PREPRINT POMI-4/2006

Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете

Н.М. Боголюбов

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
191023, С.-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27

В работе установлена связь точно решаемой бозонной модели с плоскими разбиениями - трехмерными диаграммами Юнга заключенными в ящик конечного размера. Это позволяет представить производящие функции разбиений как корреляционные функции интегрируемой модели и вывести формулы МакМагона для перечисления разбиений с помощью квантового метода обратной задачи.

I. ВВЕДЕНИЕ

Исследование переходов из заданного начального состояния в заданное конечное является одной из основных задач статистической физики. Для интегрируемых моделей эта проблема эффективно решается с помощью алгебраический анзаца Бете квантового метода обратной задачи [1–3]. Связь между определенными матричными элементами матрицы перехода точнорешаемой бозонной модели и плоскими разбиениями - трехмерными диаграммами Юнга, заключенными в ящик конечного размера, была установлена в работе [4].

Плоские разбиения естественно возникают, как в теории кристаллов [5] и прямого протекания [6], так и в теории случайных блужданий по решеткам [7–9]. Сравнительно недавно обсуждалась возможная связь топологических струн на многообразиях Калаби-Яо и таянием кристаллов [10].

Перечисление плоских укладок является классической проблемой комбинаторики [11, 12] и теории симметрических функций [13]. Статистика плоских разбиений по отношению к естественным вероятностным мерам изучалась в [14], [15]. Корреляционные функции случайных плоских разбиений вычислялись в [16].

Фазовая модель, имеющая отношение к плоским разбиениям, определяется как предел $q \to \infty$ интегрируемой q-бозонной модели, введенной в [17, 18]. Корреляционные функции этой модели вычислялись в [19]. Интерпретация векторов состояния модели с произвольным параметром q в терминах алгебры симметрических была проведена в [20], а для фазовой модели в [4] и [21].

В настоящей работе мы покажем, что производящая функция плоских разбиений, заключенных в прямоугольный ящик со сторонами L, N, M выражается через форм факторы фазовой модели.

Статья организована следующим образом. В Разделе II мы даем основные определения плоских разбиений. В Разделе III описывается интегрируемая бозонная модель. В Разделе IV исследуются скалярные произведения векторов состояния и форм факторы операторов уничтожения и установлена их связь с проблемой перечисления плоских разбиений. Выражение векторов состояния через симметрические функции Шура и вывод производящей функции симметричных плоских разбиений, дается в Разделе V.

II. ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

Напомним, что разбиением $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)$ называется неубывающая последовательность $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N$ неотрицательных целых чисел λ_j, которые называются частями разбиения λ.

Плоское разбиение является двумерным обобщением обычного разбиения. Плоское разбиение π это массив π_{ij} неотрицательных целых чисел удовлетворяющих условию $\pi_{ij} \geq \pi_{i+1j}$ и $\pi_{ij} \geq \pi_{ij+1}$, для всех $i, j \geq 1$. Каждый столбец или каждая строка плоского разбиения являются обычными разбиениями. Симметричные плоские разбиения это такие плоские разбиения, для которых $\pi_{ij} = \pi_{ji}$. Целые числа π_{ij} называются частями плоского разбиения, а $|\pi| = \sum \pi_{ij}$ его объемом.

Диаграмму плоского разбиения можно представить себе как множество единичных кубов установленных один над другим т.е., как трехмерную диаграмму Юнга. Высота столбца с координатами ij равна π_{ij}. Объем разбиения $|\pi|$ равен сумме всех кубов диаграммы $|\pi| = \sum \pi_{ij}$. Считается что плоское разбиение заключено в прямоугольный ящик с длинами сторон L, N, M если $\pi_{ij} \leq M$ для всех i и j , причем $\pi_{ij} = 0$ всегда, когда $i > L$ или $j > N$; такое плоское разбиение называется плоским разбиением в ящике. Допустив, что некоторые из разбиений могут быть пустыми, можно представить плоское разбиение внутри ящика $L \times N \times M$ как $N \times N$ матрицу (без ограничения общности можно положить $N > L$) с матричными элементами последних $K = N - L$ строк равными нулю $\pi_{jm} \equiv 0$ для $j \geq K$.

