ПОМИ ПРЕПРИНТ — 02/2006

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ СПЕКТРА GOE ПОЛУКРУГОВЫМ ЗАКОНОМ

Д. А. Тимушев

Сыктывкарский государственный университет,
математический факультет

Февраль 2006

ABSTRACT

Показано, что расстояние Колмогорова между ожидаемой спектральной функцией распределения $n \times n$ случайной матрицы из гауссовского ортогонального ансамбля и функцией распределения полукругового закона имеет порядок $O(n^{-1})$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 02-01-00233, также при поддержке DFG-Forshergruppe FOR 399/1.

Пусть A эрмитова случайная матрица порядка n, $\lambda_j^{(n)}(\omega)$, $j = 1, \dots, n$, – собственные числа матрицы $\frac{1}{\sqrt{n}} A$. Пусть $F_n(x) = \frac{1}{n} \#\{j : \lambda_j^{(n)}(\omega) < x\}$ спектральная функция матрицы A.

Известно, что ожидаемая нормированная спектральная функция $\mathbf{E}\, F_n(x)$ для широкого класса эрмитовых матриц при $n \to \infty$ стремится к функции распределения полукругового закона (см. [8]). Скорость сходимости оценивалась в работах многих авторов (см. [1, 3–5] и литературу к ним). В [5] получена оптимальная оценка $O(n^{-1})$ скорости сходимости для комплекснозначных матриц A из гауссовского унитарного ансамбля (GUE). По определению GUE (см. [8]), $\sqrt{2}\, \mathrm{Re} A_{kl}$, $\sqrt{2}\, \mathrm{Im} A_{kl}$, A_{kk}, A_{ll} при $1 \leqslant k < l \leqslant n$ независимы в совокупности и распределены нормально со средним 0 и дисперсией σ^2. Пусть $F_{n,2}(x)$ нормированная спектральная функция матрицы A из GUE с параметром $\sigma^2 = 1$. В работе [5, теорема 1.1] получена оценка

$$\Delta_{n,2} := \sup_x |\mathrm{E}\, F_{n,2}(x) - G(x)| \leqslant C n^{-1}, \tag{1}$$

где $G(x)$ – функция распределения полукругового закона с плотностью

$$g(x) = G'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \sqrt{2 - x^2} & \text{при} \quad |x| < \sqrt{2}, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Здесь и далее через C обозначены различные положительные константы, не зависящие от n, x.

Рассмотрим вещественную матрицу A из гауссовского ортогонального ансамбля (GOE). По определению GOE, элементы $\sqrt{2}\, A_{kl}$, A_{kk}, A_{ll} при $1 \leqslant k < l \leqslant n$ являются гауссовскими независимыми величинами со средним 0 и дисперсией σ^2. Пусть $F_{n,1}(x)$ – нормированная спектральная функция матрицы A из GOE при $\sigma^2 = 1$. Нас будет интересовать скорость сходимости ожидаемой спектральной функции распределения $\mathrm{E}\, F_{n,1}(x)$ к функции распределения полукругового закона $G(x)$ в метрике Колмогорова, то есть величина

$$\Delta_{n,1} := \sup_x |\mathrm{E} F_{n,1}(x) - G(x)|.$$

В случае гауссовских ансамблей (GUE, GOE), Форрестер, Франкель и Гарони (см. [2], а также [7]) разработали метод, позволяющий получить для плотности ожидаемой спектральной функции распределения $\mathrm{E}\, F_{n,1}(x)$ асимптотические разложения любых порядков. Остаточный член полученного асимтотического разложения возможно выписать только при фиксированных значениях переменной x, что не дает возможности получать оценки величины $\Delta_{n,1}$ простым интегрированием.

В данной работе доказывается оценка, аналогичная (1) и для $F_{n,1}(x)$.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\Delta_{n,1} \leqslant C n^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Для произвольного $C > 0$ введем интервал

$$\mathrm{I} = \left[-\sqrt{2} + C n^{-2/3}, \sqrt{2} - C n^{-2/3} \right].$$

Заметим, что

$$\sup_x |\mathrm{E}\, F_{n,1}(x) - G(x)| \leqslant \sup_{x\in \mathrm{I}} |\mathrm{E}\, F_{n,1}(x) - G(x)| + G(-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}).$$

Принимая во внимание очевидное неравенство

$$G(-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}) \leqslant Cn^{-1},$$

