ПРЕПРИНТ ПОМИ — 21/2005

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА МАНДЕЛЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ, СВЯЗАННЫХ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ [1]

В. В. БОРЗОВ

Кафедра Математики
С.-Петербургский университет
телекоммуникаций

Е. В. ДАМАСКИНСКИЙ

Кафедра Математики
Военный Инженерный
Технический Университет

19 декабря 2005

Для построенных ранее осцилляторо - подобных систем, связанных с заданным семейством ортогональных многочленов, и соответствующих обобщенных когерентных состояний вычислено значение параметра Манделя Q_M. Как известно, знак этого параметра определяет характер отклонения статистики возбуждений от пуассоновской, в случае которой $Q_M = 0$. Показано, что для деформированных осцилляторов, порождаемых известными классами ортогональных многочленов, параметр Манделя может принимать как отрицательные значения (суб-пуассоновская статистика), так и положительные, соответствующие супер-пуассоновской статистике.

[1]Работа выполнялась при поддержке РФФИ, гранты 03-01-00593, 03-01-00837

1 Введение

В последнее время заметно усилился интерес к построению и исследованию когерентных состояний для осцилляторо-подобных систем (обобщенных осцилляторов), связанных с семействами ортогональных многочленов (обширная библиография имеется в обзорах [1]-[2]).

В предыдущих работах авторов [3]-[13] был предложен новый метод построения осцилляторо-подобных систем в которых исходным объектом является семейство ортогональных многочленов, связанных с обобщенным осциллятором подобно тому, как обычный бозонный осциллятор связан с полиномами Эрмита. В рамках этого подхода были рассмотрены обобщенные осцилляторы, порождаемые классическими многочленами как непрерывного так и дискретного переменного, а также осциллятор связанный с (базисными) q-полиномами Эрмита [9]-[11]. Для соответствующих осцилляторо-подобных систем определялись когерентные состояния и исследовались их свойства.

Существенным для приложений является то обстоятельство, что предложенная конструкция построения осцилляторо-подобных систем и соответствующих им когерентных состояний позволяет по заданному энергетическому спектру подобрать подходящее семейство ортогональных многочленов (коэффициенты рекуррентного соотношения которых определяют спектр гамильтониана) диагоналиизирующее гамильтониан соответствующей системы и, тем самым, обойти трудную задачу факторизации гамильтониана. Полученные нами явные выражения для когерентных состояний обобщенных осцилляторов, ассоциированных с ортогональными полиномами, позволяют для таких систем вычислять значения ряда физически интересных величин, таких как, например, параметр Манделя Q_M, знак которого определяет характер отклонения статистики возбуждений от пуассоновской. Вычисленный в когерентных состояниях стандартного бозонного осциллятора этот параметр принимает нулевое значение, что соответствует пуассоновскому распределению. В случае, когда этот параметр принимает положительные значения говорят о супер-пуассоновской статистике возбуждений, а при отрицательных - о суб-пуассоновской.

В данной работе мы покажем, что в когерентных состояниях осцилляторо-подобных систем, порождаемых известными классами ортогональных многочленов, параметр Манделя может принимать как отрицательные, так и положительные значения. В случае классических ортогональных полиномов непрерывного и дискретного аргумента нами получены следующие результаты. Для осцилляторов, порождаемых полиномами Шарлье [12], также как и для стандартного осциллятора (многочлены Эрмита) параметр Манделя принимает нулевое значение ($Q_M = 0$; статистика – пуассоновская). Для многочленов Лагерра и Мейкснера $Q_M < 0$ (суб-пуассоновская статистика). В случае полиномов Гегенбауера и Кравчука знак параметра Манделя зависит от значения собственного числа оператора уничтожения, соответствующего когерентного состояния. В случае деформированных q-полиномов Эрмита знак Q_M определяется величиной параметра деформации q. Именно, $Q_M < 0$ при $0 < q < 1$, а при $q > 1$ значение параметра Манделя положительно ($Q_M > 0$).

Отметим, что в данной работе мы используем когерентные состояния типа Барута - Жирарделло [14], которые можно определить для обобщенного осциллятора, связанного с классическими ортогональными многочленами и их q-аналогами, в случае, когда соответствующее гильбертово пространство бесконечномерно. Ключевым моментом при вычислении параметра Манделя является тот факт, что для когерентных состояний типа Барута - Жирарделло справедлива простая формула (8), совпадающая с формулой, полученной в работе [15] в случае когерентных состояний Клаудера - Газо.

2 Вычисление параметра Манделя для обобщенного осциллятора

В абстрактном пространстве Фока $\mathcal{H}_F$ с базисом $\{|n\rangle_F\}_{n=0}^{\infty}$ стандартный бозонный осциллятор определяется операторами рождения и уничтожения a_F^+, a_F^- с перестановочными соотношениями

$$[a_F^+, a_F^-] = 1; \tag{1}$$

и оператором числа частиц (гамильтонианом)

$$N_F = H_F = a_F^+ a_F^-. \tag{2}$$

Эти операторы действуют в $\mathcal{H}_F$ по формулам

$$\begin{gathered} a_F^-|0\rangle_F = 0, \qquad a_F^-|n\rangle_F = \sqrt{n}|n-1\rangle_F, \quad n \geq 1; \\ a_F^+|n\rangle_F = \sqrt{n+1}|n+1\rangle_F, \quad n \geq 0; \\ N_F|n\rangle_F = H_F|n\rangle_F = n|n\rangle_F. \end{gathered} \tag{3}$$

Реализуем пространство Фока как гильбертово пространство $\mathcal{F} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mu_0)$ по гауссовой мере $\mu_0 = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$, с базисом из нормированных полиномов Эрмита $|n\rangle_0 = \sqrt{\frac{n!}{2^n}} H_n(x)$. В этой реализации когерентные состояния типа Клаудера - Газо [16] определяются соотношением [15]

$$||z\rangle := \mathcal{N}_0^{-\frac{1}{2}}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{\rho(n)}} |n\rangle_0, \tag{4}$$

для некоторого набора $\{\rho(n)\}_{n=0}^{\infty}$ положительных параметров ($\rho(0) = 1$). Нормировочный множитель вычисляется по формуле

$$\mathcal{N}_0(|z|^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{\rho(n)}, \qquad |z|^2 < R; \tag{5}$$

радиус сходимости ряда в которой определяет диапазон допустимых значений комплексного параметра z (в случае обычных когерентных состояний $\rho(n) = n!$ и z пробегает всю комплексную плоскость). Допустимы наборы параметров для которых выполняется соотношение полноты

$$\iint_{\mathbb{C}_R} ||z\rangle W(|z|^2) \langle z|| \mathrm{d}^2 z = \mathbb{I} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle_{00}\langle n|, \tag{6}$$

т.е. существует положительная функция $W(|z|^2)$ для которой это соотношение выполнено.