Диаграмма плоского разбиения, соответствующая матрице

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

представлена на (Рис. 1).

Плоское разбиение, помещенное в ящик $L \times N \times M$, может быть представлено в виде набора путей по квадратной решетке. Рассмотрим сперва разбиение внутри ящика $N \times N \times M$. Плоское разбиение соответствует набору из N путей по $2N \times (1 + M)$

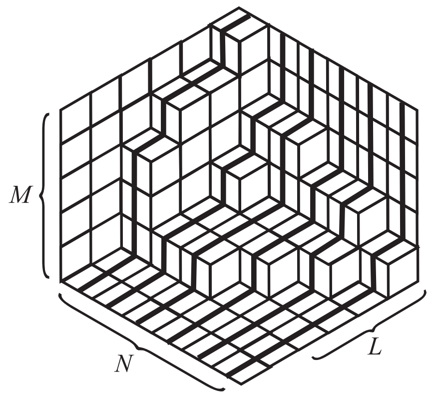

Рис. 1: Плоское разбиение с градиентными линиями.

квадратной решетке. Первые N столбцов (считая слева) имеют номера $(-N, ..., -1)$, а последние N $(1, ..., N)$. Путь с номером m идет из левой нижней $(-N+m-1; 0)$ вершины к правой верхней $(m; M)$ и всегда направлен либо на север, либо на восток. Число квадратов в последующих колонках j решетки (начиная с правой) под соответствующим m-тым путем можно рассматривать как матричные элементы π_{jm} плоского разбиения π. Только один путь допустим на вертикальных ребрах решетки (это правило соответствует условию $\pi_{jm} \geq \pi_{jm+1}$), но любое число путей может следовать по горизонтальным. То, что пути всегда направлены на север и восток эквивалентно условию $\pi_{jm} \geq \pi_{j+1m}$.

Плоское разбиение помещенное в $L \times N \times M$ ящик $(N > L)$, может быть представлено как набор описанных выше путей по квадратной решетке того же размера $2N \times (1+M)$ с дополнительным условием, что первый путь $(m = 1)$ направлен только вдоль нулевой строки решетки вплоть до вершины $(-N + K; 0)$.

Набор путей на (Рис. 2) соответствует плоскому разбиению на (Рис. 1) и соответственно матрице (1).

Соответственно классической формуле МакМагона, число плоских укладок помещенных в ящик $L \times N \times M$ равно

$$A(L, N, M) = \prod_{j=1}^{L} \prod_{k=1}^{N} \prod_{i=1}^{M} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} = \prod_{j=1}^{L} \prod_{k=1}^{N} \frac{M+j+k-1}{j+k-1}. \tag{2}$$

Производящую функцию плоских разбиений

$$Z_q(L, N, M) = \sum_{p.p} q^{|\pi|}, \tag{3}$$

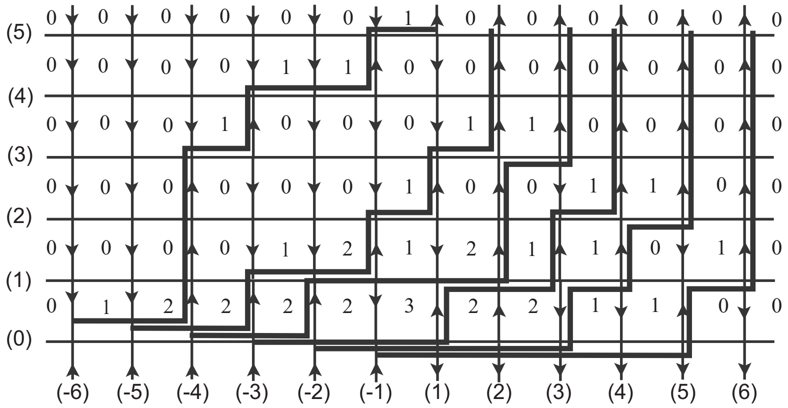

Рис. 2: Типичный набор допустимых путей по решетке.

