u)}-\log'\theta_1(u)=$$

$$=-\Big(p_1+\frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1}-\frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2}-\frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_t}\Big)\Big(2\pi\frac{\theta_3^2\theta_2^2}{\theta_0^2}\Big)\frac{\theta_1(u)\theta_2(u)\theta_3(u)}{\theta_0^3(u)}-\log'\theta_1(u)$$

$$u=\frac{1}{2\pi i\theta_0^2}\int_{-t}^{q_1}dq/\sqrt{q(q+1)(q+1)}.$$

Уравнение Пенлеве 6 принимает вид

$$(2\pi i)^2\frac{d^2}{d\tau^2}u=\sum_{j=1}^{3}a_{jj}\wp'(u-w_j)+(\sqrt{a_{00}}-1/\sqrt{2})^2\wp'(u),\tag{78}$$

где функция $\wp'$ строится по решетке периодов $2w_1=1$, $2w_3=\tau$.

VI. Поверхность начальных данных PVI (поверхность Окамото) и определяющее многообразие

В части IV, Теорема 3, IV мгообразие тетраэдров $M_{a_{\overline{ii}}}$ было покрыто тремя (см. формулу (52)) окрестностями, каждая из которых симплектически изоморфна квадрике $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i\in\{1,2,3\}$. Эквивалентной, правда менее симметричной, является следующая переформулировка процедуры построения $M_{a_{\overline{ii}}}$.

Рассмотрим одну из квадрик, например, $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и "приклеим" к ней остальные $\mathcal{C}_{a_{22}}$ и $\mathcal{C}_{a_{33}}$, т.е. "отождествим" некоторые точки $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i=2,3$. Выделим в $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ открытые множества (окрестности) $V_{1,i}\subset\mathcal{C}_{a_{11}}$ и $V_{i,1}\subset\mathcal{C}_{a_{ii}}$, и зададим симплектические изоморфизмы

$$\psi_{1i}:V_{1,i}\xrightarrow{\cong}V_{i,1},\quad i=2,3.$$

Это позволит определить $M_{a_{\overline{ii}}}$ как абстрактное многообразие – симплектические карты φ_i и φ_i^* квадрики $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ (см. Утверждение 1, III) в композиции с ψ_{1i} дадут функции переклейки многообразия $M_{a_{ii}}$

$$\mathbb{A}^2_{p_1\,q_1}\supset\phi_1^{-1}(V_{1,i}\cap U)\xrightarrow{\phi_1}V_{1,i}\cap U\xrightarrow{\psi_{1i}}V_{i1}\cap U\xrightarrow{\phi_i^{-1}}\mathbb{A}^2_{p_i\,q_i}.$$

Эта схема показывает, как действует функция переклейки $\varphi_i^{-1}\circ\psi_{1i}\circ\varphi_1$, отображающая друг в друга некоторые области в $\mathbb{A}^2$. Аналогичным образом строятся и остальные:

$$(\phi_i^*)^{-1}\circ\psi_{1i}\circ\phi_1,\quad \phi_i^{-1}\circ\psi_{1i}\circ\phi_1^*,\quad (\phi_i^*)^{-1}\circ\psi_{1i}\circ\phi_1^*.$$

Напомним, что мы работаем с "алгебраическими" окрестностями (топология Зарисского, см. [Shafar]), т.е. "очень большими". Дополнение $M_{a_{\overline{ii}}}$ к любой из окрестностей $U(-\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{ii}}/j)$, $i,j \in \{1,2,3\}$, которыми мы оперируем, *меньшей размерности*, чем размерность самого $M_{a_{\overline{ii}}}$. Любая наша окрестность покрывает всю *поверхность* $M_{a_{\overline{ii}}}$ за исключением нескольких *линий* на ней.

Приведенные в предыдущей главе формулы явным образом устанавливают изоморфизм между $U(-\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{22}}/j)$ и $\mathcal{C}_{a_{11}}$, т.е. всем $M_{a_{\overline{ii}}}$ за вычетом трех линий: одной $-\mathcal{D}_{02}(-\sqrt{2a_{00}}, \sqrt{2a_{22}})$, на ее точках (наборах $A^{(\overline{i})}$) $\sigma_- = \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}$ является для $\mathrm{Ad}_{A^{(2)}}$ собственным вектором с собственным числом $\sqrt{2a_{22}}$ и двух компонент $Q^{-1}_{-\sqrt{2a_{00}}}(\langle A^{(3)}, \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}\rangle = 0)$.

Развиваемая *сейчас* точка зрения (на построение $M_{a_{\overline{ii}}}$) состоит в том, что мы с помощью отображений $\psi_{1,2}$ и $\psi_{1,3}$, "приклеееваем" к $\mathcal{C}_{a_{11}}$ эти дивизоры, получая желаемое многообразие – пространство $M_{a_{\overline{ii}}}$.

Нам это нужно для того, чтобы аналогичным образом приклеить (теперь уже ко всему $M_{a_{\overline{ii}}}$) еще один дивизор, назовем его $\mathcal{D}^t$, точкам которого уже не будут соответствовать никакие тетраэдры (наборы $A^{(\overline{i})}$). Забегая вперед скажем, что точкам дивизора $\mathcal{D}^{t_0}$ будут соответствовать "растущие", специальным образом "уходящие на бесконечность" наборы $A^{(\overline{i})} : A^{(i)}_{jk} \to \infty$, $t \to t_0$.

Асимптотика $A^{(\overline{i})}(t)$ будет такой, что через соответствующие координатные функции $(p(t), q(t))$, $p = p(A^{(\overline{i})})$, $q = q(A^{(\overline{i})})$ сингулярные при $t = t_0$ – решения $(p^{\mathrm{sing}}_{t_0}(t), q^{\mathrm{sing}}_{t_0}(t))$ системы Шлезингера–Пенлеве 6 будут выражаться гладким образом. Другими словами, новая, "руками" построенная, окрестность будет нужна для описания сингулярных при $t = t_0$ решений системы Шлезингера–Пенлеве 6.

1. Симплектическая склейка квадрик.

Сначала выясним, как к $\mathcal{C}_{a_{11}}$ "приклеивается" $\mathcal{C}_{a_{33}}$, параметризующая слой $\langle A^{(3)}, \sigma^{-\sqrt{2a_{00}}}\rangle = 0$ отображения $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}$, где q_1 и q_2 имеют полюсы.