Для вычисления в когерентных состояниях $||z\rangle$ параметра Манделя

$$Q_M(x) := \frac{\langle z||N_F^2||z\rangle - (\langle z||N_F||z\rangle)^2}{\langle z||N_0||z\rangle} - 1, \tag{7}$$

характеризующего отклонение распределения числа возбуждений от пуассоновской статистики, в работе [15] была получена формула

$$Q_M(x) = x \left(\frac{\mathcal{N}_0''(x)}{\mathcal{N}_0'(x)} - \frac{\mathcal{N}_0'(x)}{\mathcal{N}_0(x)} \right), \qquad (|z|^2 = x). \tag{8}$$

Рассмотрим теперь случай обобщенного осциллятора [13]. В качестве гильбертова пространства будем использовать пространство $\mathcal{F} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$, где μ положительная борелевская мера на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Будем предпологать что μ — вероятностная

мера
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu(dx)=1, \tag{9}$$
с нулевыми моментами нечетного порядка
$$\mu_{2k+1}=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k+1}\mu(dx)=0, \qquad k=0,1,\dots. \tag{10}$$
(Последнее предположение служит для упрощения формул и все приводимые ниже результаты сохраняют силу и в более общем случае произвольных моментов). Этой мере сопоставим последовательность положительных чисел $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, определив их как решения системы алгебраических уравнений
$$\sum_{m=0}^{[\frac{1}{2}n]}\sum_{s=0}^{[\frac{1}{2}n]}(-1)^{n+s}\frac{\alpha_{2m-1,n-1}\alpha_{2s-1,n-1}}{(b_{n-1}^2)!}\mu_{2(n-m-s+1)}=b_{n-1}^2+b_n^2, \quad n\geq 0, \tag{11}$$
где
$$\alpha_{-1,-1}=1, \quad \alpha_{2p-1,n-1}:=\sum_{k_1=2p-1}^{n-1}b_{k_1}^2\sum_{k_2=2p-3}^{k_1-2}b_{k_2}^2\dots\sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-2}b_{k_p}^2; \tag{12}$$
и
$$\mu_0=1, \qquad \mu_{2k}=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k}\mu(dx), \qquad k=0,1,\dots, \tag{13}$$
Эта система имеет единственное решение
$$b_0^2=\mu_2, \qquad b_1^2=\frac{\mu_4}{\mu_2}-\mu_2,\dots. \tag{14}$$
Сопоставим далее мере μ систему многочленов $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям[2]
$$x\psi_n(x)=b_n\psi_{n+1}(x)+b_{n-1}\psi_{n-1}(x), \quad n\geq 0, \qquad b_{-1}=0, \quad \psi_0(x)=1, \tag{15}$$
где в качестве коэффициентов используются элементы построенной выше числовой последовательности. С рекуррентными соотношениями связана тридиагональная матрица

[2]Заметим, что рекуррентные соотношения всех классических ортогональных многочленов после соответствующей перенормировки могут быть записаны в такой симметризованной форме. Например, определив $\psi_n=(2^n n!)^{-1/2}H_n$, где H_n – стандартные многочлены Эрмита, мы приведем рекуррентное соотношение
$$xH_n=\frac{1}{2}H_{n+1}+nH_{n-1}$$
к виду (15) с $b_n=\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.

Якоби с нулевой главной диагональю

$$J = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & 0 & b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Известно [17], что если классическая проблема моментов для матрицы Якоби J определена, то описанная выше система многочленов полна в $\mathcal{F} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$. Если же проблема моментов является неопределенной, то эта система многочленов будет полной в $\mathcal{F}$ в том и только в том случае, когда мера μ является N-экстремальным решением классической проблемы моментов для матрицы Якоби J. Известно [17] также, что построенная указанным выше способом система многочленов ортогональна по мере μ. В дальнейшем мы будем предпологать, что система многочленов $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $\mathcal{F}$ и определяет после нормировки ортонормированный базис $\{e_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в этом пространстве.

Сопоставим матрице Якоби J оператор X в $\mathcal{F}$ определив с помощью реккурентного соотношения (15) его действие на элементы базиса формулой

$$Xe_n = xe_n = b_n e_{n+1} + b_{n-1} e_{n-1}, \qquad Xe_0 = b_0 e_1. \tag{17}$$

Мы будем интерпретировать этот оператор как оператор координаты в пространстве $\mathcal{F}$. Определим также оператор импульса P, положив

$$Pe_n = i\left(b_{n-1} e_{n-1} - b_n e_{n+1}\right), \qquad Pe_0 = -ib_0 e_1. \tag{18}$$

Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[X, P] = 2i\left(b_{n-1}^2 - b_n^2\right). \tag{19}$$

В качестве гамильтониана выберем самосопряженный оператор

$$H = X^2 + P^2, \tag{20}$$

для которого многочлены e_n являются собственными функциями с собственными значениями λ_n :

$$He_n = \lambda_n e_n \qquad \lambda_0 = 2b_0^2, \quad \lambda_n = 2(b_{n-1}^2 + b_n^2), \quad n \geq 1. \tag{21}$$

Построенную осцилляторо-подобную систему мы будем называть обобщенным осциллятором, связанным с системой ортогональных многочленов $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Определим операторы рождения и уничтожения положив

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X + iP\right), \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X - iP\right). \tag{22}$$

Эти операторы сопряжены друг другу и действуют на элементы базиса по формулам

$$a^+ e_n = \sqrt{2}\, b_n\, e_{n+1}(x), \qquad a e_n(x) = \sqrt{2}\, b_{n-1} e_{n-1}(x) \tag{23}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a, a^+] = i[X, P] = 2\left(b_n^2 - b_{n-1}^2\right). \tag{24}$$

Мы отсылаем читателя к работе [13] за доказательствами утверждений и математическими деталями (такими как определение областей определения и т.п.) проведенного выше построения обобщенного осциллятора, связанного с заданной системой ортогональных многочленов и к работе [3] за реализацией этих операторов дифференциальными операторами в $\mathcal{F}$.

Наличие операторов уничтожения позволяет определить для них когерентные состояния типа Барута - Жирарделло стандартным образом

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \qquad |z\rangle = \mathcal{N}^{-\frac{1}{2}}(|z|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\sqrt{2}\, b_{n-1})!} e_n, \tag{25}$$

где $\mathcal{N}$ нормирующий множитель, а $(\sqrt{2}\, b_{n-1})!$ понимается как факториал по индексу т.е. $(\sqrt{2}\, b_n)! = (\sqrt{2}\, b_1) \cdot (\sqrt{2}\, b_2) \cdot \ldots \cdot (\sqrt{2}\, b_n)$, и $(\sqrt{2}\, b_{-1})! = 0! = 1$ так как $b_{-1} = 0$. Положив $\rho(n) = (2b_{n-1}^2)!$, убеждаемся в том, что эти состояния являются также и когерентными состояниями типа Клаудера - Газо.

Покажем что для этих когерентных состояний справедлива формула (8). Определим оператор N нумерующий состояния формулой $Ne_n = ne_n$ так что при $|n\rangle = e_n$ имеем $\langle n|N|m\rangle = n\delta_{m,n}$. Тогда

$$\langle z|N|z\rangle = \mathcal{N}^{-1} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n z^m}{(\sqrt{2}b_{n-1})!\,(\sqrt{2}b_{m-1})!} \langle n|N|m\rangle = \mathcal{N}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n|z|^{2n}}{(2b_{n-1}^2)!}. \tag{26}$$

Положив $x = |z|^{2n}$ имеем

$$\langle z|N|z\rangle = \frac{x}{\mathcal{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(2b_{n-1}^2)!} = x \frac{\mathcal{N}'(x)}{\mathcal{N}(x)}. \tag{27}$$

Далее учитывая, что $n^2 = n(n-1) + n$ получаем

$$\langle z|N^2|z\rangle = \frac{x}{\mathcal{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2b_{n-1}^2)!} = \frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)x^n}{(2b_{n-1}^2)!} + \frac{1}{\mathcal{N}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{(2b_{n-1}^2)!} = \frac{x^2\mathcal{N}''(x)}{\mathcal{N}'(x)} + \frac{x\mathcal{N}'(x)}{\mathcal{N}(x)}. \quad (28)$$

Подставляя (27)-(28) в (7) имеем требуемое выражение

$$Q_M(x) = x\left(\frac{\mathcal{N}''(x)}{\mathcal{N}'(x)} - \frac{\mathcal{N}'(x)}{\mathcal{N}(x)}\right). \quad (29)$$