где суммирование ведется по всем плоским разбиениям заключенных в ящик $L \times N \times M$, можно рассматривать как статистическую сумму трехмерных диаграмм Юнга с больцмановским весом равным объему разбиения $|\pi|$, и $q = e^{-\frac{1}{T}}$. Доказательство того, что

$$Z_q(L,N,M) = \prod_{j=1}^{L}\prod_{k=1}^{N}\prod_{i=1}^{M}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} = \prod_{j=1}^{L}\prod_{k=1}^{N}\frac{1-q^{M+j+k-1}}{1-q^{j+k-1}}, \tag{4}$$

можно найти в книгах [12, 13]. Число плоских укладок $A(L,N,M)$ является $q \to 1$ пределом производящей функции $Z_q(L,N,M)$.

Производящая функция симметричных плоских разбиений ($\pi_{ij} = \pi_{ji}$) равна

$$Z_q^{sym}(N,N,M) = \sum_{sym} q^{|\pi|} = \prod_{j=1}^{N}\frac{1-q^{M+2j-1}}{1-q^{2j-1}}\prod_{1\le i<j\le N}\frac{1-q^{2(M+i+j-1)}}{1-q^{2(i+j-1)}}, \tag{5}$$

где суммирование идет по всем симметричным плоским разбиениям в $L \times N \times M$ ящике. Эта формула была предложена МакМагоном, а доказана Макдональдом [13].

Мы продемонстрируем теперь, что производящие функции плоских разбиений естественно возникают при вычислении специального вида корреляционных функций фазовой модели и докажем, в частности, равенства (4) and (5) с помощью алгебраического анзаца Бете квантового метода обратной задачи.

III. ИНТЕГРИРУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Фазовая модель является $q \to \infty$ пределом q-бозонной модели [17, 18]. Она определяется $L-$оператором [19, 22]:

$$L(n|u) \equiv \begin{pmatrix} l_{11}(n|u) & l_{12}(n|u) \\ l_{21}(n|u) & l_{22}(n|u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{-1} & \phi_n^\dagger \\ \phi_n & u \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где параметр $u \in \mathcal{C}$, а операторы $\phi_n, \phi_n^\dagger$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[N_i, \phi_j] = -\phi_i \delta_{ij}\,,\ [N_i, \phi_j^\dagger] = \phi_i^\dagger \delta_{ij}\,,\ \ [\phi_i, \phi_j^\dagger] = \pi_i \delta_{ij}\,. \tag{7}$$

Операторнозначная матрица (6) удовлетворяет сплетающему соотношению:

$$R(u,v)\,(L(n|u) \otimes L(n|v)) = (L(n|v) \otimes L(n|u))\,R(u,v), \tag{8}$$

в котором $R(u,v)$ это R-матрица равная

$$R(u,v) = \begin{pmatrix} f(v,u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(v,u) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(v,u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(v,u) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$f(v,u) = \frac{u^2}{u^2 - v^2}, \quad g(v,u) = \frac{uv}{u^2 - v^2}. \tag{10}$$

Символ $\otimes$ означает тензорное произведение матриц: $(A \otimes B)_{ij,kl} = A_{ij} B_{kl}$.