Склейка $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_c^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$.

Пусть X_i – координаты на $\mathcal{C}_{R_x^2}$, Y_i – координаты на $\mathcal{C}_{R_y^2}$:

$$\mathcal{C}_{R_x^2}: \ X_1X_2 + X_3^2 = R_x^2/2, \ \mathcal{C}_{R_y^2}: \ \ Y_1Y_2 + Y_3^2 = R_y^2/2. \tag{79}$$

Если, скажем $R_x^2 \neq 0$, то задание (X_1, X_2, X_3) эквивалентно заданию точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$, если же $R_x^2 = 0$, то при $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ нужно еще задать $x_1 : x_2 : x_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^2$ с коники $x_1x_2 + x_3^2 = 0$. Отождествим точку $(X_1X_2X_3) \in \mathcal{C}_{R_x^2}$ с точкой $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathcal{C}_{R_y^2}$, если

$$\begin{aligned} &X_1 = 1/Y_1 \\ &X_3 = -Y_3 - c, \quad c \in \mathbb{C} \\ &X_2 = (R_x^2/2 - X_3^2)/X_1 = Y_1(R_x^2/2 - (Y_3 + C)^2), \end{aligned} \tag{80}$$

т.е. одной точке будущего многообразия $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_c^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$ будут соответствовать точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$, связанные (80).

Замечание. Преобразование (80) бирационально и инволютивно, обратное получется заменой $X \leftrightarrows Y$. $\square$

В канонических переменных (p,q) и (p^*,q^*) склейка (80) записывается так:

$$\begin{aligned} q_x &= 1/q_y \\ p_x &= -q_y(p_y q_y + \sqrt{R_x^2/2} + \sqrt{R_y^2/2} + C). \end{aligned} \tag{81}$$

Мы снабдили p и q соответствующим квадрике индексом. Последнее равенство – следствие того, что

$$X_3 = p_x q_x + \sqrt{R_x^2/2} = -(p_x^* q_x^* + \sqrt{R_x^2/2}) =$$

$$= -(Y_3 + c) = -(p_y q_y + \sqrt{R_y^2/2} + c) = p_y^* q_y^* + \sqrt{R_y^2/2} - c.$$

Очевидно, что $dp_x \wedge dq_x = dp_y \wedge dq_y$ – склейка симплектическая. Многообразие $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_c^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$ можно трактовать как одну из квадрик, например, $\mathcal{C}_{R_x^2}$ с двумя "приклеенными на бесконечности по X_1" линиями (простыми дивизорами)

1) если $R_y \neq 0$, то это $Y_1 = 0$, $Y_3 = \pm\sqrt{R_y^2/2}$, $Y_2 \in \mathbb{C}$;

2) если $R_y = 0$ то это $Y_1 = Y_3 = 0$, $Y_2 \in \mathbb{C}$ и

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0, \quad y_1 : y_2 : y_3 = 1 : -p^2 : p = (p^*)^2 : -1 : p^*.$$

К точке $Y_1 = 0$, $Y_3 = \pm\sqrt{R_y^2/2}$, $Y_2 = \mathrm{const} \neq 0$ добавленного дивизора стремится точка $(X_1(s), X_2(s), X_3(s))$, $s \to 0$ квадрики $\mathcal{C}_{R_x^2}$ такая, что

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s}\frac{Y_2}{2\sqrt{R_y^2/2 - s}} \to \infty \\ X_2(s) &= \frac{s}{Y_2}\Big(2\sqrt{R_y^2/2} - s\Big)\Big(R_x^2/2 - \Big(\sqrt{R_y^2/2} - s \pm c\Big)^2\Big) \to 0 \\ X_3(s) &= \mp\Big(\sqrt{R_y^2/2} - s \pm c\Big) \to \mp\sqrt{R_y^2/2}. \end{aligned}$$

Именно такой получится зависимость $X_i(s)$, если положить $Y_3 = \pm(\sqrt{R_x^2/2} - s)$. В этом случае $0 = Y_1Y_2 + Y_3^2 - R_y^2/2 = Y_1Y_2 - 2\sqrt{R_y^2/2}\,s + s^2$ и, значит, $Y_1 = s(2\sqrt{R_y^2/2} - s)/Y_2 \to 0$.

Если же $R_y = 0$ и линии, соответствующие "$+\sqrt{R_y^2/2}$" и "$-\sqrt{R_y^2/2}$" совпадают, то к точке $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$, $y_1 : y_2 : y_3 = 1 : -p^2 : p$ второго добавленного дивизора (раздутой вершины конуса) стремится $(X_1(s), X_2(s), X_3(s))$:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= 1/s \to \infty \\ X_2(s) &= s(R_x^2/2 - (ps + c)^2) \to 0 \\ X_3(s) &= -ps - c \to -c \end{aligned}$$

Замечание. Имеется естественное отображение

$$\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_c^Q \mathcal{C}_{R_y^2} \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$$
$$(X_1, X_2, X_3) \to (X_1 : 1) = (1 : Y_1) \longleftarrow (Y_1, Y_2, Y_3).$$

Общим слоем его являются параболы, лежащие на $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$:

$$\bigcup_{X_2 \in \mathbb{C}} X_1 X_2 + X_3^2 = R_x^2/2, \quad X_1 = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$$
$$\bigcup_{Y_2 \in \mathbb{C}} Y_1 Y_2 + Y_3^2 = R_y^2/2, \quad Y_1 = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$$

На особенных слоях $X_3^2 = R_x^2/2$ и $Y_3^2 = R_y^2/2$ параболы вырождаются в пары прямых:

$$X_1 = 0, X_3 = \pm\sqrt{R_x^2/2}, X_2 \in \mathbb{C}$$
$$Y_1 = 0, Y_3 = \pm\sqrt{R_y^2/2}, X_2 \in \mathbb{C}$$

Склейка $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$.