3 Вычисление параметра Манделя для конкретных примеров обобщенного осциллятора

Используя формулу (29) вычислим параметр Манделя для построенных ранее обобщенных осцилляторов [4]-[12]. В случае осцилляторов, связанных с полиномами Гегенбауера, Лежандра и Чебышева, функция $\mathcal{N}(x)$ имеет вид [6]-[8]

$$\mathcal{N}_G(x) = F(\alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\frac{3}{2}; 2\alpha+1; 2x); \quad \alpha > -\frac{1}{2} \quad (30)$$

$$\mathcal{N}_L(x) = F(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; 2x); \quad (31)$$

$$\mathcal{N}_{Ch}(x) = (1-2x)^{-1}, \quad (32)$$

где

$$F(a,b;c;x) = {}_2F_1\left(\left.{a,b \atop c}\right| x\right). \quad (33)$$

используя известное выражение для производной от гипергеометрической функции Гаусса [18]

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n F(a,b;c;x) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; x); \quad (34)$$

имеем

$$\mathcal{N}_G'(x) = 2\,\frac{(\alpha+\frac{1}{2})(\alpha+\frac{3}{2})}{2\alpha+1} F(\alpha+\frac{3}{2}, \alpha+\frac{5}{2}; 2\alpha+2; 2x); \quad (35)$$

$$\mathcal{N}_G''(x) = 4\,\frac{(\alpha+\frac{1}{2})(\alpha+\frac{3}{2})^2(\alpha+\frac{5}{2})}{(2\alpha+1)(2\alpha+2)} F(\alpha+\frac{5}{2}, \alpha+\frac{7}{2}; 2\alpha+3; 2x). \quad (36)$$

Подставляя в (29) получаем следующее выражение для параметра Манделя в когеретных состояниях типа Барута - Жирарделло для осциллятора Гегенбауэра

$$Q_M^G(x) = \\ = 2x\left(\frac{(\alpha+\frac{3}{2})(\alpha+\frac{5}{2})}{2\alpha+2}\;\frac{F(\alpha+\frac{5}{2},\alpha+\frac{7}{2};2\alpha+3;2x)}{F(\alpha+\frac{3}{2},\alpha+\frac{5}{2};2\alpha+2;2x)}- \right.\\ \left. -\frac{(\alpha+\frac{1}{2})(\alpha+\frac{3}{2})}{2\alpha+1}\;\frac{F(\alpha+\frac{3}{2},\alpha+\frac{5}{2};2\alpha+2;2x)}{F(\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{3}{2};2\alpha+1;2x)}\right). \tag{37}$$

Аналогично в случае осцилляторов Лежандра и Чебышева получаем

$$Q_M^L(x) = 2x\left(\frac{15}{2}\,\frac{F(\frac{5}{2},\frac{7}{2};3;2x)}{F(\frac{3}{2},\frac{5}{2};2;2x)} - \frac{3}{4}\,\frac{F(\frac{3}{2},\frac{5}{2};2;2x)}{F(\frac{1}{2},\frac{3}{2};1;2x)}\right); \tag{38}$$

$$Q_M^{Ch}(x) = x\left(\frac{4}{1-2x} - \frac{2}{1-2x}\right) = \frac{2x}{1-2x}. \tag{39}$$

Из (39) следует, что при $0 < x < \frac{1}{2}$

$$Q_M^{Ch}(x) > 0, \qquad (\alpha = \frac{1}{2}) \tag{40}$$

Покажем, что для всех полиномов Гегенбауера при $0 < x < \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $Q_M^G(x) > 0$. Для этого перепишем (37) в виде

$$Q_M^G(x) = \frac{2x(\alpha+\frac{3}{2})}{(2\alpha+2)F(\alpha+\frac{3}{2},\alpha+\frac{5}{2};2\alpha+2;2x)F(\alpha+\frac{1}{2},\alpha+\frac{3}{2};2\alpha+1;2x)}\,\mathbb{T}, \tag{41}$$

где

$$\mathbb{T} = (\alpha+\tfrac{5}{2})F(\alpha+\tfrac{5}{2},\alpha+\tfrac{7}{2};2\alpha+3;2x)F(\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{2};2\alpha+1;2x)- \\ -(\alpha+1)F^2(\alpha+\tfrac{3}{2},\alpha+\tfrac{5}{2};2\alpha+2;2x). \tag{42}$$

Поскольку при $\alpha > -\frac{1}{2}$, и $x > 0$ в (41) все сомножители перед $\mathbb{T}$ положительны, то знак $Q_M^G(x)$ определяется знаком $\mathbb{T}$.

Используя известное соотношение [18]

$$F(a,b;c;x) = (1-x)^{(c-b-a)}F(c-a,c-b;c;x); \tag{43}$$

при $|\alpha| < \frac{1}{2}$ или $\alpha > \frac{1}{2}$ получаем

$$F(\alpha+\tfrac{5}{2},\alpha+\tfrac{7}{2};2\alpha+3;x) = (1-x)^{-3}F(\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha-\tfrac{1}{2};2\alpha+3;x); \tag{44}$$

$$F(\alpha+\tfrac{3}{2},\alpha+\tfrac{5}{2};2\alpha+2;x) = (1-x)^{-2}F(\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha-\tfrac{1}{2};2\alpha+2;x); \tag{45}$$

$$F(\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{2};2\alpha+1;x) = (1-x)^{-1}F(\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha-\tfrac{1}{2};2\alpha+1;x); \tag{46}$$

Подставляя (44) - (46) в (41) и (42) получаем

$$Q_M^G(x) = \frac{\alpha + 3/2}{(\alpha+1)\widetilde{F}(2\alpha+1)\widetilde{F}(2\alpha+2)} \cdot \frac{2x}{1-2x} \cdot \mathbb{S}, \tag{47}$$

где

$$\mathbb{S} = (\alpha + \tfrac{5}{2})\widetilde{F}(2\alpha+1)\widetilde{F}(2\alpha+3) - (\alpha+1)\widetilde{F}^2(2\alpha+2), \tag{48}$$

и мы ввели обозначение

$$\widetilde{F}(\beta) = F(\alpha + \tfrac{1}{2}, \alpha - \tfrac{1}{2}; \beta; 2x). \tag{49}$$

Так как при рассматриваемых значениях переменных:

$$0 < x < \frac{1}{2}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}, \tag{50}$$

коэффициент при $\mathbb{S}$ в (41) положителен, то

$$\operatorname{sign}\left\{Q_M^G(x)\right\} = \operatorname{sign}\left\{\mathbb{S}\right\}. \tag{51}$$

Сначала рассмотрим случай $\alpha > \frac{1}{2}$. С этой целью представим $\mathbb{S}$ в виде

$$\mathbb{S} = \sum_{k,n=0}^{\infty} x^{n+k} \frac{(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha-\frac{1}{2})_n(\alpha+\frac{1}{2})_k(\alpha-\frac{1}{2})_k}{(2\alpha+2)_n(2\alpha+2)_k n!k!} \frac{(\alpha+1)}{(2\alpha+1)(2\alpha+n+2)} K(n,k) \tag{52}$$

где

$$K(n,k) = (2\alpha+3)(k-n) + 2(n+k) + 3(2\alpha+1) \tag{53}$$

и исследуем знак $\mathbb{S}$ при $x > 0,\ \alpha > \frac{1}{2}$. Перепишем ряд (52) по степеням $t = n + k$

$$\mathbb{S} = \sum_{t=0}^{\infty} a_t x^t. \tag{54}$$

Вычисляя, имеем

$$a_0 = \frac{3}{2}, \qquad a_1 = \frac{(\alpha-\frac{1}{2})(6\alpha+7)}{2(2\alpha+3)} > 0, \tag{55}$$

$$a_t = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t}{2}\right]} \frac{(\alpha+\frac{1}{2})_{t-k}(\alpha-\frac{1}{2})_{t-k}}{(t-k)!(2\alpha+2)_{t-k}} \frac{(\alpha+\frac{1}{2})_k(\alpha-\frac{1}{2})_k}{k!(2\alpha+2)_k} A_{t,k}, \quad t \geq 2. \tag{56}$$