Матрица монодромии определяется как произведение L-операторов:

$$T(u) = L(M|u)...L(1|u)L(0|u) \equiv \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Перестановочные соотношения матричных элементов матрицы монодромии (11) задаются той же R-матрицей (9):

$$R(u,v)\,(T(u) \otimes T(v)) = (T(v) \otimes T(u))\,R(u,v). \tag{12}$$

Матрицу монодромии можно представить, в частности, в виде

$$T(u) \ = \ \begin{pmatrix} A_1(u) & B_1(u) \\ C_1(u) & D_1(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{-1} & \phi_0^\dagger \\ \phi_0 & u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A_1(u) & B_1(u) \\ C_1(u) & D_1(u) \end{pmatrix} \ \equiv \ L(M|u)...L(1|u).$$

Из этого представления следует, что

$$A(u) \;=\; A_1(u)u^{-1} + B_1(u)\phi_0, \;\; B(u) = A_1(u)\phi_0^\dagger + B_1(u)u, \tag{13}$$

$$C(u) \;=\; C_1(u)u^{-1} + D_1(u)\phi_0, \;\; D(u) = C_1(u)\phi_0^\dagger + D_1(u)u, \tag{14}$$

и матричные элементы матрицы монодромии взаимосвязаны [20]:

$$\begin{aligned} \phi_0 B(u) \;&=\; uA(u), \;\; A(u)\phi_0^\dagger = u^{-1}B(u), \\ C(u)\phi_0^\dagger \;&=\; u^{-1}D(u), \;\; \phi_0 D(u) = uC(u). \end{aligned} \tag{15}$$

Матричные элементы матрицы монодромии (11) действуют в пространстве Фока натянутом на локальные вектора состояния $|n_j\rangle_j$:

$$|n\rangle = \prod_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j = \prod_{j=0}^{M} (\phi_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle, \;\; \sum n_j = n, \tag{16}$$

где

$$|0\rangle = \prod_{j=0}^{M} |0\rangle_j \tag{17}$$

является вакуумным вектором (генерирующим состоянием). Локальные вектора ортогональны: ${}_k\langle n_m|n_i\rangle_j = \delta_{im}\delta_{kj}$.

Вакуумный вектор $|0\rangle$ уничтожается оператором $C(u)$ и является собственным вектором операторов $A(u)$ и $D(u)$:

$$\begin{aligned} C(u)|0\rangle \;&=\; 0, \\ A(u)|0\rangle \;&=\; u^{-(M+1)}|0\rangle, \; D(u)|0\rangle = u^{M+1}|0\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

Вектор состояния выбирается в виде

$$|\Psi_N(u_1, u_2, ..., u_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|0\rangle, \tag{19}$$

а вектор сопряженного состояния (19) равен

$$\langle\Psi_N(u_1, u_2, ..., u_N)| = \langle 0| \prod_{j=1}^{N} C(u_j), \tag{20}$$

где дуальный вакуум $\langle 0| = |0\rangle^\dagger$, $\langle 0|0\rangle = 1$. Вектора состояния (19) и (20) являются симметричными функциями переменных u_j так как операторы $B(u)$ согласно (12) коммутируют между собой.

Рассмотрим скалярное произведение векторов состояния (19) и (20). Удобнее, однако, использовать 'нормированные' операторы $\tilde{B}(u) = u^M B(u)$ и $\tilde{C}(u) = u^{-M} C(u)$. Тогда,

$$\begin{aligned} S(N,M|\{v\},\{u\}) &= \langle 0| \prod_{j=1}^{N} C(v_j) \prod_{j=1}^{N} B(u_j)|0\rangle \\ &= \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{v_j}{u_j}\right)^M \langle 0| \prod_{j=1}^{N} \tilde{C}(v_j) \prod_{j=1}^{N} \tilde{B}(u_j)|0\rangle. \end{aligned} \tag{21}$$

Это скалярное произведение можно вычислить , воспользовавшись перестановочными соотношениями (12) [2, 3]. Для произвольных N и M нормированное скалярное произведение представимо в виде определителя [4]:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(N,M|\{v\},\{u\}) &= \langle 0|\tilde{C}(v_N)\dots\tilde{C}(v_1)\tilde{B}(u_1)\dots\tilde{B}(u_N)|0\rangle \\ &= \left\{ \prod_{N\geq j>k\geq 1} \frac{v_j^2 v_k^2}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{N\geq l>m\geq 1} \frac{u_l^{-2} u_m^{-2}}{u_m^{-2} - u_l^{-2}} \right\} \det \left[\frac{1-\left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{2(M+N)}}{1-\left(\frac{u_k}{v_j}\right)^2} \right]_{j,k=1}^{N}, \end{aligned} \tag{22}$$