Пусть $t \in \mathbb{C}$ – некоторый параметр. Очевидно, что если склеить точки квадрик (79), сдвинув их “q-координаты” на постоянную величину “t”, а “p-координаты” оставить неизменными – $q_x = q_y + t$, $p_x = p_y$, то такая склейка будет симплектической $dp_x \wedge dq_x = dp_y \wedge dq_y$. Из соображений симметрии, однако, нам будет удобнее перенести все переменные в одну часть равенства (поменяв знаки), что, конечно же, не изменит сути происходящего. Отождествим точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$, чьи координаты удовлетворяют равенствам

$$X_1 + Y_1 + t = 0, \;\; \frac{X_3 - \sqrt{R_x^2/2}}{X_1} + \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1} = 0,$$

что эквивалентно

$$X_3 = p_x X_1 + \sqrt{R_x^2/2} = -p_y X_1 + \sqrt{R_x^2/2} = p_y(Y_1 + t) + \sqrt{R_x^2/2}$$
$$X_2 = -p_x(X_3 + \sqrt{R_x^2/2}) = p_y(p_y(Y_1 + t) + 2\sqrt{R_x^2/2}).$$

Получаем закон склейки

$$p_x + p_y = 0, \quad q_x + q_y + t = 0, \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= -(Y_1 + t) \\
X_2 &= \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1}\left(\frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1}(Y_1 + t) + 2\sqrt{R_x^2/2}\right) \\
X_3 &= \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1}(Y_1 + t) + \sqrt{R_x^2/2},
\end{aligned} \tag{83}$$

преобразование инволютивно – обратное получится заменой букв $X \leftrightarrows Y$.

Замечание. Линии, получившиеся из "раздутых" вершин, если таковые существуют, "склеиваются" регулярным образом (биективно), потому что в окрестностях таких линий координатами являются "p, q-координаты", а они преобразуются регулярно (биективно): $q_x = -q_y - t$, $p_x = -p_y$. Геометрически склейка (83) означает, что сечения обеих квадрик, т.е. параболы

$$X_2 \ \mathrm{const}_x + X_3^2 = R_x^2/2, \quad X_1 = \mathrm{const}_x$$
$$Y_2 \,\mathrm{const}_y + Y_3^2 = R_y^2/2, \quad Y_1 = \mathrm{const}_y = -\mathrm{const}_x - t$$

отождествляются между собой. Там, где $X_1 Y_1 \neq 0$, многообразие $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$ покрыто обеими квадриками. Над значением $X_1 = 0$ "висят" "особенные" слои – это $X_3 = \pm\sqrt{R_x^2/2}$, $X_2 \in \mathbb{C}^2$, либо $X_3 = 0$, $X_2 \in \mathbb{C}$ и $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -p^2 : p$, $x_1 : x_3 \in \mathbb{C}\mathbf{P}^1$. Одна из этих линий "приклеена" к $\mathcal{C}_{R_y^2}$ – это $X_3 = \sqrt{R_x^2/2} \neq 0$:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -t, \\ Y_2 &= \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} \left(\frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}}(X_1 + t) + 2\sqrt{R_y^2/2} \right) = \\ &= \frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}} \left(\frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}} t + 2\sqrt{R_y^2/2} \right), \\ Y_3 &= \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}}(X_1 + t) + \sqrt{R_x^2/2} = \frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}} t + \sqrt{R_x^2/2}, \end{aligned}$$

либо (если $R_x = 0$) – "раздутая" вершина конуса:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -t - X_1, \\ Y_2 &= p(p(X_1 + t) + 2\sqrt{R_y^2/2}) = p(pt + 2\sqrt{R_y^2/2}) \\ Y_3 &= p(X_1 + t) = pt, \end{aligned}$$

а другая ($X_3 = -\sqrt{R_x^2/2}, X_1 = 0$, $X_2 \in \mathbb{C}$) "не приклеена" – покрыта только одной картой – квадрикой $\mathcal{C}_{R_x^2}$.

Подытожим.

У $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$ над точкой $X_1 = 0$ всегда находится один "раздутый" дивизор – прямая, параметризованная значениями $X_2 \in \mathbb{C}$, или $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ параметризованная $x_1 : x_3$.

Ее точки не принадлежат $\mathcal{C}_{R_y^2}$, потому что на ней

$$Y_2 = \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} \left(\frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}}(X_1 + t) + 2\sqrt{R_y^2/2} \right) \sim t \left(\frac{X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} \right)^2 \to \infty$$

для всех $X_2 \neq 0$, $X_3 \mapsto -\sqrt{R_x^2/2}$ независимо от значений R_x, R_y.

Аналогично и над $Y_1 = 0$ всегда существует прямая (иногда – проективная), добавленная к $\mathcal{C}_{R_x^2}$.

2. Поверхность Окамото, определяющее многообразие.

Система Шлезингера–Пенлеве 6 задана как поле направлений в $M_{a_{\overline{ii}}}\times T$. Искомое направление – направление вырождения формы

$$\Omega_{\mathrm{PVI}}=dp_1\wedge dq_1-d\left(q_1q_2q_tp_1^2+2p_1\left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}q_2q_t-\sqrt{\frac{a_{22}}{2}}q_1q_t-\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}q_1q_2\right)+\right.$$
$$\left.q_t\left(\frac{a_{33}}{2}-(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}+\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}+\sqrt{\frac{a_{22}}{2}})^2\right)\right)\wedge d\tau_{1-2}:=dp_1\wedge dq_1-dH_{1/3}\wedge d\tau_{1-2} \tag{84}$$

Это – определение (обозначение) гамильтониана $H_{1/3}$. Индекс "1/3" символизирует, что q-координата в этом представлении (карте) равна нулю в Q_1 и бесконечности в $Q_3: q=q_1(Q_1)=0,\ q_1(Q_3)=\infty$.

Формула (84) задает поле направлений в той части $M_{a_{\overline{ii}}}$, в которой p_1 и q_1 являются координатами.