где

$$A_{t,k} = (2\alpha+3)(t-k)(t-2k) + k^2(2\alpha+3) + 2t^2 + 3t(2\alpha+1) + 12(\alpha+1)(2\alpha+1). \tag{57}$$

Это выражение положительно при $t \geq 2$ и, следовательно

$$a_t \geq 0, \qquad t \geq 0, \quad \alpha > \frac{1}{2}. \tag{58}$$

Итак $\mathbb{S} > 0$ и мы показали, что

$$Q_M^G(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0, \quad \alpha > \frac{1}{2}. \tag{59}$$

Теперь рассмотрим случай $|\alpha| < \frac{1}{2}$. Покажем, что на промежутке $(0; \frac{1}{2})$ функция $\mathbb{S}(x)$ меняет знак с "+" на "-". Для этого исследуем знаки коэффициентов a_t в (54). Из (56) следует, что

$$a_0 = \frac{3}{2} > 0, \qquad a_1 = \frac{(2\alpha-1)(6\alpha+7)}{4(2\alpha+3)} < 0. \tag{60}$$

Далее, из (57) имеем

$$a_2 = \tfrac{3}{16}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right)_2 \frac{24\alpha^3 + 52\alpha^2 + 34\alpha + 3}{\alpha+1}, \tag{61}$$

так что

$$\begin{array}{l} a_2 > 0, \quad \text{при} \quad \alpha \in \left(-\frac{1}{2}; \alpha^*\right) \\ a_2 < 0, \quad \text{при} \quad \alpha \in \left(\alpha^*; \frac{1}{2}\right) \end{array}, \tag{62}$$

где $\alpha^* \in \left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}\right)$.

Заметим, что согласно (58) при $|\alpha| < \frac{1}{2}$ и $k \leq \left[\frac{t}{2}\right]$ имеем

$$A_{t,k} - A_{t,0} = 3k(2\alpha+3)(k-t) < 0, \tag{63}$$

так что

$$0 < A_{t,k} < A_{t,0}, \quad \text{при} \qquad 0 < k \leq \left[\frac{t}{2}\right] \quad t \geq 3. \tag{64}$$

Перепишем (57) в виде

$$a_t = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\left(\frac{(\alpha+\frac{1}{2})_t(\alpha-\frac{1}{2})_t}{t!(2\alpha+2)_t}A_{t,0} + \sum_{k=1}^{[\frac{t}{2}]} A_{t,k}B_{t,k}C_{t,k}\right), \tag{65}$$

где

$$B_{t,k} = \frac{(2t)!!}{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\cdots(2\alpha+2t-1)} \cdot \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\cdots(2\alpha+2(t-k)-1)}{(2t-2k)!!} \cdot \\ \cdot \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)\cdots(2\alpha+2k-1)}{(2k)!!} > 0, \tag{66}$$

$$C_{t,k} = \frac{(4\alpha+4)(4\alpha+6)\cdots(4\alpha+2t+2)}{(2\alpha-1)(2\alpha+1)(2\alpha+3)\cdots(2\alpha+2t-3)} \cdot \\ \cdot \frac{(2\alpha-1)(2\alpha+1)(2\alpha+3)\cdots(2\alpha+2(t-k)-3)}{(4\alpha+4)(4\alpha+6)\cdots(4\alpha+2(t-k)+2)} \cdot \\ \cdot \frac{(2\alpha-1)(2\alpha+1)(2\alpha+3)\cdots(2\alpha+2k-3)}{(4\alpha+4)(4\alpha+6)\cdots(4\alpha+2k+2)} < 0, \quad (67)$$

Обозначим

$$D_{\alpha,t} := -\sum_{k=1}^{[t/2]} B_{t,k} C_{t,k} \,. \quad (68)$$

Тогда из (64)-(68) при $t \geq 3$ получаем следующую оценку коэффициентов a_t

$$a_t < \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} \cdot \frac{(\alpha+\frac{1}{2})_t(\alpha-\frac{1}{2})_t}{t!(2\alpha+2)_t} \cdot A_{t,0}\left(1 - D_{\alpha,t}\right) \,. \quad (69)$$

Нетрудно показать, что для $t = 3, 4, 5, 6$

$$D_{\alpha,t} < 1 \,, \qquad |\alpha| < \frac{1}{2}. \quad (70)$$

Действительно, так как при $|\alpha| < \frac{1}{2}$ имеем $16\alpha^3 + 44\alpha^2 + 28\alpha + 9 > 0$, то

$$D_{\alpha,3} = \frac{3(1-2\alpha)(1+2\alpha)(2+\alpha)}{(1+\alpha)(3+2\alpha)(5+2\alpha)} < 1 \,. \quad (71)$$

Из неравенства $88\alpha^3 + 228\alpha^2 + 122\alpha + 63 > 0$, при $|\alpha| < \frac{1}{2}$ получаем

$$D_{\alpha,4} = \frac{2(1-4\alpha^2)(21+10\alpha)}{(3+2\alpha)(5+2\alpha)(7+2\alpha)} < 1 \,. \quad (72)$$

Далее из неравенства $64\alpha^4 + 320\alpha^3 + 476\alpha^2 + 328\alpha + 153 > 0$, при $|\alpha| < \frac{1}{2}$, следует, что

$$D_{\alpha,5} = \frac{15(1-4\alpha^2)(3+\alpha)(3+2\alpha)}{(1+\alpha)(7+2\alpha)^2(9+2\alpha)} < 1 \,. \quad (73)$$

Наконец, при $|\alpha| < \frac{1}{2}$, из неравенства

$$P_4(\alpha) = 124\alpha^4 + 1244\alpha^3 + 3893\alpha^2 + 6373\alpha + 3546 > 0,$$

вытекает

$$D_{\alpha,6} = \frac{(1-4\alpha^2)P_4(\alpha))}{(1+\alpha)(2+\alpha)(7+2\alpha)(9+2\alpha)^2(11+2\alpha)} < 1 \,. \quad (74)$$

Теперь докажем неравенство (70) при $t \geq 7$. Для этого запишем множители $B_{t,k}$, введенные в (66) в виде

$$B_{t,k} = \prod_{s=1}^{k} b_s, \quad \text{где} \quad b_s = \frac{2(t-s)+2}{2(t-s)+2\alpha+1} \cdot \frac{2(k-s)+2\alpha+1}{2(k-s)+2}. \quad (75)$$

Несложно проверить, что при $\alpha < \frac{1}{2}$, и $k < t$

$$b_s < 1, \quad s = 1, \dots, k. \tag{76}$$

Тогда из (75) и (76) при $t \geq 7$ имеем

$$B_{t,k} < 1, \qquad |\alpha| < \frac{1}{2}, \quad k \leq [\frac{t}{2}]. \tag{77}$$

Далее, при $t \geq 7$ запишем множитель $C_{t,k}$, определенный в (67), в виде

$$C_{t,k} = (\alpha^2 - \frac{1}{4}) a_{t,\alpha} \widetilde{C}_{t,k} \frac{(2\alpha + t)(2\alpha + t + 1)}{(2\alpha + t - k)(2\alpha + t - k + 1)(2\alpha + k)(2\alpha + k + 1)}, \tag{78}$$