Зная ответ для скалярного произведения векторов состояния, можно вычислять различные корреляционные функции. Одной из них является форм фактор K-той степени оператора уничтожения ϕ_0, который можно представить в следующем виде:

$$\tilde{S}(K,N,M|\{v\},\{u\}) = \langle 0|\phi_0^K \tilde{C}(v_{N-K})\dots\tilde{C}(v_1)\tilde{B}(u_1)\dots\tilde{B}(u_N)|0\rangle, \tag{23}$$

так как из представления (14) следует, что $[\phi_0, \tilde{C}(v)] = 0$. Оператор $\tilde{C}(v)$ обладает свойством $\lim_{v\to\infty} \tilde{C}(v) = \phi_0$. Отсюда следует, что

$$\tilde{S}(K,N,M|\{v\},\{u\}) = \lim_{v_N,\dots,v_{N-K+1}\to\infty} \tilde{S}(N,M|\{v\},\{u\}).$$

Переходя к этому пределу в выражении (22), мы получим следующее представление для форм фактора (23):

$$\tilde{S}(K,N,M|\{v\},\{u\}) = \left\{ \left(v_1^2 v_2^2 \dots v_{N-K}^2\right)^K \prod_{N-K\geq j>k\geq 1} \frac{v_j^2 v_k^2}{v_k^2 - v_j^2} \prod_{N\geq l>m\geq 1} \frac{u_l^{-2} u_m^{-2}}{u_m^{-2} - u_l^{-2}} \right\} \det Q, \tag{24}$$

где матричные элементы $N \times N$ матрицы Q равны

$$\begin{aligned} Q_{jk} &= \frac{1-\left(\frac{u_k}{v_j}\right)^{2(M+N)}}{1-\left(\frac{u_k}{v_j}\right)^2}, \quad 1 \leq j \leq N-K; \\ Q_{jk} &= u_k^{2(N-j)}, \quad N-K+1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством $\phi_0\tilde{B}(u) = \tilde{A}(u)$ (13), в котором мы положили $\tilde{A}(u) = u^{M+1}A(u)$, и свойством $[\phi_0, \tilde{C}(u)] = [\phi_0, \tilde{A}(u)] = 0$ можно переписать форм фактор (23) в виде

$$\tilde{S}(K, N, M|\{v\}, \{u\}) = \langle 0|\tilde{C}(v_{N-K}) \dots \tilde{C}(v_1)\tilde{A}(u_N) \dots \tilde{A}(u_{N-K+1})\tilde{B}(u_1) \dots \tilde{B}(u_{N-K})|0\rangle.$$

Это равенство выражает форм фактор через среднее от операторов $\tilde{A}(u)$.

IV. ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПЛОСКИХ РАЗБИЕНИЙ

Для того чтобы связать скалярное произведение (21) и форм фактор (23) с проблемой перечисления плоских разбиений, мы воспользуемся графическим представлением этих объектов.

Матричные элементы $L-$оператора можно представить графически как вершины, в которые входят две линии со стрелками (см. Рис. 3). Матричный элемент $l_{12}(n|u) = \phi_n^\dagger$ соответствует вершине (b), $l_{21}(n|u) = \phi_n$ соответствует вершине (c), $l_{11}(n|u) = u^{-1}$ вершине (a), а $l_{22}(n|u) = u$ соответственно вершине (d).