В §2 части IV (Теорема 3, IV) были введены бо́льшие "координатные окрестности" – квадрики $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i=1,2,3$. В частности, были построены координаты

$$X_1^{(1)},X_2^{(1)}X_3^{(1)}:\quad X_1^{(1)}X_2^{(1)}+(X_3^{(1)})^2=a_{11}/2$$

(верхний индекс "(1)" означает, что $X^{(1)}=0\iff q_1=0$), покрывающие прообраз окрестности точки $q_1=0$ отображения $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}:M_{a_{\overline{ii}}}\mapsto L_Q^0\sim\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ – все $M_{a_{\overline{ii}}}$ кроме слоя $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}$ над Q_3 и одной из двух компонент слоя над Q_2. Запишем гамильтониан $H_{1/3}$ в координатах $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$. Несмотрия на то, что q_1,p_1 выражаются через $X_i^{(1)}$ лишь рационально (имеется $X_1^{(1)}$ в знаменателе), гамильтониан $H_{1/3}(p_1,q_1)$ обязан быть многочленом от $X_i^{(1)}$ – это линейная комбинация a_{ij} функций, не имеющих особенностей на всем $M_{a_{\overline{ii}}}$, в частности, на $U(-\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{22}}/3)$ всей области определения q_1,p_1

$$q_1=X^{(1)},\ p_1=(X_3^{(1)}-\sqrt{a_{11}/2})/X_1^{(1)},$$
$$X_3^{(1)}=p_1q_1+\sqrt{a_{11}/2},\ X_2^{(1)}=-p_1(p_1q_1+2\sqrt{a_{11}/2}),$$

$$\begin{aligned}H_{1/3}=&q_2q_t(p_1(p_1q_1+2\sqrt{a_{11}/2}))-2p_1q_1(\sqrt{a_{22}/2}q_t+\sqrt{a_{00}/2}q_2)-\\&-(q_1+t)(a_{33}/2-(\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{11}/2}+\sqrt{a_{22}/2})^2)=\\&=-(X_1^{(1)}+1)(X_1^{(1)}+t)X_2^{(1)}+\\&+2(X_3^{(1)}-\sqrt{a_{11}/2})(\sqrt{a_{22}/2}(X_1^{(1)}+t)+\sqrt{a_{00}/2}(X_1^{(1)}+1))-\\&-(X_1^{(1)}+t)(a_{33}/2-(\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{11}/2}+\sqrt{a_{22}/2})^2)\end{aligned}\tag{85}$$

Обратим внимание на симметрию выражения (84) относительно замены индекса у переменной $q_{\dots}$. Сделаем замену $q_1\to q_t:q_t=-(q_1+t)$. Если ввести переменную $p_t:=-p_1$, канонически сопряженную q_t, т.е. $dp_1\wedge dq_1=dp_t\wedge dq_t\Big|_{t=\mathrm{const}}$, то форма Ω_{PVI} сохранит вид

$$\Omega_{\mathrm{PVI}}=dp_t\wedge dq_t-d\left(\mathcal{P}_3p_t^2+2p_t\mathcal{P}_2+\mathcal{P}_1\right)\wedge d\tau_{1-2}$$

где $\mathcal{P}_i$ опять многочлен степени "i" по q_t. Вследствие явной зависимости замены $q_1 \to q_t$ от t

$$q_1 + q_t + t = 0, \quad p_1 + p_t = 0 \tag{86}$$

к гамильтониану $H_{1/3}$ добавится нетривиальное слагаемое.

Зависимость замены от времени имеет специальный "аддитивный" вид, то есть "старое q" + "новое q" + "функция времени"$= 0$, поэтому возникающая добавка к гамильтониану будет линейна по импульсу; она войдет в $\mathcal{P}_2$:

$$dp_1 \wedge dq_1 = dp_t \wedge d(q_t + t) = dp_t \wedge dq_t - d\left(\frac{dt}{d\tau_{1-2}}\right) p_t \wedge d\tau_{1-2}.$$

Заметим, что эта добавка "даст поправку 1/2 к значению параметра $\sqrt{a_{00}/2}$". Вычислим $\mathcal{P}_2$. Поскольку $dt/d\tau_{1-2} = -t(t-1)$, $q_1 = q_1(Q_t) - q_t$, $q_2 = q_2(Q_t) + q_t$ (так как $q_1(Q_t) = -t, q_2(Q_t) = t - 1$), $q_1 q_2 = q_1(Q_t) q_2(Q_t) + q_t \left(q_1(Q_t) - q_2(Q_t) - q_t\right) = -t(t-1) - q_t(q_t + 2t - 1)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2 =& 2p_1(\sqrt{a_{11}/2}q_2 q_t - \sqrt{a_{22}/2}q_1 q_t - \sqrt{a_{00}/2}q_1 q_2) + p_t dt/d\tau_{1-2} = \\ =& 2q_1 q_2 p_t(\sqrt{a_{00}/2} - 1/2) - \\ & -2p_t q_t \left(\sqrt{a_{11}/2}q_2 - \sqrt{a_{22}/2}q_1 + q_t/2 + (q_2(Q_t) - q_1(Q_t))/2\right).\end{aligned}$$

Обозначим $H_{t/3}$ гамильтониан в переменных p_t, q_t:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} = dp_t \wedge dq_t - dH_{t/3} \wedge d\tau_{1-2}$$

Аналогично (85) получим, что *гамильтониан* $H_{1/3}$ *– многочлен от координат* $X_1^{(t)}$, $X_2^{(t)}$, $X_3^{(t)}$ *на квадрике* $\mathcal{C}_{a'_{00}}$

$$X_1^{(t)} X_2^{(t)} + \left(X_3^{(t)}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} - \frac{1}{2}\right)^2 := \frac{a'_{00}}{2}, \qquad a'_{00} := (\sqrt{a_{00}} - 1/\sqrt{2})^2,$$

где $X_i^{(t)}$ связаны с координатами q_t, p_t стандартным образом:

$$X_1^{(t)} = q_t,\ X_2^{(t)} = -p_t(p_t q_t + 2\sqrt{a'_{00}/2}),\ X_3^{(t)} = p_t q_t + \sqrt{a'_{00}/2}.$$

Через $\sqrt{a'_{00}/2}$ обозначено одно из значений квадратного корны из $\sqrt{a'_{00}/2}$:

$$\sqrt{a'_{00}/2} := \sqrt{a_{00}/2} - 1/2.$$

Для гамильтониана $H_{t/3}$ получаем выражение

$$
\begin{aligned}
H_{t/3} =& q_1 q_2 \left(p_t(p_t q_t + 2\sqrt{a'_{00}/2}) \right) \qquad (87)\\
& -2p_t q_t \left(\sqrt{a_{11}/2} q_2 - \sqrt{a_{22}/2} q_1 + q_t/2 + (q_2(Q_t) - q_1(Q_t))/2 \right) + \\
& + q_t \left(a_{33}/2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 \right) = \\
& = \left(X_1^{(t)} + t \right) \left(X_1^{(t)} + t - 1 \right) X_2^{(t)} - \\
& -2 \left(X_3^{(t)} - \sqrt{a'_{00}/2} \right) \left((\sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2} + 1/2) X_1^{(t)} + \right. \\
& \left. + \sqrt{a_{11}/2}(t-1) + \sqrt{a_{22}/2} t + t - 1/2 \right) + \\
& X_1^{(t)} \left(a_{33}/2 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2 \right)
\end{aligned}
$$

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство.