где

$$a_{t,\alpha} = \frac{(4\alpha + 2t - 4)(4\alpha + 2t - 2)}{(2\alpha + 2t - 5)(2\alpha + 2t - 3)} \tag{79}$$

и

$$\widetilde{C}_{t,k} = \prod_{s=1}^{k} c_s, \quad \text{где} \quad c_s = \frac{2(t-s) + 4\alpha}{2(t-s) + 2\alpha - 1} \cdot \frac{2(k-s) + 2\alpha + 3}{2(k-s) + 4\alpha + 4}, \quad s = 3, \dots, k. \tag{80}$$

Легко проверить, что при $t \geq 6$ и $\alpha < \frac{1}{2}, \quad k < \left[\frac{t}{2}\right]$

$$c_s < 1, \qquad s = 3, \dots, k.. \tag{81}$$

Тогда из (80) и (81) для $t \geq 7$ имеем

$$\widetilde{C}_{t,k} < 1, \qquad \alpha < \frac{1}{2}, \quad k < \left[\frac{t}{2}\right]. \tag{82}$$

Далее, несложно показать, что при $t > 3$

$$(a_{t,\alpha})'_\alpha > 0, \qquad \alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{83}$$

и тогда

$$a_{t,\alpha} \leq a_{t,\frac{1}{2}} = \frac{t}{t-2}, \qquad |\alpha| < \frac{1}{2}, \quad t > 3. \tag{84}$$

Из (68), (77), (81), (82), (84) вытекает неравенство

$$D_{\alpha,t} < \widetilde{D}_{\alpha,t} = \frac{1 - 4\alpha^2}{4} \cdot \frac{t}{t-2} \sum_{k=1}^{[\frac{t}{2}]} \frac{(2\alpha + t)(2\alpha + t) + 1}{(2\alpha + t - k)(2\alpha + t - k + 1)(2\alpha + k)(2\alpha + k + 1)}. \tag{85}$$

При $t \geq 7, \quad |\alpha| < \frac{1}{2}$, имеем

$$\left(\widetilde{D}_{\alpha,t}\right)'_\alpha < 0\,. \tag{86}$$

Тогда из (85), (86) при $t \geq 7$ получаем

$$D_{\alpha,t} < \widetilde{D}_{-\frac{1}{2},t} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t-2}\right)^2 < 1 \tag{87}$$

Из (69), (81), (87) следует, что при $t \geq 3, \quad |\alpha| < \frac{1}{2}$

$$a_t < 0. \tag{88}$$

Покажем теперь, что при $|\alpha| < \frac{1}{2}$ на интервале $(0, \frac{1}{2})$ выполняется неравенство

$$\mathbb{S}'_x < 0. \tag{89}$$

Из соотношения (52) следует

$$\mathbb{S}'_x = a_1 + 4a_2 \cdot 2x + \sum_{t=3}^{\infty} 2ta_t(2x)^{t-1}. \tag{90}$$

В силу неравенств (88) при $x \in (0, \frac{1}{2})$ последнее слагаемое в правой части (90) отрицательно и для доказательства неравенства (89) достаточно показать, что

$$a_1 + 4a_2 \cdot 1 < 0 \quad \text{при} \qquad |\alpha| < \frac{1}{2}, \quad x \in (0, \frac{1}{2}) \tag{91}$$

Из (60) - (61) имеем

$$a_1 + 4a_2 = \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{2} \cdot \left(\frac{6\alpha+7}{2\alpha+3} + \frac{2\alpha+1}{\alpha+1}(24\alpha^3 + 52\alpha^2 + 34\alpha + 3)\right). \tag{92}$$

Первый множитель в правой части (92) отрицателен при $\alpha < \frac{1}{2}$, а второй имеет положительную производную по α на интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Так как при $\alpha = -\frac{1}{2}$ второй сомножитель в (92) равен $2 > 0$, то неравенство (91) справедливо.

Итак, мы показали, что

$$\mathbb{S}(0) = a_0 = \frac{3}{2} > 0, \qquad \mathbb{S}'_x < 0, \quad x \in (0, \frac{1}{2}). \tag{93}$$

Для того, чтобы доказать, что $\mathbb{S}$ (а значит и параметр Манделя $Q_M^G(x)$) меняет знак на интервале $(0, \frac{1}{2})$ осталось показать, что при $x \to \frac{1}{2}$ выполняется неравенство

$$\mathbb{S}(\frac{1}{2} - 0) < 0. \tag{94}$$

Для его доказательства мы используем полученную с помощью (52), (69), (87) оценку $\mathbb{S}$ при $|\alpha| < \frac{1}{2}, \quad x \in (0, \frac{1}{2})$

$$\mathbb{S}(x) = a_0 + a_1(2x) + a_2(2x)^2 + a_3(2x)^3 + a_4(2x)^4 + a_5(2x)^5 + a_6(2x)^6 + \\ + (\alpha - \frac{1}{2})_2(\alpha + \frac{1}{2})(\alpha + 1) \times \\ \times \sum_{t=7}^{\infty} \frac{(\alpha - 3/2)_{t-1}(\alpha + 3/2)_{t-2}}{t!(2\alpha + 2)_t}(t^2 + 3t + 1)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t-2}\right)^2\right)(2x)^t. \quad (95)$$

Заметим, что в правой части (95) положительными слагаемыми являются только $a_0 = \frac{3}{2}$ и a_2 на промежутке $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \alpha^*)$. Для дальнейшего упрощения членов ряда в (95) учтем, что $t^2 + 3t + 1 \geq t(t+1)$, что $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t-2}\right)^2$, при $t \geq 7$ и, что

$$\frac{t(t+1)(\alpha + 3/2)_{t-1}(\alpha + 3/2)_{t-2}}{t!(2\alpha + 2)_t} = \\ = \frac{(\alpha + 3/2)^2}{1 \cdot (2\alpha + 2)} \frac{(\alpha + 5/2)^2}{2(2\alpha + 3)} \cdots \frac{(\alpha + t - 3/2)^2}{(t-2)(2\alpha + t - 1)} \cdot \frac{(t+1)(2\alpha + 2t - 1/2)}{(t-1)(2\alpha + t)(2\alpha + t + 1)} = \\ = \frac{1}{2(2\alpha + t + 1)} \prod_{s=1}^{t-2} \beta_s \frac{t+1}{t-1} \frac{2\alpha + t - 1}{2\alpha + t}. \quad (96)$$

Легко показать, что

$$\beta_s - 1 = \frac{(\alpha + 1/2)^2}{s(2\alpha + s + 1)} \geq 0 \quad \text{при} \quad \alpha > -\frac{1}{2}, \quad s = 1, 2, \ldots, (t-2). \quad (97)$$

Так как последние множители в (97) очевидно больше единицы, то из этих соотношений для $\mathbb{S}$ получаем следующее неравенство

$$\mathbb{S}(x) < \sum_{t=0}^{6} a_t(2x)^t + \frac{(\alpha + \frac{1}{2})(\alpha + 1)(\alpha^2 - 1/4)}{2 \cdot 50} \sum_{t=7}^{\infty} \frac{(2x)^t}{2\alpha + t + 1} < \\ < \sum_{t=0}^{6} a_t(2x)^t + \frac{(\alpha + \frac{1}{2})(\alpha + 1)(\alpha^2 - 1/4)}{100} \sum_{s=9}^{\infty} \frac{(2x)^s}{s} = \\ \sum_{t=0}^{6} a_t(2x)^t + \frac{(\alpha + \frac{1}{2})(\alpha + 1)(\alpha^2 - 1/4)}{100}\left[-\ln(1 - 2x) + \sum_{m=1}^{8}(-1)^m \binom{8}{m} \frac{1 - (1 - 2x)^m}{m}\right]. \quad (98)$$

Из этого неравенства при $|\alpha| < \frac{1}{2}$ и $x \to \frac{1}{2} - 0$ с очевидностью следует справедливость доказываемого неравенства (94).