а также оценку (1), получим

$$\sup_x |\mathrm{E}\, F_{n,1}(x) - G(x)| \leqslant \sup_{x\in \mathrm{I}} |\mathrm{E}\, F_{n,1}(x) - \mathrm{E}\, F_{n,2}(x)| + Cn^{-1}.$$

Таким образом, для доказательства (2) достаточно установить оценку

$$|\mathrm{E}\, F_{n,1}(x) - \mathrm{E}\, F_{n,2}(x)| \leqslant \frac{C}{n}, \quad \text{при} \quad x \in \mathrm{I}. \tag{3}$$

В случае ансамблей GUE, GOE для $\mathrm{E}\, F_{N,1}(x)$, $\mathrm{E}\, F_{N,2}(x)$ известны точные аналитические выражения. Пусть $H_n(x) = e^{x^2}(-\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$, $n = 1, 2, \ldots$ – полиномы Эрмита, $\varphi_n(x) = c_n\, e^{-x^2/2} H_n(x)$ – функции Эрмита,

$$c_n = (2^n n!\, \pi^{1/2})^{-1/2}.$$

Обозначим через $\sigma_{n,1}$, $\sigma_{n,2}$ плотности распределений $\mathrm{E}\, F_{n,1}$, $\mathrm{E} F_{n,2}$ соответственно. Тогда из формул (5.2.16), (6.3.2), (6.3.5), (6.4.3) работы [8] после соответствующей нормировки следует

$$\sigma_{n,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k^2(\sqrt{n}\, x),$$

$$\sigma_{n,1}(x) = \sigma_{n,2}(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\, \varphi_{n-1}(\sqrt{n}\, x) \left[\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{n}\, x} \varphi_n(t) dt - \int\limits_{\sqrt{n}\, x}^{\infty} \varphi_n(t) dt \right] + \frac{1}{\sqrt{n}}\, \alpha_n(\sqrt{n}\, x), \tag{4}$$

$$\alpha_n(s) = \begin{cases} \varphi_{2m}(s)(2I_{2m})^{-1} & \text{при} \quad n = 2m+1, \\ 0 & \text{при} \quad n = 2m, \end{cases} \tag{5}$$

$$I_n = \int\limits_0^{\infty} \varphi_n(t) dt. \tag{6}$$

Функции $\sigma_{n,1}$, $\sigma_{n,2}$ (как и плотность g полукругового закона) являются четными функциями, поэтому в (3) достаточно ограничиться случаем $x > 0$.

Оценим функцию $\delta_n(x) \equiv \mathrm{E}\, F_{n,1}(x) - \mathrm{E}\, F_{n,2}(x) = \int\limits_0^x [\sigma_{n,1}(s) - \sigma_{n,2}(s)]\, ds$ по формулам (4)–(6) в области

$$0 < x < \sqrt{2} - Cn^{-2/3}. \tag{7}$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n.

а) Случай n = 2m. С учетом четности φ_{2m} получаем из (4)–(5)

$$\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2m}\,x} \varphi_{2m}(t)dt - \int\limits_{\sqrt{2m}\,x}^{\infty} \varphi_{2m}(t)dt = 2 \int\limits_{0}^{\sqrt{2m}\,x} \varphi_{2m}(t)dt,$$

$$\delta_{2m}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_{0}^{\sqrt{2m}\,x} \varphi_{2m-1}(s)\Big(\int\limits_{0}^{s}\varphi_{2m}(t)dt\Big)ds. \tag{8}$$

Для оценки интегралов воспользуемся асимптотикой для функций $\varphi_n(t)$ из работы [9]. В области

$$|t| \leqslant (2n+1)^{1/2} - (2n+1)^{-1/6} \tag{9}$$

при $n \to \infty$ справедливо равенство

$$\varphi_n(t) = A_n(t) + R_n(t), \tag{10}$$

где

$$A_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2n+1-t^2)^{-1/4} \cos\frac{(2n+1)(2\beta - \sin 2\beta) - \pi}{4}, \tag{11}$$

$$R_n(t) = O[(2n+1)^{1/2}(2n+1-t^2)^{-7/4}], \tag{12}$$

$$\beta = \beta_n(t) = \arccos t(2n+1)^{-1/2}.$$

Условие (9) для представления в виде (10) функций $\varphi_n(t)$ и $\varphi_n(s)$ в интеграле (8) выполнено, так как $0 < t \leqslant s \leqslant \sqrt{n}\,x < \sqrt{n}\,(\sqrt{2} - Cn^{-2/3}) < (2n-1)^{1/2} - (2n-1)^{-1/6}$ при достаточно больших n и C в области (7).