Матричные элементы матрицы монодромии (11) выражаются тогда как суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с $M + 1$ узлами с различными граничными условиями (см. Рис. 3). Например, из определения оператора $B(u) = \sum_{k_M,\dots,k_1=1}^{2} l_{1k_M}(M|u)l_{k_M k_{M-1}}(M-1|u)\dots l_{k_1 2}(0|u)$ следует, что этот оператор соответствует граничным условиям, когда верхняя и нижняя стрелки направлены наружу (конфигурация (B)). Соответственно, оператор $C(u)$ определяется граничными условиями, когда верхняя и нижняя стрелки направлены вовнутрь (конфигурация (C)). Операторы $A(u)$ и $D(u)$ соответствуют граничным условиям, когда верхняя и нижняя стрелки направлены в одну сторону, в верх и вниз соответственно (конфигурации (A) и (D)).

Рассмотрим двумерную квадратную решетку с $2N \times (M + 1)$ узлами. Первые ее N колонок с номерами $(-N, ..., -1)$ ассоциируются с операторами $C(v_j)$, а последние N, с номерами $(1, ..., N)$, с операторами $B(u_j)$ (см. Рис. 2). Локальные пространства Фока изображаются как строки решетки, i-тая строка с i-тым пространством соответственно. Каждое горизонтальное ребро решетки помечено числом заполнения n_j, соответствующего вектора Фока $|n_j\rangle_i$. Скалярное произведение (21) равно сумме по

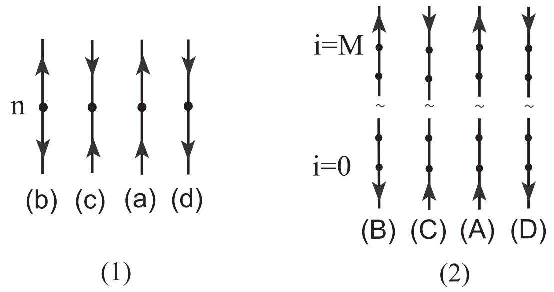

Рис. 3: Графическое представление матричных элементов L-оператора (1) и матрицы монодромии (2).

всем допустимым конфигурациям вершин (a), (b), (c) и (d) на квадратной решетке со следующими граничными условиями: наружные стрелки ее первых N колонок направлены вовнутрь, а на последних N наружу; на правой и на левой границах все числа заполнения равны нулю. Допустимые конфигурации для форм фактора (23) удовлетворяют дополнительному условию, при котором все внутренние стрелки первых левых K колонок направлены вниз.

Допустимые конфигурации могут быть представлены как пути по решетке. Эти конфигурации представляют собой наборы, состоящие из N непересекающихся путей по решетке стартующих из нижних левых вершин $(-N;0), (-N+1;0), ..., (-1;0)$ и заканчивающихся в верхних правых $(1;M), (2;M), ..., (N;M)$. В вертикальном направлении пути следуют вдоль стрелок, направленных вверх, и только один путь допустим на вертикальном ребре решетки, между тем как любое их число может делить горизонтальное. Число путей, делящих горизонтальное ребро равно соответствующему числу заполнения. Допустимые конфигурации для форм фактора (23) удовлетворяют дополнительному условию, при котором первый путь обязательно направлен вдоль нулевой строки решетки вплоть до вершины $(-N+K;0)$. Отсюда следует, что пути по решетке, соответствующие плоским разбиениям, определяют допустимые конфигурации вершин в скалярном произведении (21) и, соответственно, форм факторе (23).

Форм фактор (23) можно представить в следующем виде:

$$\tilde{S}(K,N,M|\{v\},\{u\}) = \sum_{p.p} \prod_{k=-1}^{-N} v_{-k}^{t_k^d - t_k^a - M} \prod_{j=1}^{N} u_j^{t_j^d - t_j^a + M}, \tag{25}$$

где суммирование ведется по всем наборам путей по решетке, представляющим плоские разбиения в ящике $N \times N \times M$ с соответствующими дополнительными условиями, t_j^a

и t_j^d есть число вершин типа (a) и, соответственно (d) в j-той колонке решетки. Объем $|\pi|$ плоского разбиения π в ящике $N \times N \times M$ равен [4]:

$$2|\pi| = \sum_{k=-1}^{-N} k \left(l_k^d - l_k^a - M \right) + \sum_{j=1}^{N} (j-1) \left(l_j^d - l_j^a + M \right). \tag{26}$$