Для приложений было бы интересно найти $x_{\text{кр}} \in (0; \frac{1}{2})$ при котором

$$\mathbb{S}(x_{\text{кр}}) = 0. \quad (99)$$

Следующее рассуждение позволяет указать промежуток для $x_{\text{кр}}$

$$x_\alpha^* < x_{\text{кр}} < 1. \tag{100}$$

Для нахождения $x_{\text{кр}}$ используем известное соотношение [18] для гипергеометрической функции (49) при $\beta = 2\alpha + 2$:

$$(2\alpha+2)\,(2\alpha+1-(2\alpha+3)2x)\,\widetilde{F}(2\alpha+2)+ \\ (\alpha+\frac{3}{2})(\alpha+\frac{5}{2})2x\widetilde{F}(2\alpha+3)+(2\alpha+2)(2\alpha+1)(2x-1)\widetilde{F}(2\alpha+1)=0\,. \tag{101}$$

Введем вспомогательные переменные

$$X_\alpha = \frac{\widetilde{F}(2\alpha+3)}{\widetilde{F}(2\alpha+2)}, \qquad Y_\alpha = \frac{\widetilde{F}(2\alpha+1)}{\widetilde{F}(2\alpha+2)}, \tag{102}$$

Тогда для положительности $\mathbb{S}$ необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$X_\alpha Y_\alpha > \frac{\alpha+1}{\alpha+5/2} \tag{103}$$

Из (101) и (102) получаем

$$(2\alpha+2)(2\alpha+1)(1-2x)Y_\alpha = (\alpha+\frac{3}{2})(\alpha+\frac{5}{2})2xX_\alpha + (2\alpha+2)\,(2\alpha+1-(2\alpha+3)2x)\,. \tag{104}$$

Так как при условиях (50) коэффициент при Y_α в (104) положителен, то используя (104) неравенство (103) можно переписать в виде

$$AX_\alpha^2 + BX_\alpha - C > 0, \tag{105}$$

где

$$A = (\alpha+\frac{3}{2})(\alpha+\frac{5}{2})2x, \quad B = (2\alpha+2)\,(2\alpha+1-(2\alpha+3)2x)\,, \\ C = \frac{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)(1-2x)}{(\alpha+\frac{5}{2})}. \tag{106}$$

Отметим, что при условиях (50)

$$A > 0, \qquad C > 0. \tag{107}$$

Неравенство (105) равносильно неравенству

$$U = 2A\widetilde{F}(2\alpha+3) - \left(\sqrt{B^2+4AC} - B\right)\widetilde{F}(2\alpha+2) > 0. \tag{108}$$

Учитывая соотношение

$$(2\alpha+3)_n = \frac{(2\alpha+n+2)}{(2\alpha+2)}(2\alpha+2)_n,$$

и определение гипергеометрической функции, получаем

$$U = 2A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha-\frac{1}{2})_n}{(2\alpha+3)_n}\frac{(2x)^n}{n!} - \left(\sqrt{B^2+4AC}-B\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha-\frac{1}{2})_n}{(2\alpha+2)_n} =$$
$$\left(2A+B-\sqrt{B^2+4AC}\right)+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha-\frac{1}{2})_n}{(2\alpha+2)_n}\frac{(2x)^n}{n!}\left(2A\frac{(2\alpha+2)}{(2\alpha+n+2)}+B-\sqrt{B^2+4AC}\right)\right] \quad (109)$$

Так как

$$2A>0, \qquad 2A\frac{(2\alpha+2)}{(2\alpha+n+2)}>0, \quad \sqrt{B^2+4AC}>B, \quad (110)$$

то при $|\alpha|<\frac{1}{2}$ учитывая, что $(\alpha-\frac{1}{2})_n<0,\ n\geq 1$, для U получаем оценку

$$U \geq \left(2A+B-\sqrt{B^2+4AC}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(\alpha+\frac{1}{2})_n(\alpha-\frac{1}{2})_n}{(2\alpha+2)_n}\frac{(2x)^n}{n!}\right]\right) =$$
$$\left(2A+B-\sqrt{B^2+4AC}\right)\widetilde{F}(2\alpha+2). \quad (111)$$

Так как при условиях (50) $\widetilde{F}(2\alpha+2)>0$, то для доказательства (108) достаточно проверить, что

$$A+B>C. \quad (112)$$

Так как

$$A+B-C = \frac{(\alpha+\frac{1}{2})}{(\alpha+\frac{5}{2})}(6(\alpha+1)+2x(\alpha^2-4\alpha-29/4))$$

то при $0<x^*_\alpha<\frac{3}{5}$, где

$$x^*_\alpha = \frac{6(\alpha+1)}{\frac{29}{4}+4\alpha-\alpha^2}$$

и $\alpha\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (112) выполнено (заметим, что при $\alpha\geq\frac{1}{2}$ $\quad x^*_\alpha\geq 1$ и мы показали, что

$$Q^G_M(x)>0, \quad \text{if} \quad |\alpha|<\frac{1}{2},\ 0<x<x^*_\alpha. \quad (113)$$

4 Вычисление параметра Манделя для q-осциллятора

4.1 q-осциллятор Арика-Куна

Для q-осциллятора Арика-Куна [19, 20, 21] операторы рождения и уничтожения которого удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$a^\dagger a - q a a^\dagger = 1, \tag{114}$$

имеем

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} = e_q\left((1-q)x\right), \qquad [n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{115}$$

Параметр Манделя имеет вид

$$Q_M(x) = x\left(\frac{\mathcal{N}''}{\mathcal{N}'} - \frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}}\right) = \frac{x}{\mathcal{N}\mathcal{N}'}\left(\mathcal{N}''\mathcal{N} - (\mathcal{N}')^2\right) = \\ \frac{x}{\mathcal{N}\mathcal{N}'}\sum_{n,k=0}^{\infty} x^{n+k-2}\frac{k(k-n-1)}{[n]_q!\,[k]_q!} = \frac{x}{\mathcal{N}\mathcal{N}'}\sum_{t=0}^{\infty} x^t \alpha_t, \tag{116}$$

где мы ввели при пересуммировании новый индекс $t = n + k - 2$, обозначили

$$\alpha_t = \sum_{n=0}^{t+1} \frac{(t-n+2)(t-2n+1)}{[n]_q!\,[t-n+2]_q!}, \tag{117}$$

и предпологаем, что при $t = 2s+1$ слагаемые с номером $n = \frac{1}{2}(t+1)$ в (116) равны нулю, так как $t + 1 - 2\frac{t+1}{2} = 0$.

Покажем, что $\alpha_t > 0$. При $n \leq \frac{1}{2}(t+1)$ сумма слагаемых, равноотстоящих от начала и конца суммы (117) положительна

$$\frac{(t-n+2)(t-2n+1)}{[n]_q!\,[t-n+2]_q!} + \frac{(n+1)(2n-t-1)}{[n+1]_q!\,[t-n+1]_q!} = \\ = \frac{(t-2n+1)}{[n]_q!\,[t-n+1]_q!}\left(\frac{t-n+2}{[t-n+2]_q} - \frac{n+1}{[n+1]_q}\right) > 0. \tag{118}$$

Действительно при $0 < q < 1$ для $m > k$

$$\left(\frac{m}{[m]_q} - \frac{k}{[k]_q}\right) > 0. \tag{119}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости последнего неравенства достаточно проверить

$$\left(\frac{m+1}{[m+1]_q} - \frac{m}{[m]_q}\right) > 0, \tag{120}$$

что, в свою очередь, следует из

$$\frac{1}{[m+1]_q\,[m]_q}\left((m+1)(1+q+\ldots+q^{m+1})-m(1+q+\ldots+q^m)\right)=$$
$$==\frac{(1-q^m)+(q-q^m)+\ldots+(q^{m-1}-q^m)}{[m+1]_q\,[m]_q}>0, \qquad (121)$$

(где учтено, что $0<q<1$ так как при $q>1$ левая часть неравенства (121) отрицательна).