Представим подынтегральные функции (8) в виде (10) и запишем $\delta_{2m}(x)$ в виде суммы четырех двойных интегралов: $\delta_{2m}(x) = \delta_{2m}^{(1)}(x) + \delta_{2m}^{(2)}(x) + \delta_{2m}^{(3)}(x) + \delta_{2m}^{(4)}(x)$. Оценим отдельно $\delta_{2m}^{(k)}$, опуская константы, не зависящие от m. Из определения (12) и (7) получаем

$$\begin{aligned}
\delta_{2m}^{(4)}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_{0}^{\sqrt{2m}\,x} R_{2m-1}(s)\left(\int\limits_{0}^{s} R_{2m}(t)\,dt\right) ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_{0}^{\sqrt{2m}\,x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}}\right] \left(\int\limits_{0}^{s} O\left[\frac{(4m+1)^{1/2}}{(4m+1-t^2)^{7/4}}\right] dt\right) ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_{0}^{\sqrt{2m}\,x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}(4m+1-t^2)^{3/4}}\right] ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}}\, O\left[(4m-1-2mx^2)^{-3/2}\right] = O\left[m^{-2}(2-x^2)^{-3/2}\right].
\end{aligned}$$

Для оценки остальных интегралов $\delta_{2m}^{(k)}$, $k{=}1{,}2{,}3$, докажем лемму.

Лемма 1. *Справедливо неравенство:*

$$\int_0^{\sqrt{n}\,x} A_{n-1}(s)\Big(\int_0^s A_n(t)\,dt\Big)\,ds = O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Доказательство леммы 1. Введем следующие обозначения:

$$q_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2n+1-t^2)^{-1/4},\qquad p_n(t)=\frac{(2n+1)(2\beta-\sin 2\beta)-\pi}{4},$$
$$I_n(s)=\int_0^s q_n(t)\cos p_n(t)\,dt. \tag{13}$$

Легко проверить, что

$$q_n'(t)=\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\,(2n+1-t^2)^{-5/4},\qquad p_n'(t)=-\sqrt{2n+1-t^2},$$
$$I_n'(s)=q_n(s)\cos p_n(s).$$

Интегрируя $I_n(s)$ по частям, получим

$$I_n(s)=\frac{q_n(t)}{p_n'(t)}\,\sin p_n(t)\Big|_0^s+\int_0^s\frac{q_n(t)p_n''(t)}{p'^2{}_n(t)}\,\sin p_n(t)\,dt-\int_0^s\frac{q_n'(t)}{p_n'(t)}\,\sin p_n(t)\,dt.$$

Отсюда, имеем неравенство

$$|I_n(s)|\leqslant\int_0^s\frac{q_n(t)p_n''(t)}{p'^2{}_n(t)}\,dt-\frac{q_n(s)}{p_n'(s)}-\frac{q_n(0)}{p_n'(0)}-\int_0^s\frac{q_n'(t)}{p_n'(t)}\,dt\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2(2n+1-s^2)^{-3/4}. \tag{14}$$

Пользуясь последним неравенством и обозначениями (13), интегрируя по частям, мы получим

$$\int_0^{\sqrt{n}\,x} A_{n-1}(s)\Big(\int_0^s A_n(t)\,dt\Big)\,ds=\int_0^{\sqrt{n}\,x} I_n(s)\,q_{n-1}(s)\,\cos p_{n-1}(s)\,ds$$
$$=I_n(s)\,\frac{q_{n-1}(s)}{p_{n-1}'(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\Big|_0^{\sqrt{n}\,x}+\int_0^{\sqrt{n}\,x} I_n(s)\frac{q_{n-1}(s)p_{n-1}''(s)}{p'^2{}_{n-1}(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\,ds$$
$$-\int_0^{\sqrt{n}\,x} I_n(s)\frac{q_{n-1}'(s)}{p_{n-1}'(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\,ds-\int_0^{\sqrt{n}\,x} I_n'(s)\frac{q_{n-1}(s)}{p_{n-1}'(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\,ds$$
$$=O\left[n^{-3/2}(2-x^2)^{-3/2}\right]-\int_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{q_{n-1}(s)\,q_n(s)}{p_{n-1}'(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\cos p_n(s)\,ds.$$