Утверждение. *Точки квадрики $\mathcal{C}_{a'_{00}}$ отождествляются с точками квадрики $\mathcal{C}_{a_{11}}$ посредством равенств* (86), *т.е. это – симплектическая склейка $\mathcal{C}_{a_{11}} \uplus_t^T \mathcal{C}_{a'_{00}}$.* $\square$

Как мы знаем, при этой склейке к квадрике $\mathcal{C}_{a_{11}}$ (к поверхности $M_{a_{\overline{ii}}}$!) над параболой "$q_1 = -t = \mathrm{const}$" добавляется дивизор – линия $p_1 = \infty$, $p_1^* = 1/p_1 = 0$, попасть в точки которой можно "уходя на бесконечность"

$$p_1 \to \infty, \quad q_1 \to -t \text{ по } \mathcal{C}_{a_{11}} \sim U(-\sqrt{2a_{00}}//\sqrt{2a_{22}}/3) \subset M_{a_{\overline{ii}}}$$

специальным образом:

так, чтобы величина $q_t^* := -p_1(p_1(q_1 + t) + 2\sqrt{a'_{00}/2})$ оставалсь конечной.

Определим многообразие $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ – естественную область определения системы Шлезингера–Пенлеве 6 (расширенное фазовое пространство), добавив к $M^T_{a_{\overline{ii}}} = M_{a_{\overline{ii}}} \times T$ линии $\mathcal{D}^t$ – над каждой $t \in T$ "приклеим" к $M^T_{a_{\overline{ii}}}$ свою линию $\mathcal{D}^t$.

Построенное таким образом комплексно-трехмерное алгебраическое многообразие $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ называется *определяющим многообразием уравнения Пенлеве* 6.

Объяснением к этому названию является Теорема 1 VI, которую мы докажем ниже.

На $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ естественным образом определено отображение

$$Q^{\mathcal{M}}_{-\sqrt{2a_{00}}} : \mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}} \longrightarrow L_Q^{(0)} \sim \mathbb{CP}^1.$$

Пересечение его слоя $(Q^{\mathcal{M}}_{-\sqrt{2a_{00}}})^{-1}$ $(0 : q_1 : q_2 : q_3)$ и "симплектического листа" $t = t_0 = \mathrm{const}$ в $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ – это, по построению, комплексно-двумерное многообразие $M_{a_{\overline{ii}}} \uplus_{t_0}^T \mathcal{C}_{a'_{00}}$; оно называется *поверхностью начальных данных уравнения Пенлеве* 6, или "поверхностью Окамото" (см. [Ok-s, ShT]). Обозначим ее $M_{a_{\overline{ii}},t}$.

Рассмотрим квадрику $\mathcal{C}_{R_0^2}$ и набор квадрик $\mathcal{C}_{R_i^2}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, которые мы приклеим к $\mathcal{C}_{R_0^2}$ симплектическими склейками $\uplus_{t_i}^T$ или $\uplus_{c_i}^Q$ с какими-нибудь t_i,

$c_i \in \mathbb{C}$. Обозначим получившееся многообразие

$$\mathcal{C}_{R_0^2}\left(\uplus^{(1)}\mathcal{C}_{R_1^2}\right)\left(\uplus^{(2)}\mathcal{C}_{R_2^2}\right)\ldots\left(\uplus^{(3)}\mathcal{C}_{R_3^2}\right)$$

где $\uplus^{(i)}$ – это или $\uplus^T_{t_i}$ или $\uplus^Q_{c_i}$. Это, очевидно, симплекстическое многообразие. Скобки $(\uplus^{(i)}\mathcal{C}_{R_i^2})$ показывают, как $\mathcal{C}_{R_i^2}$ приклеиваются именно к $\mathcal{C}_{R_0^2}$. Конечно же все остальные квадрики $\mathcal{C}_{R_i^2}$ и $\mathcal{C}_{R_j^2}$ тоже окажутся симплектически склеены друг с другом, но как именно – нам сейчас не важно.

Утверждение. *Поверхность Окамото $M_{a_{\overline{ii}},t}$ – симплектический лист системы Шлезингера–Пенлеве 6 может быть определен и так:*

$$M_{a_{\overline{ii}},t} := \mathcal{C}_{a_{11}}\left(\uplus^T_1\mathcal{C}_{a_{22}}\right)\left(\uplus^Q_{\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{22}/2}}\mathcal{C}_{a_{33}}\right)\left(\uplus^T_t\mathcal{C}_{a'_{00}}\right).$$

Замечание. Операции склейки $\uplus^T_t$ и $\uplus^Q_c$ квадрик определены нами в некоторых конкретных координатах $X_1^{(i)}$, $X_2^{(i)}$, $X_3^{(i)}$; мы указали способ построения таких координат (через построение стандартного сопутствующего базиса) на квадриках $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, соответствующих вершинам $A^{(i)}$, $i = 1,2,3$, а также на $\mathcal{C}_{a'_{00}}$, соответствующей "растущим решениям".