4.2 q-осциллятор, связанный с дискретными q-полиномами Эрмита 2-го рода

$$\mathcal{N}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q,q)_n}\left(\frac{1-q}{q}\right)^n x^n \qquad (122)$$

Обознаим $\beta_n=\left(\frac{1-q}{q}\right)^n$ и напомним, что

$$(q,q)_n=\prod_{s=0}^{n-1}\left(1-q^{s+1}\right)(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$$

Как и выше знак параметра Манделя определяется знаком выражения

$$\left(\frac{\mathcal{N}''}{\mathcal{N}'}-\frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}}\right)=\sum_{n,k=0}^{\infty}x^{(n+k-2)}\beta_n\beta_k k(k-n-1)=\sum_{t=0}^{\infty}\gamma_t x^t, \qquad (123)$$

где мы ввели при пересуммировании новый индекс $t=n+k-2$ и обозначили

$$\gamma_t=\sum_{n=0}^{t+1}\beta_n\beta_{t-n+2}(t-n+2)(t-2n+1) \qquad (124)$$

и предпологаем, что при $t=2s+1$ слагаемые с номером $n=\frac{1}{2}(t+1)$ в (123) равны нулю, так как $t+1-2\frac{t+1}{2}=0$. При $n\le\frac{1}{2}(t+1)$ сумма слагаемых, равноотстоящих от начала и конца суммы (124) имеет вид

$$\beta_n\beta_{t-n+2}(t-n+2)(t-2n+1)+\beta_{t-n+1}\beta_{n+1}(n+1)(2n-t-1)=$$
$$(t-2n+1)\beta_n\beta_{t-n+1}\frac{1-q}{q}\left(\frac{q^{2(t-n+1)+1}}{1-q^{t-n+2}}(t-n+2)-\frac{q^{2n+1}}{1-q^{n+1}}(n+1)\right)=$$
$$\beta_n\beta_{t-n+1}\frac{(t-2n+1)}{q\,[t+2-n]_q\,[n+1]_q}\left[(t-n+2)(1+q+\ldots+q^n)q^{2(t-n+1)+1}-\right.$$
$$\left.-(n+1)(1+q+\ldots+q^{t-n+1})q^{2n+1}\right]. \qquad (125)$$

Так как $n \leq \frac{1}{2}(t+1)$ то при $m > k$ выражение в квадратных скобках может быть записано в виде

$$\Delta_{m,k} = (m+1)(1+q+\ldots+q^k)q^{2m+1} - (k+1)(1+q+\ldots+q^m)q^{2k+1}, \qquad (126)$$

и достаточно исследовать знак этой разности при $m = k+1$. В этом случае имеем

$$\Delta_{k+1,k} = (k+2)(1+q+\ldots+q^k)q^{2k+3} - (k+1)(1+q+\ldots+q^{k+1})q^{2k+1} =$$
$$= -q^{2k+1}(1-q)\left[(k+2)q^{k+1} + (k+3)q^k + \ldots + (2k+2)q^2 + (k+1)q + (k+1)\right]. \quad (127)$$

Очевидно, что знак этого выражения (а значит и знак параметра Манделя $Q_M(x)$) отрицателен при $0 < q < 1$ и положителен при $q > 1$.

5 Вычисление параметра Манделя для осциллятора Мейкснера

Для осциллятора Мейкснера имеем

$$N(x) = \frac{\Gamma(\beta)\, I_{\beta-1}(2\varepsilon\sqrt{x})}{(\varepsilon\sqrt{x})^{(\beta-1)}}, \quad \varepsilon = \frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}} > 0, \qquad x = |z|^2\,, \qquad (128)$$

или используя равенство (11) из [?]

$$Q_M(x) = x\left(\frac{N''(x)}{N'(x)} - \frac{N'(x)}{N(x)}\right) \qquad (129)$$

получаем

$$Q_M(x) = \varepsilon\sqrt{x}\left(\frac{I_{\beta+1}(2\varepsilon\sqrt{x})}{I_\beta(2\varepsilon\sqrt{x})} - \frac{I_\beta(2\varepsilon\sqrt{x})}{I_{\beta-1}(2\varepsilon\sqrt{x})}\right). \qquad (130)$$

Поскольку все функции Бесселя положительны при $x > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$, знак $Q_M(x)$ совпадает со знаком величины

$$A = I_{\beta-1}(2\varepsilon\sqrt{x})I_{\beta+1}(2\varepsilon\sqrt{x}) - I^2_{\beta-1}(2\varepsilon\sqrt{x})\,. \qquad (131)$$

Учитывая явный вид модифицированной функции Бесселя

$$I_\alpha(2\sqrt{z}) := z^{\frac{1}{2}\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}, \qquad (132)$$

получаем

$$A = z^\beta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m z^n}{m!n!\Gamma(m+1+\beta)\Gamma(n+\beta)}\left(\frac{1}{m+\beta+1} - \frac{1}{n+\beta}\right) < 0\,, \qquad (133)$$

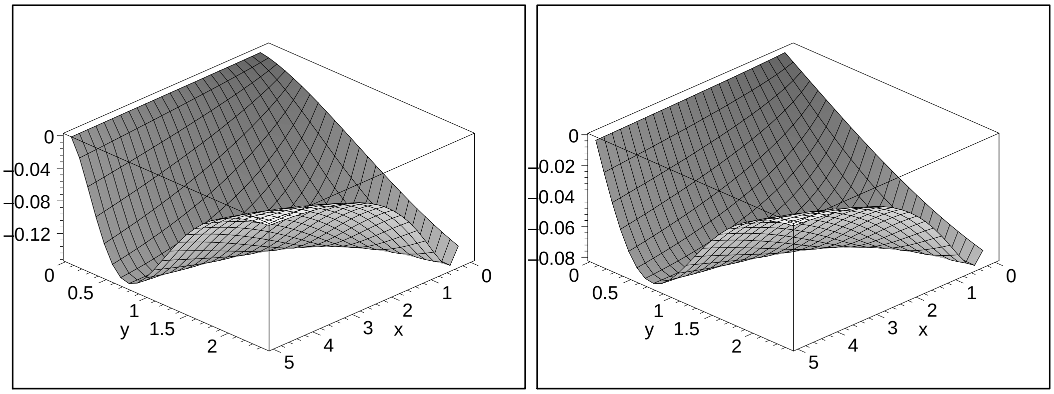

Рис. 1: График Q_M при $\beta = 2$ (слева) и при $\beta = 3$ (справа) для $x \in [0;5]$, $\varepsilon = y \in [0.02; 2.45]$

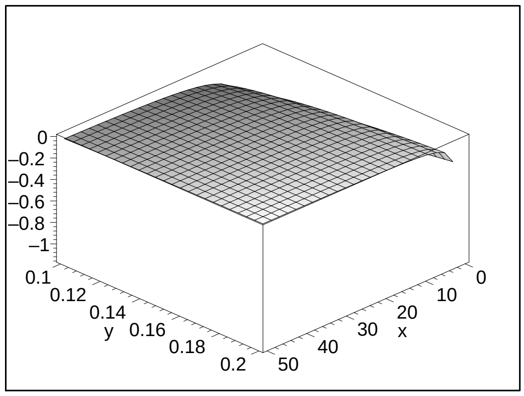

Рис. 2: График Q_M при $\beta = 10$, для $x \in [0;50]$, $\varepsilon = y \in [0.1; 0.2]$

где введено обозначение $z = \varepsilon^2 x$. Итак $Q_M(x) < 0$, что означает что когерентные состояния типа Барута - Жирарделло для осциллятора Мейснера имеют суб-пуассоновский характер.