Для оценки последнего интеграла представим его в виде

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x} \frac{q_{n-1}(s)\,q_n(s)}{p'_{n-1}(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\cos p_n(s)\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x} \frac{q_{n-1}(s)\,q_n(s)}{p'_{n-1}(s)}\,\sin(p_n(s)+p_{n-1}(s))\,ds$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x} \frac{q_{n-1}(s)\,q_n(s)}{p'_{n-1}(s)}\,\sin(p_n(s)-p_{n-1}(s))\,ds.$$

Интегрируя по частям, легко убедиться, что

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x} \frac{q_{n-1}(s)\,q_n(s)}{p'_{n-1}(s)}\,\sin(p_n(s)+p_{n-1}(s))\,ds = O\left[n^{-3/2}(2-x^2)^{-3/2}\right].$$

Заметим, что $0<\beta_n(s)\leqslant \pi/2$, при $0<s\leqslant\sqrt{n}\,x$. Используя этот факт, а также очевидное тождество

$$\sin 2\beta_n - \sin 2\beta_{n-1} = \sin(2\beta_n - 2\beta_{n-1}) - 4\sin\beta_n\sin\beta_{n-1}\sin(\beta_n-\beta_{n-1}),$$

мы получим

$$\left|\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x} \frac{q_{n-1}(s)\,q_n(s)}{p'_{n-1}(s)}\,\sin(p_n(s)-p_{n-1}(s))\,ds\right| \leqslant C\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{|p_n(s)-p_{n-1}(s)|}{2n-s^2}\,ds$$
$$\leqslant C\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{2\beta_n(s)-\sin 2\beta_n(s)}{2n-s^2}\,ds + Cn\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{2\beta_n(s)-2\beta_{n-1}(s)-\sin(2\beta_n(s)-2\beta_{n-1}(s))}{2n-s^2}\,ds$$
$$+Cn\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{\sin\beta_n(s)\sin\beta_{n-1}(s)\sin(\beta_n(s)-\beta_{n-1}(s))}{2n-s^2}\,ds$$
$$\leqslant C\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{\sin^3\beta_n(s)}{2n-s^2}\,ds + Cn\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{\sin^3(\beta_n(s)-\beta_{n-1}(s))}{2n-s^2}\,ds$$
$$+Cn\int\limits_0^{\sqrt{n}\,x}\frac{\sin\beta_n(s)\sin\beta_{n-1}(s)\sin(\beta_n(s)-\beta_{n-1}(s))}{2n-s^2}\,ds \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Лемма 1 доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Непосредственно из леммы 1

$$\delta_{2m}^{(1)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}}\int\limits_0^{\sqrt{2m}\,x} A_{2m-1}(s)\left(\int\limits_0^{s} A_{2m}(t)\,dt\right)ds = O\left[\frac{1}{m}\right].$$

Используя оценку (14) леммы 1 и определение (12), получаем

$$\delta_{2m}^{(3)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}\,x} R_{2m-1}(s)\Bigg(\int\limits_0^s A_{2m}(t)\,dt\Bigg)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}\,x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}}\right]\cdot O\left[\frac{1}{(4m+1-s^2)^{3/4}}\right]\,ds$$

$$= O\left[\frac{1}{m^2(2-x^2)^{3/2}}\right].$$

Аналогично, после изменения порядка интегрирования, получаем

$$\delta_{2m}^{(2)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}\,x} A_{2m-1}(s)\Bigg(\int\limits_0^s R_{2m}(t)\,dt\Bigg)\,ds$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2m}\,x} R_{2m}(t)\Bigg(\int\limits_t^{\sqrt{2m}\,x} A_{2m-1}(s)\,ds\Bigg)\,dt = O\left[\frac{1}{m^2(2-x^2)^{3/2}}\right].$$

Из оценок для $\delta_{2m}^{(k)}(x)$, полученных выше, в области (7) следует оценка $\delta_{2m}(x) = O\left[m^{-1}\right]$. Поэтому (3) выполнено и, тем самым, теорема для четного n доказана.

b) Случай $\mathbf{n = 2m+1}$. С учетом нечетности φ_{2m+1} из (4)–(5) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2m+1}\,x} \varphi_{2m+1}(t)\,dt - \int\limits_{\sqrt{2m+1}\,x}^{\infty} \varphi_{2m+1}(t)\,dt = 2\int\limits_0^{\sqrt{2m+1}\,x} \varphi_{2m+1}(t)\,dt\, - 2\,I_{2m+1},$$

$$\delta_{2m+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{4m+2}} \int\limits_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(s)\Bigg(\int\limits_0^s \varphi_{2m+1}(t)dt\Bigg)ds + k_m \int\limits_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(t)\,dt, \qquad (15)$$