Замечание 1, VI. Каждая из квадрик $\mathcal{C}_{a_{11}}$, $\mathcal{C}_{a_{22}}$, $\mathcal{C}_{a_{33}}$, $\mathcal{C}_{a'_{00}}$ покрывается парой "стандартных" симплектических карт U_i и U_i^* с координатами (p,q) и (p^*,q^*), связанных между собой преобразованиями

$$p^* = 1/p, \quad q^* = -p(pq + 2\sqrt{a'_{ii}/2}); \quad a'_{ii} := a_{ii}, \quad i = 1,2,3\ ,$$

а между разными квадриками – преобразованиями склеек (81), (82). Таким образом получается традиционное определение (см. [Ok-s, ShT]) многообразия начальных данных как абстрактного многообразия, определенного через функции переклейки. □

Многообразие $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ определяется как несвязное объединение всех $M_{a_{\overline{ii}},t}$

$$\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}} = \bigsqcup_{t\in T} M_{a_{\overline{ii}},t}.$$

На $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ определена функция

$$t:\ \mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}.$$

Прообразом точки t является симплектический лист системы Шлезингера–Пенлеве 6 – поверхность Окамото $M_{a_{\overline{ii}},t}$. Гамильтоново поле направлений системы Шлезингера–Пенлеве 6) задает симплектические изоморфизмы (это мы доказывать не будем) между $M_{a_{\overline{ii}},t}$ при разных t; при таком изоморфизме q-координата точки $(p(t),q(t))$, соответствующей какой-нибудь фиксированной точке (q_0,p_0) на листе $t = t_0$ удовлетворяет уравнению Пенлеве 6.

Определение. *Назовем поле направлений на алгебраическом многообразии $\mathcal{M}$ алгебраическим, если координаты прямых в касательном к $\mathcal{M}$ расслоении $T\mathcal{M}$, задающих это поле, алгебраически связаны с алгебраическими координатами на $T\mathcal{M}$.*

Замечание. На нечетномерном многообразии алгебраическое поле направлений может быть задано алгебраической внешней 2-формой $\Omega \subset \Lambda^2 T^*\mathcal{M}$ – замкнутой и максимально не вырожденной. Форма Ω обязана быть вырожденной (это – следствие нечетномерности $\mathcal{M}$), но мы требуем вырожденности по линейному подпространству в $T\mathcal{M}$ минимально-возможной размерности (см. [Arnold]) – по одномерному подпространству, т.е. по направлению. Чрезвычайно интересной представляется следующая теорема (см. [Ok-s, ShT, ArLys]), которая позволяет свести некоторые (формально – все) вопросы исследования уравнения Пенлеве 6 к исследованию алгебраического многообразия $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$.

Теорема 1, VI. *Поле направлений Шлезингера–Пенлеве 6 является единственным гладким алгебраическим полем направлений на $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, сформулируем (и докажем) несколько вспомогательных утверждений.

Прежде всего докажем, что $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$ "содержит проективную кривую", т.е. существует гладкое непостоянное отображение некоторой компактной римановой поверхности в $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$.

Рассмотрим функцию a_{0t} (она же – гамильтониан $-H_{1/3}$):

$$a_{0t} = -(a_{01} + ta_{03})$$

Утверждение. *В той части $M_{a_{\overline{ii}},t}$, где координатами являются p^*_t и q^*_t:*

$$\begin{aligned} p^*_t &:= 1/p_t = -1/p_1 \\ q^*_t &:= -p_t(p_t q_t + 2\sqrt{a'_{00}/2}) = \frac{1}{p_1}\left(\frac{q_1+t}{p_1} + 2\sqrt{a'_{00}/2}\right), \\ q_t &= -p^*_t(p^*_t q^*_t + 2\sqrt{a'_{00}/2}), \end{aligned}$$

функция a_{0t}, как функция переменной p^*_t (считая $q^*_t = \mathrm{const}$) имеет вдоль линии $(p^*_t = 0, q^*_t \in \mathbb{C})$ полюс (только!) первого порядка с ненулевым вычетом.

Доказательство. Выразим a_{0t} через p^*_t и q^*_t, заменив p_1 и q_i (формула (54)) на p^*_t и q^*_t:

$$\begin{aligned} -a_{0t} = \sqrt{2a_{00}}(1-t)\beta_1 + q_t\left(\frac{1}{p^*_t}(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}) - \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 + \frac{a_{33}}{2}\right) - \\ - \sqrt{2a_{00}}t\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right), \end{aligned} \tag{88}$$

где

$$\beta_1 = p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} = \frac{t}{p^*_t} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} - \sqrt{2a'_{00}} - p^*_t q^*_t.$$

Так как $q_t = -p_t^*(p_t^* q_t^* + \sqrt{2a'_{00}})$ имеет корень первого порядка (по p_t^*), а β_1 – полюс первого порядка, то видно, что у a_{0t} действительно полюс только первого порядка, сосчитаем вычет

$$\sqrt{2a_{00}}(1-t)t - \sqrt{2a'_{00}}(t-t^2) = t(t-1)(\sqrt{2a'_{00}} - \sqrt{2a_{00}}) = -t(t-1)$$

□

Утверждение доказано.

Итак,

$$a_{0t} = \frac{t(t-1)}{p_t^*} + \mathcal{P}(q_t^*, p_t^*),$$

где $\mathcal{P}$ – многочлен.

Утверждение. *Функция $f = f_{123} = \langle [A^{(1)}, A^{(2)}] A^{(3)} \rangle$ тоже имеет полюс на линии $p^* = 0$. Это полюс третьего порядка. Через β_i, q_i, q'_i функция f записывается как определитель* (45)

$$f = q'_0(q_2\beta_1 - \sqrt{a_{22}/2}q_1) - \sqrt{a_{00}/2}q_2 q'_1 = q_2\beta_1 q'_0 + \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ – многочлен от p_1, q_1, квадратичный по p_1;

$$\begin{aligned} q'_1 &= -p_1(p_1 q_1 + 2\sqrt{a_{11}/2}), \\ q'_3 &= a_{33}/2 - (p_1 q_1 + \sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{11}/2} + \sqrt{a_{22}/2})^2, \\ q'_0 &= -(q'_1 + q'_3) \end{aligned}$$

– где q'_i, $i = 0, 1, 3$ – квадратичны по p_1.

$$\begin{aligned} q_2\beta_1 q'_0 &= (1+q_1)\beta_1 \left(\frac{1}{p_t^*}\left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) - \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 + \frac{a_{33}}{2} \right) \\ &= (1+q_1)\frac{t}{p_t^*}\left(\frac{1}{p_t^*}\ \frac{t}{p_t^*} - \left(\frac{t}{p_t^*}\right)^2 \right)(1 + p_t^*\tilde{\mathcal{P}}) = \frac{q_2}{(p_t^*)^3} t^2(t-1)\left(1 + p_t^*\tilde{\mathcal{P}}\right), \end{aligned}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}$ – многочлен от q_1 (или, что то же – от q_t) и p_t^*.