Заметим, что при $\alpha = \beta - 1$ и $\gamma = 2 - \sqrt{3}$ свойства этих когерентных состояний согласуются со свойствами когерентных состояний, связанных с многочленами Лагерра L_n^{α}.

Несложно проверить, что ряд в (133) абсолютно сходится.

Введя обозначение $|m+1-n|=t$, мы можем представить выражение для A в виде

$$A = z^\beta \sum_{t=0}^{\infty}(-t)\left(\frac{z^m z^{m+1-t}}{m!(m+1-t)!\Gamma(m+2+\beta)\Gamma(m+2+\beta-t)}\right.$$
$$\left. - \frac{z^m z^{m+1-t}}{m!(m+1-t)!\Gamma(m+2+\beta)\Gamma(m+2+\beta-t)}\right)$$
$$- z^\beta \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)z^m}{\beta m!(m+1+\beta)\Gamma(\beta)\Gamma(m+1+\beta)} = -\frac{z^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)z^m}{m!\Gamma(m+2+\beta)} =$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\left(z^{\frac{1}{2}(\beta-1)}I_{\beta+1}(2\sqrt{z}) + z^{\beta+1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(m+2+\beta)}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\left(z^{\frac{1}{2}(\beta-1)}I_{\beta+1}(2\sqrt{z}) + z^{\beta+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(k+1+(\beta+2))}\right).$$

Таким образом имеем

$$A = -\frac{(\varepsilon\sqrt{x})^{\frac{1}{2}(\beta-1)}}{\Gamma(\beta+1)}\left(I_{\beta+1}(2\varepsilon\sqrt{x}) + \varepsilon\sqrt{x}I_{\beta+2}(2\varepsilon\sqrt{x})\right), \qquad \varepsilon = \frac{1-\gamma}{\sqrt{2\gamma}}. \tag{134}$$

и

$$Q_M(x) = -\frac{(\varepsilon\sqrt{x})^{(\beta+1)/2}}{\Gamma(\beta+1)}\,\frac{I_{\beta+1}(2\varepsilon\sqrt{x}) + \varepsilon\sqrt{x}I_{\beta+2}(2\varepsilon\sqrt{x})}{I_\beta(2\varepsilon\sqrt{x})I_{\beta-1}(2\varepsilon\sqrt{x})}. \tag{135}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
\text{Для}\,\beta\to 0 \qquad & A = -(\varepsilon\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\left(I_1(\tfrac{2(1-\gamma)\sqrt{x}}{\sqrt{2\gamma}}) + \tfrac{(1-\gamma)\sqrt{x}}{\sqrt{2\gamma}}I_2(\tfrac{2(1-\gamma)\sqrt{x}}{\sqrt{2\gamma}})\right);\\
\text{Для}\,\beta=0,\ \gamma=1 \qquad & A = -(\varepsilon\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}I_1(0);\\
\text{Для}\,\beta>0,\ \gamma\to 1 \qquad & A\to 0;\\
\text{Для}\,\beta=1, \gamma=\varepsilon=\frac{1}{2} \qquad & A = -\left(I_2(\sqrt{x}) + I_3(\sqrt{x})\right).
\end{aligned}$$

На фиг.1 и фиг.2 приведена зависимость параметра Манделя Q_M от x и ε при разных значениях β ($\beta = 2, 3, 10$). Из этих графиков следует что $Q_M \to 0$, при $x\to\infty$, $\varepsilon\to\infty$, и что максимальное отклонение от пуассоновской статистики достигается на некоторой линии x, ε–плоскости.

Список литературы

[1] S.T.Ali, J.-P.Antoine, J.-P.Gazeau, U.A.Mueller, *Coherent states and their generalizations: A mathematical overview,* Rev. Math. Phys. **7**:7, 1013-1104 (1995);

[2] V.V.Dodonov, *"Nonclassical" states in quantum optics: a 'squeezed' review of the first 75 years*, J. Opt. B. **4**:1, R1-R33 (2002);

[3] V.V.Borzov, E.V.Damaskinsky, *Realization of the annihilation operator for an oscillator-like system by a differential operator and Hermite-Chihara polynomials*, Integral Transforms and Special Functions, **13**, no 6, 547-554 (2002), [math.QA/0101215];

[4] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Когерентные состояния для осциллятора Лежандра*, ЗНС ПОМИ, **285**, 39-52 (2002), [math.QA/0307187];

[5] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Когерентные состояния и полиномы Чебышева*, сб. трудов международной конференции *Математические идеи П.Л.Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания*, Обнинск, 14-18 мая 2002г. [quant-ph/0307133];

[6] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Когерентные состояния и ортогональные многочлены*, Труды конференции "День Дифракции 2002", СПб. 2002, [math.QA/0209181];

[7] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Когерентные состояния Барута - Жирарделло для осциллятора Гегенбауера*, ЗНС ПОМИ, **291**, 43-63 (2002);

[8] V.V.Borzov, E.V.Damaskinsky, *Generalized Coherent states: A Novel Approach*, ЗНС ПОМИ, **300**, 65-70 (2003);

[9] V.V.Borzov, E.V.Damaskinsky, *Generalized Coherent States for q-oscillator connected with q-Hermite Polynomials*, Day on Diffraction 2003, SPb 2003, [math.QA/0307356];

[10] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Обобщенные когерентные состояния для q-осциллятора, ассоциированного с дискретными q-полиномами Эрмита*, ЗНС ПОМИ, **308**, 48-66 (2004);

[11] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Осцилляторо-подобные системы, связанные с ортогональными многочленами, и их когерентные состояния*, стр.9-19 в сб. "*Гравитация, космология и элементарные частицы*" Санкт-Петербург, 2004;

[12] В.В.Борзов, Е.В.Дамаскинский, *Полиномы Шарлье и осциллятор Шарлье как дискретная реализация гармонического осциллятора*, Проблемы Математического Анализа **30**, 3-15 (2005);

[13] V.V.Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras*, Integral Transf. and Special Funct., **12**, no 2, 115–138 (2001), [`math.CA/0002226`];

[14] A.O.Barut, L.Girardello, *New "Coherent States" Associated with Non-Compact Groups*, Commun. Math. Phys. **21**, no.1, 41-55 (1972);

[15] J.R.Klauder, K.A.Penson, J.-M.Sixdeniers, *Constructing coherent states through solutions of Stieltjes and Hausdorff moment problems*, Phys. Rev. A. **64**, no.1, 013817 (2001);;

[16] J-P.Gazeau, J.R.Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum*, J. Phys. A., **32**, no.1, 123-132 (1999);

[17] Н.И.Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, ФМ, Москва, 1961.

[18] A.Erdélyi, W.Magnus, F.Oberhetinger, F.Tricomi, (H.Bateman Manuscript Project), Ed. A.Erdélyi, *Higher transcendental functions*, Vol 1-3, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953-1955;

[19] M.Arik, D.D.Coon, *Hilbert space of analytic functions and generalized coherent states*, J. Math. Phys. **17**, no. 4, 524–527 (1976)

[20] L.C.Biedenharn, *The quantum group $su_q(2)$ and q-analog of the boson operators*, *J. Phys. A.* **22**, no.no. 18, L 873-878 (1989);;

[21] A.J.Macfarlane, *On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group* $su_q(2)$, J. Phys. A., **22**, no 21 (1989) 4581-4586;