где I_n – интегралы (6),

$$k_m = \frac{1}{2(2m+1)I_{2m}} - \frac{I_{2m+1}}{\sqrt{4m+2}}. \qquad (16)$$

Первое слагаемое (15) оценивается так же, как и в случае четного n. Рассмотрим второе слагаемое. Из (10)–(12) и оценки (14) леммы 1 получаем

$$\int\limits_0^{\sqrt{2m+1}\,x} \varphi_{2m}(t)\,dt = O\left[m^{-3/4}(2-x^2)^{-3/4}\right]. \qquad (17)$$

Для оценки константы k_m докажем лемму.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$I_n = O(n^{-1/4}). \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n. В случае четного $n = 2m$, пользуясь равенством [6, 7.373.2], получим

$$I_{2m} = \int\limits_0^\infty \varphi_{2m}(t)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,c_{2m}\frac{(2m)!}{m!},$$

откуда, пользуясь формулой Стирлинга, будем иметь

$$I_{2m} = O(m^{-1/4}).$$

Рассмотрим случай нечетного $n = 2m+1$. Принимая во внимание равенство

$$H_{2m+1}(t) = 2tH_{2m}(t) - 4mH_{2m-1}(t),$$

интегрированием по частям получаем рекуррентное соотношение

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m+1}(t)\,dt = H_{2m}(0) + 4m\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m-1}(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m+1}(t)\,dt = \sum_{k=0}^m 2^{n-k+1} H_{2k}(0)\,\frac{(2n)!!}{(2k)!!}.$$

Замечая, что

$$H_{2k}(0) = (-1)^k\,2^k\,(2k-1)!!,$$

получим

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m+1}(t)\,dt = 2^{2m+1}\,m!\sum_{k=0}^m (-1)^k\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Так как сумма в последнем равенстве не превосходит 1, а $c_{2m+1}2^{2m+1}m! = O(m^{-1/4})$, имеем

$$I_{2m+1} = O(m^{-1/4}).$$

Лемма 2 доказана. □

Закончим доказательство теоремы. Используя оценку (18), получаем из (16) равенство $k_m = O(m^{-3/4})$. Вместе с (17) это дает нужную оценку второго слагаемого в (15)

$$k_m \int\limits_0^{\sqrt{2m+1}\,x} \varphi_{2m}(t)\,dt = O\left[m^{-3/4}\right]\cdot O\left[m^{-3/4}(2-x^2)^{-3/4}\right] = O\left[m^{-3/2}(2-x^2)^{-3/4}\right].$$

Нетрудно убедиться, что обе оценки для слагаемых (15) являются $O\left[m^{-1}\right]$ в области (7), поэтому (3) выполнено и при нечетном n. Теорема доказана. □

Литература

1. Z. D. Bai, Methodologies in spectral analysis of large-dimensional random matrices, a review. *Statist. Sinica*, **9(3)**, 611–677 (1999). With comments by G. J. Rodgers and Jack W. Silverstein; and a rejoinder by the author.
2. T. M. Garoni, P. J. Forrester, and N. E. Frankel, Asymptotic corrections to the eigenvalue density of the GUE and LUE. *J. Math. Phys.*, **46(10)**, 103301, 17 (2005).
3. F. Götze and A. Tikhomirov, Rate of convergence to the semi-circular law. *Probab. Theory Related Fields*, **127(2)**, 228–276 (2003).
4. F. Götze and A. N. Tikhomirov. Rate of convergence to the semi-circular law for the Gaussian unitary ensemble. *Teor. Veroyatnost. Primenen.*, **47(2)**, 381–387 (2002).
5. Friedrich Götze and Alexander Tikhomirov, The rate of convergence for spectra of GUE and LUE matrix ensembles. *Cent. Eur. J. Math.*, **3(4)**, 666–704 (electronic) (2005).
6. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press Inc., San Diego, CA, sixth edition (2000). Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger.
7. Frieder Kalisch and Daniel Braak, Exact density of states for finite Gaussian random matrix ensembles via supersymmetry. *J. Phys. A*, **35(47)**, 9957–9969 (2002).
8. Madan Lal Mehta, *Random Matrices*, V. 142 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition (2004).
9. Benjamin Muckenhoupt, Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **147**, 419-431 (1970); ibid., **147**, 433–460 (1970).