Подстановка параметризации $v_j = q^{-\frac{j}{2}}$, $u_j = q^{\frac{j-1}{2}}$ в (25) приводит к следующему ответу для форм фактора

$$\tilde{S}(K, N, M|q) = \sum_{p.p} q^{|\pi|},$$

а, следовательно, форм фактор является производящей функцией плоских разбиений (3) в ящике $L \times N \times M$, где $L = N - K$

Определитель $N \times N$ matrix H матрицы с матричными элементами

$$\begin{aligned} H_{jk} &= \frac{1 - s^{j+k-1}}{1 - q^{j+k-1}}, \;\; 1 \le j \le N - K; \\ H_{jk} &= q^{(k-1)(N-j)}, \;\; N - K + 1 \le j \le N. \end{aligned}$$

может быть вычислен методом приведенным в работе [23] и равен

$$\begin{aligned} \det H \; = \; & (-1)^{\frac{N(N-1)+(N-K)(N-K-1)}{2}} \, q^{\frac{1}{6}[N(N-1)(N-2)+(N-K)(N-K+1)(N+2K-1)]} \\ & \prod_{N-K \ge j > k \ge 1} \left(1 - q^{j-k} \right) \prod_{N \ge l > m \ge 1} \left(1 - q^{l-m} \right) \prod_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{N-K} \frac{1 - s q^{j-k}}{1 - q^{j+k-1}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Для $K = 0$ этот определитель был вычислен в [23] в связи с проблемой перечисления альтернированых знаковых матриц.

Подстановка $v_j = q^{-\frac{j}{2}}$, $u_j = q^{\frac{j-1}{2}}$ и $s = q^{N+M}$ в (24) приводит к равенству (4) с $L = N - K$ для производящей функции (3).

V. ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ И СИММЕТРИЧНЫЕ ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

Вектора состояния (19) могут быть представлены в виде [4]:

$$|\Psi_N(u_1, u_2, ..., u_N)\rangle = \prod_{k=1}^{N} B(u_k)|0\rangle = \sum_{\substack{0 \le n_0, n_1, ..., n_M \le N \\ n_0 + n_1 + ... + n_M = N}} f_{\{n\}}(u_1, u_2, ..., u_N) \prod_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j. \tag{28}$$

Функция f выражается через симметрическую функцию Шура $S_{(\lambda_1, ..., \lambda_N)}(u_1, u_2, ..., u_N)$:

$$f_{\{n\}}(u_1, u_2, ..., u_N) = (u_1 u_2 \cdot ... \cdot u_N)^{-M} \, S_\lambda(u_1^2, u_2^2, ..., u_N^2), \tag{29}$$

а функция Шура соответствующая разбиению $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$ равна

$$S_{(\lambda_1,...,\lambda_N)}(u_1, u_2, ..., u_N) = \frac{\det\left(u_j^{N-i+\lambda_i}\right)}{\prod_{1\le i<j\le N}(u_i - u_j)}. \tag{30}$$

Конфигурация чисел заполнений $\{n\} = (n_0, n_1, \ldots, n_M)$ и разбиение $\lambda = (M^{n_M}, (M-1)^{n_{M-1}}, \ldots, 1^{n_1}, 0^{n_0})$ находятся во взаимно однозначном соответствии, число n_k указывает сколько раз число K входит в данное разбиение.

Как следует из представления (28), проекция вектора состояния на вектор

$$|P\rangle = \sum_{\substack{0\le n_0,n_1,\ldots,n_M\le N\\ n_0+n_1+\ldots+n_M=N}} \prod_{j=0}^{M} |n_j\rangle_j. \tag{31}$$

равна

$$\langle P| \prod_{j=1}^{N} \tilde{B}(u_j)|0\rangle = \sum_{\lambda\subseteq\{M^N\}} S_{\{\lambda\}}(u_1^2, u_2^2, ..., u_N^2), \tag{32}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям λ, имеющих не более N частей, каждая из которых не более M.