Так как $q_2 = -(q_1+1) = t - 1 + q_t = t - 1 - p_t^*(p_t^* q_t^* + \sqrt{2a'_{00}})$, то f действительно имеет вид

$$f = \frac{t^2(t-1)^2}{(p_t^*)^3} + \frac{1}{(p_t^*)^2}\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}(p_t^*, q_t^*), \quad \tilde{\tilde{\mathcal{P}}}(\cdot,\cdot) \text{ – многочлен.}$$

Таким образом у f – полюс третьего порядка. □

Следствие. *Для любого значения $q_t^* = c \in \mathbb{C}$ существуют такие $f_1 = f_1(c)$ и $f_2 = f_2(c)$, что функция*

$$\phi_c(p_t^*, q_t^*) := f - \frac{1}{t(t-1)} a_{0t}^3 + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} \tag{89}$$

не имеет особенности в точке $p_t^* = 0$, $q_t^* = c$.

Доказательство. Действительно, вычет у a_{0t} ненулевой и можно подобрать такие f_2 и f_1 что φ_c не будет иметь особенности в этой точке. □

На $M_{a_{\overline{ii}},t}$ не существует функций, отличных от константы.

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь $c \in \mathbb{C}$ и риманову поверхность $\mathcal{R}_c$:

$$f - \frac{1}{t(t-1)}a_{0t}^3 + f_2(c)a_{0t}^2 + f_1(c)a_{0t} = \phi_c|_{\substack{p_t^*=0 \\ q_t^*=c}}(p_t^*, q_t^*) = const,$$

где $a_{0t} = -(a_{0t} + ta_{03})$. Компактифицируем ее; $\overline{\mathcal{R}}_c := \mathcal{R}_c \cup \{\infty\}$.

Лемма. *Множество $\{\infty\}$, добавленное к $\mathcal{R}_c$ при компактификации, состоит из единственной точки, которая лежит на дивизоре $\mathcal{D}^t$.*

Доказательство леммы. Рассмотрим $\overline{M^f}_{a_{\overline{ii}}}$ компактификацию $M^f_{a_{\overline{ii}}}$, состоящую из $M^f_{a_{\overline{ii}}}$ и добавленного "на бесконечности" дивизора $\{\infty\}_{M^f}$.

Сечение поверхности $M^f_{a_{\overline{ii}}}$ (формула (28))

$$f^2 = -2\det\begin{vmatrix} a_{11} & x & y \\ x & a_{22} & z \\ y & z & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x + y + z = (a_{00} - a_{11} - a_{22} - a_{33})/2$$

плоскостью $c_1x + c_2y + c_3z = 0$, $c_1 : c_2 : c_3 \subset \mathbf{P}^2$, $c_1 + c_2 + c_3 = 0$, – это эллиптическая поверхность $f^2 = \mathcal{P}_3(x)$ с единственной точкой (точкой ветвления) на бесконечности. Таким образом каждому направлению $a_{01} : a_{02} : a_{03}$, $a_{0i} \to \infty$ будет соответствовать единственная точка дивизора $\{\infty\}_{M^f}$. Поскольку $f^2 = -2a_{01}a_{02}a_{03} + \mathcal{O}(a_{0i})$, то вне направления $a_{01} : a_{02} : a_{03} = t_1 : t_2 : t_3$ разность

$$f - \frac{1}{t(t-1)}a_{0t}^3 + f_2a_{0t}^2 + f_1a_{0t}$$

стремится к бесконечности и, следовательно, $\overline{\mathcal{R}}_c$ пересекает $\{\infty\}_{M^f}$ в единственной точке – там, где

$$\begin{aligned} f &\sim t^2(t-1)^2/(p_t^*)^3 \\ a_{01} &\sim -t^2(t-1)/(p_t^*)^2 \\ a_{02} &\sim t(t-1)^2/(p_t^*)^2 \\ a_{03} &\sim t(t-1)^2/(p_t^*)^2. \end{aligned}$$

По построению $\varphi_c(p_t, q_t^*)$ имеет там конечное значение, следовательно, риманова поверхность $\overline{\mathcal{R}}_c$ – "линия уровня" функции $\varphi_c(p_t, q_t^*)$ при каждом $c \in \mathbb{C}$ проходит через точку дивизора $\mathcal{D}^t$. □

Лемма доказана.

Таким образом, компактная риманова поверхность $\overline{R}_C$ целиком содержится в $M_{a_{\overline{ii}},t}$ – единственная ее точка, не содержащаяся в $M_{a_{\overline{ii}}}$ попала на $\mathcal{D}^t$. На любой компактной римановой поверхности нет непостоянных функций, следовательно, $\overline{\mathcal{R}}_c$ является "линией уровня" любой функции, определенной на $M_{a_{\overline{ii}},t}$ при любом значении c.

Все функции на $M_{a_{\overline{ii}}}$ – многочлены от a_{0i}, f, следовательно H – функция на $M_{a_{\overline{ii}},t}$ имеет представление

$$H = \mathcal{P}(a_{i0}) + f\mathcal{P}'(a_{i0}),$$

где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ какие-то многочлены от a_{0i}. Функция H должна быть постоянной на линии

$$f - \frac{1}{t(t-1)} a_{0t}^3 + f_2(c) a_{0t}^2 + f_1(c) a_{0t} = \phi_c(0, c),$$

т.е. $H(a_{0i}, f) = H_c = \mathrm{const}$, если (f, a_{0i}) с $\mathcal{R}_c$, откуда следует, что многочлен $H - H_c$ делится на многочлен

$$\mathcal{P}_{\phi_c} := f - a_{0t}^3/t(t-1) + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} - \phi_c(0, c):$$

$$H = (f - a_{0t}^3/t(t-1) + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} - \phi_c(0, c)) H' + H_c,$$

где H' – многочлен от f, a_{0i}, уже меньшей чем H степени, к которому можно применить те же рассуждения, так что

$$H = \mathcal{P}(\phi_c(p_t^*, q_t^*))$$

– многочлен (одной переменной) от $f - a_{0t}^2/t(t-1) + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t}$. Подставив (88) в (89) убедимся, что $f_{1,2} = f_{1,2}(c)$ – нетривиальные функции $c \in \mathbb{C}$, так что $\varphi_c(p_t^*, q_t^*)$ на дивизоре $p_t^* = 0$, $q_t^* \in \mathbb{C}$ имеет конечное значение *только* в точке $q_t^* = c$; в остальных же точках дивизора (где $q_t^* \neq c$) функция $\varphi_c(p_t^*, q_t^*)$ имеет полюс, значит $\mathcal{P} = H = \mathrm{const}$. $\square$

Докажем теперь сформулированную выше Теорему 1, V.