В работе [4] было доказано, что

$$\langle P| \prod_{j=1}^{N} \tilde{B}(q^{\frac{2j-1}{2}})|0\rangle = \sum_{sym} q^{|\pi|},$$

где суммирование ведется по всем симметричным плоским разбиениям, и, следовательно, производящая функция равна

$$Z_q^{sym}(N, N, M) = \sum_{\lambda\subseteq\{M^N\}} S_{\{\lambda\}}(q, q^3, ..., q^{2N-1}).$$

Данную сумму функций Шура можно выразить в виде произведения ([13], Ex. I.5.17) и получить представление (5).

VI. БЛАГОДАРНОСТИ

Часть этой работы была выполнена на Физическом факультете Университета Ювяскюлы (Финляндия), которому я признателен за гостеприимство. Данная работа частично поддержана CRDF грантом RUMI-2622-ST-04 и проектом РФФИ 04-01-00825.

---

[1] L.D. Faddeev, *Quantum Inverse Scattering Method*, Sov. Sci. Rev. Math. **C1**, 107 (1980).

[2] Н.М. Боголюбов, А.Г. Изергин, В.Е. Корепин, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи*, (Из-во "Наука", Москва, 1992).

[3] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).

[4] N.M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 9415 (2005).

[5] P.L. Ferrari, H. Spohn, *Step functions for a faceted crystal*, J. Stat. Phys. **113**, 1 (2003).

[6] R. Rajesh, D. Dhar, *An exactly solvable anisotropic directed percolation model in three dimensions*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1646 (1998).

[7] J.W. Essam, A.J. Guttmann, *Vicious walkers and directed polymer networks in general dimensions*, Phys. Rev. E **52**, 5849 (1995).

[8] A.J. Guttmann, A.L. Owczarec, X.G. Viennot, *Vicious walkers and Young tableaux I: without walls*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 8123 (1998).

[9] C. Krattenthaler, A.J. Guttmann, X.G. Viennot, *Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux: II With a wall*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 8835 (2000).

[10] A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, *Quantum Calabi-Yau and classical crystals*, hep-th/0309208.

[11] G.E. Andrews, *The theory of partitions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).

[12] D.M. Bressoud, *Proofs and Confirmations. The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

[13] И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, (Изд-во "Мир", Москва, 1985).

[14] А.М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации*, Функц. Анал. Прил. **30**, 19 (1996).

[15] А.М. Вершик, С. Керов, *Асимптотика мер Планшереля симметрических групп и предельная форма диаграмм Юнга*, Докл. Акад. Наук СССР **233**, 1024 (1977).

[16] A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram*, J. American Math. Soc. **16**, 58 (2003).

[17] N.M. Bogoliubov, R.K. Bullough, G. Pang, *Exact solution of the q-boson hopping model*, Phys. Rev. B **47**, 11495 (1993).

[18] N.M. Bogoliubov, R.K. Bullough, J. Timonen, *Critical behavior for correlated strongly coupled*

boson systems in 1+1 dimensions, Phys. Rev. Lett. **25**, 3933 (1994).

[19] N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, N.A. Kitanine, *Correlation functions for a strongly correlated boson systems*, Nucl. Phys. B **516**, 501 (1998).

[20] N. Tsilevich, *q-Boson model and symmetric functions*, PDMI Preprint–01/2005 (2005).

[21] K. Shigechi, M. Uchiyama, *Boxed skew plane partition and integrable phase model*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 10287 (2005).

[22] N.M. Bogoliubov, T. Nassar, *On the spectrum of the non-Hermitian phase-difference model*, Phys. Lett. A **234**, 345 (1997).

[23] G. Kuperberg, *Another proof of the alternating-sign matrix conjecture*, Int. Math. Res. Not. **1996**, 139 (1996).