Предположим противное, т.е. что имеется еще одно поле направлений на $\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}$; обозначим задающую его 2-форму $\widetilde{\Omega}$:

$$\widetilde{\Omega} \in \Lambda^2 T^*(\mathcal{M}^T_{a_{\overline{ii}}}), \quad \widetilde{\Omega}\Big|_{M_{a_{\overline{ii}}}} = w.$$

Составим разность $\Omega_{\mathrm{PVI}} - \widetilde{\Omega}$ – это 2-форма, зануляющая на любой паре касательных к $M_{a_{\overline{ii}}}$ векторов; значит в каждой из карт U_i, U_i^* (карты U_i и U_i^* определены в Замечании 1, VI)

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} - \tilde{\Omega} = dH_i \wedge dt,$$

причем в перекрытиях

$$0 = dH_i \wedge dt - dH_j \wedge dt = d(H_i - H_j) \wedge dt,$$

следовательно, $H_i - H_j = C_{ij}(t)$.

Зафиксируем какое-нибудь t.

Многообразие $M_{a_{\overline{ii}},t}$ покрыто окрестностями, где заданы функции, отличающиеся на константы; все окрестности пересекаются. Выберем одну из них – там задана, например, H_1. Приравняем ей другие, добавив к H_j константу $c_{1j} = c_{1j}(t)$.

Мы получили глобально на $M_{a_{\overline{ii}},t}$ заданную функцию. Она обязана быть константой. $\square$

VII. Заключение

В заключение хочу выразить благодарность всем, кто содействовал появлению данного текста.

Прежде всего это Л. А. Бордаг – за сочувствие и поддержку, без нее автор просто не имел бы возможности сделать эту работу. С. Ю. Славянову — за многочисленные беседы, способствовавшие формированию вышеизложенной точки зрения и регулярную материальную (не финансовую!) поддержку.

В вопросах алгебраической геометрии помощниками и наставниками были Г. Ю. Панина (Шахбазян), И. А. Панин и А. Л. Смирнов. В понимании теории гамильтоновых систем на алгебрах Ли большую помощью оказал М. А. Семенов-Тянь-Шанский, как лично, так и через подаренную им замечательную книгу [Semen].

Отдельно хочу поблагодарить А. Л. Городенцева за ценное замечание к предыдущей версии текста, именно благодаря ему поставленная во Введении задача *действительно* решена, цель достигнута.

К сожалению, работа продолжалась столь долго, что некоторым уже не суждено прочитать эти строки – я имею ввиду А. А. Болибруха и А. Н. Тюрина, чье участие и помощь были неоценимы.

И наконец последнее – за годы работы над этой темой были сотни бесед с десятками людей, так что автор надеется на прощение со стороны невольно обиженных – всех упомянуть невозможно, где-то нужно было поставить точку.

VIII.

Литература

GtoP K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, "From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions," Braunschweig: Vieweg, 1991. (Aspects of mathematics: E; Vol. 16).

Ok K. Okamoto, "Studies in the Painlevé equations I. Sixth Painlevé equation PVI," Annali Mat. Pura Appl., **146**, 337–381, 1987.

Its А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, "Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана" (перевод с английского), РХД, 728 с., 2005.

Slav S. Yu. Slavyanov, W. Lay, "Специальные функции : Единая теория, основанная на анализе особенностей," СПб.: Невский Диалект, 312 с., 2002.

Semen А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, "Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход," —Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 352 с., 2003.

Manin Yu. I. Manin, "Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$, Geometry of differential equations," American Mathematical Society Translations, Ser. 2, 186, AMS, Providence, RI, 131–151, 1998.

ArLys D. Arinkin, S. Lysenko, "Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$-bundles with connections on $\mathbf{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$," Mathematical Research Letters **4**, 181–190, 1997.

Hitchin N. Hitchin, "Geometrical aspects of Schlesinger's equation," Journal of Geometry and Physics **23**, 287–300, 1997.

ShT T. Shioda, K. Takano, "On some Hamiltonian structures of Painlevé Painlevé systems I," Funkcial. Ekvac., **40**, 271–291, 1997.

KitKor A. V. Kitaev, D. A. Korotkin, "On solutions of the Schlesinger Equations in Terms of Θ-functions," International Mathematics Research Notices, No. 17, 877–905, 1998.

Pain P. P. Painlevé, "Sur les équations differentielles du second odre á points criticues fixes," R.C., 2^0 Semestre, T.CXLII, ″26, 1111–1117, 1906.

BaBoell M. V. Babich, L. A. Bordag, “The elliptic form of the sixth Painlevé equation,” Preprint NTZ 25/1997, Leipzig, 1997.

Mod Geom Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, “Современная геометрия: Методы и приложения,” М., Наука, 760 с., 1979.

BaBo M. V. Babich, L. A. Bordag “Projective Differential Geometrical Structure of the Painlevé Equations,” Jornal of Differential Equations, **157**, 452–485, 1999.

Ah Н. И. Ахиезер “Элементы теории эллиптических функций,” Серия: “Физико-математичекая библиотека инженера,” М., 304 с., 1970.

Shafar И. Р. Шафаревич “Основы алгебраической геометрии. Том 1. Алгебраические многообразия в проективном пространстве,” М.: Наука, 352 с., 1988.

Ok-s K. Okamoto “Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre á points criticues fixes de P. Painlevé, Espaces des conditions initiales,” Japan. J. Math., **5**, 1–79, 1979.

Arnold В. И. Арнольд “Математические методы классической механики,” М.: Наука, 472 с., 1989.

DjMw M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients I,” Physica $2D$, 306–352, 1981.

DjMw1 M. Jimbo, T. Miwa, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, III,” Physica $2D$, 407–448; Physica $4D$, 26–46, 1981.